Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 189 – Ottobre 2014 – Anno Sedicesimo

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell’altro millennio da
Rudy d’Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM189 diffonderà 3’156 copie e il 12/10/2014 per Google eravamo in 11’600 pagine.

Tutto quanto pubblicato dalla rivista è soggetto al diritto d’autore e in base a tale diritto *concediamo il permesso di libera pubblicazione e ridistribuzione* alle condizioni indicate alla pagina `diraut.html` del sito. In particolare, tutto quanto pubblicato sulla rivista è scritto compiendo ogni ragionevole sforzo per dare le informazioni corrette; tuttavia queste informazioni non vengono fornite con alcuna garanzia legale e quindi la loro ripubblicazione da parte vostra è sotto la vostra responsabilità. La pubblicazione delle informazioni da parte vostra costituisce accettazione di questa condizione.

Per la *Missione 42* alla ISS (alla quale partecipa anche Samantha Cristoforetti) la NASA ha preparato un poster particolare. Il nostro massimo esperto in bufale ci assicura essere veramente la versione ufficiale (http://attivissimo.blogspot.it/2014/09/si-questo-e-il-poster-ufficiale-della.html) e ci garantisce che i costumi non sono fatti via Photoshop (…e anche il fucilone è vero). Al momento, il gioco più diffuso in rete è trovare tutti i riferimenti. Chi verifica se parte di giovedì? Io non li ho mai capiti, i giovedì.

1. La matematica svelata

"Non c'è una come lei in Londra, e io sarei molto più felice d'essere aggregato alla sua Accademia di Bologna che a quella degli inglesi, benché questa abbia prodotto un Newton"

(Voltaire, 23 novembre 1744)

Potremmo parlare – ne fossimo davvero capaci – di *Sistemi Dinamici*. Il nome è abbastanza chiaro di per sé, a ben vedere: la parola "sistema" implica un gruppo più o meno complesso di elementi studiati nel loro insieme, e il potente aggettivo "dinamico" implica l'esistenza di una forza, quindi, per dirla con Newton, di un'accelerazione, che altro non è che una variazione di velocità, e a maggior ragione anche una variazione di movimento.

D'altro canto, per quanto il nome possa essere eloquente, si ritrova ad essere anche non troppo indicativo, non sufficientemente restrittivo: un "sistema dinamico" può essere definito in fisica come in chimica, o addirittura, con opportune ma del tutto legittime precisazioni di significato, anche in letteratura, in storia, perfino nell'arte. In matematica, quando ci si riferisce ai "sistemi dinamici", si intendono dei sistemi generali (la matematica adora la generalità), non necessariamente rigorosamente definiti, perfino un po' vaghi, che vengono studiati ponendo l'attenzione su quelle loro componenti che evolvono nel tempo.

A dire il vero, anche questa definizione è un po' troppo aperta (vi rientrerebbe comodamente tutta la Meccanica Analitica), e di fatto ciò che meglio caratterizza i Sistemi Dinamici così come li intende un moderno matematico è che l'attenzione viene posta non tanto sui singoli moti all'interno del sistema, quanto sul comportamento dinamico asintotico, considerato su tempi lunghi. Insomma, più che chiedersi "come si muove", ci si chiede "come finirà tutto questo movimento?". E siccome, in natura, la maggior parte dei movimenti dei sistemi complessi finisce a catafascio, è facile intuire che la Teoria dei Sistemi Dinamici è parente stretta della Teoria del Caos.


1 *Artur Avila*

Ne potremmo parlare, dicevamo, se solo ne fossimo in grado; ma non lo siamo. Potremmo chiedere aiuto al giovanotto qua a fianco, che invece nei sistemi dinamici si trova a suo agio: manipola con tracotante sicurezza quelli unidimensionali, li mette alle strette con gli operatori di Schrödinger, introduce delle geniali normalizzazioni con il flusso di Teichmüller. Finisce insomma che, di fatto, ne rivoluziona la teoria, e già che c'è chiarisce anche la geometria frattale degli insiemi di Julia; mette sotto una nuova luce analitica l'esponente di Lyapunov, e per rilassarsi gioca coi biliardi (beh, quasi… più che giocarci, li analizza, e dimostra delle congetture rimaste irrisolte da tempo). Ma è brasiliano, lo si capisce subito dalla foto: pochi altri popoli sono così a loro agio a piedi scalzi, soprattutto quando i suddetti piedi sono appoggiati sopra una cattedra accademica. Ed è probabile che preferisca di gran lunga l'incombente primavera di Rio e di SãoPaulo, piuttosto che dare retta a noi.

Forse è meglio cercare un altro argomento.

Potremmo allora parlare – ne fossimo davvero capaci – della *Geometria dei Numeri*. Diamine, sembra qualcosa di molto più intrigante e piacevole, no? Basta andare al bowling, e stupire gli amici facendo loro notare che 10 è un numero triangolare, come ben mostrano i birilli in attesa della boccia. Si potrebbe accennare qualcosa sugli stranoti numeri quadrati, e poi lanciarsi sui poligonali di ordine superiore. Certo, anche in questo caso, il rischio è evidente: si comincia con i birilli del bowling, e in men che non si dica ci si ritrova a parlare della legge di Gauss per la composizione delle forme quadratiche binarie. E questo è niente, visto che in breve ci si ritrova a maneggiare il gruppo SL(2,Z)3, che è pieno di tensori e di rappresentazioni integrali standard.

2 *Manjul Bhargava*[1]

Sì, certo, anche in questo caso potremmo chiedere a qualcuno di darci una mano, ma guardate com'è è preso dal suo gioco di costruzioni: sicuro come le tasse che sta progettando di ricostruire coi lego anche il Taj Mahal, visto che, nonostante sia nato ad Hamilton, in Canada, è certamente ancora legato alle sue radici indiane. E poi, lo abbiamo già detto: è uno che si mette a cercare punti irrazionali nelle curve iperellittiche, gioca con le rappresentazioni di anelli polinomiali di invarianti… vi sembra davvero il caso di invitarlo a giocare a bowling, solo per il fatto che i dieci birilli in fondo alla pista sono disposti in forma di triangolo?

Forse è meglio provare a cercare qualcos'altro.

Tanto, noi non ci scoraggiamo così facilmente. La matematica è vasta come il cielo e profonda come il mare, lo ripetiamo sempre ai bambini: e poi aspettiamo con pazienza che siano loro a rimproverarci per aver usato dei termini così riduttivi, per l'incommensurabile estensione della regina delle scienze. Quindi, che ci vorrà mai? Tanto per dire, cosa ci impedisce di parlare della *Teoria delle Equazioni Differenziali Parziali Stocastiche*?

Sì, certo, ci sarebbe sempre il solito impedimento, la nota cantilena: "*potremmo parlarne… se solo ne fossimo capaci*". E stavolta l'obiezione è forte fin dal principio: non c'è neppure la scusa dei birilli da bowling, perché il distico "equazioni differenziali" è già abbastanza terrorizzante di per sé. L'aggiunta di un paio di aggettivi non tranquillizza affatto, anzi. Anche se "parziale" è attributo generalmente gentile, che sembra concedere un po' di respiro ("non fare tutto subito, ma un pezzetto alla volta…"), quando viene associato alle equazioni differenziali non fa altro che rendere tutto più complicato, se non altro per la comparsa di quelle strane delta oblunghe e mal disegnate al posto delle più familiari "d". Aggiungere poi la parola "stocastico" è un vero atto di crudeltà, è evidente. Però noi siamo pieni di risorse, e anche in questo caso sappiamo a chi rivolgerci: altro che Canada, India o Brasile, questo è praticamente un vicino di casa, giusto dietro Tarvisio, in Austria. Ci darà una mano di sicuro.

[1] Il primo che si azzarda a dire che sembra la versione indiana di PuntoMauPunto finisce subito dietro la lavagna.


3 *Martin Hairer*

Che sia il tipo giusto lo si capisce facilmente: era dai tempi di Itô, e quindi dal 1940, che il problema del "rumore" nelle equazioni differenziali non registrava progressi del genere. L'austriaco si è messo ad usare il calcolo di Malliavin per esplorare l'ergodicità della terribilissima equazione stocastica bidimensionale di Navier-Stokes, ha fatto progressi rispetto all'approccio di Lyons sulle stocastiche ordinarie, fino al punto di costruire una vera e propria teoria delle SPDEs, appunto le già nominate Equazioni Differenziali Parziali Stocastiche. Che tutto questo implichi la possibilità di procedere con espansioni analoghe alle serie di Taylor, dando così significato a un gran bel numero di equazioni che i fisici si ritrovavano fra le mani senza sapere come trattarle, è cosa così evidente a tutti che quasi ci vergogniamo a menzionarla. Ma il problema di fondo permane… guardatelo: vi pare il tipo pronto a dare una mano ad una pur Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa? Se ne sta lì, fiero di impugnare un calice che di sicuro contiene un Barbaresco dell'ottantacinque, con tutte le intenzioni di godersi cena e serata. Siamo da capo.

Ma non demordiamo. Continuiamo indefessi a cercare di parlare di matematica seria e difficile, per una volta. E volgiamo allora lo sguardo verso un rifugio sicuro e ospitale: le *Superfici di Riemann*. Siamo persino andati a trovarlo sul Lago Maggiore, il grande Bernhard[2]; e dove aleggia il suo nome, non temiamo alcun male.

Certo, siamo i primi a sostenere che ammirare e amare un personaggio, una disciplina, è condizione forse necessaria per eccellere nella disciplina medesima, ma certo non è anche ragione sufficiente. Fosse così, saremmo tutti già fidanzati con le attrici di Hollywood, campioni del mondo di calcio o olimpionici dei tremila siepi. Possiamo adorare la figura e l'opera di Riemann, ma da qui a padroneggiarla…

Che ne dite se facciamo un alto a Stanford, per cercare aiuto? Voci di corridoi assicurano che lì ci sia un matematico che ha fatto passi da gigante nello studio delle superfici e negli spazi di Riemann, integrando allo scopo metodi di natura diversa, quali la geometria algebrica, la topologia e perfino la teoria delle probabilità. E dire che è eclettico è dir poco: trova formule asintotiche, stabilisce una statistica per le geodetiche chiuse, e quando meno te lo aspetti, raccoglie tutta questa messe di risultati di geometria iperbolica per provare la Congettura di Witten.

A tempo perso, poi, mette in connessione aspetti olomorfici e simplettici degli spazi modulari, dimostra l'ergodicità del flusso dei terremoti iperbolici di Thurston, distingue e mette in evidenza le differenze tra la geodesica reale e quella complessa, trova risonanze inaspettate nella teoria della rigidità degli spazi omogenei, e se ne avesse il tempo, di sicuro ci risparmierebbe un sacco di tempo anche solo per la ricerca nel dizionario del significato di gran parte delle parole che abbiamo appena scritto (soprattutto quei "terremoti" lì).

[2] Quasi esattamente dieci anni fa: lo raccontiamo in "Pellegrinaggio a Thule", RM068, settembre 2004.


4 *Maryam Mirzakhani, fierissima delle sue scarpette rosse*

Ma sappiamo già come andrà a finire. Il matematico di Stanford, dobbiamo riconoscerglielo, ha delle validissime giustificazioni nel respingere la nostra richiesta d'aiuto: è salito alla ribalta, sta sotto i riflettori dei media, probabilmente non ne può più di dovere rispondere a domande, richieste, petizioni. E questo non tanto per essersi dimostrato un magistrale e degnissimo erede di Riemann, ma perché è nato in Iran; e, soprattutto, perché è nato femmina.

Nascere femmina è una cosa che capita ad una buona metà degli esseri umani, e logica vorrebbe che – proprio grazie a questa rimarchevole percentuale del 50% – l'evento non dovrebbe essere rubricato sotto la casistica delle fluttuazioni statistiche; ma gli esseri umani sono animali strani, hanno passato gran parte della loro storia (e probabilmente anche della loro preistoria) a prevaricarsi l'uno con l'altro, a cercare strumenti sempre più efficienti per il reciproco massacro, e, con una unità di intenti meravigliosamente condivisa da tutte le comunità e da tutte le umane aggregazioni, a fare in modo che quelli tra loro che erano dotati di utero vivessero in condizioni di conclamata inferiorità.

Il risultato finale è che anche in questo terzo millennio ci si stupisce (legittimamente, in fondo) quando una persona uteromunita compie per la prima volta qualcosa che le persone uteroesenti hanno già più volte completato.

I quattro personaggi ai quali abbiamo invano chiesto di spiegarci un po' di matematica seria sono i vincitori delle ultime Medaglie Fields. Del massimo premio matematico abbiamo già parlato più volte[3], e ci limiteremo qui a ricordare che le Medaglie Fields vengono assegnate durante i grandi Congressi Internazionali dei Matematici [4], che questi si tengono ogni quattro anni, e che solitamente i premiati sono quattro. Per ribadire la misteriosa importanza della cifra "quattro", condizione cruciale per vincere il premio è quella di non avere più di quarant'anni.

In questo 2014 il congresso si è tenuto a Seul, e finalmente della sua esistenza si sono occupati anche quei mezzi di comunicazione generalisti che solitamente sono poco o punto interessati alla matematica. Naturalmente, giornali radio e tv non si sono avventurate a raccontare le motivazioni dei premi assegnati a Artur, Manjul, Martin e Maryam, e possiamo anche capirli, vista la complessità ed estrema specializzazione delle ricerche dei quattro vincitori; ma la gran parte di essi ha brutalmente omesso anche la semplice menzione d'esistenza in vita dei tre maschietti, tanto era ghiotta la notizia che Maryam fosse femmina.

È davvero complicato estrarre un giudizio che non sia del tutto banale, dalla prima Medaglia Fields vinta da una donna. Si può usare la notizia celebrandola come un evento, ma si finirebbe quasi per offendere la metà della popolazione del pianeta: un riconoscimento che premia l'eccezionalità intellettiva è vinto da intelletti, non da apparati genitali. Si può cogliere l'occasione per bacchettare la comunità dei matematici, che per

[3] … e abbiamo parlato anche del glorioso matematico eponimo del premio, John Charles Fields, in "Diventare padrone dell'universo", RM100, maggio 2007.

[4] ICM, International Congress of Mathematicians.

settant'anni ha premiato solo fenotipi dotati di cromosoma Y, ma questo implicherebbe una sorta di maliziosità nella comunità suddetta, di eliminazione volontaria delle femmine dal novero dei candidati al premio, e la cosa ci pare davvero poco probabile.

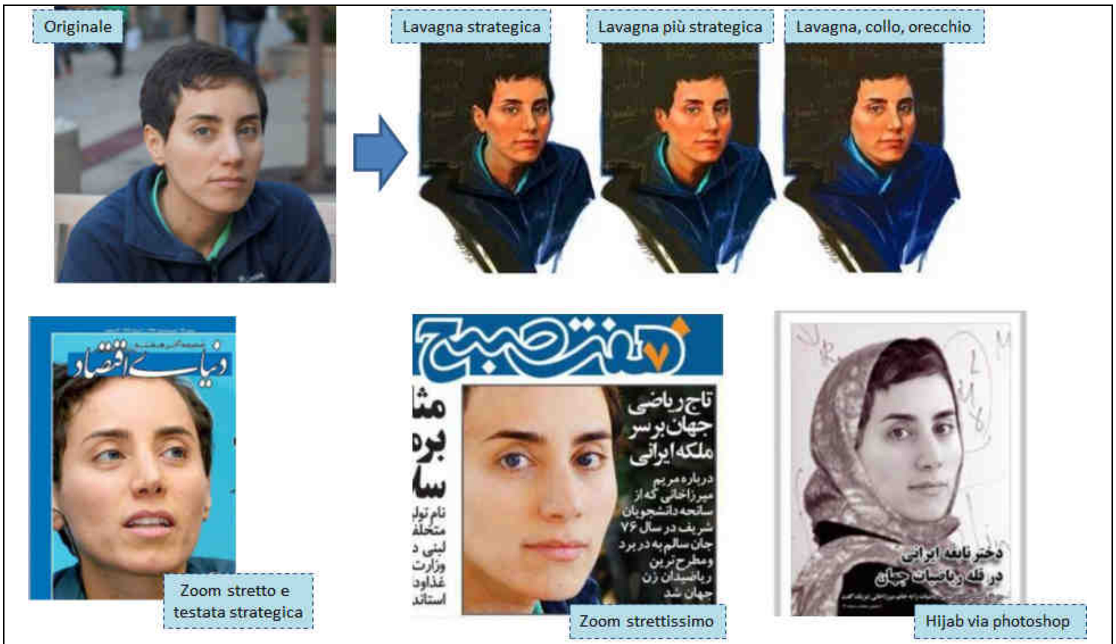
Restiamo dell'opinione, per altro già più volte espressa, che la ragione per cui esistono poche donne nella storia della matematica, e più in generale nella storia della scienza, è la stessa ragione per cui sono così rari nella storia i matrimoni tra maschi watussi e femmine eschimesi: l'estrema difficoltà nel frequentarsi. Le donne sono state per millenni accuratamente allontanate dai sistemi educativi, e la situazione è ancora oggi tutt'altro che sanata. Le nazioni più fortunate e sagge del mondo hanno da tempo messo il problema sul tavolo, e certamente si sono fatti passi importanti nella giusta direzione; ma il cammino è ancora da finire. Specialmente nelle parti meno fortunate del mondo: e il caso di Maryam Mirzakhani, professore di Stanford, nato a Teheran, premiato a Seul, è ancora illuminante, per molti aspetti.

Quando Maryam veniva fotografata in divisa da piccola crocerossina, il suo paese era meno sensibile all'aspetto esteriore delle proprie donne. La civiltà persiana è una delle più antiche del mondo intero, e molte etnie, nazionalità, usi e costumi si sono avvicendati sull'altipiano iraniano: fatto sta che l'opinione pubblica attualmente dominante prevede che le donne non possano mostrare in pubblico parti del loro corpo che pure sono considerate pacificamente esponibili in quasi tutto il resto del mondo. L'esempio più evidente sono i capelli: pur senza raggiungere gli estremismi di altre culture che prevedono per le femmine adulte un nascondimento integrale dei loro corpi, come accade ad esempio con il *burqa* afgano, l'attuale galateo iraniano richiede che le donne coprano i loro capelli con l'*hijab*, una sorta di foulard il cui ruolo essenziale è appunto quello di nascondere le chiome femminili.

La Medaglia Fields vinta per la prima volta da un'iraniana, vinta per la prima volta da una donna, ha messo evidentemente in subbuglio i mass-media di Teheran. Il premio è indubbiamente prestigioso, e dà lustro alla nazione; è pertanto giusto e piacevole celebrarlo nella maniera opportuna. Resta però la difficoltà di rendere i dovuti omaggi alla connazionale Mirzakhani, dacché questa, da anni residente negli USA, ha usi e costumi del tutto occidentali. Non è solita nascondere i suoi corti capelli castani, indossa camicie e pantaloni, insomma si veste e si comporta in modo del tutto consono agli usi e costumi dell'occidente. Infine, anche se la cosa con ogni probabilità non è affatto significativa dal punto di vista della diffusione della notizia in patria, la Mirzakhani è anche abbastanza carina da sfatare senza sforzo il luogo comune che le matematiche siano brutte.

I giornali iraniani hanno affrontato il problema in modi e maniere diverse, certamente in funzione del grado della loro aderenza alle direttive delle istituzioni politiche e religiose. Un quotidiano molto conservatore, il "*Kayhan*", ha brillantemente risolto l'ambascia ignorando del tutto la notizia; non si sa se ritiene poco significativa la matematica o le donne, o entrambe. Altri hanno usato artifici più sottili, e per fortuna meno drastici: ad esempio, il quotidiano filogovernativo "*Iran*" ha provveduto con Photoshop a sanare le carenze di Maryam, rivestendo una sua foto d'archivio con un allegro hijab denso di motivi floreali.

Altri hanno tagliato le foto fino a ridurle a primissimi piani del volto, e quindi celando i capelli; altri hanno avuto l'idea di partire da una foto impudica e disegnare Maryam di fronte ad una lavagna scura, in modo tale che i capelli risultino confusi con l'ardesia della lavagna: già che c'erano, altri hanno poi continuato cancellando l'orecchio e il collo, che nell'originale e nei primi bozzetti censori erano ancora troppo visibili.



5 *Matematica svelata*

Ogni cultura ha le sue regole, i suoi tabù. E ogni cultura fa fatica a comprendere le regole altrui, i tabù altrui. Probabilmente, nessuno è davvero libero, ed è per questo che è necessario esercitare al meglio possibile la tolleranza. Tra i giornalisti iraniani ci sarà stato chi avrà trovato eccessivo, forse addirittura ridicolo, tutto il lavorio necessario per mostrare la faccia della connazionale che ha inorgoglito la patria, altri avranno trovato scandalose le foto originali, così svelate, così "nude", agli occhi dei tradizionalisti.

Ma non spetta ad altre culture giudicare le culture altrui, proprio perché nessuno è davvero esente dalle regole sociali. Se l'Associazione dei Naturisti Italiani istituisse il Gran Premio delle Riviste di Matematica e decidesse di attribuirlo a RM, come ci comporteremmo? Ipotizziamo che il riconoscimento preveda che debba essere ritirato durante un grande ricevimento da tenersi in uno dei più grandi campi nudisti, e che la *mise* d'obbligo sia, appunto, quella normalmente ritenuta acconcia per quel luogo. I vostri redattori, tronfi e vanitosi come sono, con ogni probabilità accetterebbero il premio e sottostarebbero al *dress-code*. Almeno alcuni di loro, forse, acconsentirebbero perfino a lasciarsi fotografare mentre il gioviale presidente consegna l'ambito premio alla Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa. E poi certamente ne parleremmo su queste pagine, ma finiremmo anche noi per pubblicare le foto opportunamente censurate e tagliate (e non solo per salvaguardare il senso estetico del lettore medio di RM).

Quel che è importante, cruciale, e soprattutto devastante è che quasi inevitabilmente queste forzature nell'abbigliamento e nel comportamento sociale, sono associate a ben più gravi limitazioni di libertà e di possibilità. Se una bambina è costretta a portare il velo e un bambino è libero di non farlo, certamente la bambina non ha le stesse possibilità di studiare, di formarsi, di far maturare tutte le sue potenzialità, al pari del bambino. Non è il velo di stoffa, il pericolo più grande: è il velo censorio che tende a posarsi sulle possibilità creative di metà della popolazione.

Del resto, il cammino è ancora lungo anche in Occidente; è lungo anche in Italia, che dell'Occidente fa parte. Non si può dire che la nostra nazione sia particolarmente avanti, nelle politiche paritarie: non è difficile enumerare stati in cui la parità di diritti è tutelata meglio che da noi. E, a guardare indietro, c'è da rammaricarsene, perché c'è stato un periodo in cui effettivamente l'Italia è stata all'avanguardia, in questo campo. Prima fra tutte le nazioni del mondo; e questo quando non era ancora altro che "un'espressione geografica", per dirla con il principe von Metternich.

La prima donna del mondo a conseguire una laurea è stata Elena Lucrezia Cornaro Piscopia, veneziana. Nel 1678, seppur dopo molte traversie e difficoltà[5], l'Università di Padova le concesse la laurea in filosofia.

Passerà più di mezzo secolo prima che un'altra fanciulla ottenga l'onore di fregiarsi del titolo di dottore. E sarà italiana anche questa: di Bologna, stavolta. E la laurea sarà solo un primo passo, perché, prima in Europa, comincerà una vera e propria carriera accademica, e soprattutto sarà la prima donna al mondo ad assurgere ad una cattedra universitaria.


6 *Elena Lucrezia Cornaro*

Laura Bassi, o per essere più precisi Laura Maria Catarina Bassi in Verratti, nasce a Bologna il 29[6] Ottobre 1711, quando Bologna appartiene allo Stato Pontificio. Ha la fortuna di nascere in una famiglia benestante, e di avere un padre, Giuseppe, che tiene abbastanza all'educazione della sua unica figliola da procurarle un precettore privato, Gaetano Tacconi, il medico di famiglia. Erano tempi, quelli, in cui non c'era alcun altro tipo di educazione disponibile, se si aveva la ventura di essere una bambina. Così, Tacconi segue ed istruisce Laura dai tredici ai vent'anni di età, e rimane davvero impressionato dalle sorprendenti capacità intellettive della ragazza: le materie di studio spaziavano dalle lingue e letterature (italiano, francese, latino e greco) alle scienze più rigorose (algebra e geometria, ma anche idraulica, chimica, meccanica, logica), senza naturalmente trascurare la storia naturale, l'anatomia, la metafisica e, ovviamente, filosofia.


7 *Laura Bassi*

Laura eccelle, e il suo tutore comincia a farle frequentare le molte "accademie" di cui la dotta Bologna è ricca: e sono molti gli intellettuali che cominciano ad apprezzarla. Uno dei più entusiasti ammiratori del cervello della Bassi è un dotto bolognese che si chiama Prospero Lambertini; pur essendo bolognese di nascita ha studiato e si è laureato a Roma, in teologia e giurisprudenza. La laurea in teologia non la prende per caso: nel 1728, quando Laura è ancora una ragazzuola di diciassette anni, Lambertini assurge alla porpora cardinalizia, e tre anni dopo diventa arcivescovo di Bologna.

[5] Wikipedia ci racconta che il cardinal Gregorio Barbarigo negò la prima richiesta di laurea di Elena sbraitando che "era un o sproposito dottorar una donna", perché una simile azione avrebbe reso gli studiosi padovani "ridicoli a tutto il mondo". Regole, appunto: a volte vale davvero la pena di infrangerle.

[6] Altre fonti indicano come giorno di nascita il 31.

Nonostante gli immaginabili impegni che la carica arcivescovile comporta, Prospero non si dimentica di Laura, e anzi, per mostrare agli increduli quale acutissima mente possa abitare una bella testa femminile, organizza un dibattito tra dottissimi professori e Laura Bassi nel 1732.

Era la mattina del 17 Aprile, ed è piacevole immaginarla come una fresca giornata primaverile: la protetta del cardinal Lambertini non ha ancora compiuto ventun anni, eppure si sta dirigendo verso il gran Palazzo Pubblico della città, dove avverrà qualcosa di davvero inaudito: la graziosa signorina sta per affrontare una severa giuria di dottori, i quali presumibilmente non sono particolarmente ben disposti nei suoi confronti. Forse per rispetto al suo sesso, o forse per condiscendenza verso ala sua giovane età, a Laura non viene chiesto di difendere una o due tesi filosofiche: la fanciullina si troverà a difenderne la bellezza di quarantanove.

Non deve essersela cavata male, visto che neanche un mese dopo, il 12 maggio, riceve dall'Università di Bologna il dottorato in filosofia e un incarico di lettore – solo onorario, a dire il vero – nella stessa materia presso l'ateneo bolognese[7]. La carriera di Laura Bassi, prima vera accademica del mondo, comincia così, e non si può dire che sia priva di risonanza: vengono pubblicate tre raccolte di sue poesie (in tre lingue diverse: italiano, latino e bolognese), coniate medaglie celebrative, e persino negli Atti ufficiali della lontana Università di Lipsia si trova un ampio resoconto dell'evento straordinario. All'università si dedica ai corsi di matematica avanzata tenuti da Gabriele Manfredi, che le illustra le scoperte di Newton; frequenta quelli di scienze di Giovanni Veratti, anch'egli fervente ammiratore del sommo inglese, e quest'ultimi devono aver avuto un fascino del tutto particolare, visto che nel 1738 Laura sposa Giovanni e diventa così Laura Veratti.

Le comunità accademiche erano (e chissà, forse lo sono ancora) delle microsocietà dalle regole rigide e un po' chiuse, al punto che molti pensarono che il matrimonio tra due docenti non era cosa opportuna: c'era chi sosteneva che una donna sposata non poteva continuare a tener lezione, ma in fondo fu proprio l'eccezionalità dell'intera situazione a salvare la carriera della Bassi: il suo incarico di lettore era infatti ancora più nominale che reale, e Laura saliva in cattedra raramente, e solo in occasioni speciali, con corsi aperti al pubblico e ai quali era consentito assistere persino alle donne. Va riconosciuta al Senato Accademico bolognese quantomeno una certa coerenza e franchezza: la motivazione per la quale alla lettrice Laura Bassi era ancora vietato tenere lezioni pubbliche quotidiane era rubricata con un eloquente "*causa sexus*".

Fatto sta che Laura Bassi mostra d'essere in anticipo sui tempi anche per quello che al giorno d'oggi è uno degli sport più praticato dalle donne occidentali: tenere insieme la carriera e tirare su una banda di frugoletti. Giovanni e Laura mettono al mondo la bellezza di otto figli, anche se solo cinque supereranno l'infanzia: Caterina, Giovanni, Giacomo, Paolo e Ciro.

Nel frattempo, il maggior tifoso di Laura, Prospero Lambertini, provvede a far carriera nel suo proprio campo, e ci riesce assai bene, visto che nel 1740 sale al soglio pontifico con il nome di Benedetto XIV. Nel 1745 il papa bolognese istituisce il corpo degli Accademici Benedettini, e tra i primi eletti nella nuova istituzione troviamo (sia pure come "soprannumeraria": era pur sempre una femmina, e così si ritrovò ad essere la venticinquesima dei 24 benedettini ufficiali) Laura Bassi Veratti. Il titolo comportava l'impegno a frequentare assiduamente le sedute accademiche, a presentare almeno una dissertazione all'anno, ma in compenso fruttava altre 100 lire di pensione annuali e – soprattutto – consentiva a Laura di potersi chiamare a pieno titolo "accademica".

Laura insegnava, finalmente. E insegnava soprattutto fisica, fisica newtoniana. Si sa che scrisse 28 memorie accademiche, anche se soltanto quattro sono giunte fino a noi. Riproduceva esperimenti, amava molto la fisica sperimentale: tra i suoi allievi c'era anche Lazzaro Spallanzani. Nel 1776, quando è ormai una signora di 67 anni alla quale ne

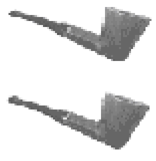
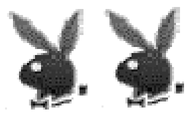
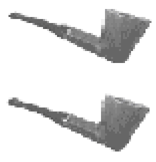
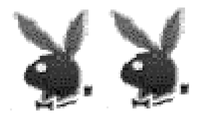
[7] Il titolo ufficiale era quello di "*Philosophia Universa*", e comunque comportava lo stipendio annuo di 500 lire bolognesi.

restano da vivere neppure un altro paio, l'Università di Bologna le conferisce finalmente, con piena ufficialità, la Cattedra di Fisica Sperimentale. Ma anche quest'ultimo onore non fu facile da ottenersi, e occorse un lungo dibattimento nel Senato Accademico prima di essere finalmente ratificato. Curiosamente, questo comportò anche che Giuseppe Veratti, suo marito e professore, diventasse così di fatto un suo assistente.

8 *Prima lezione pubblica di Laura Bassi*

Tre secoli dopo, le donne laureate sono molte. Le cattedratiche sono abbastanza numerose da non fare più notizia, le vincitrici di Medaglie Fields o Premi Nobel scientifici ancora così rare da suscitare vespai mediatici. La strada è lunga e lenta; l'importante, comunque, è continuare a procedere, evitando accuratamente di tornare indietro.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
La "STEPPA DEL CHINOTTO"!			
Grande successo di critica e di pubblico			

2.1 La "STEPPA DEL CHINOTTO"!

Rudy aveva un problema (del cavolo, as usual).

Come vi abbiamo narrato tempo fa. Il "Luogo da Cui", residenza dei suoi genitori, è stato venduto[8]. Da un punto di vista strettamente matematico, il luogo era perfetto per l'ambientazione di problemi che richiedessero ampi spazi aperti, mentre il "Luogo del Divano Quantistico[9]" andava bene per problemi che richiedessero numeri "piccoli"(sotto il migliaio) di partecipanti: Torino continua ad essere perfetta, con le sue vie, per i problemi sul piano cartesiano.

Nel bagagliaio del cervello di Rudy (sarebbe a dire, in *background*) continuava a girare la ricerca di un luogo assimilabile al LdC per ambientare i problemi: una volta tanto, è arrivata prima la soluzione della domanda, visto che a casa di Doc, dove tiriamo con l'arco, esistono ampi spazi (tant'è che oltre la linea di tiro è stato implementato un campo di atterraggio per ultraleggeri).

Il dubbio era: come chiamarlo?

Vi abbiamo detto altrove che si trova a dieci metri da casa di Doc e a quarantadue chilometri da casa di Rudy: quindi, anche se l'inizio della tenzone viene "bagnato" da una birra, visto che Rudy deve guidare sino a casa meglio chiudere con un analcolico. Rudy ha trovato un'edizione di chinotti – per così dire – "vietata ai minori": e siccome l'usuale altro arciere delle sfide è Fred (che a gennaio ha compiuto 18 anni), siamo tranquilli e non ebbri[10].

A questo punto, dalla narrazione e dal titolo dovreste avere tutti i dati necessari: quindi, se trovate "La Steppa dei Chinotti" nei prossimi problemi, sapete di cosa stiamo

[8] Sempre come vi abbiamo detto, ad apicoltori e con reciproca soddisfazione: vi ricordiamo che il nome completo è il "Luogo da Cui, in Ragionevoli Condizioni di Lucidità Metereologica e Alcolometrica, l'Intero Canavese è Visibile in Tutta la sua Beltà".

[9] Anche qui ve lo abbiamo detto, ma molto tempo fa: trattasi della casa "in montagna" della moglie di Rudy, prende il nome dal fatto che il divano-letto è entrato dalla finestra del primo piano, secondo noi *più piccola* del divano medesimo, sfruttando quindi chiaramente una qualche forma di *effetto tunnel quantistico*. Paesino di circa cinquecento abitanti, tre dei quali (in estate) rispondono se chiamati Rudy.

[10] Nel caso foste interessati: chinotto in bottiglia, venduto a pacchi da quattro, costa un po' caro ma vale ampiamente la spesa: sul *package* e sulle bottiglie, una pin-up anni '30 bruna (la bionda è sulla cedrata: la proveremo e vi diremo). Per evidenti motivi non diamo il *brand*, se non dietro espressa e privata richiesta.

parlando[11]: e adesso, in background nel cervello, c'è un'epica narrazione dei Cavalieri Kinotti che, eroicamente... No, questa la teniamo per un'altra volta.

Bene, finita la premessa, passiamo al problema.

Nella SdC, ci è avanzato un quadrante di cerchio da decorare con gli opportuni fiori. Doc (Oscuro Sire del Terreno, ancorché Miglior Arciere del Luogo) ha intenzione di coprire un arco (chiamiamolo PQ) del bordo del quadrante con un dato numero di begonie: non ha deciso dove sia di preciso PQ sull'arco, ma è sicuro sul numero di begonie e quindi sulla sua lunghezza.

Sempre nell'idea di migliorare (secondo lui: noi ci asteniamo) la decorazione, ha deciso di tracciare alcune righe:

1. Da P verso l'asse delle ascisse che limita il quadrante
2. Da P verso l'asse delle ordinate che delimita il quadrante
3. Da Q verso l'asse delle ascisse che delimita il quadrante
4. Da Q vero l'asse delle ordinate che delimita il quadrante.

A questo punto, a parte un rettangolo con un vertice nell'origine che non considereremo, dovreste avere un paio di rettangoli, con i vertici "in alto a destra" rispettivamente in P e Q. Al momento, Doc vorrebbe decorare questi due rettangoli con una piantagione di un qualchecosa, ed è pronto a seminarla: il problema è che i semi si comprano a "metroquadro da seminare", e data la variabilità di PQ come arco di cerchio (lunghezza data, ma posizione da definire), il Nostro è in ambasce.

Rudy, con il preciso intento di non aiutare e distrarre Doc, sta cercando di ottenere due rettangoli aurei... Ma questo non è il problema.

Date una mano a Doc? L'ultima sua frase è stata "Se non ce la faccio, pago tutto il chinotto dell'anno prossimo".

2.2 Grande successo di critica e di pubblico

Ci riferiamo al fatto che lo scrivente (Rudy speaking) e Doc sono riusciti a coinvolgere un mucchio di gente nella loro ormai biennale nuova passione (sarebbe, se non l'avete capito, il tiro con l'arco).

Sin quando si tira in due, niente di grave: si misura la distanza, si piazza un qualchecosa (lungo un paio di metri) perpendicolarmente alla linea di tiro misurata, e via andare: ma quando si comincia ad essere in tanti, e un po' di gente comincia a rompere che vuole una distanza diversa, questi chiacchierano e se ne fregano di cosa fanno gli altri e traversano senza guardare le linee altrui... Insomma, siamo molto contenti di avere da queste parti un procuratore che si dà un mucchio da fare sulla sicurezza sul lavoro, ma non vorremmo passasse dalle nostre parti mentre tiriamo.

Consci del problema, stiamo cercando di organizzare meglio le cose: per amor di generalizzazione, abbiamo affrontato la cosa in modo generale (tra le altre cose, non considerando le distanze).

L'idea è di definire nel prato (matematicamente definito come *enorme* e *connesso*, insomma, un grossogrossogrosso rettangolo) $2n$ punti, e di questi averne n come *piazzole di tiro* e gli altri n come *bersagli*. Dopo aver definito gli oggetti (un po' *a muzzo*, direbbe un nostro lettore), si tratta di definire le linee di tiro; come detto, non ci importa nulla delle distanze, ma soprattutto vorremmo evitare gli incroci tra le linee: secondo voi, la cosa è possibile?

Oh, forse vi manca un dato: il peggior arciere della banda è Rudy, che sovente manca la zona punti; comunque, riesce sempre a stare nel battifreccia, quindi nessuna freccia va mai oltre il bersaglio.

Tranquilli, stiamo chiudendo il poligono. Ma fateci avere la risposta per marzo 2015, che riapriamo...

[11] Anche se Rudy preferisce per il gruppo la dicitura "Arceri del χ'nVIII", per evidenti motivi. No, non l'abbiamo brevettata. E si legge "Kinvi" (difettivo: un kinvi, due kinvi. *In Memoriam* di Davide Mana).

3. Bungee Jumpers

In un cerchio dato, è iscritto il triangolo *ABC*. Da un punto *P* variabile sulla circonferenza, sono tracciate le perpendicolari *PM* e *PN* ai lati *AB* e *AC*.

Determinare la posizione di *P* tale che il segmento *MN* sia di lunghezza massima e darne la lunghezza.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Ottobre!

In ritardo, come al solito, ma meglio tardi che mai, come diciamo sempre.

Questo mese ho deciso di usare questo spazio per un paio di annunci tecnici per la pubblicazione delle soluzioni, non me ne vogliate. Purtroppo il nostro postino è oberato e non ha mai tempo di rispondervi in tempo utile, ed io ed il Capo – un po' per principio, un po' per pigrizia ed un po' perché eravamo abituati ad avere un postino – non rispondiamo mai se non nelle nostre rubriche. Così succede che riceviamo sempre più soluzioni in formato pdf, che sembra cosa logica, visto che pdf è il formato in cui ricevete la rivista, ma non è pratico per impaginarle.

Prima di tutto, spero che continuiate a scriverci e mandare soluzioni e commenti: leggiamo sempre tutto, anche se ci mettiamo un po' a rispondere, e pubblichiamo più che possiamo.

In secondo luogo, considerate che le soluzioni devono essere copiate ed incollate, e ogni formato editabile è preferibile: word e open office sono i più gettonati, ma anche un formato testo va bene. Normalmente riesco a copiare da pdf quando c'è più testo che altro, ma poi ogni formula va riscritta a mano, e mi ci vuole una vita, così quando sono in ritardo salto le soluzioni più difficili da copiare. Perdonatemi.

Bene, fine delle comunicazioni di servizio. Vediamo le soluzioni del mese.

4.1 [187]

No, ecco, queste sono ancora soluzioni del mese passato, ma mi avete capito…

4.1.1 Un gioco che non mi piace

Già il mese scorso avevamo visto la soluzione di ***Alberto R.*** a questo problema:

> *Il gioco richiede un mazzo di n carte con m simboli per carta, per cui due carte qualsiasi hanno sempre uno ed un solo simbolo in comune. Dato m, qual è il valore massimo di n? E dati m ed n, qual è la dimensione dell'alfabeto (numero di simboli) s? Qual è (m, n, s) ottimale, con il massimo numero di carte e il minimo numero di simboli?*

Quella che vi passo ora è di ***Gnugnu***, incredibilmente (o giustamente) senza parole:

$m = 8$, $n = s = m^2 - m + 1 = 57$

(0 1 2 3 4 5 6 7)

(0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0)	(0,0	1,1	2,2	3,3	4,4	5,5	6,6	1)
(1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	0)	(1,0	2,1	3,2	4,3	5,4	6,5	0,6	1)
(2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	0)	(2,0	3,1	4,2	5,3	6,4	0,5	1,6	1)
(3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	0)	(3,0	4,1	5,2	6,3	0,4	1,5	2,6	1)
(4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	0)	(4,0	5,1	6,2	0,3	1,4	2,5	3,6	1)
(5,0	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	0)	(5,0	6,1	0,2	1,3	2,4	3,5	4,6	1)
(6,0	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	0)	(6,0	0,1	1,2	2,3	3,4	4,5	5,6	1)

(0,0	2,1	4,2	6,3	1,4	3,5	5,6	2)	(0,0	3,1	6,2	2,3	5,4	1,5	4,6	3)
(1,0	3,1	5,2	0,3	2,4	4,5	6,6	2)	(1,0	4,1	0,2	3,3	6,4	2,5	5,6	3)
(2,0	4,1	6,2	1,3	3,4	5,5	0,6	2)	(2,0	5,1	1,2	4,3	0,4	3,5	6,6	3)
(3,0	5,1	0,2	2,3	4,4	6,5	1,6	2)	(3,0	6,1	2,2	5,3	1,4	4,5	0,6	3)
(4,0	6,1	1,2	3,3	5,4	0,5	2,6	2)	(4,0	0,1	3,2	6,3	2,4	5,5	1,6	3)
(5,0	0,1	2,2	4,3	6,4	1,5	3,6	2)	(5,0	1,1	4,2	0,3	3,4	6,5	2,6	3)
(6,0	1,1	3,2	5,3	0,4	2,5	4,6	2)	(6,0	2,1	5,2	1,3	4,4	0,5	3,6	3)
(0,0	4,1	1,2	5,3	2,4	6,5	3,6	4)	(0,0	5,1	3,2	1,3	6,4	4,5	2,6	5)
(1,0	5,1	2,2	6,3	3,4	0,5	4,6	4)	(1,0	6,1	4,2	2,3	0,4	5,5	3,6	5)
(2,0	6,1	3,2	0,3	4,4	1,5	5,6	4)	(2,0	0,1	5,2	3,3	1,4	6,5	4,6	5)
(3,0	0,1	4,2	1,3	5,4	2,5	6,6	4)	(3,0	1,1	6,2	4,3	2,4	0,5	5,6	5)
(4,0	1,1	5,2	2,3	6,4	3,5	0,6	4)	(4,0	2,1	0,2	5,3	3,4	1,5	6,6	5)
(5,0	2,1	6,2	3,3	0,4	4,5	1,6	4)	(5,0	3,1	1,2	6,3	4,4	2,5	0,6	5)
(6,0	3,1	0,2	4,3	1,4	5,5	2,6	4)	(6,0	4,1	2,2	0,3	5,4	3,5	1,6	5)

(0,0	6,1	5,2	4,3	3,4	2,5	1,6	6)	(0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7)
(1,0	0,1	6,2	5,3	4,4	3,5	2,6	6)	(0,1	1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1	7)
(2,0	1,1	0,2	6,3	5,4	4,5	3,6	6)	(0,2	1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2	7)
(3,0	2,1	1,2	0,3	6,4	5,5	4,6	6)	(0,3	1,3	2,3	3,3	4,3	5,3	6,3	7)
(4,0	3,1	2,2	1,3	0,4	6,5	5,6	6)	(0,4	1,4	2,4	3,4	4,4	5,4	6,4	7)
(5,0	4,1	3,2	2,3	1,4	0,5	6,6	6)	(0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7)
(6,0	5,1	4,2	3,3	2,4	1,5	0,6	6)	(0,6	1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6	7)

Chiaro, no? Procediamo.

4.1.2 Mi è scoppiato l'universo

Nessuna soluzione il mese scorso per questo simpatico problema, che recitava più o meno:

> *Su una semiretta lanciate una pallina al secondo tutte nella stessa direzione ma con velocità diverse (distribuite uniformemente tra* 0 *e* 1*): attrito zero e velocità costante, per ognuna delle palle, che quindi, prima o poi, si scontrano. Quando due palle si scontrano si autodistruggono, senza coinvolgere altre palle; qual è la probabilità che, se lanciate venti biglie, queste prima o poi si autodistruggano tutte?*

È invece ora arrivata una soluzione di ***trentatre***, che pubblichiamo volentieri.

Siano N : numero di palle iniziali di velocità $V_N = (v_1, v_2, \ldots v_N)$; K : numero di palle finali (non annullate) di velocità $U_K = (u_1, u_2, \ldots u_K)$; $P(N, K)$: probabilità del processo $V_N \rightarrow U_K$. Nel problema si chiede il valore di $P(N, 0)$.

Le palle si annullano a coppie, quindi N ed K hanno la stessa parità; per N dispari resta sempre almeno una palla e $P(N, 0) = 0$; il problema ha senso solo per N pari.

Nello stato finale U_K la distanza fra le palle non deve diminuire e deve essere

[1] $1 \geq u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_K \geq 0$

le probabilità che K variabili casuali in $[0 \ldots 1]$ rispettino la [1] è (v. dimostrazioni alla fine)

[2] $P(U_K) = 1 / K!$

se nessuna delle N palle iniziali si annulla, cioè $K = N$, vale la [1] anche per V_N e quindi

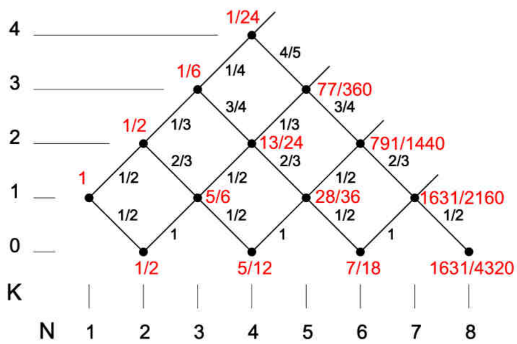
[3] $P(N, N) = P(U_N) = 1 / N!$.

Nel processo $V_N \rightarrow U_K$, aggiungendo la palla N+1 si hanno i due casi

a) $V_{N+1} \rightarrow U_{K+1}$: l'ultima palla non si annulla e si hanno K+1 palle finali

b) $V_{N+1} \rightarrow U_{K-1}$: l'ultima palla ne urta una precedente e restano K-1 palle .

Il caso a) corrisponde alla transizione $P(N, K) \rightarrow P(N+1, K+1)$, e b) alla $P(N, K) \rightarrow P(N+1, K-1)$. Quindi ogni $P(N, K)$ contribuisce a due probabilità adiacenti secondo lo schema in figura (nei nodi le probabilità e nei rami le transizioni).



I coefficienti di transizione (in nero) che escono da $P(N, K)$ sono

[4] a) $a_K = P(U_{K+1}) / P(U_K) = 1 / (K+1)$

b) $b_K = 1 - a_K = K / (K+1)$.

Ne segue la ricorrenza

[5] $$P(N+1, K) = P(N, K-1) \cdot \frac{1}{K} + P(N, K+1) \cdot \frac{K+1}{K+2}$$

che genera con [3] tutti i $P(N, K)$ (in rosso).

I valori fino a 20 di $P(N, 0)$ per N pari sono

N	$P(N,0)$	
2	1 / 2	= 0.500000
4	5 / 12	= 0.416667
6	7 / 18	= 0.388889
8	1631 / 4320	= 0.377546
10	96547 / 259200	= 0.372481
12	40291823 / 108864000	= 0.370112
14	16870575007 / 4722880000	= 0.368974
16	7075000252463 / 19203609600000	= 0.368420
18	2969301738826267 / 8065516032000000	= 0.368148
20	1371314916971288758 / 3726268406784000000	= 0.368013

Per N crescente le probabilità tendono ad assumere un valore limite costante, per N - K pari si ha

[6] $\lim_{N\to\infty} P(N,K) = 1/e \cdot (K+1)/K!$ e in particolare $\lim_{N\to\infty} P(N,0) = 1/e = 0.367879$.

dimostrazioni

[2] - se la variabile casuale x varia in $[0\ldots 1]$ la probabilità che sia inclusa in $[a\ldots b]$ è $P(a \le x \le b) = b - a = \int_a^b dx$, e spezzando la [1] in $(1 \ge u_1 \ge 0)$, $(u_1 \ge u_2 \ge 0), \ldots (u_{K-1} \ge u_K \ge 0)$ si ha l'integrale multiplo $P(U_K) = \int_0^1 du_1 \int_0^{u_1} du_2 \int_0^{u_2} du_3 \ldots \int_0^{u_{K-1}} du_K = 1/K!$. L'integrale rappresenta il volume residuo del cubo unitario a K dimensioni (lo spazio delle K variabili) una volta limitato dalle [1] (per K=2 si ha un triangolo di area 1/2, per K=3 un tetraedro di volume $1/2 \cdot 1/3 = 1/3!$ ecc.). Più direttamente, poiché la probabilità che due variabili casuali in $[0\ldots 1]$ siano uguali è nulla, si possono considerare le u diverse fra loro e sostituirle con interi diversi; ma fra gli interi $(1,2,3\ldots K)$ sono possibili K! permutazioni, di cui solo la $(K, K-1, K-2, \ldots 1)$ rispetta la [1].

[4] - le velocità iniziali in V_N sono casuali e *indipendenti*, le velocità finali in U_K sono ancora casuali (un sottoinsieme ordinato e rinumerato delle precedenti) ma *vincolate* dalla [1] . Il caso I. corrisponde alla aggiunta del termine u_{K+1} a destra della [1] con probabilità $a_K = p(U_{K+1}) / p(U_K) = 1/(K+1)$ e $b_K = 1 - a_K = K/(K+1)$.

[6] - $P(N,K)$ è diverso da zero solo se N - K pari, in questo caso se $\lim_{n\to\infty} P(N,K) = p_K$, la [5] diventa $p_K = p_{K-1}/K + p_{K+1}(K+1)/(K+2)$ da cui

$p_0 = p_1/2,\ p_1 = p_0 + 2/3 \cdot p_2,\ p_2 = 1/2 \cdot p_1 + 3/4 \cdot p_3, \ldots$ che si risolvono in

$p_1/p_0 = 2,\ p_2/p_0 = 3/2,\ p_3/p_0 = 4/3!, \ldots\ p_K/p_0 = (K+1)/K!$.

Si ha quindi la serie

$$F(X) = \sum_{K=0} p_K X^K = p_0 \sum_{K=0} (K+1)/K! \cdot X^K = p_0 (1+X) e^X$$

se N e K : pari $\sum_K P(N,K) \to \sum_{k=0} p_{2k} = 1$, se dispari $\sum_K P(N,K) \to \sum_{k=0} p_{2k+1} = 1$

sommando $\sum_{k=0} p_k = F(1) = 2 p_0 e = 2 \to p_0 = 1/e \to F(X) = (1+X) e^{X-1}$

in definitiva per N - K pari è $P(N,K) \to p_K = 1/e \cdot (K+1)/K!$.

note

- la [5] costituisce un processo di Markov, in cui i vettori $A_N = \left[P(N,K),\, K = 1 \ldots N \right]$ si trasformano con $A_{N+1} = M_N \cdot A_N$ dove M_N è una matrice che contiene solo i parametri di transizione; ma vettori e matrici crescono con N e non offrono reali vantaggi; risulta più rapido e conciso usare direttamente la [5]
- non sono sicuro di essere affidabile in materia di probabilità; ho quindi simulato il processo d'urto con velocità sostituite da numeri casuali ottenendo, con molte prove (dell'ordine del milione), una stretta corrispondenza con i primi valori $P(N,K)$.

Bene, credo di averci capito meno di niente, passiamo finalmente a settembre.

4.2 [188]

Ed eccoci ai problemi del mese scorso: il vantaggio dei nostri altalenanti ritardi è che ci sono mesi in cui riceviamo molte soluzioni e altri quasi nessuna, ma in questo caso è colpa nostra che non vi abbiamo dato tempo, o del Capo che si è spiegato male. Questo mese è un buon mese.

4.2.1 Tenete ferma Alice!

Un problema che ammiccava alla probabilità senza esserlo – un trucco che a Rudy piace molto per stuzzicarmi:

> *Rudy ha* 75 *tappi non colorati e* 150 *colorati nel sacchetto, e sul tavolo un numero indefinito di tappi colorati. Comincia ad estrarre due tappi per volta dal sacchetto secondo le seguenti regole:*
>
> - *Se entrambi i tappi sono colorati, uno torna nel sacchetto, l'altro viene messo sul tavolo.*
>   1. *Se uno è bianco e l'altro colorato, quello bianco torna nel sacchetto e quello colorato finisce nel mucchio sul tavolo.*
>   2. *Se sono tutti e due bianchi, vengono entrambi scartati e ne viene messo uno colorato nel sacchetto.*
>
> *Ovviamente con l'andare del gioco alla fine tutti i tappi escono dal sacchetto: di che colore è l'ultimo tappo?*

Estrarre cose da un sacchetto è una cosa che mi fa venire l'orticaria, anche se si gioca a tombola. Quindi perdonatemi se vado veloce. La prima risposta (giunta a poche ore dall'uscita di RM) è quella di ***.mau.***, al solito molto sbrigativo:

> Il problema 1 è cristallino: la parità dei tappi bianchi nel sacchetto è un invariante, quindi non riuscirai mai a tirare via l'ultimo.

Che è poi lo stesso che scrive ***Alberto R.***, anche se lui ci racconta anche la genesi della soluzione:

> Dopo due ore di infruttuosi tentativi, mi è venuto il sospetto che la domanda dovesse essere intesa in senso probabilistico: qual è la probabilità che l'ultimo tappo sia bianco? L'ipotesi era confermata dal (forviante) accenno all'idiosincrasia di Alice. Altre due ore di complessi percorsi inconcludenti, finché, rassegnato al mio rincoglionimento senile (una pipa! una birra! una coniglietta!) ho gettato gli appunti e mi sono dedicato a prepararmi una ricca cena consolatoria.
>
> Ma mentre armeggiavo con pentole e fornelli, evidentemente una parte del mio cervello lavorava in background, sicché improvvisamente, come folgorato sulla via di Damasco, mi è apparsa la soluzione in un'aureola di luminosa banalità. Sono andato davanti allo specchio a darmi del cretino per non averci pensato prima.
>
> Premessa questa commovente cronaca, ecco la soluzione: l'ultimo tappo è colorato.
>
> Ad ogni mossa il numero di tappi bianchi (150 in origine) resta inalterato o diminuisce di 2, quindi conserva la sua parità e non potrà mai essere che il sacchetto contenga 1 solo tappo bianco.

Ci ha poi scritto anche ***Baltasar***, che usa anche lui la parità dei tappi nel sacchetto per arrivare alla conclusione opposta:

> In ogni momento del gioco i tappi bianchi presenti nel sacchetto sono necessariamente in numero dispari, sono infatti dispari all'inizio e ad ogni turno o non ne esce nessuno o ne escono 2. Per cui dopo 223 estrazioni (ad ogni estrazione il numero dei tappi diminuisce di 1) rimarranno necessariamente un bianco e un colorato, la risposta al quesito è quindi: BIANCO.

Se non altro concorda con ***Marco***, che a sua volta scrive:

> Le regole di evoluzione del sistema sono:
>
> $$\begin{cases} \bullet\bullet \longrightarrow \bullet \\ \circ\circ \longrightarrow \bullet \\ \circ\bullet \longrightarrow \circ \end{cases}$$
>
> Ad ogni estrazione il numero di tappi diminuisce di 1, quindi dopo 224 turni, ne rimarrà solo 1 di colore bianco. Infatti la parità dei tappi bianca è conservata, cioè se vengono eliminati dei tappi bianchi, sono tolti solo a coppie. Essendo inizialmente dispari (75), prima o poi ne resterà uno solo. A quel punto non potrà più essere eliminato.

Questa è forse l'unica cosa che mi piace di estrarre dai sacchetti, ognuno fa un po' a modo suo. Andiamo avanti.

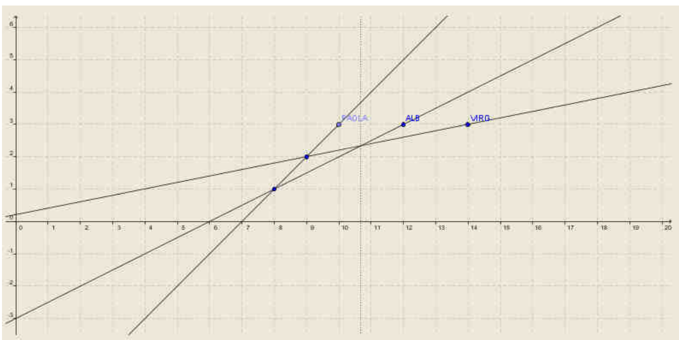
4.2.2 Partenza!

Ah, finalmente un problema che mi piace. Mi sono quasi dimenticata dei bei tempi quando si vedevano i problemi dei treni che si scontravano con la mosca in mezzo… Vediamo di che cosa si trattava:

> *Da Torino verso il paesello partono, nell'ordine e con velocità crescenti, prima Rudy, poi Al&Bert, poi Paola:*
>
> *Alle ore 08:00, Paola sorpassa Al&Bert*
>
> *Alle ore 09:00, Paola sorpassa Rudy.*
>
> *Intanto, un altro Rodolfo parte dal paesello per spostarsi verso Torino:*
>
> *Alle ore 10:00, incrocia Paola*
>
> *Alle ore 12:00, incrocia Al&Bert*
>
> *Alle ore 14:00, incrocia Rudy.*
>
> *Scoprire quando Al&Bert hanno superato Rudy.*

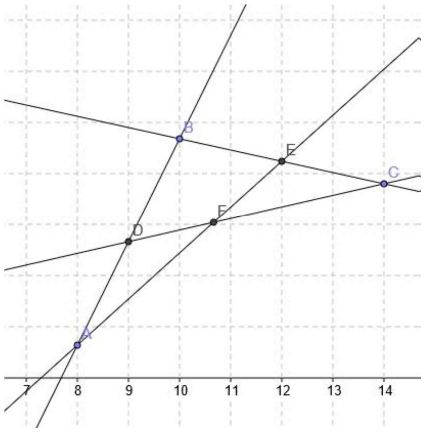
Un bel grafo logistico dovrebbe risolvere tutto, ed infatti ecco quello (arrivato insieme alla risposta veloce di prima) di ***.mau.***:

> Sul problema 2 ho qualche dubbio: l'allegato disegnino mostra come se Rudy e Virgilio sono partiti alle 23 del giorno prima (molto antelucano...), Al&Bert alle 6 del mattino (ottimo orario dopo una nottata in giro), e Paola alle 7 i vincoli danno come orario di incontro tra i primi due le 10:40. Però Rodolfo2 in realtà non si muove, e quello mi pare piuttosto strano...



Non c'è problema, possiamo confrontarla con la versione di ***Baltasar***:

> Supponendo i moti con velocità costante, nel grafico spazio-tempo si hanno le seguenti rette
>
> AB – Paola
>
> BC – P.G.N.I.A.A.
>
> AE – Al&Bert
>
> DC – Rudy & Virgilio



> A questo punto l'orario di incontro tra Al&Bert e Rudy&Virgilio sarà l'ascissa del baricentro del triangolo ABC (chiaramente E ed D sono i punti medi rispettivamente di BC e AB), per cui:
>
> ora sorpasso = (8+10+14)/3 = 32/3 = 10+2/3 = 10:40.

Direi che siamo tutti d'accordo, arriva allo stesso risultato anche ***Marco***, direi che possiamo fermarci qui.

4.2.3 "Ma anke no!"

Sempre colorati i titoli del Capo, vero? In questo caso maltratta un problema semplice tra i suoi classici per farlo diventare difficile, eccolo:

> *Quanti zeri ha al fondo il fattoriale di dieci milioni? Lavorando in base decimale è problema semplice, ma se consideriamo le altre basi, cosa succede? E se lavorate con i fattoriali dei Phimeri (quelli che hanno come base la serie di Fibonacci): come viaggiano, gli zeri al fondo, nella notazione "stretta"?*

Giustamente un problema di quelli abbastanza sconfortanti, anche se i nostri lettori non si lasciano mai prendere dal panico. Vediamo subito cosa ne dice ***Marco***, che per una prima volta che invia soluzioni le ha proprio inviate tutte:

> In qualunque base il numero di 0 presenti al termine di $10^6!$ è uguale al numero di volte che compare il fattore 10 nel prodotto. Indicando con un pedice la base b nella quale è espressa il numero, si ha che $(10^6)_b = (b^6)_{10}$.
>
> In base 10 è necessario trovare il numero di $2 \cdot 5$. Il numero di 5 è dato da:
>
> $$\frac{10^6}{5}+\frac{10^6}{5^2}+\frac{10^6}{5^3}+\frac{10^6}{5^4}+\frac{10^6}{5^5}+\frac{10^6}{5^6}=249984$$
>
> Poiché sono presenti almeno $10^6/2 = 500000$ fattori 2, allora il numero di 5 è uguale al numero di 0 finali.
>
> Nelle basi di numeri primi p, il calcolo è molto semplice, infatti $10_p = p_{10}$, cioè il fattore 10 deriva esclusivamente da una moltiplicazione per la base.
>
> Quindi il numero di 0 alla termine del prodotto sarà:
>
> $$\frac{10^6}{10}+\frac{10^6}{10^2}+\frac{10^6}{10^3}+\frac{10^6}{10^4}+\frac{10^6}{10^5}+\frac{10^6}{10^6}=111111_p$$
>
> cioè in base 10

$$p^5 + p^4 + p^3 + p^2 + p^1 + p^0.$$

> Nelle basi date dal prodotto di 2 numeri primi, $p \cdot q$ il numero di zeri presenti è uguale al numero di volte che compare questo prodotto. Quindi per trovare tale numero basta calcolare il numero di fattori p:
>
> $$q^6\,(p^5 + p^4 + p^3 + p^2 + p^1 + p^0),$$
>
> ed il numero di fattori q:
>
> $$p^6\,(q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q^1 + q^0),$$
>
> e una volta confrontati, il più piccolo dei due risulta uguale al numero di zeri alla fine di $10^6!$.

Direi che è logico, peccato che non abbia accolto la sfida del Capo con i fattoriali Phimeri. Vediamo ora la versione di ***Baltasar***:

> Sia N un numero naturale, voglio sapere quanti 0 ha al fondo il suo fattoriale scritto in base b.
>
> 1) Scomporre in fattori primi la base $b = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \cdots p_k^{t_k}$
> 2) Per ogni fattore p_i applicare la seguente formula
>
> $$\varepsilon(p_i)\sum_{j=1}^{z}\left\lfloor\frac{N}{p_i^j}\right\rfloor$$
>
> dove z è il primo valore per cui $p_i^{z+1} > N$, le parentesi indicano la parte intera.
>
> 3) Il numero cercato è il minimo tra tutti i valori $\frac{\varepsilon(p_i)}{t_i}$
>
> Es. n.1: N=10000, $b = 10 = 2 \cdot 5$:
>
> $\varepsilon(2)$ = 5000+2500+1250+625+312+156+78+39+19+9+4+2+1 = 9992
>
> $\varepsilon(5)$ = 2000+400+80+16+3 = 2499
>
> Per cui 10.000! in base 10 termina con 2499 zeri.
>
> Es. n.2: N=123, $b = 12 = 2^2 \cdot 3$:
>
> $\varepsilon(2)$ = 61+30+15+7+3+1 = 116
>
> $\varepsilon(3)$ = 41+13+4+1 = 59
>
> Per cui 123! in base 12 termina con 58 zeri (minimo tra 116/2 e 59). Infatti:
>
> $(123!)_{12}$ = 111A8B627418231AA4B446738051A52210B99AA853B4A69B105B0342B9A9A03A1051B31936885BB9337288694721A797761696A729B2882B49BABA5A99093B4978656000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
>
> L'idea è quella di contare quante volte è presente il 2 nella scomposizione in fattori primi di 123!, sarà presente una volta per ogni numero pari <123, più un'altra volta per ogni numero divisibile per 4 <123, …… , più un'altra volta per ogni numero divisibile per 64 <123.
>
> Si ripete il calcolo anche per il fattore 3 e si deduce che la scomposizione di 123! = $2^{116} \cdot 3^{59} \cdot \ldots$ ma $2^{116} \cdot 3^{59} = 12^{58} \cdot 3$ e quindi il 123! è divisibile per 12^{58} ma non lo è per 12^{59}. A questo punto è facile dimostrare che il numero in base 12 terminerà esattamente con 58 zeri.

Niente Phimeri! Il Capo dice di non essere troppo deluso, perché pensa che in quel caso il problema non sia risolubile. Io però mi fermo qui, e vi auguro un buon ottobre. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

> *Premessa per raccontarlo alla svelta. Le "bitangenti" sono le due rette ciascuna delle quali tangente ai due cerchi che non si incrociano. Insomma, chiamiamo "bitangenti" le "bitangenti esterne".*

Il "Teorema dei cerchi di Monge" statuisce che dati tre cerchi sul piano, le sei bitangenti si incrociano in tre punti che sono collineari. La dimostrazione "classica" è noiosissima: si chiede, passando ad un campo più "difficile", di trovare una dimostrazione immediata e divertente (senza disegno).

6. Pagina 46

Essendo gli angoli in *M* e *N* retti, un cerchio *Z* di raggio *AP* passa per *M* e *N*.

Essendo *M* e *N* sempre su *AB* e *BC*, la corda *MN* nel cerchio *Z* sottende sempre lo stesso angolo *BAC* sulla circonferenza.

Al variare di *P*, quindi, *Z* cambia, ma l'angolo *MAN* su *Z* resta sempre lo stesso. Di conseguenza, la corda massima *MN* occorrerà quando *Z* sarà il più grande possibile. Questo si avrà quando il diametro *AP* sarà massimo, ossia quando *A* sarà opposto a *P* nel cerchio dato.

Per *P* in questa posizione, i piedi *M* e *N* delle perpendicolari coincideranno con *B* e *C*, definendo il massimo della distanza *MN* pari al terzo lato di *ABC*.

7. Paraphernalia Mathematica

Il Bungee Jumpers del mese scorso ha lasciato perplessi alcuni lettori, quindi adesso vediamo un paio di applicazioni nel campo di questi strani oggetti.

7.1 Il solito Leo

... Certo, sempre lui. Ha trovato un interessante risultato, in merito. Ma cominciamo dall'inizio.

Si definisce *partizione* di un numero intero positivo n l'espressione di n come somma (non ordinata) di interi positivi: il *numero* di partizioni *diverse* si indica con $p(n)$; un esempio facile, abbiamo $p(4) = 5$, in quanto

4; 3+1; 2+2; 2+1+1; 1+1+1+1

sono cinque partizioni e non potete ottenerne altre che non siano permutazioni di una di queste.

La funzione di conteggio delle partizioni cresce piuttosto velocemente: infatti, $p(10) = 42$, $p(20) = 627$ e $p(50) = 204226$ (tranquilli, dopo peggiora...): esiste una formula per calcolarla, ma richiede l'utilizzo di serie infinite ed è scomoda da maneggiare.

Possiamo, tra le partizioni di un numero, richiedere che rispondano ad alcune specifiche caratteristiche: ad esempio, potremmo essere interessati al numero di partizioni di un dato valore formate solo da numeri dispari, o quelle per cui ogni termine è superiore ad un dato valore. Con una notazione piuttosto bizzarra, il numero delle partizioni di n che soddisfano una certa proprietà X si indica con $p(X, n)$. Così, ad esempio, il numero delle partizioni di n per cui tutte le parti sono *diverse* si indica con $p(D, n)$; il numero delle partizioni per cui tutte le parti sono *dispari* si indica con $p(O, n)$[12], e così via. Ad esempio, si vede che è:

$p(O, 4) = 2$	3+1, 1+1+1+1
$p(D, 4) = 2$	4, 3+1
$p(O, 5) = 3$	5, 3+1+1, 1+1+1+1+1
$p(D, 5) = 3$	5, 4+1, 3+2
$p(O, 6) = 4$	5+1, 3+3, 3+1+1+1, 1+1+1+1+1+1
$p(D, 6) = 4$	6, 5+1, 4+2, 3+2+1

...e adesso dovrebbe venirvi un dubbio, che è esattamente lo stesso che è venuto ad Eulero:

$\forall n \in \boldsymbol{N}^+, p(O, n) = p(D, n)$.

Come abbiamo detto, il calcolo delle partizioni richiede l'utilizzo di formule molto complesse (e Eulero se lo è sciroppato tutto, ma lui era un genio): esiste tuttavia un'interessante scorciatoia, il bello è che non richiede conoscenze particolari nell'ambito, ma è, in un certo senso, "chiusa in sé stessa".

Il numero $p(O, n)$ non è altro che il coefficiente di x^n nell'espressione:

$$f(x) \qquad \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right) \cdot \left(\sum_{0}^{\infty} x^{3 \cdot i}\right) \cdot \left(\sum_{0}^{\infty} x^5 \cdot i\right)$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^{i \cdot k}\right)$$

dove k è dispari.

[12] Visto che *diverse* ha la stessa iniziale di *dispari*, la terminologia nasce dal termine inglese o*dd*.

L'utilità di un oggetto del genere diventa più chiara nel momento stesso nel quale si consideri, ad esempio, la costruzione del termine x^{23} prendendo il termine x^2 dalla prima parentesi, x^6 dalla seconda e x^{15} dalla terza, dato che 2+6+15 = 23: questa espressione, se interpretiamo gli esponenti (dopo averne estratto il dispari generatore) come il numero delle ripetizioni del dispari generatore, ci fornisce una partizione (dispari) di 23: nella fattispecie,

$$\underbrace{1+1}_{2}+\underbrace{3+3}_{6}+\underbrace{5+5+5}_{15}.$$

Ed è vero anche il contrario: data una qualsiasi partizione di 23, se la utilizziamo come regola di estrazione dalle diverse parentesi, otteniamo un termine avente esponente 23.

Ricordando che:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^{ik} = \frac{1}{1-x^k},$$

possiamo riscrivere la nostra funzione nella forma:

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-x^3} + \frac{1}{1-x^5} \ldots,$$

con k dispari.

D'altra parte, possiamo vedere nello stesso modo che $p(D, n)$ è il coefficiente di x^n nella formula:

$$g(x) = (1+x)(1+x^2) + (1+x^3) + \ldots (1+x^k) + \ldots.$$

In $g(x)$ abbiamo una parentesi per ogni termine 1, 2, 3, ... ma, anziché utilizzare l'intera serie $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$, tronchiamo la serie al secondo termine, in modo da ottenere $(1+ x^k)$ e forzando in questo modo la scelta o del termine noto 1 (che non contribuisce al termine dell'esponente di x) o del termine x^k, che contribuisce con un termine k all'esponente: in questo modo, non ci sono possibilità per un dato esponente k di essere ripetuto, e quindi ogni termine x^n mostra n come somma di interi distinti; siccome quindi ogni partizione di n in parti distinte fornisce una ricetta per la produzione di x^n, ne segue che $p(D, n)$ non è altro che il coefficiente di x^n in $g(x)$.

Il generico fattore $(1+ x^k)$ in $g(x)$ può essere riscritto come:

$$(1+x^k) = (1+x^k) \cdot \frac{1-x^k}{1-x^k} = \frac{1-x^{2k}}{1-x^k}.$$

Quindi abbiamo:

$$g(x) = \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^4} \cdot \ldots.$$

Semplificando, si ottiene:

$$g(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \ldots,$$

dove tutti gli esponenti sono dispari, e quindi $g(x) = f(x)$, ossia $\forall n \in \boldsymbol{N}^+$, $p(O, n) = p(D, n)$, come volevasi dimostrare.

7.2 L'insolito André

Talmente insolito che quello non è il nome, ma il cognome: siamo riusciti unicamente a appurare che il nome inizia per "D", se qualcuno ha ulteriori notizie è doppiamente ringraziato: tanto per cominciare ci pare un tipo interessante, seconda cosa dimostrereste che avete letto il PM almeno sin qui.

Esistono 5! = 120 permutazioni dei numeri 1, 2, 3, 4, 5: essendo i numeri tutti diversi tra di loro, ogni permutazione presenterà una certa successione di "**S**alite" e "**D**iscese", confrontando ogni numero con il precedente: ad esempio, {1, 2, 3, 4, 5} = {S, S, S, S}, mentre {2, 4, 1, 5, 3} = {S, D, S, D}.

Certo che l'ultima, con quell'alternanza di salite e discese, ha l'aria interessante... se vi prendete la briga di controllare tutte le nostre centoventi permutazioni, vi accorgete che solo *sedici* presentano questo schema: e qui sorge la domanda (possibilmente senza affrontare estenuanti ed enumeranti controlli, di quante siano le permutazioni di questo tipo per un generico valore *n*. A questa domanda ha giustappunto risposto il nostro André.

Provando a generarne alcune, si vede che il caso di *n* pari è decisamente diverso dal caso di *n* dispari: quindi, indichiamo il numero delle permutazioni alternate *dispari* con a_n e quello delle *pari* con b_n.

Anziché le usuali funzioni generatrici, utilizziamo questa volta le funzioni generatrici *esponenziali*: l'unica differenza è che in questo caso, oltre al termine x^r, dobbiamo portarci dietro anche un fattore *n*! a denominatore: avere un fattoriale a denominatore, quando si lavora con dei fattoriali, ha l'aria di essere utile (e vedremo che lo sarà effettivamente).

Incorporiamo quindi i nostri due valori a_n e b_n nelle due funzioni:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^n}{n!} \text{ per } n \text{ dispari,}$$

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \frac{x^n}{n!} \text{ per } n \text{ pari.}$$

I più scafati di voi si saranno accorti che queste due espressioni sono ridondanti, visto che i termini a indice pari nella prima e i termini a indice dispari nella seconda sono pari a zero: ma basta ricordarselo e possiamo tranquillamente portarceli dietro, visto che questo semplifica decisamente la scrittura delle espressioni. Inoltre, i primi termini diversi da zero rappresentano dei casi non realizzabili: prima o poi dovremo stabilire dei valori convenzionali per questi e quindi tanto vale farlo subito: imponiamo quindi $a_1 = a_0 = 1$.

Notiamo inoltre che non importa la "grandezza" del salto tra un termine e l'altro, importa solo che quella sia una salita o una discesa: il che ci permette di definire una data sequenza in funzione di sequenze precedentemente costruite: nel caso *n* dispari, ad esempio, supponendo di conoscere per una permutazione la posizione del termine massimo *n*, con una notazione un po' ibrida, potremmo scrivere (*attenzione* che i termini otto le graffe orizzontali indicano il numero di *elementi nelle permutazioni originali*, non il numero di *S* e *D* nelle sequenze):

$$\underbrace{\{S,D,S,D,\ldots,S,D\}}_{r},S,n,D,\underbrace{\{S,D,S,\ldots,S,D\}}_{n-1-R}.$$

Nel nostro caso specifico, la permutazione termina con una discesa (l'ultima lettera è una "D"): essendo *n* il valore massimo, avrà alla sua sinistra una salita e alla sua destra una discesa: questo punto divide la sequenza in due sotto-sequenze, una terminante con una discesa e l'altra iniziante con una salita; essendo poi *n* dispari, le due sotto-permutazioni condivideranno la caratteristica di iniziare con una salita e terminare con una discesa, e quindi ciascuna delle due non sarà altro che una permutazione più breve dello stesso tipo e di lunghezza dispari. Ognuna delle a_r permutazioni sulla sinistra può essere connessa con ognuna delle a_{n-1-r} permutazioni sulla destra, dando quindi origine a $a_r \cdot a_{n-1-r}$ permutazioni; se inoltre consideriamo che non importa la grandezza *assoluta* del numero ma solo la sua grandezza *relativa* (rispetto al numero che lo segue e a quello che lo precede), abbiamo $\binom{n-1}{r}$ modi per scegliere i nostri *r* numeri; quindi, il numero totale delle permutazioni di lunghezza *n* in cui il valore *n* compare nella posizione (*r*+1) è:

$$\binom{n-1}{r} \cdot a_r \cdot a_{n-r-1}.$$

Il "colpo gobbo" (sempre necessario, quando si tratta con le funzioni generatrici) consiste nell'accorgersi che questo non è altro che il coefficiente del termine $\frac{x^r x^{n-1-r}}{(n-1)!}$:

$$\begin{aligned}[f(x)]^2 &= \left(\ldots + a_r \cdot \frac{x^r}{r!} + \ldots\right) \cdot \left(\ldots + a_{n-1-r} \cdot \frac{x^{n-1-r}}{(n-1-r)} + \ldots\right) \\ &= \ldots + a_r \frac{a_{n-1-r} \cdot (n-1)!}{r!(n-1-r)!} \cdot \frac{x^r x^{n-1-r}}{(n-1)!} + \ldots \\ &= \ldots + \binom{n-1}{r} a_r a_{n-1-r} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\end{aligned}$$

Questo significa che, a parte l'appurare il valore dei termini iniziali, abbiamo:

$$[f(x)]^2 = \sum a_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Essendo $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, la serie che esprime la nostra funzione inizia come $a_1 x + \ldots$; ma questo implica che *il primo termine di* $[f(x)]^2$ *sia di secondo grado*. Quindi,

$$[f(x)]^2 = \sum_{n=3}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Con un metodo simile a quello utilizzato per le equazioni diofantee, otteniamo che $a_1 + a_2 x = 1$, il che ci permette di ottenere:

$$1 + [f(x)]^2 = a_1 + a_2 x + a_3 \frac{x^2}{2!} + + a_4 \frac{x^3}{3!} + a_5 \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Wait! Ma questa è la *derivata prima* di $f(x)$! ossia, prendendo l'anti-derivata, otteniamo che:

$$f(x) = \tan x.$$

E quindi, a_n non è altro che il coefficiente di $\frac{x^n}{n!}$ nello sviluppo in serie di potenze di $\tan x$.

Ma sin qui abbiamo trattato solo le serie dispari.

Se consideriamo le serie pari, otteniamo altri risultati interessanti: queste, ad esempio, devono iniziare con una *S*alita. Dato che il massimo elemento n deve sempre apparire dopo una salita, la sua cancellazione porta ad una prima parte che termina con una discesa ed a una seconda parte che inizia con una salita: quindi la prima parte deve essere una permutazione di lunghezza dispari, mentre la seconda deve essere una permutazione di lunghezza pari.

Di conseguenza, con un ragionamento perfettamente simile al precedente (l'unica differenza è che, anziché il quadrato della funzione generatrice, va considerato il prodotto della funzione *pari* per quella *dispari*), si ottiene:

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} b_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = g'(x).$$

E dato che conosciamo la funzione $f(x)$, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}&\frac{g'(x)}{g(x)} = \tan x \\ &\Rightarrow \log g(x) = \int \tan x \, dx = \log \sec x\end{aligned},$$

dove abbiamo annullato la costante di integrazione in base al fatto che, per $x = 0$, la funzione si annulla.

Ma lo sviluppo in serie della tangente contiene solo termini dispari, mentre lo sviluppo in serie della secante contiene solo termini pari: quindi, possiamo unificare le serie in un un'unica formula ottenendo

$$\sec x + \tan x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + 2 \cdot \frac{x^3}{3!} + 5 \cdot \frac{x^4}{4!} + 16 \cdot \frac{x^5}{5!} + 61 \cdot \frac{x^6}{6!} + 272 \cdot \frac{x^7}{7!} + \ldots .$$

Il che non significa altro che per $n = 1, 2, 3, \ldots, 7$, le risposte sono 1, 1, 2, 5, …, 272.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms