Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 188 – Settembre 2014 – Anno Sedicesimo

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM187 ha diffuso 3'148 copie e il 07/09/2014 per Google eravamo in 11'000 pagine.

Nelle parole di ***Dan Grayber*** (http://www.dangrayber.com/), gli oggetti che lui crea si limitano unicamente a "rimediare ai problemi causati dalla loro stessa esistenza". Vorremmo poter dire la stessa cosa di tutti i nostri consimili, ma è evidentemente un'utopia. Comunque, tutto quello che sanno fare questi oggetti è tenersi su. E lo fanno, secondo noi, con un garbo e un'eleganza tutta loro.

1. Il tulipano nero

"Io credo che nessun secolo abbia avuto l'abbondanza di matematici che ha avuto il nostro, e penso che quest'uomo avrebbe potuto essere il più grande di tutti, se non fosse stato così preso dai suoi impegni ufficiali."

(da una lettera di Christiaan Huygens a John Wallis, 1659)

In un'epoca in cui l'innovazione tecnologica procede in fretta, sono molti gli indicatori che si possono usare per sentire, più o meno masochisticamente, il peso degli anni. Se durante una serata conviviale vi dovesse sfuggire la frase "Prestazioni e capacità del mio primo personal computer? Beh, non era collegato alla rete perché la rete ancora non esisteva, e non aveva neppure il disco fisso", dovreste rassegnarvi all'idea di aver dichiarato ineluttabilmente la vostra non più verde età, e in maniera assai più brutale che mostrando la fatiscente carta di identità. Ma questo è in fondo ragionevole e prevedibile: un gettone telefonico è un reperto archeologico, un regolo calcolatore un oggetto misterioso, e non vale la pena provare a costruire un test per la determinazione dell'età anagrafica degli sconosciuti sulla base di certi indizi marchiani.

1 *Si trasforma in un razzo missile, con circuiti di mille valvole…*

Più sottile, e probabilmente dotato di una metrica più precisa, potrebbe invece essere un ipotetico test volto a determinare l'età di uno scelto campione di persone in base al cartone animato giapponese preferito. Si tratterebbe certo di un test con molte limitazioni e approssimazioni: tanto per dire, il soggetto che poco sopra dichiarava le caratteristiche del suo primo PC dovrebbe rifugiarsi nella citazione di Goldrake (o, più correttamente, di Atlas Ufo Robot), ma solo a patto di confessare nel contempo che, per quando adorate, le avventure di Alcor e Venusia rubavano tempo alla preparazione degli esami di Analisi II, e non a quella del cestino dell'asilo.

I nativi digitali, invece, con i cartoni animati giapponesi ci sono nati e cresciuti, e ipotizzando che siano rimasti affascinati – sostanzialmente mediante imprinting, al pari delle oche di Lorenz – soprattutto dalla prima serie che hanno seguito con regolarità, non dovrebbe essere difficile ricostruirne l'età, e probabilmente anche il sesso.

Se vedete un'affascinante signora con i lucciconi mentre in pausa pranzo si rivede in streaming tutta la serie di Heidi (le caprette ti fanno ciao), potreste ragionevolmente mettere in dubbio quanto raccontava poco prima, alla macchinetta del caffè, sul gran successo della festa appena tenuta per il suo ventisettesimo compleanno; e se un paio di amici discettano dopo cena se sia più nobile lo spirito di Goku o la sfacciataggine di Arsenio Lupin III, si possono trarre delle ipotesi ragionevoli sulla differenza d'età che li divide.

2 *Heidi, ancora pochissimo giapponese*

Il mondo dei *manga* e degli *anime* è peraltro così vasto e globalmente diffuso che è ormai entrato di diritto nel repertorio culturale internazionale. È anche ragionevolmente sorprendente notare la vastità dei temi: inizialmente pareva che gli argomenti cardine fossero limitati a una sorta di incrocio tra fantascienza e *bushido*[1], ma il mondo dell'animazione giapponese si è presto rivelato assai più vasto. Parimenti sorprendente è lo scoprire, col senno di poi, che gran parte delle serie animate sono (molto liberamente) ispirate ad opere letterarie, spesso originate dalla narrativa occidentale.

La già citata Heidi è tratta dall'omonimo romanzo di Johanna Spyri, edito nel lontano 1880, molto popolare in Svizzera[2] e in Germania ben prima della sua versione nippo-animata; il dolce Remì è con tutta evidenza la trasposizione di *Senza famiglia* di Hector Malot; l'Ape Maia è stata inventata nel lontano 1912 da Waldemar Bonsels nel romanzo *Die Biene Maja und ihre Abenteuer;* il cartone animato Lady Oscar rivelerebbe meglio le sue origini francesi se si presentasse con la traduzione letterale del titolo originale giapponese, "*Berusaiyu no bara*", che suona come "La rosa di Versailles": è infatti stato ispirato dalla biografia di Maria Antonietta di Francia scritta da Stefan Zweig nel 1932.

Assumendo che la maggior parte degli *anime* giapponesi abbiano una remota ispirazione originata da romanzi di grande successo di pubblico, è del tutto naturale concludere, una volta venuti a conoscenza dell'esistenza di un cartone animato dal titolo "Il Tulipano Nero", che esso sia stato ispirato dall'omonimo romanzo di Alexander Dumas padre, che lo scrisse in collaborazione con Auguste Maquet nel 1850.

Invece no.


3 *Tulipano Nero (Sēnu no Hoshi)*

Il cartone animato non ha nulla a che vedere col romanzo di Dumas: è invece parente stretto proprio del più celebre e citato anime "Lady Oscar". La casa produttrice era in attesa di avere i diritti per poter mettere in produzione Lady Oscar, ma c'erano dei ritardi legali: visto che il marketing sollecitava la realizzazione di un cartone animato ambientato durante la Rivoluzione Francese, venne rapidamente prodotto proprio "Il Tulipano Nero", che richiamava anche qualche personaggio del tanto atteso cartone ambientato a Versailles: in un certo senso è pertanto uno spin-off, ma contrariamente al solito, uno spin-off che anticipa, e non segue, la serie genitrice[3]. Del resto, il titolo originale non chiama in causa il romanzo, visto che "Sēnu no Hoshi" significa più semplicemente "La stella della Senna".

Il romanzo di Dumas, per contro, non ha nulla a che vedere con Maria Antonietta, Versailles e la Rivoluzione Francese, nonostante la calzante nazionalità dei due autori: è infatti ambientato in un'altra nazione e in un'altra epoca. Peraltro, non si può negare che si

[1] Letteralmente, "la via del guerriero". Meno letteralmente, tutto il modo di vita dei samurai.

[2] In Svizzera è ben indicata la zona di ambientazione della storia, con cartelli stradali e turistici che indirizzano il pellegrino ben disposto verso "Heidiland".

[3] Il pubblico italiano non ha potuto notare il rutilante susseguirsi di eventi per la buona ragione che "Il Tulipano Nero" è giunto in Italia solo dopo il conclamato successo nazionale di "Lady Oscar".

trattasse di un tempo e luogo che aveva in comune con la Parigi rivoluzionaria quantomeno l'estrema difficoltà di morire di vecchiaia.

La storia raccontata da Alexandre Dumas si svolge in Olanda, nel 1672. Nella storia olandese, il 1672 è noto come il "*rampjaar*", che si può tradurre come "l'anno del disastro". Era un periodo davvero intenso per la piccola nazione affacciata sull'Atlantico: un periodo, a dire il vero, in cui persino il termine nazione era un po' controverso, soprattutto per quelli che poi sarebbero diventati i Paesi Bassi. A quel tempo quella terra si chiamava "Province Unite"; che è un nome che da solo mostra le difficoltà politiche che affliggevano lo stato olandese: ma è altrettanto certo c'è che i suoi abitanti in quel periodo stavano davvero mostrando al mondo quanto poteva fare un popolo deciso e avventuroso, per quanto piccolo e circondato da aggressivi vicini.

È il tempo in cui le Province Unite raggiungono un potere commerciale mercantile del tutto sorprendente: i navigatori olandesi sono tra i migliori del mondo, e stabiliscono basi e colonie in gran parte del globo; e quelli che restano in patria, non meno eroicamente, hanno già cominciato a rubare la terra al mare, con l'aiuto dei mulini a vento e di un coraggio imprenditoriale senza precedenti.

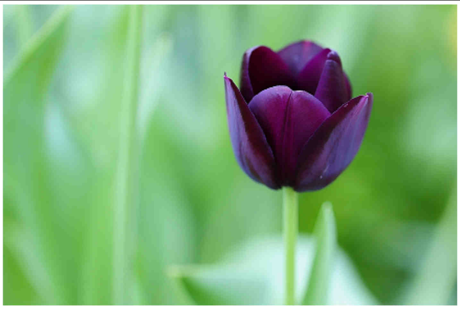
Dal punto di vista della storia dell'economia, l'Olanda del diciassettesimo secolo può anche essere considerata il teatro della prima bolla speculativa della storia, e questo proprio a causa di quelli che sarebbero diventati il simbolo stesso della nascente nazione olandese: i tulipani.

La messa in commercio dei tulipani, del tutto sconosciuti prima in Europa[4], scatenò una febbre d'acquisto compulsivo senza precedenti. Il bel fiore venne coltivato, sviluppato e modificato dagli esperti olandesi, che riescono in breve a produrne forme e colori diversi. Tra la fine del '500 e l'inizio del '600 i tulipani sono considerati oggetti di lusso, segni di assoluto prestigio, e raggiungono dei prezzi così elevati che devono essere quotati di giorno in giorno: tra l'altro, pare che le contrattazioni principali si tenessero presso la casa Van Der Beurse, la famiglia di mercanti originari da Bruges da cui ha avuto origine il nome stesso della "borsa" valori. Quotazioni così assidue sono l'evidente sintomo di una tensione commerciale davvero inaudita per quei tempi. Del resto, a sottolineare l'assoluta novità della situazione può bastar ricordare che, nel periodo di massima esaltazione, pochi bulbi di tulipano potevano arrivare a costare l'equivalente di dieci anni di reddito di un agricoltore[5].

Nel 1637 i prezzi dei tulipani, senza ragione apparente, crollano improvvisamente, ed è per questo che la "bolla dei tulipani" è il primo caso ufficiale di bolla speculativa nella storia dell'economia. Ma, anche se i prezzi evidentemente assurdi degli Anni Trenta del diciassettesimo secolo non si ripeteranno, il mercato dei tulipani resta estremamente prolifico e fiorente, e continua a rappresentare un elemento cruciale nell'economia olandese.

[4] "Fu portato per la prima volta in Europa nel 1554 dal fiammingo Ogier Ghislain de Busbecq, ambasciatore di Ferdinando I alla corte di Solimano il Magnifico, che ne spedì alcuni bulbi al botanico Carolus Clusius, responsabile dei giardini reali olandesi". (copincollato brutalmente da Wikipedia.it).

[5] La lingua olandese possiede diversi termini per denominare la "follia dei tulipani" (*tulpenmanie, tulpenwoede, tulpengekte, bollengekte,* e altri): per essere un po' più precisi sul valore attribuito ai tulipani nell'anno di massimo trionfo (1635), si può considerare che fu registrata una vendita di 40 bulbi per centomila fiorini. Come punti di confronto, il costo di una tonnellata di burro oscillava attorno ai cento fiorini, mentre un bravo operaio poteva sperare di guadagnare circa 150 fiorini l'anno. Istituti di ricerche storiche olandesi sono giunte a valorizzare il fiorino del 1635 come equivalente a 10 euro e 28 centesimi del 2002.



4 *Un vero tulipano nero*

Dumas può pertanto serenamente permettersi di eleggere protagonista del suo romanzo un fanatico appassionato di tulipani, Cornelius van Baerle, che pur essendo un medico di successo abbandona la professione per dedicarsi totalmente al tentativo di produrre una variante nera dei fiori più famosi d'Olanda. Non si tratta di una ricerca fine a sé stessa: la città di Haarlem ha infatti posto in palio centomila fiorini per chi riuscirà a ottenere un fiore talmente eccezionale. La vicenda si sviluppa con il protagonista ormai prossimo al successo che viene gettato in prigione a causa di un inganno del suo principale antagonista, che riesce a farlo passare per un sostenitore della parte politica sconfitta nei tumulti dell'anno del disastro, il *rampjaar*. Per fortuna di Cornelius e del lettore, in carcere, anziché abbruttirsi, l'eroe incontra la figlia del carceriere che si innamora di lui. La fanciulla, che non a caso possiede il floreale nome di Rosa, lo aiuterà nella disgrazia e riuscirà infine a liberarlo e a fargli coronare i suoi sogni da florovivaista, nella migliore tradizione dumasiana dell'*happy-ending*.

5 *Guglielmo d'Orange*

Alexandre Dumas era solito ripetere che i francesi avevano imparato più storia da lui che da tutte le scuole di Francia; e anche se gli storici hanno ottime ragioni per contestare l'affermazione un po' arrogante, è indubbio che lo scrittore ci tenesse a far muovere i propri personaggi di fantasia in concerto con personaggi e avvenimenti storici di particolare rilevanza. Ne *Il Tulipano Nero* la parte storica e politica assume via via maggiore importanza, anche ai fini della narrazione stessa: del resto, il romanzo si apre proprio con la descrizione del momento più drammatico e cruciale di tutto il *rampjaar*, ovvero il brutale assassinio politico del *Gran Pensionario* e di suo fratello da parte dei partigiani dello *Statolder* Guglielmo d'Orange. La carica di Gran Pensionario può essere considerata corrispondente a quella di Primo Ministro, o Capo del Governo: ogni città (o meglio, ogni provincia) eleggeva un Pensionario che era grossomodo il corrispondente del Sindaco, e tutte insieme nominavano il Gran Pensionario, che era massima autorità politica del paese. Lo Statolder, invece era la massima autorità militare: quando nel 1672 Guglielmo d'Orange fa uccidere il Gran Pensionario sta di fatto portando a termine un colpo di stato militare.

Erano certo tempi difficili, per l'Olanda. Era appena iniziata la Terza guerra anglo-olandese, e anche le truppe francesi di Luigi XIV, il Re Sole, stavano invadendo il paese dei tulipani. Nello scontro tra le due grandi personalità che si fronteggiavano durante l'anno del disastro, lo Statolder, Willem Hendrik van Oranje-Nassau, è destinato a lasciare nella Storia una traccia ben più marcata di quella del suoi avversario. Prima di diventare Statolder, era già Principe d'Orange, Conte di Nassau e Barone di Breda: dopo essere diventato padrone delle Province Unite, Guglielmo si avvierà direttamente a diventare re d'Inghilterra, d'Irlanda e di Scozia, e sul trono di Londra resterà fino al 1702 con il nome di William III[6]. Guglielmo è, sotto molti aspetti, un vero predestinato: figlio unico di Guglielmo II, che fu Statolder prima di lui, e di una principessa di sangue reale inglese, Maria Enrichetta Stuart, nasce a L'Aja nel 1650, e si capisce ben presto che, in tempi in cui la confessione religiosa ha un gran peso, è destinato a diventare il depositario delle speranze di tutti i protestanti europei. Un po' per la repentina morte del padre, avvenuta quando il piccolo futuro re d'Inghilterra era ancora in fasce, un po' proprio perché si sa fin dall'inizio che su di lui si accentrano le speranze d'un grande futuro, a Guglielmo d'Orange viene riservata un'educazione accurata e del tutto eccezionale. Tra i suoi molti precettori spiccano i nomi di Christiaan Huygens[7], che scrisse addirittura un trattatello sull'educazione del futuro sovrano, e, ironia della sorte, anche quello del Gran Pensionario delle Province Unite che sarà orrendamente messo a morte dai seguaci del fanciullo.

Il Gran Pensionario delle Province Unite si chiamava Jan De Witt, ed è uno dei più importanti personaggi della storia olandese. Ma era anche – forse soprattutto – un grande matematico.

6 *Jan de Witt*

Jan de Witt nasce a Dordrecht il 24 settembre 1625. Sua madre si chiamava Anna van de Corput, suo padre, Jacob, era il borgomastro della città. Jan e suo fratello Cornelis sono pertanto i rampolli di una famiglia non solo agiata, ma anche prominente nella borghesia di Dordrecht. Dopo i primi studi giovanili, Jan entra all'università di Leida nel 1641, appena sedicenne. Mostra subito brillanti capacità e particolare talento negli studi giuridici e matematici. Ventenne, compie con il fratello un lungo viaggio in Europa, visitando la Francia, la Svizzera, l'Italia e l'Inghilterra: è infatti ad Angers, in Francia, che ottiene la laurea in giurisprudenza; ma è notevole che, durante il suo soggiorno a Leida, oltre agli impegni universitari segua delle lezioni private di matematica presso Frans van Schooten[8]. Al ritorno, nel 1647, si trasferisce a l'Aja dove comincia la carriera di avvocato.

Nel 1650, a soli venticinque anni, la politica lo rivendica: viene infatti richiamato a Dordrecht, dove assume la carica di Pensionario della città. Solo tre anni dopo, ben prima di diventare trentenne, raggiunge il massimo della carriera politica, venendo eletto alla suprema carica di Gran Pensionario delle Province Unite[9].

[6] Come sovrano scozzese, però, il suo nome era William II, e come re d'Irlanda appena William I.

[7] Protagonista di "Che ore sono?", RM135.

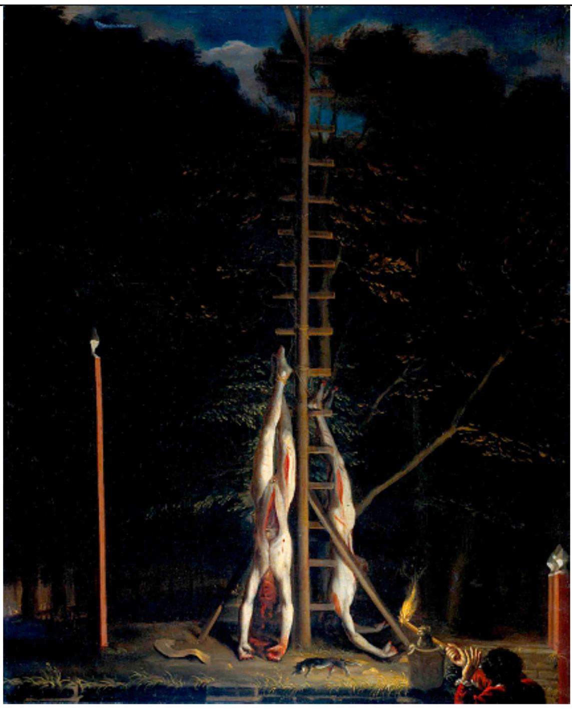
[8] Matematico olandese, professore di Huygens e grande ammiratore di Cartesio, che conobbe personalmente e del quale tradusse le opere in latino.

[9] Troppi dettagli rischiano di generare solo confusione; ma è opportuno segnalare che l'Olanda – termine che in italiano è spesso usato come pieno sinonimo di Paesi Bassi – è solamente una regione dello stato, e segnatamente solo una delle sette province che formavano le Province Unite (Olanda, Zelanda, Utrecht, Gheldria, Overijssel, Frisia, e Groninga). È però indubbio che già ai tempi di De Witt l'Olanda era la più potente e ricca delle province, e l'essere olandese (nel senso stretto del termine) ha facilitato l'ascesa politica del nostro. Peraltro, il concetto stesso di "Repubblica delle Province Unite" è un'istituzione recentissima, ai tempi di De Witt: l'indipendenza dalla Spagna (il territorio era precedentemente chiamato "Paesi Bassi Spagnoli") di fatto comincia con la pace di Anversa del 1609, e ufficialmente solo nel 1648, con la pace di Vestfalia.

È un rappresentante di quello che potremmo chiamare “partito repubblicano”, che intendeva conservare la forma repubblicana delle Province Unite, e che pertanto si scontra con coloro che propugnavano una forma di reggenza monarchica e vedevano in Guglielmo d’Orange il perfetto candidato al trono olandese. Ma nel 1653 il futuro William III d’Inghilterra era ancora solo un bambino di tre anni, e la parte di De Witt riesce facilmente a governare il paese per quasi vent’anni.

Sono vent’anni complicati e difficili, ma sono anche il cuore di quello che gli olandesi chiamano “Secolo d’Oro”. Nel 1652 era scoppiata la prima Guerra Anglo-Olandese, e De Witt si prodiga per raggiungere una pace favorevole, che ottiene nel 1654 con il trattato di Westminster. La politica olandese, con il passare degli anni, si focalizza sempre su due posizioni contrapposte, “la fazione degli Stati” che ha in De Witt il leader naturale e “la fazione d’Orange”, che esplicita già nella denominazione le sue preferenze di governo. In questi frangenti non facili sul fronte interno, De Witt provvede a ricostruire e a rafforzare la marina statale, affidandola a uomini di sicuro valore come gli ammiragli van Wassenaer Obdam e de Ruyter. Rafforzamento che si rivelò prezioso poco tempo dopo, nel 1665, quando l’Inghilterra attacca l’Olanda dando inizio alla Seconda Guerra Anglo-Olandese. L’Olanda sconfigge gli inglesi nella battaglia di Medway, e la parte politica di De Witt raggiunge l’acme della sua popolarità in patria.

Negli anni seguenti, De Witt prova ad eliminare la minaccia della casata d’Orange per vie legali, promulgando l’Editto Eterno, che prevede di abrogare per sempre il governatorato della casa di Orange-Nassau. Con l’Inghilterra sorprendentemente ridotta a miti consigli, De Witt poteva andar fiero e orgoglioso della sua politica che aveva sempre visto con occhio amichevole la Francia e temuto le pretese della perfida Albione; ma questa sua francofilia gli si ritorse violentemente contro quando il Re Sole decise che era tempo che la Francia facesse la voce grossa contro la piccola Olanda.


7 *I corpi dei fratelli De Witt (dipinto di Jan de Baen)*

È così che arriva l’anno del disastro. Con i francesi che arrivano sotto Utrecht, con Guglielmo d’Orange ormai adulto ed eletto Statolder, la posizione di Jan De Witt diventa difficile: il 26 agosto 1672 si trova a l’Aja, in soccorso a suo fratello Cornelis, già catturato e torturato una settimana prima; gli orangisti decidono di approfittare dell’occasione e organizzano a tavolino un vero e proprio linciaggio. La scorta viene allontanata con un diversivo, e una folla venne indirizzata verso la casa dei due fratelli.

Non è possibile immaginare un linciaggio che non sia orribile e cruento, ma quello di Jan De Witt e di suo fratello Cornelis fu abominevole in modo particolare: i loro corpi vennero devastati dalla folla, che li fece letteralmente a pezzi. Jan non aveva ancora compiuto 47 anni.

Salito al potere prima dei trent’anni, ucciso prima di arrivare ai cinquanta, con l’intero peso di una nazione complessa come l’Olanda da governare: sembra davvero impossibile che Jan De Witt possa aver trovato il tempo di fare qualcosa per la matematica nella sua breve e impegnatissima vita. Eppure, la frase di Huygens che apre quest’articolo è dedicata proprio a lui.

Gli insegnamenti di Frans van Schooten gli hanno dischiuso il mondo della matematica cartesiana, e la sua mente è reattiva e creativa abbastanza da comprendere che può essere usata per approcciare la geometria in maniera profondamente nuova: scrive diverse memorie, ma la sua opera principale sono gli *Elementa curvarum linearum*, in cui svincola la descrizione delle coniche dalle usuali tre coordinate spaziali, visto che si trattava di curve piane.

"Quando ho cominciato a studiare attentamente i libri sulle curve, così come venivano riportati dagli Antichi e spiegati dai matematici successivi, pensavo che fosse del tutto fuori dall'ordine naturale delle cose – che in matematica dovrebbe essere rispettato quanto più possibile – il ricercare l'origine di queste curve nello spazio e poi trasferirle nel piano…"

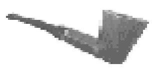
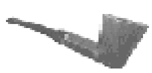
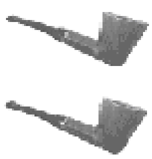
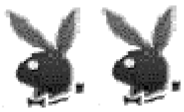
L'approccio di Jan De Witt è diverso: non esita a criticare Apollonio, che a suo dire rendeva le cose un po' troppo complicate, e il suo libro, il primo a contenere la parola "direttrice", viene pubblicato nel 1658. Il suo "*Elementa*" è considerato, insieme al "*Tractatus de sectionibus conicis*" di John Wallis[10], il primo testo vero e proprio di geometria analitica. Del resto, De Witt conosce ed è amico dello stesso Cartesio, che vivrà a lungo in Olanda, attratto dalla maggiore tolleranza religiosa e politica che il piccolo paese mostra fin dai primi anni di indipendenza.

Forse è eccessivo attribuire a Jan De Witt anche questo merito, quello di aver contribuito a costruire una nazione che per lungo tempo resterà straordinariamente più tollerante del resto degli stati d'Europa. Ma molti dei suoi grandi amici, come Cartesio, Spinoza e Huygens, sembravano crederlo.

Viene da pensare che il *rampjaar*, "l'anno disastroso" della storia olandese sia stato un anno molto triste anche per la storia della matematica.

[10] Di lui parliamo nel compleanno di RM070.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Tenete ferma Alice!			
Partenza!			
"Ma anke no!"			

La matematica agostana di Rudy, anche se di cospicue dimensioni, si è fermata agli anni '60: cosine facili, per facilitare il rientro.

2.1 Tenete ferma Alice!

Nel mondo immaginario fuori di qui, dove per scrivere matematica incredibilmente si viene addirittura pagati (poco, ma non è questo il problema), abbiamo trasformato la nostra Treccia preferita in un Maestro di *kendo* che affina le proprie abilità marziali ogni volta che sente la parola "probabili..." *[AIA! Vi avevo detto di tenerla ferma!]*.

Allora, cerchiamo di distrarla, prendendola alla lontana.

Rudy ha imparato quasi[11] tutte le regole di base degli scacchi all'epoca del mitico torneo Spassky-Fischer, sortendo risultati che solo un'innata clemenza ci permette di definire "disastrosi". Non essendo in grado di giocare una partita decente, aveva preso l'abitudine di progettare dei pezzi degli scacchi, mantenendo l'aria impegnata (così i Prof pensavano stesse pensando) e prendendo appunti (il lemma "disegno tecnico" contiene una parola che scatena in Rudy gli stessi istinti di Alice quando sente la parola... ecco, *quella*).

L'idea era di ricavare dei pezzi molto stilizzati da dei cilindri: essendo il Nostro stato sfiorato (eufemismo, ho ancora un "ricordo" di quei tempi) dal "Maggio Francese del'68"[12], i pezzi erano tutti della stessa altezza e i Proletari Pedoni erano quelli più massicci, lasciando il cilindro intonso *[Oh, voi due: se RM questo mese viene corto, basta dirlo: mi metto a spiegare come sono fatti i pezzi e la tiriamo per tre volumi. Comunque, sono ancora fiero del Cavallo (RdA)]*. L'idea, per risparmiare sul materiale, era di ricavare i

[11] "Quasi" nel senso che ancora oggi ha dei problemi con alcune. Mai capita, la presa *en passant*.

[12] Che, vorremmo ricordarlo, è nato prima del 1968 in centro a Torino: Palazzo Campana, sede dell'Istituto di Matematica. No, Rudy non c'era: sobillava le Medie Inferiori in quel di Venezia.

cilindri di base da un paio di manici di scopa (a Rudy sono sempre piaciuti i pezzi che occupano un mucchio di spazio).

Come buona parte dei progetti di Rudy, era stato abbandonato senza troppi rimorsi e annegato nel vino sin quando, giustappunto, il Nostro si è accorto che per il Nettare di Bacco stavano facendo dei tappi di *plastica*! Meravigliosi, basta averne il giusto numero e...

TrapanoFresaMorsaEPoiVoglioVedertiAColorarli. Insomma, Rudy sta ancora raccogliendo tappi, ma non si decide a cominciare. Ogni tanto, per avere un incentivo, prova a colorare qualche tappo di nero, ma *l'esprit n'y est plus*, direbbe François Hollande (che non ci risulta abbia "fatto il '68"): ogni tanto ci giochicchia, ma lavorarci sopra nisba *[Distratta Alice? Sì? Allora passiamo al problema. Orpo, 25 righe di ca**eggio]*.

L'ultima volta che ha preso in mano il sacchetto dove tiene i tappi, meditando sul Problema Finale *[ve lo spieghiamo dopo, non è questo il "problema" (RdA)]*, ad un certo punto si è ritrovato nella situazione seguente: aveva 75 tappi non colorati e 150 colorati nel sacchetto, mentre sul tavolo erano disponibili un numero indefinito di tappi colorati *[Oeu, sono 45 anni che ci penso: un mucchio di tappi sono passati sotto i ponti... (RdA)]*. A questo punto, mentre pensava, ha cominciato a seguire delle regole, estraendo due tappi per volta dal sacchetto:

- Se entrambi i tappi erano colorati, uno tornava nel sacchetto, l'altro veniva messo sul tavolo.
  1. Se uno era bianco e l'altro colorato, quello bianco torna nel sacchetto e quello colorato finiva nel mucchio sul tavolo.
  2. Se erano tutti e due bianchi, venivano entrambi scartati e ne veniva messo uno colorato nel sacchetto.

Siccome a ogni giro uscivano più tappi di quelli che entravano, prima o poi il gioco sarebbe finito e Rudy si sarebbe occupato della cena: ma a questo punto sorge spontanea una domanda.

Di che colore è l'ultimo tappo?

Eh? Ah, il Problema Finale? Facile. Qualcuno ha delle idee per la Donna? Quella che ho progettato è venuta malissimo.

2.2 Partenza!

Per prima cosa, *Tranquilli!* Non sta succedendo nulla. Per motivi che vi saranno chiari in seguito, Rudy aveva pensato di tenere questo problema per l'ultimo numero di RM, ma dietro suggerimento di sua moglie ("Lo perderesti di sicuro!") ha deciso che non se ne fa nulla, quindi eccolo.

L'allegra *famille d'Alembert* si è recata, anche quest'anno, a prendere freddo nel Luogo del Divano Quantistico ma, contrariamente agli anni passati, avevamo alcune novità (oltre al fatto che la temperatura non era poi molto diversa da quella di Torino).

Tanto per cominciare, il VAdLdRM più giovane (Fred) si è defilato, preferendo andare a prendere pioggia al mare in compagnia di un gruppo nel quale spiccava un congruo numero di presenze femminili (vi ricordate, vero, che nel LdDQ il massimo del romanticismo per Fred è di portare a spasso Poldo, il cane di un'amica di Alberto?).

Inoltre, il VAdLdRM più anziano (Alberto) ha deciso di ospitare un amico (e siccome abbiamo molta fantasia anche nelle amicizie, si chiama Alberto pure lui), e l'amico non ha potuto esimersi dal dire che avrebbe portato la sua macchina; siccome Paola considera l'auto di Rudy con Rudy dentro come un enorme *trolley* semi-intelligente e la propria auto come un bene che rasenta la tossicodipendenza, avremmo avuto tre macchine a disposizione, in grado quindi di soddisfare le più ardite necessità di spostamento (ivi inclusa quella *zero*, la preferita da Rudy).

Come al solito, Rudy è partito da Torino ad ore antelucane, accompagnato dal fido Virgilio (il gatto: lo trovate su *feisbucc* alla pagina di RM) e dalla sua *compilation* di John Denver (di Rudy, non di Virgilio) all'usuale velocità degna di una lumaca artritica; Al&Bert (sì, insomma, avete capito, Alberto & Alberto: in due fanno quasi uno di famiglia...) procedevano di poco più veloci (non è difficile, contro Rudy: si riesce addirittura a rispettare i limiti di velocità, il che è bene per due neopatentati) ed erano partiti ad un'ora "tranquilla" (secondo loro), mentre Paola era partita per ultima alla sua abituale velocità (subluminale-ma-di-poco), il che faceva sì che l'emozionante corsa procedesse in questo modo:

Alle ore 08:00, Paola sorpassava Al&Bert

Alle ore 09:00, Paola sorpassava Rudy & Virgilio.

Intanto, il Più Grande Navigatore dell'Intero Arco Alpino (ve ne abbiamo già parlato: un Rodolfo residente nel Luogo del Divano Quantistico, il "Comandante", giustappunto, non il "Geometra") decideva che il paese era troppo piccolo per due Rodolfi e due Alberti, e pensava quindi di spostarsi a Torino: nel fare ciò:

Alle ore 10:00, incrociava Paola

Alle ore 12:00, incrociava Al&Bert

Alle ore 14:00, incrociava Rudy & Virgilio.

A questo punto, per ricostruire completamente l'emozionante *Carmageddon*, non dovreste avere problemi a calcolare quando Al&Bert hanno superato Rudy & Virgilio...

2.3 "Ma anke no!"

Secondo Rudy si scrive in questo modo. La frase, introdotta nel lessico familiare da Alberto, ha assunto il significato di "Hai detto un'asinata tale che l'unica risposta possibile è una frase farcita di errori sintattici, semantici e semiotici"; e siccome nell'originale mancava l'errore sintattico, Rudy mette il "k" al posto del "ch".

Come dicevamo prima dei problemi, questa estate Rudy ha esplorato la matematica ricreativa precedente lo "0 A.G." ("*Anno Gardneris"*. E trattandosi del buon Martin, esiste l'anno zero. Ed è, tra le altre cose, l'anno di nascita di Rudy, dello Sputnik e di Franco57, quindi è anche "0 A.R.", "0 A.S." e "0 A.F57", ma l'ultima è orribile *[mettete qui un emoticon che fa la linguaccia a Franco57 :-)]*).

È mia ferma convinzione (Rudy speaking, se volete possiamo discuterne) che MG sia stato principalmente un grande comunicatore: la matematica ricreativa esisteva anche prima di lui, ma, se permettete il bisticcio, "ricreava pochi", nel senso che la trovavano divertente e interessante solo i matematici (e neanche tutti, per qualcuno era *volgarizzazione*). Il grande merito di Martin è stato quello di presentarla in un modo molto più interessante, soprattutto non perdendo le occasioni che si potevano presentare: lui era un asso nel farlo tre o quattro volte al mese, ma quest'estate (per la prima volta) abbiamo capito cosa possa essere un *satori*[13] gardneriano.

Leggendo (sotto lo scarsamente cocente sole d'agosto) un libro dell'epoca, Rudy si è imbattuto in un problema che ha letto in questo modo:

"Quanti zeri ha al fondo il fattoriale di dieci milioni al quadrato?"

Al che è seguita la seguente pensata:

"Uh, facile. Ma perché ha scritto al quadrato? Ah, no, è la seconda nota a piè pagina"

Testo della nota:

"Non ci pare il caso di specificare che stiamo lavorando in base decimale".

E a questo punto, il pensiero di Rudy è stato: "*Ma anke no!*".

Chiaro, adesso?

Il problema originale (senza il quadrato) è semplice e poco interessante, ma se consideriamo le altre basi, cosa succede? Qui, a occhio, il problema diventa facile per certi numeri difficili, mentre per numeri facili...

[13] Per i riferimenti buddisti, cfr. *Kerouac, The Dharma Bums*.

Oh, se anche questa generalizzazione vi pare semplice, potreste provare a lavorare con i fattoriali dei *Phimeri* (ve li ricordate, vero? Quelli che hanno come base la serie di Fibonacci): come viaggiano, gli zeri al fondo, nella notazione "stretta"?

Soluzione? Nah. A Rudy piacciono i problemi, non le soluzioni.

3. Bungee Jumpers

Provare che il numero delle sequenze composte di zeri e di uni di lunghezza n contenenti esattamente m ricorrenze della sequenza 01 è $\binom{n+1}{2m+1}$.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

Un paio di numeri fa raccontavamo di come questa inaffidabile rubrica fosse stata costretta a risorgere: c'era un librino scritto dalla redazione di RM che non poteva essere recensito senza sentirsi in colpa, visto che aveva la bellezza di otto confratelli parimenti meritevoli di recensione. Siccome i librini sono appunto tali – insomma piccoli – e siccome avevamo fretta di raccontare quanto fosse incredibilmente bello e affascinante il nostro, abbiamo accelerato il lentissimo passo e deciso di recensirne tre per volta. Siccome tre per tre fa nove, vi annunciamo con malcelato orgoglio che, voilà, con questo giro siamo riusciti a metterci in pari. Incredibile, vero?

4.1 Partition

«HARDY: Ramanujan, senta. Le idee sono fatte di altre idee. Sono derivate.
RAMANUJAN: Derivate?
HARDY: Le idee matematiche sono vere perché sono vere altre idee matematiche.
RAMANUJAN: Sono vere perché sono vere: le idee si scoprono.
HARDY: No, le idee si deducono. Si dimostrano. La matematica non è una religione.
RAMANUJAN: Davvero?»

Ci sono diverse ragioni per le quali questo e-book di AltraMatematica si differenzia dagli altri. Non per questioni di merito o demerito (ovvio: per definizione, tutti gli e-book di AltraMatematica sono meritevolissimi), ma proprio per alcune caratteristiche ben precise e misurabili oggettivamente. Ad esempio, è un testo un più lungo degli altri, leggermente oltre la misura canonica ed eponima dei quarantamila caratteri, e infatti questo si conferma anche nel prezzo, leggermente superiore a quello standard della collana.

Poi, si tratta di un testo teatrale, una vera pièce che qualche compagnia di teatranti potrebbe senz'altro mettere in scena, facendo probabilmente un favore a sé stessa e ai suoi spettatori. Infine, è un'opera che abita questa collana diretta da Maurizio Codogno grazie alla benemerita opera non dell'autore, per una volta, ma della traduttrice, Martha

Fabbri[14], che si è fatta carico di rendere questo lavoro di Ira Hauptman, commediografo ancora non famoso quanto meriterebbe, fruibile anche in lingua italiana.

Nel raccontare una storia che veda protagonisti Ramanujan e Hardy, il rischio di cadere nei luoghi comuni è fin troppo elevato: bisogna resistere alla tentazione di esaltare il genio istintivo dell'indiano, lasciando al grande matematico inglese solo un ruolo da comparsa; si rischia di drammatizzare troppo la fine prematura e tragica di Ramanujan, ed è quasi impossibile non indugiare sulla supposta attrazione omosessuale del maturo inglese verso il giovane genio asiatico. Va a merito di Hauptman non essere caduto in nessuno di questi tranelli.

I personaggi che calcano la scena sono solo sei, due dei quali relativamente marginali. I restanti quattro sono di fatto due coppie di elementi umano/sovrumano. C'è Srinivasa Ramanujan, genio dei numeri, affiancato dalla dea Namagiri, suo spirito protettivo e, soprattutto, sua magica portatrice di verità matematiche. L'altra coppia è quella composta da Godfrey Hardy, uno dei maggiori matematici inglesi del ventesimo secolo, e dallo spirito un po' burlone di Pierre di Fermat, che aleggia sulla scena soprattutto in virtù del suo sfuggente ultimo teorema. Il plot riesce a ricordare quasi tutti gli aneddoti reali che corredano l'incontro tra l'inglese e l'indiano, da quando Hardy, unico fra i molti interpellati, si convince che Ramanujan è un vero talento naturale dei numeri e lo convince a venire a Cambridge, fino alla citazione del celebre aneddoto del taxi numero 1729 che porta Hardy al capezzale di Ramanujan, ma è ben diverso da una cronaca.

A ben vedere, la chiave di lettura è quasi interamente nascosta nel titolo, "*Partition*". La traduzione italiana più diretta, "partizione", è sufficientemente valida, a patto di ricordare che partizione vuol dire anche "separazione". La teoria matematica delle partizioni è infatti un elemento importante nella storia narrata da Hauptman, ma il senso più profondo e reale della pièce va ricercato nel secondo significato.

Ciò che unisce Hardy e Ramanujan è la matematica, ma è la divisione, la profonda separazione nell'idea stessa di matematica che li divide. Hardy cerca disperatamente di mostrare a Ramanujan la necessità, e prima ancora della necessità la bellezza della dimostrazione: e soprattutto, l'identità profonda tra dimostrazione e verità. Ramanujan,

[14] Gran bel cognome, vero? Comunque no, purtroppo no, nessuna parentela con il più pigro dei redattori di RM.

mistico e orientale, non ha bisogno di dimostrazioni: i suoi calcoli sono esatti perché esistono, perché hanno la verità implicita, rivelata, comunicatagli direttamente dalla sua bellissima dea.

I due sono amici, e vivono entrambi per la stessa scienza: se trovassero un territorio comune per lavorare insieme, per realmente collaborare in sintonia, avrebbero un potenziale davvero esplosivo. Ma tutto questo non basta; la separazione, la *partition* tra Oriente e Occidente è ancora, almeno per le loro matematiche, ancora troppo ampia.

Titolo	Partition
Sottotitolo (tweet)	*A me è capitato di vederlo in un libro di giochi matematici; invece lei come fa a saperlo? Conosco bene molti interi positivi.*
Autore	Ira Hauptman
Traduzione	Martha Fabbri
Editore	40K Unofficial
Collana	Altramatematica 7
Data Pubblicazione	Maggio 2014
Prezzo	2,99 euro
ISBN	9788898001750
Pagine	Ebook (circa 58)

4.2 Di 28 ce n'è 1

«Esiste il rischio che, proprio perché insegnata fin da una così tenera età, l'attività di contare sia rapidamente classificata come banale: salvo poi accorgersi che bastano poche complicazioni, pochi vincoli operativi per raggiungere un grado di complessità difficilmente superabile.»

Tra i connotati istituzionali di questa rubrica – lo abbiamo ripetuto più volte – regna incontrastato il principio che le recensioni non sono obiettive, ma di parte: e di parte immancabilmente positiva, perché si parla di solito solo di libri scritti da gente che si conosce. Se questa premessa è vera, sarà facile comprendere quanto poco obiettiva rischia di essere questa recensione in particolare, visto che si tratta di revisione scritta dagli autori stessi del libro, e pubblicata nella rivista totalmente gestita dagli stessi loschi figuri. Insomma, se cercate qualcosa di obiettivo, è meglio se vi rivolgete ad un negozio di ottica.

D'altro canto, ha forse ben poco senso riempire questa recensione di frasi tipo "È un capolavoro assoluto!", "Correte a comprarlo!", anche perché lo abbiamo già scritto in un sacco di posti, e ci siamo resi conto che non siamo credibili. Vi racconteremo allora, più che il contenuto del libro, quale sia stata la difficoltà maggiore nello scriverlo.

Il Sommo Curatore della collana, PuntoMauPunto, ci convoca (elettronicamente parlando) e ci annuncia il progetto AltraMatematica: libri corti, inediti, da pubblicare solo in formato elettronico. Facile, pensiamo noi, sono quindici anni che scriviamo roba corta, inedita e in formato elettronico…

E poi ci siamo resi conto della magagna: proprio perché tutto quel che scriviamo su RM è in formato elettronico, non si può mica riciclare qualche pezzo di RM: dovesse finire su carta, potremmo giocare sul fatto che il materiale pubblicato su RM è in gran parte "inedito" per le rotative, ma se si parla di editoria elettronica, cavolo… con che faccia potremmo dire che il materiale che esce su RM è "inedito" dal punto di vista dell'editoria elettronica?

Quindi, bisognava scrivere qualcosa ex-novo. Quindi, bisogna organizzarsi. Colti da megalomania improvvisa, decidiamo di scrivere un centinaio di e-book, fiduciosi del fatto che i lettori e gli editori non vogliano altro che cominciare a riempirci di diritti d'autore. Una specie di enciclopedia dei matematici in formato 40K, con ventimila caratteri dedicati alla vita e ventimila alle scoperte matematiche. A cominciare da Pitagora e finendo con la Mirzakhani.

Però Pitagora era già prenotato (leggete il paragrafo seguente, se non ci credete); però il lavoro è lungo. Però siamo pigri. Insomma, meglio se pensiamo a qualcos'altro. Così ci è venuto in mente che, a ben vedere, c'è qualche lavoro dei redattori di RM che non è mai finito sulle pagine elettroniche di RM (e neppure su carta, ovviamente): sono le conferenze.

Non che se ne sia tenute tantissime, per carità: ma qualcuna, sì. Ad esempio, quella sulle innumerevoli curiosità del calendario. Qualche tempo fa i due maschietti della redazione stavano cercando disperatamente un tema per una conferenza nuova, quando la parte femminile e saggia della triade è intervenuta dicendo: "è da quando vi conosco che vi fate domande trabocchetto e raccontate storielle sulle stranezze del calendario. Mettetele tutte insieme, una buona volta, e vedrete che la conferenza è bell'e pronta".

Beh, c'è bisogno di dirlo? Aveva ragione, come al solito.

Così, abbiamo portato in giro una conferenza in cui ci divertivamo a raccontare cose strane e curiose, come la ragione del fatto che febbraio ha 28 giorni, o perché i giapponesi nascondevano i calendari dentro stampe misteriose. O il disastro del conteggio dei giorni ai tempi di Giulio Cesare, o come scomparissero i giorni del 1582, o perché mai sia esistito il 29 febbraio 2000, e non il 29 febbraio 1900.

Le conferenze sono andate, hanno fatto il loro tempo, e sono passate. Però, lo sapete tutti, se Santa Alice è la prima protettrice di RM, è evidente che Santa Pigrizia è la vice-patrona del terzetto: non era impossibile recuperare il materiale delle conferenze, rielaborarlo, correggerlo, trasformare delle slide in paragrafi e capitoli. A dirla tutta, non solo non era impossibile, era anche molto più semplice che mettersi lì ad inventare qualcosa di nuovo.

È così che è nato questo "Di 28 ce n'è 1". A dire il vero, il titolo originale delle conferenze era "Dalle Calende Greche al 30 febbraio: la difficile arte dei contatori di giorni"; ma lo sapete, PuntoMauPunto vuole sempre dire la sua, e ha cominciato a farci notare che per mantenere lo standard della collana, un titolo così non sarebbe mai riuscito ad entrare nella copertina.

Così abbiamo cambiato titolo. Adesso, non resta che parlare del contenuto dell'e-book. Cosa potremmo dire, vediamo… ah, sì, come no.

È un capolavoro assoluto!

Correte a comprarlo!

Titolo	Di 28 ce n'è 1
Sottotitolo (tweet)	*Sbagliare giorno non è difficile. Anzi, è matematico.*
Autore	Rudi Mathematici
Editore	40K Unofficial
Collana	Altramatematica 8
Data Pubblicazione	Giugno 2014
Prezzo	1,99 euro
ISBN	9788898001781
Pagine	Ebook (circa 47)

4.3 La musica dei numeri

« Qual è l'Arché? Qual è il principio primo? Quel principio da cui anche i nostri dèi sono stati generati?»

Eravamo molto indecisi se dedicare una recensione a questo "La Musica dei Numeri" di Flavio Ubaldini, in arte Dioniso, e per un sacco di buone ragioni.

La prima, così buona e inoppugnabile che è quasi una perdita di tempo sottolinearla, è che è davvero evidente a tutti che questa lunga serie di recensioni sui libri di AltraMatematica serviva solo a darci occasione di parlare del nostro, numero otto della collana, senza fare la figura degli arroganti che si recensiscono solo i loro libri snobbando gli altri. Avendo fatto la sovrumana fatica di recensire i sette precedenti, l'alibi era ormai costruito, quindi a che servirebbe mai recensire la nona uscita?

Un'altra splendida ragione è stata accennata poco fa: volevamo essere noi a scrivere su Pitagora, e l'Ubaldini ci ha soffiato il tema. E con quale scusa, poi? Solo perché sui suoi blog ("Blogghetto" e "Pitagora e dintorni") di Pitagora ne parla a profusione? Solo perché è la massima autorità pitagorica dell'italica rete? Solo perché è bravo? Tzè. Che ragioni sarebbero, queste?

Un'altra splendida ragione per non recensirlo, infine, è che vende più del nostro. A ben vedere, questa è una ragione maiuscola, stupenda. Noi siamo facili prede dell'Invidia (e, a occhio e croce, anche di tutti gli altri sei vizi capitali, con la possibile eccezione dell'Ira). E all'invidia, come al cor, non si comanda. Ha scelto un bel titolino, tutto qua. È stato fortunato che a lui è toccata la copertina viola, e a noi il grigio topo. Gli avranno fatto pubblicità tutti gli amici e i parenti. Avrà più amici del generale dei boy-scout. La sua sarà una famiglia allargata di cinquecento persone. Ecco.

Così, non aspettatevi che noi si perda del tempo a spiegarvi che quello dell'Ubaldini è un testo che racconta di Pitagora e dei pitagorici più o meno come farebbero i pitagorici stessi. Chissà, forse l'autore si è immedesimato e lasciato trasportare dalla prosa di Giamblico. Fatto sta che, se mai dovessimo metterci davvero a recensire "La musica dei Numeri", dovremmo riconoscere che è una bella idea quella di utilizzare il vero e proprio metodo del racconto: nella storia si muovono tutti, parlano, agiscono, insomma si muovono come devono fare i personaggi di un romanzo. Così, si incontrano Ippaso e

Cilone, mica solo Pitagora (pardon, il Maestro); così, se fa caldo a Crotone sentirete l'afa di Metagitnione, mica quella di Luglio. E quando Gerone il fabbro sbatte forte coi suoi martelli sulle incudini, avrete poco da pensare "ecco, adesso arriva la storia delle consonanze, dell'armonia e delle ottave", perché è vero, certo che sarà così: ma si resta legati alla storia, si aspetta che Filolao ed Eratocle vadano davvero a rifornirsi di dischi di bronzo, si prova ad immaginare in che misura Ippaso continuerà a giocare il ruolo del bastian contrario, e al massimo ci si incomincia a chiedere seriamente che fine farà, quando verrà fuori il pasticciaccio della diagonale del quadrato. Lo faranno fuori davvero, quel povero diavolo?

No, non ci metteremo a recensire così, l'Ubaldini se lo può scordare.

Perché è evidente, no? Il perfido autore gioca su due fronti, anzi tre. Quello della storia, raccontata come in un romanzo storico. Quello della leggenda, perché Pitagora è più leggenda che storia, come Ulisse, ed è giusto che sia così, in un mondo dove gli dei giocano con gli uomini e bevono ambrosia. E naturalmente quello della matematica, che non può che nascere davvero in un mondo del genere, dove la mente è libera di credere e di negare, di avere il coraggio di trovare gli impalpabili numeri dentro ogni cosa, dal tempio di Apollo al suono delle incudini.

Col cavolo che lo recensiremo così.

Poi finisce che vende ancora di più.

Titolo	La musica dei numeri
Sottotitolo (tweet)	*Un racconto di scoperte e competizioni tra gli allievi della scuola di Pitagora*
Autore	Flavio Ubaldini
Editore	40K Unofficial
Collana	Altramatematica 9
Data Pubblicazione	Luglio 2014
Prezzo	1,99 euro
ISBN	9788898001804
Pagine	Ebook (circa 49)

5. Soluzioni e Note

Settembre!

Ci credete che sia il Doc che il Capo avevano tutto pronto per un'uscita di RM in perfetto orario con l'inizio di settembre? Come al solito uno di noi è sempre poco in sintonia, questa volta si trattava della sottoscritta, presa da una strana estate piovosa e da tante, troppe, attività. Comunque, se leggete queste righe, vuol dire che ce l'abbiamo fatta anche questa volta, ad uscire, che è poi l'unica cosa che conta.

8 *Piotr fotografa la metropolitana di Vienna*

Poco da dire, in questa introduzione, ma quel poco bisogna dirlo.

Mentre io perdevo tempo a mantenere il mio lavoro, intrattenere un paio di famiglie, attraversare confini di tante nazioni, i miei colleghi sono stati in vacanza, e – come sempre – non hanno mai smesso di pensare al loro grande amore. Mentre il Doc gira per la metropolitana di Vienna e perde tempo a controllare le cifre di π, il Capo si interessa del suo grande amore.

9 *Rudy fotografa un calendario*

Ebbene sì, si vede bene il misuratore di tempo nella foto di Rudy? Secondo lui, latitudine e longitudine si capiscono al volo, io ci credo (e poi so dove è andato), e non ci provo nemmeno. Voi ovviamente siete al solito invitati a dire la vostra, e se riceviamo delle belle foto le pubblichiamo volentieri qui o sulla nostra pagina di FB.

Delle mie vacanze non ho nessuna foto scientifica. Però mi piacerebbe aggiungere ancora una foto del nostro CdR estivo, che ha avuto qualche breve minuto di sole, sfruttato a puntino per foto ricordo.

10 *Rudy volanti*

Tutto sommato, un'estate diversa ma allo stesso tempo classica, e per quanto gli anni passino e la nostra energia vada lentamente riducendosi, siamo sempre noi.

Imbarchiamoci allora su questa rubrica di RM dedicata alle soluzioni, con il vostro capitano Rudy e i vostri attendenti di volo Piotr e Alice, che vi trasporteranno allegramente tra varie invenzioni e colorati mondi incorporei e illogici. Se si parte in ritardo non fa niente, l'importante è riuscire a prendere il volo.

5.1 [183]

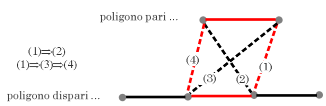
5.1.1 *Le Rouge et le Noir*: omaggio ad Henry

Forse vi ricordate questo problema-omaggio a Stendhal:

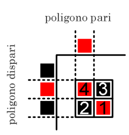
> *Abbiamo due poligoni convessi P_1 e P_2 su due diversi piani nello spazio, per i quali ciascuno degli n lati è etichettato con un numero* 1, 2, 3,...*n; consideriamo l'insieme E dei segmenti che uniscono ciascuno dei vertici di P_1 ai vertici di P_2: tutti questi segmenti, così come i lati dei poligoni, sono tracciati con l'inchiostro rouge o noir in modo tale che non esiste nessun triangolo monocromatico tra tutti quelli che sono formati da un lato di un poligono e da due elementi di E. Il lato* 1 *di P_1 è rosso: nei due casi n*=2012 *e n*=2013*, di che colore sono il lato* 1783 *di P_1 e il lato* 1842 *di P_2?*

In RM184 avevamo pubblicato risposte e soluzioni di ***Alberto R.***, ***GaS*** e ***Franco57***, ed è proprio ad una nota di quest'ultimo che in RM186 rispondeva ***trentatre***, e il mese scorso ci siamo persi la contro-risposta di ***Franco57***, che vi passiamo ora:

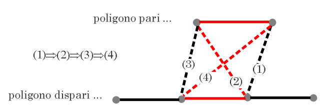
> Trovo stupenda l'idea di ***trentatre*** di mettere i colori su una scacchiera. Come spesso accade, solo cambiando notazione, cambia tutto. In questo caso vedo che rende molto più intuitivo capire quali colorazioni di E sono ammissibili. Per essere onesto non ho però capito se le ultime affermazioni sono dimostrate.
>
> Come estensione alla soluzione che avevo dato in RM184 io mi ero posto un obiettivo diverso e cioè: quali colorazioni dei lati dei poligoni sono compatibili, tali cioè sono che esista almeno una colorazione degli $m \times n$ elementi di E che garantisca la non monocromia di ogni triangolo?
>
> Mi pare che i due obiettivi si possano integrare per capire il fenomeno più in profondità. Per il mio obiettivo la conclusione era stata:
>
> m pari ed n pari $\Rightarrow$ qualsiasi colorazione
>
> m dispari ed n dispari $\Rightarrow$ entrambi i poligoni neri o entrambi rossi
>
> m pari ed n dispari $\Rightarrow$ lo n-gono monocolore e lo m-gono contiene almeno due lati consecutivi del colore dello m-gono
>
> Probabilmente la mia estensione è risultata confusionaria perché in fondo avevo lasciato il testo della soluzione senza estensione! Chiedo scusa, è stata colpa mia che l'ho inviata così, anche se c'erano molte linee vuote tra le due parti. Quando giorni dopo me ne accorsi la rivista non era ancora uscita, mandai la correzione, ma mi sa che era troppo tardi.
>
> Ma non basta, devo fare una seconda ammenda perché nella estensione c'è un'affermazione falsa: : "*... coloriamo sempre di nero i collegamenti ai vertici del poligono dispari che sono tra due lati rossi, che è un'azione obbligata ...*" No, non è vero non è un'azione obbligata! Comunque non invalida la dimostrazione, perché possiamo dire "*decidiamo di colorarli di nero*" visto che stiamo costruendo almeno una soluzione. Invalida però il conteggio a latere delle colorazioni possibili di E basata sui blocchi.
>
> Infine ho provato a fare qualche confronto tra i due tipi di rappresentazione, applicandoli ai ragionamenti della mia soluzione. Ad esempio il seguente che serve per i ragionamenti relativi al caso m pari ed n dispari e credo che siano auto-esplicativi (NB presuppone la *semplice proprietà* che se da un vertice partono due segmenti di E adiacenti dello stesso colore, i lati da quel vertice devono essere dell'altro colore):



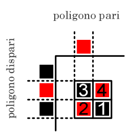
(1) rosso implica



(1) nero implica



(1) nero implica



(1) rosso implica

Si vede che viene fuori il famoso blocco X di ***trentatre*** in entrambi i casi.

Bene, proseguiamo, che ci siamo persi ancora molto altro.

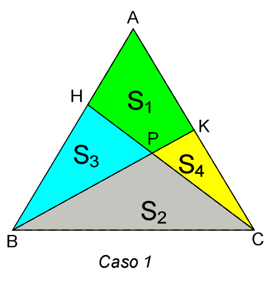
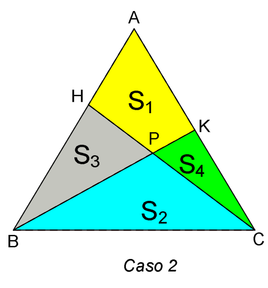
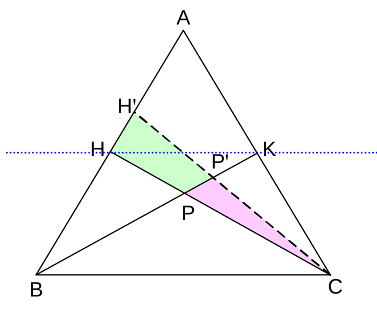
5.2 [186]

5.2.1 Ai bordi del poligono

Di questo problema abbiamo parlato già il mese scorso:

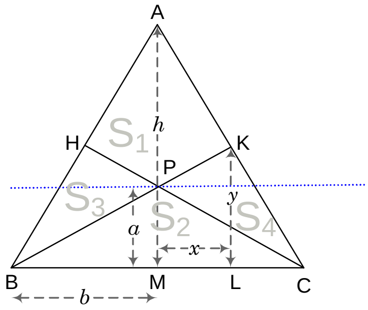
> *Piotr ha tracciato una serie di triangoli ai lati del corridoio di tiro, tutti diversi tra loro anche se hanno tutti la stessa area (che considereremo unitaria).*
>
> *Per ogni triangolo ha poi disegnato due ceviane un po' speciali: infatti, partendo da due angoli diversi, dividono il triangolo in quattro zone, tre triangolari e una quadrangolare: ma la particolarità è che tre delle aree sono equivalenti, ossia hanno tutte la stessa area. L'idea è di lasciare l'area restante (quella non equivalente) "a sabbia", ma mettere giustappunto nelle altre zone fiori di vari colori (un colore per zona); quanto vale ognuna delle aree seminabili?*

Tra le soluzioni in RM187, quella di ***Alberto R.***:, ***trentatre*** e ***Silvano***. Tra quelle perse, per inefficienza della vostra editrice, quella di ***Franco57***:

> Per prima cosa ho pensato di semplificarmi la vita: posto *(ABC)* il nostro triangolo, posso renderlo isoscele mantenendo ancorata la base *BC* e spostando il vertice superiore *A* sopra il punto medio M di *BC*, fino a portarlo in A', come in figura, dove la trasformazione è rappresentata dalle frecce blu. Si tratta di una traslazione costante su ogni retta parallela a *BC*, il cui valore dipende linearmente dalla distanza da *BC*.
>
> In un sistema di coordinate cartesiane ortogonali con centro in *B e* asse *x* lungo *BC*, è $(x,y)\to(x+\alpha y,y)$ con $\alpha=\dfrac{\overline{DM}}{\overline{AD}}$ dove *D* è il piede di *A* su *BC*.
>
> Si tratta di un'applicazione lineare e quindi manda segmenti in segmenti. Inoltre mantiene le aree perché ha determinate unitario. Questo ci legittima a limitarci a risolvere il problema per un triangolo isoscele di base *BC* con le ceviane tracciate da *B* e *C*, potendo scegliere la base del triangolo isoscele equivalente nel quale trasformare il triangolo originale.
>
> La ceviana da *B* incontra il lato opposto in *K*, quella da *C* incontra il suo in *H* e le due ceviane si incontrano in *P*, dividendo così il triangolo nelle 4 zone S_1=(*AHPK*), S_2=(*BPC*), S_3=(*BPH*), S_4=(*CPK*).
>
> 
>
> *Caso 1*
>
> 
>
> *Caso 2*
>
> 
>
>
> Chiamando la zona come la sua area, ci sono due casi da trattare:
>
> 1. $S_3=S_4$, del quale poi vedremo che l'unico sottocaso è $S_3=S_4=S_1$ (con sabbia in S_2);
> 2. $S_1=S_2=S_4$ (con sabbia in S_3), equivalente a $S_1=S_2=S_3$.
>
> Cominciando col primo caso $S_3=S_4$. Possiamo subito osservare che se *H* e *K* sono alla stessa altezza, per

evidenti ragioni di simmetria $S_3 = S_4$, ma se ad esempio alziamo H in H' allora S_3 aumenta di ($HPP'H'$) in verde mentre S_4 diminuisce di (CPP') in rosa e si avrebbe $S_3 \neq S_4$.

Dunque H e K devono essere alla stessa altezza.



Chiamo L il piede di K su BC, h l'altezza AM del triangolo, b la semibase $\overline{BM} = \overline{MB}$. Voglio determinare l'altezza $a = \overline{PM}$ del punto P che evidentemente risiede su AM.

Prima calcolo la posizione di K rispetto agli assi MC e MA, cioè x = ML e y = KL.

I triangoli (BMP) e (BLK) sono simili come pure (CLK) e (CMA), quindi ho il sistema

$\begin{cases} y:(b+x)=a:b \\ y:(b-x)=h:b \end{cases}$ da cui si ricava $x = \dfrac{h-a}{h+a} \cdot b$ e poi

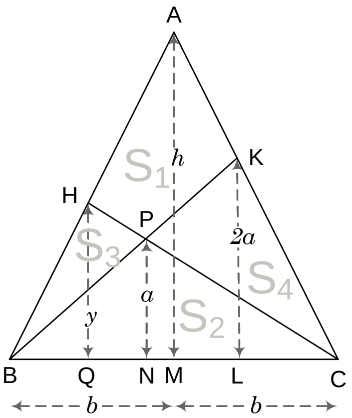
$$S_1 = 2 \cdot S(APK) = 2 \cdot \frac{(h-a)\cdot x}{2} = \frac{(h-a)^2}{h+a} \cdot b \ .$$

Ho anche $S_2 = a \cdot b$ e l'area del triangolo vale $S = b \cdot h$.

Si ottiene $S_3 = S_4 = \dfrac{S - S_1 - S_2}{2} = \dfrac{h-a}{h+a} \cdot a \cdot b = a \cdot x \cdot$

Ora, evitando il caso degenere di ceviane coincidenti con un lato, quindi $0 < x < b$, sarà sempre $S_2 > S_3$. Il caso $S_1 = S_3$ si realizza con $(h-a)\cdot x = a \cdot x$ cioè per $a = \dfrac{h}{2}$.

Poiché S_2 ha stessa base ma metà della altezza del triangolo (ABC), ha anche metà dell'area, quindi abbiamo $\boxed{S_1 = S_3 = S_4 = \dfrac{S - S_2}{3} = \dfrac{S}{6} = \dfrac{1}{6}}$ considerando unitaria l'area del triangolo.



Andiamo adesso al secondo caso: vediamo se è possibile che $S_1 = S_2 = S_4$.

In questo caso P potrebbe non trovarsi sull'altezza AM e il suo piede su BC sarà in un punto N con $\overline{PN} = a$. Con Q indichiamo il piede di H su BC e con y la sua altezza $\overline{HQ}$. Affinché $S_2 = S_4$, il triangolo (CBK), che ha la stessa base di S_2, dovrà avere altezza doppia, quindi $\overline{KL} = 2a$.

Applicando le proporzioni alle copie di triangoli simili (CLK) e (CMA) poi (CNP) e (CQK) e infine tra (BQH) e (BMA) si ottiene:

$$\overline{LC} = \frac{b}{h} \cdot 2a ;$$

$$\overline{BN} = \frac{\overline{BL}}{2} = \frac{\overline{BC} - \overline{LC}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(2b - \frac{b}{h} \cdot 2a\right) = b \cdot \left(1 - \frac{a}{h}\right) ;$$

$$\overline{NC} = \overline{BC} - \overline{LC} = 2b - b \cdot \left(1 - \frac{a}{h}\right) = b \cdot \left(1 + \frac{a}{h}\right) ;$$

$\overline{QC} = \left(\overline{NC} : \overline{PN}\right)\cdot \overline{HQ} = b\cdot\left(1+\frac{a}{h}\right)\frac{1}{a}y = b\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{h}\right)\cdot y$;

$\overline{BQ} = 2b - b\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{h}\right)\cdot y$ ma possiamo anche vedere $\overline{BQ} = \left(\overline{BM} : \overline{MA}\right)\cdot \overline{HQ} = \frac{b}{h}y$,

quindi $\frac{b}{h}y = 2b - b\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{h}\right)\cdot y$ da cui $y = \frac{2ha}{2a+h}$. Affinché sia $S_1 = S_4 = S_2$ si ha che $S(CHB) = S - 2\cdot S_2 = hb - 2ba = (h-2a)\cdot b$ ma anche $S(CHB) = b\cdot y$, da cui $b\cdot(h-2a) = b\cdot y$, cioè $\frac{2ha}{2a+h}h - 2a = \frac{2ha}{2a+h}$, che diventa l'equazione di secondo grado in a $4a^2 + 2ha - h^2 = 0$. Essa ammette una sola radice positiva $a = \frac{-2h+\sqrt{20h^2}}{8} = h\frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{h}{2\varphi}$ per la quale

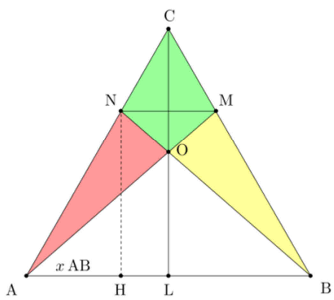
$$\boxed{S_1 = S_4 = S_2 = b\cdot a = b\cdot\frac{h}{2\varphi} = \frac{S}{2\varphi} = \frac{1}{2\varphi}}$$

considerando unitaria l'area del triangolo e vale poco più del 30%. Dunque l'area seminabile non è sempre la stessa, però dipendente solo dalla scelta delle aree e non dalla forma del triangolo. Io suggerirei quella correlata al rapporto aureo, che è più sorprendente.

Bello vero? Al rapporto aureo era giunto anche ***Silvano***. Considerazioni interessanti sono anche giunte dal ***Panurgo***, che ha deciso di inviarcele dopo aver letto RM187:

Pensierino laterale: la presentazione del problema sembra implicare che la soluzione non debba dipendere dalla forma del triangolo. Sotto questa ipotesi possiamo studiare un caso particolare e la scelta più ovvia è di partire da un triangolo equilatero.

Dato che lo scopo è quello di avere tre regioni equiestese sembra ragionevole costruire le due ceviane in modo da sfruttare la simmetria del triangolo per ottenere AON = BMO (vedi figura).



Sul lato AB, a distanza *x* AB dal punto A, segniamo il punto H dal quale innalziamo la perpendicolare che seca il lato AC nel punto N; da N stacchiamo un segmento parallelo ad AB che seca BC in M; le due ceviane, AM e BN, sono congruenti per costruzione, così come AN e BM e quindi i triangoli ABM e AMN che hanno i tre lati congruenti (la base è comune): i triangoli AON e BMO sono congruenti perché si ottengono dai precedenti togliendo lo stesso triangolo ABO.

Verifichiamo se la terza regione equiestesa può essere proprio il triangolo ABO: i triangoli ABN e ABO hanno la base in comune per cui le loro aree stanno in proporzione come le rispettive altezze, HN e LO; ma se vogliamo che sia AON = ABO deve essere ABN = 2ABO e quindi HN = 2LO.

I triangoli BOL e BNH sono simili avendo gli angoli alla base congruenti quindi deve essere BH = 2BL, cioè H deve coincidere con A e HN = LO = 0: in questo caso N coincide con A e M con B e abbiamo la soluzione banale AON = ABO = BMO = 0.

Dunque, la terza regione deve essere il quadrilatero CNOM la cui area può essere calcolata facilmente a partire dal fatto che ABC – (AON + ABO + BMO + CNOM) = 0.

L'angolo in A è di 60° per cui HN = √3x AB mentre possiamo ricavare $\mathrm{OL} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{x}{1-x}\mathrm{AB}$ dalla proporzione $\mathrm{OL} : \mathrm{HN} = \frac{1}{2}\mathrm{AB} : (1-x)\,\mathrm{AB}$.

Abbiamo dunque

$$\mathrm{ABN} = \frac{\mathrm{AB} \times \sqrt{3}x\,\mathrm{AB}}{2} = 2x\,\mathrm{ABC}$$

e

$$\mathrm{ABO} = \frac{\mathrm{AB} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{x}{1-x}\mathrm{AB}}{2} = \frac{x}{1-x}\mathrm{ABC}$$

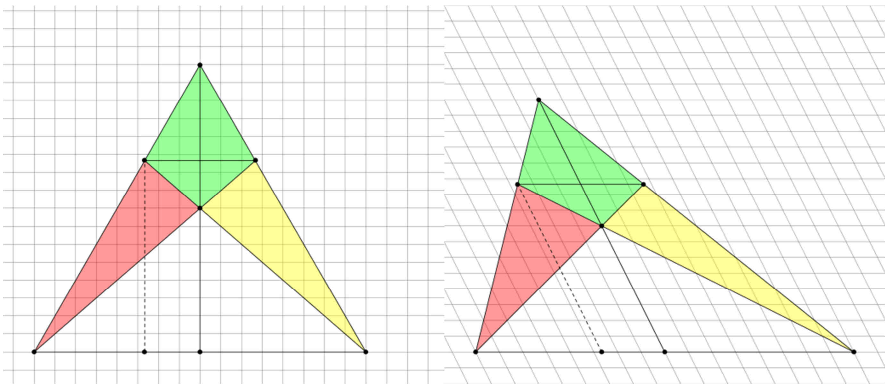
Deve essere CNOM = BMO = AON = ABN – ABO da cui segue

$$\mathrm{ABC} - 3(\mathrm{ABN} - \mathrm{ABO}) - \mathrm{ABO} = \left[1 - 3\left(2x - \tfrac{x}{1-x}\right) - \tfrac{x}{1-x}\right]\mathrm{ABC} = \frac{(1-2x)(1-3x)}{1-x}\mathrm{ABC} = 0$$

Per $x = 1/2$ abbiamo un'altra soluzione banale in cui M, N e O coincidono con C e AON = CNOM = BMO = 0, mentre per $x = 1/3$ abbiamo la soluzione non banale ABO = ABC/2 e AON = CNOM = BMO = ABC/6.

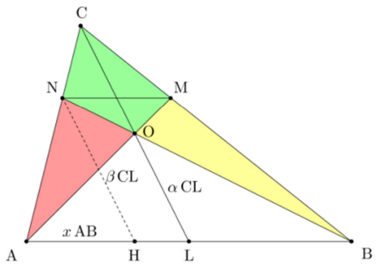
Ma sarà vera la nostra ipotesi iniziale? Osserviamo che è possibile ottenere un triangolo qualsiasi da un triangolo equilatero mediante una trasformazione che può essere divisa concettualmente in due operazioni: 1) una dilatazione che renda congruenti base e altezza e 2) una traslazione parallela alla base del vertice ad essa opposto che renda congruenti gli altri due lati.

Si tratta di una trasformazione affine e le trasformazioni affini conservano i rapporti tra le aree: ce ne possiamo convincere osservando che se sovrapponiamo una griglia "quadrata" alla figura e la sottoponiamo allo stessa trasformazione il numero di "quadratini" per porzione di area non cambia.



Ora è sufficiente passare al limite per il passo della griglia che tende a zero per avere gli stessi rapporti tra le aree. Se poi, come in questo caso, l'area totale dei due triangoli è la stessa, sono uguali anche le aree delle regioni tra loro corrispondenti.

Naturalmente, possiamo partire direttamente dal triangolo qualsiasi.



Sulla mediana CL segniamo il punto O in modo che sia LO = α CL; tracciate per O le ceviane AM e BN utilizziamo l'enunciato del *Teorema di Ceva* per dimostrare che esse secano i rispettivi lati in segmenti proporzionali: sostituiamo in

$$\frac{CN}{AN}\cdot\frac{AL}{BL}\cdot\frac{BM}{CM}=1$$

la frazione AL/BL con 1 (CL è la mediana) e otteniamo AN:CN = BM:CM: la conseguenza è che il segmento MN risulta parallelo ad AB per cui il triangolo CNM è simile al triangolo ABC mentre il triangolo NMO è simile al triangolo ABO.

Da N tracciamo il segmento HN, parallelo a CL e di lunghezza pari a β CL, che seca AB in H, distante x AB da A.

Il triangolo AHN è simile al triangolo ALC per costruzione e β CL : CL = x AB : AB/2, da cui segue $\beta = 2x$; il triangolo BOL è simile, sempre per costruzione, al triangolo BNH e α CL : β CL = AB/2 : $(1 - x)$AB, da cui segue $\alpha = x/(1 - x)$ ovvero $x = \alpha/(1 + \alpha)$ e $\beta = 2\alpha/(1 + \alpha)$, mentre

$$MN=(1-2x)AB=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}AB$$

I triangoli ABC, ABN e ABO hanno la base in comune per cui le loro aree stanno in proporzione come le rispettive altezze:

$$ABN=\frac{2\alpha}{1+\alpha}ABC$$

e

$$ABO=\alpha ABC$$

Le aree di triangoli simili invece stanno tra loro in proporzione come il quadrato delle rispettive basi:

$$CNM=\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2 ABC$$

e

$$MNO=\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2 ABO$$

L'area del quadrilatero CNOM è quindi

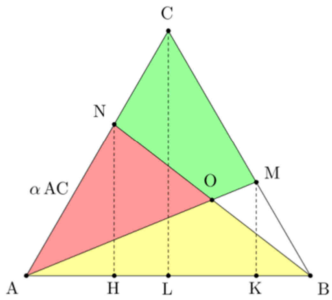
$$CNOM=CNM+MNO=\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2(ABC+ABO)=\frac{(1-\alpha)^2}{1+\alpha}ABC$$

e CNOM = AON quando

$$\frac{(1-\alpha)^2}{1+\alpha}=\frac{2\alpha}{1+\alpha}-\alpha \quad\Rightarrow\quad \frac{(1-\alpha)(1-2\alpha)}{1+\alpha}=0$$

per $\alpha = 1$ ritroviamo la soluzione banale AON = CNOM = BMO = 0 mentre per $\alpha = 1/2$ abbiamo di nuovo AON = CNOM = BMO = ABC/6.

Ma non è questa l'unica soluzione. Se rinunciamo alla simmetria (per un triangolo qualsiasi, "simmetria affine"?) e lasciamo che sia AON ≠ BMO, è facile costruire ABN in modo che sia il doppio di ABO

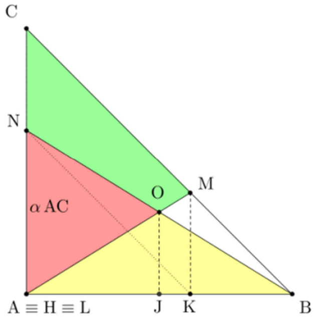


Segnato su AC, a distanza α AC da A, il punto N e tracciata la ceviana, basta prendere O punto medio di BN e tracciare per O la ceviana AM: essa è, per costruzione, la mediana di ABN.

Dato che siamo partiti da AON ≠ BMO, la terza regione equiestesa deve essere ancora una volta il quadrilatero CNOM.

Partiamo ora da ABC = AON + ABO + BMO + CNOM: sostituendo ABN – ABO ad AON, ABM – ABO a BMO e ABO a CNOM abbiamo che ABC = ABN + ABM. Cioè, CL = HN + KM perché i tre triangoli hanno la base in comune.

Per trovare il valore di α per cui CNOM = ABO è conveniente cambiare il triangolo equilatero con un triangolo rettangolo isoscele (il "mezzo quadrato")



Il triangolo BOJ è simile al triangolo ABN ed è JO = HN/2 = AN/2 per cui AJ = AB/2 e il triangolo ABO è isoscele: quindi, anche il triangolo AKM è simile ad ABN e vale la proporzione KM : AK = HN : AB.

Ma AK = HN, AB = AC = CL e la condizione per cui CNOM = ABO è CL = KM + HN: la proporzione precedente diviene KM : HN = HN : (KM + HN), una sezione aurea.

Quindi $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e $ABO = AON = CNOM = \frac{\sqrt{5}-1}{4} ABC$.

Beh, era un peccato perdersi queste due belle digressioni sul tema, vero? È molto bella, come sempre, anche la soluzione che nel frattempo ci ha inviato ***Gnugnu***, ma richiede un sacco di lavoro per inserirla, visto che lui ci manda sempre tutto in pdf, così per questa volta ve la faccio perdere e cerco di non introdurre ulteriori ritardi. Procediamo.

5.3 [187]

Ed eccoci finalmente ai problemi del mese scorso. O meglio al problema, perché solo di uno abbiamo ricevuto una soluzione.

5.3.1 Un gioco che non mi piace

Dagli archivi del Cappo, ricordi di viaggio di qualche anno fa ed un gioco che lui, per sicurezza, generalizza:

Il gioco richiede un mazzo di n carte con m simboli per carta, per cui due carte qualsiasi hanno sempre uno ed un solo simbolo in comune. Dato m, qual è il valore massimo di n? E dati m ed n, qual è la dimensione dell'alfabeto (numero di simboli) s? Qual è (m, n, s) ottimale, con il massimo numero di carte e il minimo numero di simboli?

Beh, con al massimo un paio di settimane a disposizione una sola soluzione è già un ottimo risultato, vediamola, a cura del nostro formidabile ***Alberto R.***:

Un mazzo di N carte, ciascuna con M simboli, scelti da un alfabeto di S simboli.

Le domande riguardano le relazioni matematiche tra N, M ed S, dipendenti dal modo con cui il mazzo è stato costruito, nel rispetto delle seguenti regole:

- ogni coppia di carte ha in comune uno e un sol simbolo;
- è consentito che lo stesso simbolo appaia su più di due carte;

Evidentemente gli autori hanno (dolosamente, ormai li conosco!) omesso di esplicitare una condizione essenziale: **il mazzo deve essere idoneo al gioco descritto**. Senza questa limitazione il mazzo:

1 2 2 2

1 3 3 3

1 4 4 4

1 5 5 5

....

sarebbe lecito, ma non utilizzabile per il gioco che è basato sull'abilità a memorizzare rapidamente i simboli di una carta per poi posare lo sguardo sull'altra carta e confrontare quanto memorizzato con quanto stiamo vedendo. A tal fine la prima regola aggiuntiva che il buon senso ci suggerisce è:

- i simboli presenti su ogni carta devono essere tutti diversi tra loro.

Ma non basta perché il mazzo:

1 2 3 4

1 5 6 7

1 8 9 10

1 11 12 13

....

rispetterebbe tutte tre le regole suddette, ma solo due *grilli*[15] lo userebbero per giocarci.

Non ci resta quindi che ribaltare le seconda regola scrivendo:

- NON è consentito che lo stesso simbolo appaia su più di due carte.

Con queste nuove regole, un buon metodo per costruire un mazzo di N carte, consiste nel disegnare un grafo completo di N vertici (per N grande conviene usare l'equivalente matrice) e numerare progressivamente (in ordine arbitrario) tutti i lati del grafo, poi attribuire ad ogni vertice (che rappresenta una carta) i numeri (simboli) dei lati in esso concorrenti. Ecco, ad esempio, un mazzo di 6 carte:

1 2 3 4 5

1 6 7 8 9

2 6 10 11 12

3 7 10 13 14

4 8 11 13 15

5 9 12 14 15

[15] O meglio *grulli… lapsus* freudiano.

I tre parametri sono legati dalle relazioni M=N−1 ed S= N·(N−1)/2.

Dimostriamo ora che non è possibile fare di meglio, cioè costruire un mazzo di N carte ciascuna contenete M< N−1 simboli, oppure utilizzando un alfabeto con un numero di simboli S< N·(N−1)/2.

Comunque sia stato costruito il mazzo, possiamo considerare la corrispondenza che lega ogni coppia di carte al simbolo che esse hanno in comune. Questa applicazione è iniettiva perché a coppie distinte corrispondono simboli distinti, diversamente ci sarebbero più di due carte aventi in comune lo stesso simbolo, cosa che abbiamo esclusa. Quindi il numero dei simboli non può essere minore del numero delle coppie. Dunque S≥ N·(N−1)/2.

Per quanto riguarda la relazione tra M ed N, ricordiamo che l'unione di due insiemi contenenti x e y elementi non ne contiene $x+y$, ma $x+y-z$, dove z è il numero degli (eventuali) elementi presenti in entrambi gli insiemi. Quindi l'unione della prima carta con la seconda carta non contiene M+M simboli, ma M+(M−1) perché uno è comune alle due carte. Quando aggiungiamo la terza carta arriviamo a M+(M−1)+(M−2) perché la terza carta ha due elementi in comune con l'insieme unione delle due precedenti, e così via N volte, ottenendo, alla fine, S=N·M−N·(N−1)/2. Ma essendo, come abbiamo appena dimostrato, S≥N·(N−1)/2, risulta M≥N−1

Un'ultima osservazione: gli eredi di De Gaulle usano carte con 8 simboli, quindi un mazzo di 9 carte, ma 9 è dispari e una carta avanza. *C'est la grandeur!*

E con questo è tutto. Abbiamo sempre l'intenzione di assorbire i nostri ritardi mensili, chissà se entro la fine dell'anno… Alla prossima!

6. Quick & Dirty

Se sapete giocare a scacchi, sapete che Re e Cavallo contro Re è patta, se non combinate guai. Però supponete di avere solo il vostro Re contro il Cavallo dell'avversario. Riuscite a fornire al vostro Re una strategia che non solo gli consenta di sopravvivere, ma anche di non prendere **mai** scacco? Vince la strategia con meno parole e caratteri.

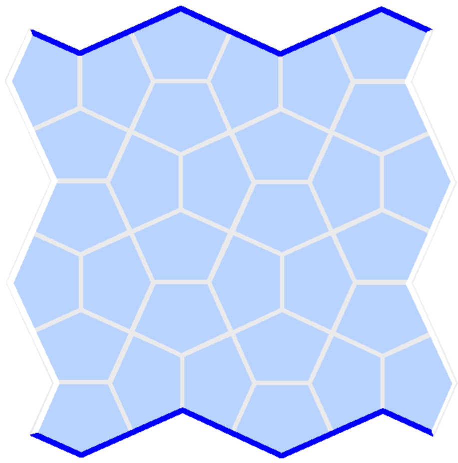
"Sull'altro colore".

Il Cavallo minaccia caselle di colore opposto a quella su cui si trova, quindi se andate su una casella che ha un colore opposto a quello attuale, alla prossima mossa il cavallo minaccerà solo caselle di colore uguale *a quella attuale del vostro Re. E voi siete sull'altro.*

7. Zugzwang!

7.1 Cairo

Adesso, non cominciate a pensare a esotiche egiziane scarsamente vestite: molto più prosaicamente, il gioco si chiama in questo modo perché la scacchiera è una piastrellatura che, nei paesi di lingua anglofona, è nota come *Cairo*.

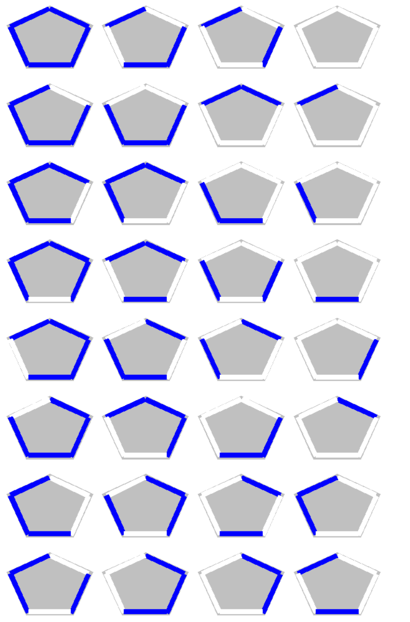


11 *La scacchiera da* Cairo*, giustappunto a forma di Cairo.*

Nella spiegazione di questo gioco, saremo parchi di parole e abbondanti di disegni, tant'è che vi rifiliamo subito la scacchiera: piuttosto strana, come vedete: le sue caratteristiche principali sono (a parte la forma strana delle caselle) quella di avere i lati destro e sinistro *bianchi*, e i lati alto e basso *blu*. Vi invitiamo a notare che non ci azzardiamo a dire che si tratti di una scacchiera sei per sei, visto che se vi prendete la briga di fare i conti vi accorgete che ci sono *trentadue* caselle. E questo numero è importante, visto che è anche il numero delle piastrelle (se preferite chiamarle "pedine", fate pure) che hanno in totale i due giocatori.

Queste piastrelle sono anch'esse pentagonali (esattamente della dimensione di una casella) ma i lati sono colorati in bianco o in blu.

Come ormai avete *sicuramente* calcolato, esistono giustappunto trentadue modi di colorare diversamente di bianco e di blu un pentagono: giusto per comodità (così non avete scuse) trovate tutte le piastrelle possibili nella prossima figura.



12 *Tutti i pezzi del* Cairo

Per prima cosa, queste piastrelle vengono amichevolmente e matematicamente suddivise tra i due giocatori: il giocatore *blu* prenderà quelle che hanno più lati blu che bianchi, il giocatore *bianco* quelle che hanno più lati bianchi che blu ("amichevolmente" per il semplice motivo che 5 è dispari, quindi o l'una o l'altra).

A questo punto, si parte con il gioco.

Ad ogni turno, il giocatore mette una piastrella sulla scacchiera (rigirandola come gli pare), in modo tale che nessuno dei lati della piastrella appoggiata sia a contatto con un lato (anche solo "di bordo" della scacchiera) di colore diverso. Quindi, per intenderci, la prima piastrella in alto a sinistra non potrete mai metterla sul pentagono in basso a sinistra della scacchiera, visto che avreste un lato bianco (della scacchiera) con un lato blu (della piastrella); in compenso, potete metterla in una casella "isolata", con nessuna piastrella attorno. Tutto chiaro? Bene, allora cominciamo a contare i punti.

Quando appoggiate una piastrella, contate quante coincidenze di colori (insomma, quanti "blu-con-blu e bianco-con-bianco) ci sono per questa nuova piastrella (contano *tutte*, non solo quelle del vostro colore): un lato coincidente vi fornisce due punti, due lati tre punti, tre lati cinque punti, quattro lati dieci punti, cinque lati quindici punti: la piastrella "isolata", evidentemente, vi dà zero punti (dei punteggi ne riparliamo al fondo).

La partita finisce quando nessun giocatore può più giocare e il giocatore con il maggior punteggio vince.

Adesso, prima che vi entusiasmiate, vi diamo qualche *caveat*: il principale è che *non conosciamo nessuno che abbia mai giocato una partita a Cairo*, neanche quello che ce lo ha spiegato (supponiamo per la difficoltà di disegnare pezzi e scacchiera).

Qualche dubbio, comunque, ci viene: l'assegnazione dei punti ci pare piuttosto balorda, e anche se per farne quindici dovete probabilmente giocare con un bradipo, la differenza rispetto al "due punti" ci pare francamente eccessiva: probabilmente, bisognerebbe giocare qualche partita e fare qualche statistica.

Mentre giocate, potreste anche provare qualche regola "balorda": chi ce lo ha spiegato suggeriva un paio di regole del tipo "Se con i pezzi che hai puoi fare una corrispondenza di 4 o 5 lati sei *obbligato* a farla, ma ricevi un punteggio *negativo*": ad esempio, rispettivamente -3 e -5, il che darebbe origine (quasi) ad una simpatica simmetria di punteggio. Insomma, è da provare.

Fateci sapere: magari il gioco non è un gran che, ma a disegnare scacchiera e piastrelle sicuramente partono un bel po' di domeniche di pioggia.

8. Pagina 46

Utilizziamo le occorrenze di 01 per dividere la sequenza in un modo particolare: con lo 01, manteniamo tutti gli zeri consecutivi che precedono lo zero iniziale di "01" e tutti gli uni consecutivi che seguono l'uno finale di "01". Ad esempio, raggruppiamo:

...(0000**01**11111)(00**01**)(0**01**11)(**01**)(**01**11)...

dove abbiamo evidenziato gli “01” con sottolineatura e grassetto.

Si noti che abbiamo raccolto *tutti* gli zeri precedenti l’uno e *tutti* gli uni precedenti lo zero: in questo modo, tutti i termini della sequenza originale vengono raccolti attorno ad un gruppo “01”. In questo modo, *tutti* i termini della sequenza vengono raggruppati all’interno dei blocchi in prossimità delle strutture “01”.

Quindi le m occorrenze del gruppo “01” generano m blocchi: è ammissibile, comunque, che la sequenza sia preceduta da un certo numero di uni e/o seguita da un certo numero di zeri (che, secondo le regole date sopra, non possono essere raggruppati):

(...zero o più uni...)(...m blocchi...)(...zero o più zeri...)

Rappresentiamo ora ogni zero con x e ogni uno con y: ad esempio, il blocco 0000011 venga rappresentato da x^5y^2.

La raccolta di tutte le stringhe composte da soli zeri verrà allora rappresentata da:

$$1+x+x^2+x^3+\ldots=\sum_{i=0}^{\infty}x^i=\frac{1}{1-x}.$$

Nello stesso modo, i blocchi di tutte le lunghezze sono dati dall’espressione:

$$\left(x+x^2+\ldots\right)\left(y+y^2+\ldots\right)=\frac{x}{1-x}\frac{y}{1-y}.$$

Quindi una raccolta di m blocchi può essere rappresentata come (le parentesi quadre sono ripetute m volte):

$$\left[\left(x+x^2+\ldots\right)\left(y+y^2+\ldots\right)\right]\ldots\left[\left(x+x^2+\ldots\right)\left(y+y^2+\ldots\right)\right].$$

Un termine non semplificato in questa espressione ha la forma $\left(x^ay^b\right)\left(x^cy^d\right)\ldots\left(x^iy^j\right)$, indicando quindi un blocco di a zeri seguito da b uni, seguito da un blocco di c zeri e da un blocco di d uni, eccetera. L’intera espressione è quindi data da:

$$\left[\left(x+x^2+\ldots\right)\left(y+y^2+\ldots\right)\right]^m=\left[\frac{x}{1-x}\frac{y}{1-y}\right]^m=\frac{x^my^m}{(1-x)^m(1-y)^m}.$$

Per completare la rappresentazione, non ci resta che inserire ogni possibile prefisso segmento composto da uni e ogni possibile suffisso segmento composto da zeri. Questo significa che le sequenze accettabili sono rappresentate dalla funzione generatrice:

$$f(x,y)=\left(1+x+x^2+\ldots\right)\left[\left(x+x^2+\ldots\right)\left(y+y^2+\ldots\right)\right]^m\left(1+y+y^2+\ldots\right).$$

Che si semplifica in:

$$f(x,y)=\frac{1}{1-y}\left[\frac{x^my^m}{(1-x)^m(1-y)^m}\right]\frac{1}{1-y}=\frac{x^my^m}{(1-x)^{m+1}(1-y)^{m+1}}.$$

Questa funzione contiene tutte le sequenze accettabili di qualsiasi lunghezza. Visto che ogni x o y nella sequenza rappresenta un termine della sequenza, possiamo limitarci alle sequenze di lunghezza n considerano solo i termini che contengono un totale di n tra x e y: ogni termine di grado totale n rappresenta una sequenza accettabile di lunghezza n, e la forma non semplificata dell’espressione vista sopra spiega come ognuno dei termini viene costruito.

Non essendo interessati alla costruzione delle sequenze ma semplicemente al contarle, non perdiamo nessuna informazione nel semplificare le espressioni: in pratica, se nella nostra espressione trasformiamo tutte le y in x, quello che dobbiamo calcolare è il numero dei termini in x^n : se indichiamo il coefficiente di x^n in una funzione $g(x)$ come $\left[x^n\right]g(x)$, il numero di sequenze accettabili è dato da:

$$N=\left[x^n\right]f(x,x)=\left[x^n\right]\frac{x^{2\mathrm{m}}}{(1-x)^{2m+2}}=\left[x^{n-2\mathrm{m}}\right]\frac{1}{(1-x)^{2m+2}}.$$

Il coefficiente binomiale $\binom{-n}{r}$ è definito come:

$$\binom{-n}{r}=\frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-r+1)}{r!},$$

e si mostra facilmente che:

$$\binom{-n}{r}=(-1)^r\binom{n+r-1}{r}.$$

E quindi abbiamo:

$$N=\left[x^{n-2\mathrm{m}}\right]\frac{1}{(1-x)^{2m+2}}=\left[x^{n-2\mathrm{m}}\right]\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{-2\mathrm{m}-2}{r}x^r$$

$$(-1)^{n-2\mathrm{m}}\binom{-2\mathrm{m}-2}{n-2\mathrm{m}}=(-1)^{2(n-2\mathrm{m})}\binom{n+1}{n-2\mathrm{m}},$$

$$\binom{n+1}{n-2\mathrm{m}}=\binom{n+1}{2m+1}$$

che è il risultato richiesto.

9. Paraphernalia Mathematica

Il motivo per cui questo pezzo non si intitola "Oltre Euclide" è che siamo ancora fermi per quanto riguarda "Oltre Platone": i giorni di pioggia di questo piovoso agosto 2014 non hanno aiutato. Ci hanno però portato, durante le nostre esplorazioni virtuali, a scoprire alcuni interessanti ed inquietanti risvolti di un oggetto che avevamo imparato a considerare affidabile e anche un pochino noioso... Da cui, il titolo.

Procuratevi carta e matita, che ho intenzione di parlare di geometria senza fare *nessun disegno*, come ebbe a dire un mio famoso concittadino.

9.1 Dr. Jekyll & Mr. Hyde

Se vi fermate all'immagine *pubblica* (intendesi, con questo termine, l'immagine che si dà alle scuole superiori, ferma, giustappunto, ad Euclide) di un triangolo, soprattutto se equilatero, ne ricavate l'idea di un qualchecosa piuttosto noioso, utile quando si tratti di arrampicarsi in un passaggio particolarmente spericolato di una dimostrazione ma, in fin dei conti, di scarsa validità estetica[16].

Una veloce visita all'*Enciclopedia dei Punti Notevoli dei Triangoli* potrebbe forse instillarvi qualche dubbio, visto che ormai, con buona pace dell'ipotesi del continuo, praticamente tutti i punti all'interno[17] di un triangolo hanno un nome.

Secondo la (tranquillamente confutabile) opinione dello scrivente, buona parte di questa fallacia nasce dal considerare, come punti "interessanti", i pochi centri notevoli che si studiano alle superiori, il che non è bello. E la cosa secca ulteriormente quando si consideri che ci sono *un mucchio* di nomi italiani, all'interno (OK, per uno bariamo... ma neanche poi tanto).

Risolviamo subito i problemi notazionali: il triangolo ABC è definito in senso *geometrico*, ossia antiorario, e il lato opposto all'angolo A si chiama a, che è, se serve, anche la sua lunghezza, talvolta indicata con BC ("Perché?" Perché lo dico io).

Cominciamo con qualche proprietà *semplice*: ogni triangolo che si rispetti ha un circocentro, un incentro, un ortocentro, un baricentro, e una serie di *qualcosaltrocentro* che, nel triangolo equilatero, noiosamente coincidono.

Se, sul nostro triangolo equilatero ABC, andiamo a tracciare il cerchio *circoscritto*, e consideriamo la base BC come corda del cerchio, per un qualunque punto P sulla circonferenza possono verificarsi (escludendo i casi strani) due ipotesi:

1. P, rispetto a BC, è dalla stessa parte di A.
2. P è dall'altra parte di BC.

Non è difficile (tant'è che non lo facciamo) dimostrare che nel primo caso tutti i triangoli BPC hanno l'angolo al vertice pari a 60°; un po' più complicato (ma poco: considerate il quadrilatero) è dimostrare che nel secondo caso l'angolo BPC vale 120°.

Ma bando alle ciance, e passiamo alle cose serie.

Dato il triangolo equilatero ABC e un qualsiasi punto P al suo interno, quanto vale la somma delle distanze di P da ognuno dei lati (in funzione di quel che vi pare)?

Ha l'aria abbastanza tosta, e noi abbiamo deciso di fare il minor numero di disegni possibili, visto che la dimostrazione ha, secondo noi, i tratti del genio.

Dei triangoli ABP, PBC, APC, le distanze da P dai lati sono le rispettive altezze rispetto alle basi che sono i lati del triangolo ABC: quindi possiamo esprimere l'area del triangolo come somma delle aree dei tre triangoli con vertice comune P; detto l il lato del triangolo equilatero originale, si ha:

[16] ...vuoi mettere, con un "72°-36°-72°"? Meglio del 90-60-90 di maryliniana memoria.

[17] E anche un bel po' di quelli all'esterno: "Incentro di un triangolo ottusangolo" dovrebbe bastare, come indizio.

$$\frac{1}{2}lh = \frac{1}{2}lh_{ABP} + \frac{1}{2}lh_{PBC} + \frac{1}{2}lh_{APC} = \frac{1}{2}l\left(h_{ABP} + h_{PBC} + h_{APC}\right)$$
$$\Rightarrow h = h_{ABP} + h_{PBC} + h_{APC}.$$

et voila. Come disse un nostro Prof[18], "Non è bellissima?". Certo, rispondiamo noi, ed è anche molto utile.

La parte seccante, qui, è che in quanto italici potemmo vantarcene, di questo oggetto, ma siccome la geometria si ferma ad Euclide, il *Teorema di Viviani* (Vincenzo: 5 aprile 1622 – 22 settembre 1703, tipo simpatico, "da compleanno") sopra enunciato resta un illustre sconosciuto.

Il maestro di Viviani (un tizio che dovreste conoscere: *Evangelista Torricelli*) era stato sfidato da Pierre de Fermat a risolvere il problema di trovare, in un triangolo qualunque ABC, il punto P per cui $PA+PB+PC$ sia minimo.

Torricelli risolve il problema in svariati modi, presumiamo sommergendo periodicamente Fermat di dimostrazioni; quella considerata più elegante, però, è basata su un'applicazione del Teorema di Viviani. La dimostrazione completa si divide in due parti, ma quella elegante è la seconda, relativa ai triangoli in cui nessun angolo superi i 120º (la prima parte dimostra il *Teorema di Steiner* prima di Steiner, ossia che i tre segmenti devono formare un angolo di 120º e che se un angolo è maggiore di 120º il punto P si trova nel vertice di quell'angolo).

Il primo passo di Torricelli consiste nel tracciare attorno al triangolo ABC un altro triangolo XYZ con i lati perpendicolari a PA, PB, PC nei vertici del triangolo originale. Nel quadrilatero $ZAPB$, allora, l'angolo Z vale 60º, visto che l'angolo in P vale 120º (per il Teorema di Steiner e la prima parte della dimostrazione) e gli altri due sono di 90º (per costruzione): esattamente lo stesso ragionamento si può fare per gli angoli in X e in Y, e quindi XYZ è equilatero.

Ma come funziona negli altri casi?

Prendiamo un punto Q diverso da P, ed esaminiamolo come candidato a personaggio principale del nostro teorema.

Siccome appartiene allo stesso triangolo, anche per lui varrà il Teorema di Viviani e quindi, con evidente notazione, avremo che $QA'+QB'+QC'=h$; in questo caso, però, l'ipotenusa QA del triangolo rettangolo QAA' è maggiore del cateto QA', e la stessa cosa i può dire per QB e QC rispetto a QA' e QB'. Quindi, si ha che:

$$QA + QB + QC > QA' + QB' + QC' = h = PA + PB + PC.$$

Il che dimostra che P è la soluzione del nostro problema.

Notiamo inoltre che al più uno dei triangoli può collassare in segmento, portando all'uguaglianza tra ipotenusa e cateto, e quindi la diseguaglianza è sempre valida.

Come al solito, siccome il conto lo ha fatto Torricelli usando il Teorema di Viviani e il Teorema di Steiner prima che lo scoprisse Steiner e trecento anni dopo questa stessa dimostrazione è stata rifatta da *Frederick Riesz*, secondo voi come si chiama il punto? Ma *Punto di Fermat*, evidentemente!

Sempre per il caso in cui l'angolo maggiore sia minore di 120°, esiste un'altra interessante dimostrazione, solitamente attribuita a *Hofmann*, anche se secondo alcuni ci era arrivato prima *Tibor Gallai*.

Dato il solito triangolo ABC e il punto P, ruotiamo il triangolo PAB sul vertice B generando il triangolo $C'P'B$. Questo fa sì che i triangoli $C'AB$ e $P'PB$ siano isosceli, con angoli alla base di 60°, il che implica siano equilateri.

[18] Parlando della formula di Taylor.

Questo significa che qualunque sia la vostra scelta del punto *P*, *A* finirà sempre in *C'*: e quindi sarà equilatero, per ogni scelta del punto *P*, anche il triangolo *P'PB*, e quindi *PB*=*PP'*. La rotazione di 60° porta *AP* in *C'P'*, e quindi *AP*=*C'P'*. Il che implica:

$$PA + PB + PC = C'P' + P'P + PC .$$

Ora, *se avete fatto il disegno*, vi accorgete che il secondo membro non è altro che il cammino *C'P'PC*: quindi, se per una qualche scelta di *P* il cammino risulta rettilineo, abbiamo trovato il punto *giusto*.

Ma siamo sicuri che venga fuori, questo cammino rettilineo? Supponiamo, per il momento, di averlo trovato, e cerchiamo qualche conseguenza.

Se *C'P'PC* è un segmento unico, *P* deve trovarsi sulla linea *C'C* e quindi *BPC'* deve essere un angolo di 60°; tracciato il segmento *C'C*, definiamo il punto *P* come l'incrocio tra il segmento dato e il *cerchio circoscritto* al triangolo *C'AB*: quanto visto all'inizio, ossia il fatto che l'angolo *BPA* deve essere il doppio dell'angolo *BC'A*, ci garantisce che *BPC'*=60°; la rotazione del triangolo porta sempre il punto *P* in un punto *P'* tale che l'angolo *BPP'*=60°. Di conseguenza, se *P* si trova sull'intersezione tra *C'C* e il cerchio circoscritto al triangolo *ABC'*, *P'* sarà su *C'P* e quindi *C'P'PC* sarà effettivamente una retta. Quindi, *P* è proprio quello.

La dimostrazione di Torricelli mostra che la soluzione è *unica*, mentre quella di Hofmann ci fornisce maggiori dettagli sulla posizione del punto: deve essere su *C'C*, dove *C'* è ottenuto costruendo il triangolo equilatero sul lato *AB*.

Adesso, supponiamo voi abbiate fatto un disegno *diverso* dal mio, ad esempio lavorando su *A* anziché su *C*: la cosa non cambia, giusto? Quindi, potete ottenere il punto *P* a partire dai triangoli equilateri *ABC'*, *AB'C*, *A'BC* come intersezione delle *tre* rette *AA'*, *BB'*, *CC'*. Non solo, ma *questi tre segmenti sono uguali e si incontrano in P ad angoli di 60°*.

Sapete tutti che la nostra battuta preferita di Woody Allen è: "*...è conoscibile la conoscenza? E se non lo è, come facciamo a saperlo?"*. Nei problemi di massimo e minimo, ci troviamo in una situazione di questo genere, in quanto bisogna rispondere a tre domande:

1. Esiste una soluzione?
2. È unica?
3. Che proprietà ha(nno)?

Insomma, non è facile. Se riguardate i conti che abbiamo fatto, vedete che Torricelli è partito allegramente dall'assunto che *P* rispondesse "sì" a tutte le tre domande di cui sopra (OK, alla terza la risposta è un po' più articolata): capite che con tutti i punti che ci sono dentro ad un triangolo, pescare proprio quello richiede più che una fortuna sfacciata. Bisogna barare, in un qualche modo.

Siccome Doc potrebbe, a questo punto, decidere di picchiarmi, mi rifiuto di credere che la scelta del punto che fa tre angoli a 120° sia stata dettata da *ovvie ragioni di simmetria*, quindi non sapremo mai come il Nostro ha scelto proprio quel punto lì; diversamente dai segugi, però[19], qui ci basta essere sicuri che sia la scelta giusta, non quale sia stato il calcolo originale. E qui, giustappunto, ci viene in aiuto *Jacob Steiner*. Quando eravamo giovani[20], abbiamo visto la dimostrazione del suo teorema, quindi se vi interessa ve la andate a cercare. Sorvoliamo, e passiamo ad altro.

Sempre restando nell'ambito dei teoremi che li ha trovati uno ma sono attribuiti a un altro, abbiamo un caso sospetto: conoscete il *Teorema di Napoleone*? Dice che:

> Dato il triangolo qualsiasi *ABC*, si considerino i centri *X*, *Y* e *Z* dei triangoli equilateri *C'AB*, *A'BC* e *B'CA* costruiti sui suoi lati. Essi definiscono un triangolo equilatero.

[19] La solita citazione di Thurber preferita da Rudy: "*Allevare un segugio è molto frustrante: quando lo chiami, non gli importa nulla di dove sei. Quello che lo entusiasma, è* come ci sei arrivato".

[20] *Il problema dei tre sindaci*, RM008, soluzione in RM009.

Il caso è "sospetto" nel senso che pare Napoleone "comprasse" i teoremi[21], e che in realtà la cosa sia stata dimostrata da qualcun altro; in segno di protesta, alcuni matematici antinapoleonici (o, semplicemente, un po' più interessati alla bellezza delle dimostrazioni) hanno cercato una dimostrazione alternativa a quella dell'*Empereur*; e, secondo lo scrivente, hanno ottenuto una buona cosa.

Dato il triangolo ABC, tracciamo i cerchi circoscritti ai tre triangoli equilateri: da questo momento possiamo dimenticarci i triangoli, visto che lavoreremo solo sugli archi maggiori dei cerchi (quelli esterni al triangolo originale).

Siano P e Q le intercette con i due archi di cerchio di una retta passante per A, rispettivamente dalla parte di B e C; tracciando le rette PB e QC si vede che gli angoli BPA e CQA sono di 60°: di conseguenza, le due rette si incontreranno in R sul terzo cerchio formando anche qui un angolo di 60°. Questo significa che per ogni punto P sull'arco AB possiamo individuare un triangolo equilatero PQR che circoscrive il triangolo ABC con il vertice sugli archi dati: individuato il maggiore di questi triangoli, il teorema segue immediatamente.

Uno dei problemi più interessanti, in questo campo, è però relativo ai cosiddetti insiemi "di diametro 1": un insieme di punti sul piano ha diametro d se non esistono due punti dell'insieme tali che la loro distanza sia maggiore di d: per vedere un esempio facile, consideriamo un cerchio di raggio 2: il diametro dell'insieme sarà, evidentemente, 4; un esempio un po' più complicato (e motivo della formulazione "negativa" della definizione) può essere il medesimo cerchio al quale sottraiamo la circonferenza: in virtù appunto della definizione "negativa", anche questo cerchio avrà diametro 4.

Consideriamo ora tutti gli insiemi sul piano aventi diametro 1, siano essi insiemi di punti o regioni continue: esiste un graziosissimo teorema che sostiene:

> Qualsiasi insieme di punti sul piano avente diametro 1 può essere completamente coperto da un triangolo di lato $\sqrt{3}$.

La cosa potrebbe sembrare piuttosto immediata: il cerchio inscritto nel triangolo ha anche lui diametro 1, quindi in teoria basta prendere il cerchio, coprire l'insieme qualsiasi di diametro 1 e poi sostituire il cerchio con il nostro triangolo; facile, no?

No, perché esistono degli insiemi di diametro 1 che *non possono essere coperti dal cerchio*: ad esempio, un triangolo equilatero di lato 1 per essere coperto da un cerchi necessita quantomeno del suo circocerchio, che ha diametro $2/\sqrt{3}$, maggiore di 1. Il che, tra l'altro, mostra che abbiamo a che fare con un problema tutt'altro che semplice.

Il nostro insieme di punti può essere tutto contenuto in una striscia del piano, definita da due rette parallele: e, per ogni direzione, esiste una striscia di larghezza minima che contiene l'insieme.

Consideriamo una di queste strisce di larghezza minima, formata dalle rette m e n. Se teniamo conto del fatto che il nostro insieme potrebbe non avere un bordo, vediamo che si possono avere due casi: ci possono o non ci possono essere punti dell'insieme su m e/o n; in entrambi i casi, sappiamo comunque che anche il minimo ravvicinamento tra le due linee porterebbe un pezzo del nostro insieme fuori dalla striscia.

Se supponiamo ora che la nostra striscia sia larga più di 1, effettuiamo un ravvicinamento delle due linee ella stessa entità da entrambe le parti: come detto sopra, questo porterà ad avere (da entrambe le parti) dei punti che si troveranno al di fuori della striscia: due di questi punti al di fuori della striscia (uno per parte) avranno distanza tra di loro maggiore o pari all'ampiezza della striscia precedente il ravvicinamento: siccome però la distanza massima all'interno del nostro insieme è al più 1, *l'ampiezza massima delle strisce minime vale* 1.

Siano ora *aa'*, *bb'*, *cc'* tre strisce minimali contenenti il nostro insieme e inclinate tra di loro di 60°: le tre strisce definiscono tre triangoli equilateri *abc* e *a'b'c'* che coprono il

[21] Sembra comprasse anche le partite a scacchi. Comunque, sempre meglio di qualcun altro che si è attribuito, tre anni fa, il Teorema di Pitagora.

nostro insieme, o meglio, *l'area comune* (esagonale) ai due triangoli copre l'insieme. Per ogni punto *P* del nostro insieme tracciamo le sei perpendicolari ai lati dei due triangoli equilateri e applichiamo il *Teorema di Viviani*: la somma delle lunghezze di quelle relative ad un triangolo è pari all'altezza del triangolo, ossia, con ovvia notazione:

$$\begin{aligned} d + e + f &= h \\ x + y + z &= k \end{aligned}.$$

Ma le due rette che formano una striscia sono *parallele*, e appartengono ciascuna ad un triangolo: quindi, le sei perpendicolari formano tre segmenti di lunghezza rispettivamente $d+x$, $e+y$, $f+z$. Ognuno di questi segmenti, però, non è altro che la *larghezza di una striscia*, che non può essere maggiore di 1, come visto. Quindi, la somma delle due altezze del triangolo deve essere *minore o uguale a* 3, ossia almeno una delle altezze deve essere non maggiore di 3/2, e quindi il lato del relativo triangolo equilatero deve essere non maggiore di $\sqrt{3}$. Da cui, *qualsiasi insieme di diametro* 1 *può essere coperto da un triangolo equilatero di lato* $\sqrt{3}$.

...Ma ve l'aspettavate, che una cosa di cui si parla così poco a scuola avesse tanti *lati interessanti*?

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms