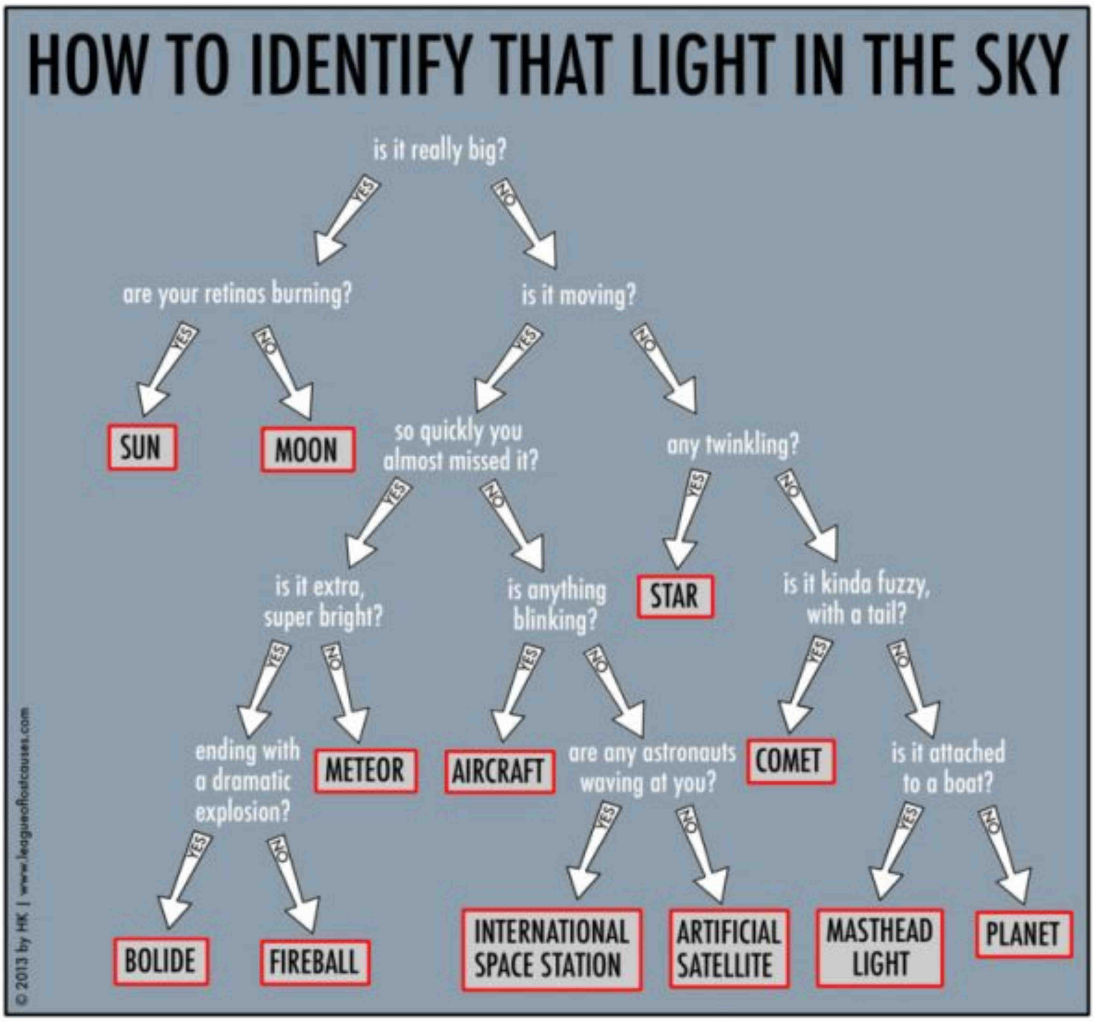
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 186 – Luglio 2014 – Anno Sedicesimo



1. I Dioscuri di Rousseau ... 3

2. Problemi ... 10

2.1 Ai Bordi del Poligono ... 10
2.2 Una GROSSA scacchiera ... 11

3. Bungee Jumpers ... 11

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa ... 12

4.1 Matematica e Infinito ... 13
4.2 Più Per Meno Diviso ... 15
4.3 La Matematica dei Pink Floyd ... 17

5. Soluzioni e Note ... 18

5.1 [183] ... 19
5.1.1 Si riparte con il tiro con l'arco! ... 19
5.1.2 *Le Rouge et le Noir*: omaggio ad Henry ... 21
5.2 [184] ... 23
5.2.1 I guardiani del bosco matematico ... 23
5.3 [185] ... 24
5.3.1 Ho troppe idee ... 24
5.3.2 Resistere, resistere, resistere! ... 28

6. Quick & Dirty ... 31

7. Pagina 46 ... 31

8. Paraphernalia Mathematica ... 32

8.1 Miele e cannoni – 1 – Cheppalle! ... 32

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM186 diffonderà 3132 copie e il 11/07/2014 per Google eravamo in 11'700 pagine.

…e l'UFO smette di essere "unidentified". Senza tirare in ballo alieni o cose simili. Dalla "Lega delle cause perse" (http://www.leagueoflostcauses.com/) e dalla NASA (http://apod.nasa.gov/apod/ap140609.html): che, secondo i complottisti, fa questi disegnini per nascondere il fatto che sta studiando un disco volante (serve per arrivare su Marte, dicono: http://www.lastampa.it/2014/06/29/scienza/arrivano-i-dischi-volanti-ma-non-sono-ufo-outEVUfYLDttKp9l6luKDL/pagina.html).

1. I Dioscuri di Rousseau

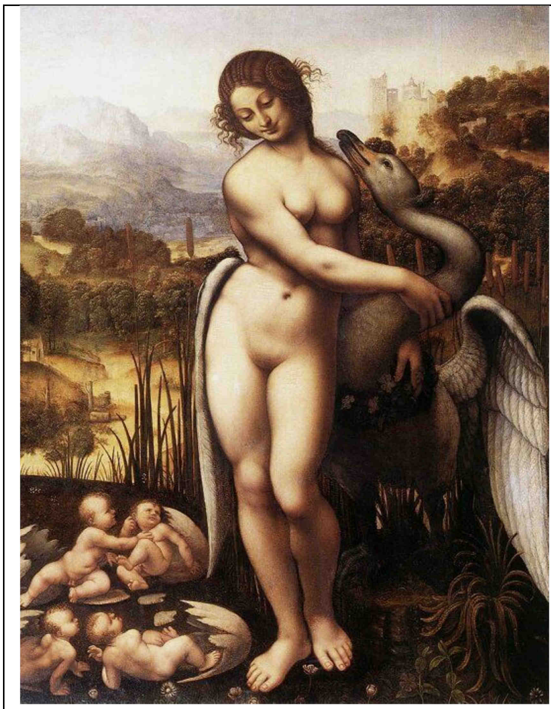
"È curioso vedere come il genio moltiplichi gli uomini e li metta in condizione di brillare in tutto ciò che intraprendono (…) fu eletto Professore di Filosofia senza concorso, e questo non è sorprendente; ma, nello stesso periodo, lo si vedeva dirigere l'artiglieria, le fortificazioni, occuparsi di dighe che faceva erigere per opporsi alla furia d'un torrente devastante, occuparsi degli archivi, istruire coloro che lavoravano alle riparazioni della Cattedrale; e infine cooperare con dei sapienti ecclesiastici alla traduzione della Bibbia. Quando qualcuno lo consultava era sempre certo di ricevere dei consigli saggi, dei nuovi punti di vista e dei piani brillanti"
(Jean Senebier, Histoire Littéraire de Genéve, vol. 1. P. 107-108)

Chissà come sarebbe stata la mitologia occidentale, se nell'antica Grecia fossero già stati disponibili gli strumenti raccontati nei telefilm polizieschi di oggi. Quale sesso del nascituro avrebbe preannunciato l'ecografia ai genitori di Tiresia, che visse metà vita da uomo e metà da donna? Quali sarebbero stati i risultati delle analisi di paternità richiesti dai mariti delle molte amanti di Zeus? A giudicare dalla tradizione, non c'è dubbio che il Padre degli Dei avrebbe lasciato tracce dei suoi geni in uno stuolo di dei, semidei e mortali, ma resta il dubbio se il DNA di un dio sia simile, leggibile, individuabile come tale, al pari di quello umano. Anche perché il nostro non esitava a trasformarsi in toro, cigno, pioggia, insomma in qualsiasi essere (vivente o meno) pur di ottenere le grazie della pulzella di turno.

È verosimile che, almeno dal punto di vista dell'indagine, il caso più interessante per gli agenti dell'antico CSI-Sparta sarebbe stato quello di Castore e Polluce. Gemelli, figli della Leda sedotta dal Cigno, hanno nel loro appellativo comune ben rappresentata la loro origine divina, visto che sono chiamati Dioscuri (Διὸς κοῦροι), ovvero letteralmente "figli del dio". Ma la mitologia ha questo potere supremo, questa imbattibile forza del non dover sottostare al Principio di Non Contraddizione; e quindi è del tutto lecito inseguire quelle versioni della storia che, pur vedendoli sempre come fratelli indivisibili, riducono la loro stretta parentela solo ai geni materni, e non a quelli paterni.

Ci vuole un po' d'ordine: sarà pertanto opportuno partire da lei, Leda, che passa alle cronache mitologiche come figlia di Testio, e che doveva essere davvero bellissima. Da questo punto di vista non scherzava neppure sua sorella Altea, tant'è vero che i due nomi femminili, per quanto un po' retrò, sono ancora reperibili negli uffici dell'anagrafe odierna. Leda è così incantevole da riuscire a fare un matrimonio regale: va infatti sposa a Tindaro, re di Sparta, e le leggende non narrano di un matrimonio infelice. Certo è che la fama della bellezza di Leda si fa strada fino sulle pendici dell'Olimpo, e quello sfasciafamiglie di Zeus non ha nessuna intenzione di lasciar tranquilla la regale coppia spartana.

Appurate le preferenze estetiche della fanciulla, il re degli dei si trasforma in cigno, e in cotante fattezze si appresta a sedurre la giovane regina. Come sempre in questi casi, non c'è speranza per la fanciulla di resistere alle arti seduttive del dio, e infatti l'amplesso si consuma; e non resterà certo senza conseguenze.



1 *Leda, il Cigno e quattro pargoli famosi, come li immagina Leonardo da Vinci (Leda di Salisbury, opera di Cesare da Sesto)*

A questo punto, la mito-biologia decide di lasciare il segno: anziché partorire semplicemente qualche pargolo divino, Leda riesce a deporre una coppia di uova. Non è del tutto chiaro (ma forse agli antichi Greci la cosa pareva naturale) per quale ragione la femmina umana, seppur sedotta da un dio in forma di volatile, dovesse ridursi a covare uova tradendo così la sua opulenta natura di mammifero; fatto sta che dalle due uova così misteriosamente deposte nascono due coppie di bebè; dal primo escono fuori due gemelline che, figlie di tanta madre, non possono essere men che splendide: Clitennestra, sfortunata moglie del superbo Agamennone, comandante in capo della spedizione greca alla volta di Troia; e nientepopodimeno che Elena, che quella fatidica guerra scatenò, proprio a causa del suo incontenibile fascino. Vale forse la pena ricordare che la bella Elena era anch'essa regina di Sparta, moglie di Menelao, fratello di Agamennone, già menzionato come marito di Clitennestra. Insomma, una coppia di fratelli regali aveva preso in spose una coppia di sorelle dalla bellezza indescrivibile, anche se quella di Elena era verosimilmente ancora più spudorata di quella della sorellina moglie dell'irascibile Atride.

E nell'altro ovetto? Beh, l'abbiamo già annunciato: nel secondo uovo ci sono loro due, gli inseparabili Castore e Polluce, i Dioscuri, i "figli del dio". Normalmente, la mitologia attribuisce il titolo di "semidio" ai figli di un essere umano e di una divinità[1], ma con Castore e Polluce le cose non sono così ovvie. Il loro soprannome, e non solo quello, lascia intendere che l'origine divina fosse così caratteristica in loro da poterli considerare degli dei senza tare congenite: e il culto di cui furono onorati in molte parti del mondo antico non aveva davvero nulla da invidiare a quello tributato ad altro divinità.

D'altra parte, nell'Iliade vi è un passaggio in cui Elena si affaccia alle mura di Troia cercando di scorgere nella marea dell'esercito acheo proprio i suoi fratelli, senza riuscirci; e di lì a poco la informano che i gemelli non sono potuti giungere sotto le porte di Ilio per l'ottima ragione che sono deceduti altrove; e, a prendere per buona l'affermazione, si sarebbe risolto in maniera inequivocabile il dubbio sull'immortalità (o meno) dei gemellini.

Naturalmente, il fascino della mitologia sta tutto nelle stranezze e nelle situazioni particolarmente complicate: variazioni e stranezze che si ritrovano pari pari nelle opere d'arte che la trattano. Il caso di Leda e il Cigno, poi, è particolarmente curioso, perché è virtualmente certo che Leonardo da Vinci avesse dipinto un quadro sull'episodio, con Leda nuda in piedi e il cigno avvinghiato a lei: il capolavoro leonardesco è andato perduto, ma ne abbondano copie di artisti di tutto rispetto; ed è curioso come queste copie, pur evidentemente ispirate dalla stessa matrice, coniughino in maniera diversa i dettagli relativi alla prole; in alcuni casi si vedono due uova e quattro bambini, in altri un solo uovo, in altri ancora due pargoli senza uova, e naturalmente anche delle Lede e dei cigni indisturbati senza minorenni nei dintorni. Anche per questo, non sarà certo sorprendente se la versione più spesso ripetuta, in merito ai rapporti dei Dioscuri con Sorella Morte, sia

[1] Soprattutto quando la divinità in questione è il sommo Zeus.

quella che non li annovera entrambi tra gli uomini né quella che li vorrebbe entrambi dei, ma la via di mezzo che li definisce uno divino e uno mortale.

È infatti a questo punto che dovrebbero entrare in causa gli indagatori moderni del DNA. Per quanto sedotta dal fascino di Giove, Leda era pur sempre moglie legittima di Tindaro, e si narra che, per i capricci del Fato (e per i pasticci della biologia), i due inseparabili fratelli fossero in realtà uno figlio di Zeus, l'altro figlio di Tindaro. Fratellastri, quindi, ancorché gemelli[2]; ma di natura diversissima soprattutto per quanto riguarda i rapporti con la vecchia signora armata di falce, perché Polluce, figlio di Giove, era immortale, mentre Castore, per quanto figlio di re, era solamente un mortale[3].

2 *Castore e Polluce a Torino, di guardia al Palazzo Reale*

Quest'interpretazione mediana, con un gemello mortale e uno immortale, è senza dubbio quella più affascinante, perché dà adito all'aneddoto più romantico sui Dioscuri. Anche perché, a ben vedere, non è che Castore e Polluce si siano guadagnati la fama universale che hanno per gesta o imprese particolari: sì, certo, Castore era celebre per la sua insuperata capacità di domare i cavalli, Polluce era imbattibile nella nobile arte del pugilato, che secondo alcuni autori fu inventata e regolamentata proprio da lui; ma, insomma, in un mondo pieno di fantasmagoriche meraviglie come quello della mitologia greca, queste sono davvero cosucce.

Altro? La partecipazione alla spedizione degli Argonauti (ma qui il vero protagonista è Giasone), un paio di città fondate, un salvataggio della sorellina più bella del mondo, una caccia al cinghiale, una tresca con un paio di signorine (in un certo senso quasi cugine, visto che erano promesse spose ai figli, pure essi gemelli, dello "zio" Afareo, fratello di "papà" Tindaro), ma tutto sommato davvero poca roba.

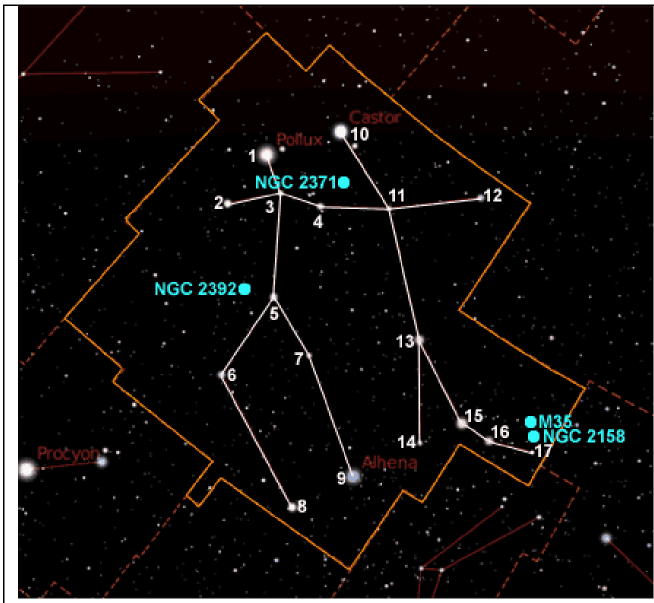
No; quello che caratterizza fortemente i Dioscuri, più della parentela, più della natura totalmente o parzialmente divina, più delle imprese eroiche o erotiche, è semplicemente l'indissolubile legame reciproco. Facevano tutto insieme: non esistono "le gesta di Castore" o "le imprese di Polluce", ma solo azioni e sentimenti condivisi, e questo li porta in breve ad essere rappresentati come i protettori dell'amicizia fraterna, o forse dell'amicizia tout-court.

È per questo che l'aneddoto più significativo su Castore e Polluce è quello che richiede proprio la diversa mortalità della coppia: si narra che, mentre cercavano di rapire le promesse spose dei cugini Afaridi, Castore fu ferito a morte. Il fratello immortale non riusciva a sopportare l'idea di vivere i suoi giorni senza il suo compagno, quindi implorò Zeus di concedergli la grazia di rendergli il fratello. Con soddisfazione di tutti, si giunse al compromesso che vedeva Castore e Polluce passare un giorno nell'Ade e un giorno

[2] … e gemelli assolutamente monozigoti, a giudicare dalle rappresentazioni iconografiche: si somigliano sempre come due gocce d'acqua.

[3] Per inciso, i seguaci di questa versione aggiungono che la distonia regnasse anche tra le sorelline, con Elena divina e Clitennestra mortale; ma va precisato che esistono versioni buone quasi per qualsiasi combinazione, con Elena, Castore e Polluce figli di Zeus nati da un uovo e Clitennestra figlia di Tindaro mortale e nata normalmente; o con i Dioscuri entrambi divini mentre le due sorelle entrambe mortali, e così via…

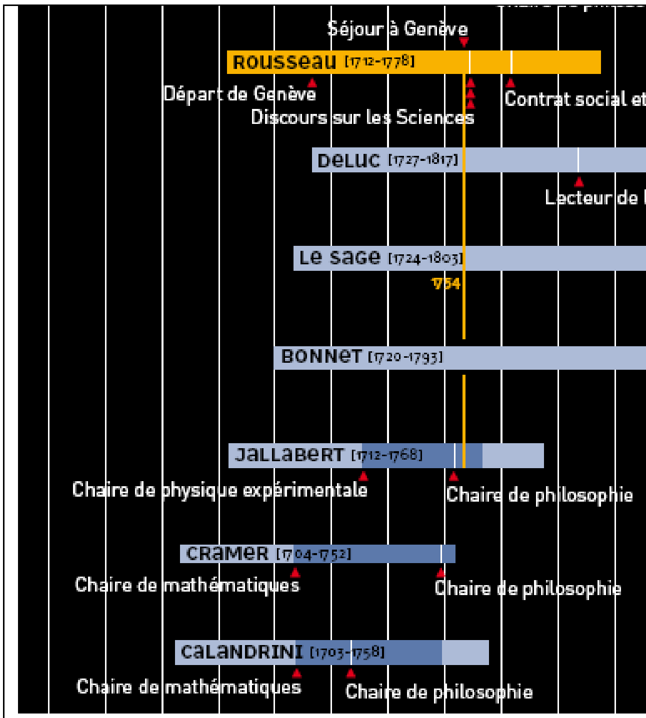
sull'Olimpo, in una sorta di bilancio compensativo dove due mezze morti equivalevano ad una.



3 *La costellazione dei Gemelli*

Una compensazione ulteriore, certamente più duratura e più coinvolgente, almeno per gli uomini contemporanei che ogni tanto alzano gli occhi al cielo (e tutto sommato perfino per i lettori degli oroscopi) è il vederli immortalati in una bella costellazione, a mezza strada tra Orione e il Toro, caratterizzata da due stelle vicine e egualmente brillanti, che naturalmente si chiamano come loro, Castor e Pollux; la costellazione dei Gemelli. Normalmente le "linee di unione" che vengono disegnate per tenere insieme i punti corrispondenti alle stelle della costellazione sono sommariamente tirate col risultato che i Gemelli sono spesso un banale rettangolo: ma se ci si prende la briga di considerare anche qualche stellina minore e si usa un po' di accortezza nel modo di disegnare le righe di unione, è facile fare in modo che la costellazione appaia come due persone che si tengono per mano.

È insomma facile capire perché, fino a qualche tempo fa, quando la cultura classica era più diffusa e presa a modello, non fosse insolito soprannominare "Castore e Polluce" una coppia di amici inseparabili. Probabilmente ogni disciplina, ogni epoca storica, quasi ogni ambiente ha una coppia di indivisibili che si meritano l'appellativo. E sì, certo, ce ne sono anche in matematica.



4 *Il periodo d'oro di Ginevra*

Ci sono tempi fortunati, ci sono luoghi fortunati. E, inevitabilmente, ogni tanto gli dei concorrono a far sì che tempi e luoghi fortunati coincidano. Nel raccontare vita e opere di grandi uomini del passato, perfino quando lo si fa in via giocosa e dilettantesca come è nostra consolidata abitudine, è impossibile non notare quanto siano frequenti quelle situazioni sorprendenti in cui, quasi all'improvviso, nello stesso punto dello spazio-tempo einsteniano si coagulino molte diverse grandi personalità. La saggezza popolare riassume probabilmente questi eventi con la placida osservazione che "i tempi erano maturi", ed è quasi certo che le cose stiano proprio in questi termini. Non sappiamo con precisione i motivi che portarono l'Atene di Pericle ad essere quel crogiuolo di grandi personalità. Abbiamo ottime ipotesi, ma nessuna reale certezza, per capire come mai la Firenze del

Rinascimento abbia riunito nel volgere di pochi decenni i maggiori capolavori artistici di un intero millennio; possiamo in qualche modo giustificare (proprio con l'osservazione di cui sopra, sulla maturazione temporale), ma non realmente capire le ragioni dell'esplosione della fisica dei primi trent'anni del Novecento. Possiamo certo trovare cause e concause, ma resta il fatto che la maggior parte delle volte si eleva un senso di stupore nel vedere come grandi intelletti, quasi inevitabilmente, crescono ed operano insieme ad altri grandi intelletti.

Qualcosa del genere accadde nella prima metà del diciottesimo secolo a Ginevra. La città svizzera non era a quei tempi ancora svizzera, pur se un trattato di "alleanza perpetua" la legava alla Confederazione Elvetica[4]: era invece la capitale dell'omonima Repubblica di Ginevra, fondata da un gruppo di calvinisti e valdesi durante la Riforma, nel 1535. In precedenza, la città era indipendente, ma governata dal proprio vescovo: l'adesione al protestantesimo, e soprattutto la sua identità di principale centro delle teorie calviniste, la fecero optare verso la forma repubblicana. Da allora fino al 1815, quando in occasione del Congresso di Vienna chiese ed ottenne l'adesione alla confederazione svizzera, Ginevra rimase un esempio brillante di democrazia indipendente, diretta e paritaria.

Il suo figlio più famoso è stato Jean-Jacques Rousseau, le cui dottrine politiche e filosofiche ben difficilmente avrebbero potuto maturare ed esprimersi con la forza che hanno avuto se il suo autore fosse nato in una città meno indipendente e democratica. Ed è proprio per il clima liberale che forse si ritrovano, all'epoca di Rousseau, un gran numero di intelligenze riunite nell'ospitale citta lacustre. Tra queste, anche intelligenze matematiche.


5 *Gabriel Cramer*

Gabriel Cramer nacque a Ginevra il 31 Luglio 1704. Figlio di un medico che riuscì a far laureare tutti e tre i suoi rampolli (i due fratelli di Gabriel diventarono uno medico e l'altro avvocato), ebbe un'infanzia agiata e un'adolescenza tranquilla. Quella di Gabriel è un'intelligenza precoce e brillante: ha solo diciott'anni quando ottiene un primo dottorato per una sua tesi sulla natura del suono, e a malapena venti quando concorre per una cattedra universitaria nella sua Ginevra. Ma non deve stupire troppo la giovane età: forse erano davvero altri tempi, o forse era proprio una particolare e feconda congiuntura, fatto sta che l'*Académie de Calvin*[5], in quel 1724, oltre al ventenne Gabriel vede concorrere anche un altro ragazzino, di appena un anno più vecchio: Giovanni Ludovico Calandrini.

I concorrenti alla cattedra sono tre in tutto: il terzo si chiama Amédée De La Rive, ed è un vecchietto ventiseienne; i commissari si trovano in serio imbarazzo, perché tutti e tre i candidati mostrano di avere le qualità giuste per il posto in palio. Con lodevole saggezza, la commissione decide infine di assegnare la cattedra a De La Rive, facendo conto sulla maggiore età del giovanotto, ma fanno in modo di trattenere anche Cramer e Calandrini all'interno dell'ateneo, perché era palese che i due ragazzini

[4] Confederazione che, a quel tempo, si chiamava ancora "Confederazione dei Tredici Cantoni".

[5] Cioè *Accademia di Calvino*, nome dell'università ginevrina.

avrebbero avuto un futuro brillante. La cattedra in palio è quella di Filosofia, ma a quei tempi, e in quei paesi, il concetto di "filosofia" è ben diverso da quello odierno, se non altro perché contiene al suo interno anche la "filosofia naturale", che di fatto è fisica, e già fisica studiata con strumenti matematici. L'università divide pertanto in due la cattedra, creando – oltre alla Cattedra di Filosofia vera e propria, che assegnano a De La Rive – anche una Cattedra di Matematica, che offrono in gestione condivisa a Cramer e Calandrini.

Nasce qui la leggenda e il soprannome di Castore e Polluce per i due ventenni: come fratelli, i due si dividono i corsi di insegnamento, con Gabriel che si incarica di geometria e meccanica mentre Ludovico insegna algebra e astronomia. Sono indivisibili, proprio come i Dioscuri mitologici, e diventano presto una vera istituzione, per quanto giovane e giovanile, dell'università di Ginevra. E non sono solamente una coppia simpaticamente originale, sono anche dei veri innovatori: sono loro i primi a tener lezione in francese, anziché in latino, come era d'uso consolidato all'Università.

La presenza di Calandrini consente anche a Cramer di avventurarsi in lunghi viaggi di studio in tutta Europa: lavorerà a Basilea con Johann Bernoulli, conoscerà il più grande tra i matematici svizzeri, Eulero, poco prima della partenza di questi per San Pietroburgo; arriverà in Inghilterra e si incontrerà con Halley, De Moivre e Stirling; arriverà in Olanda, e poi naturalmente a Parigi, dove insegnano autorità quali Maupertuis e Buffon.


6 *Giovanni Ludovico Calandrini*

E Calandrini? Beh, non sono considerati fratelli gemelli per nulla; Calandrini fa esattamente le stesse cose di Cramer: viaggia per l'Europa, dandosi il cambio con Gabriel, imparando e tessendo rapporti internazionali. Viaggerà tre anni tra la Francia e l'Inghilterra, portando avanti un lavoro costante, meritevole anche se non tale da sfolgorare negli annali della matematica: opere di trigonometria, testi sulla teoria delle quadrature e delle derivate, trattati sulle serie infinite e di logica. Scrive di aurore boreali, di comete, perfino sugli effetti della folgore; e naturalmente varia i suoi interessi, dedicandosi anche alla botanica, studiando le differenze tra le superfici delle foglie o i metodi di fertilizzazione. Il suo maggior contributo alla scienza è comunque la traduzione dei *Principia Mathematica* di Isaac Newton, perché non è solo una conversione in lingua francese: la arricchisce di centinaia di note a margine, alcune delle quali molto lunghe e chiarificatrici. In un caso particolare, trova e corregge un errore di calcolo che il sommo inglese aveva compiuto in merito all'apogeo lunare, cosa che gli vale l'appellativo di "correttore di Newton".

Nel 1734 l'Università gli riserva una cattedra in Filosofia, e il 1741 lo trova addirittura vestito della toga di Rettore dell'Accademia. Più tardi, nel 1750, Calandrini abbandonerà l'Università per dedicarsi alla politica, entrando prima nel Consiglio Comunale e diventando infine sindaco di Ginevra nel 1757.

Quando Calandrini, nel 1734, ottiene la cattedra di Filosofia, Gabriel Cramer ottiene in via definitiva quella in Matematica precedentemente condivisa. Quando Calandrini lascia l'università per entrare in politica, sarà sempre Cramer ad occupare la cattedra in Filosofia che Ludovico lascia vacante. Se ciò può dare l'impressione che Cramer fosse portato a sovraccaricarsi di lavoro, è solo perché l'impressione corrisponde pienamente alla realtà: la citazione riportata in testa a quest'articolo è la descrizione – peraltro fatta da uno storico della letteratura – delle mansioni e delle attività che Gabriel era solito accollarsi. Al punto di minare la sua salute, peraltro: nel 1752 è ridotto ad una tale spossatezza da riconoscere la necessità di concedersi una vacanza verso i climi più caldi del meridione, ma non riuscirà neppure a raggiungerli, morendo durante il viaggio.

Gli studenti incontrano il nome di Cramer per un "metodo", o "regola" utile per risolvere semplici sistemi di equazioni lineari. La famosa regola si trova nel terzo capitolo del suo libro più importante, la "*Introduzione all'analisi delle linee curve algebriche*"[6], e probabilmente la regola in questione, più ancora che per le sue capacità di risolvere i sistemi di equazioni, ha il merito di presentare agli studenti per la prima volta nel loro corso di studi quegli oggetti che poi scopriranno essere dei determinanti.

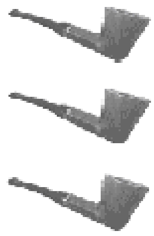
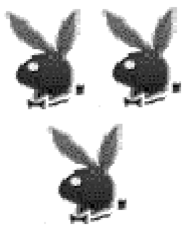
Analyse des lignes courbes de Cramer, 1750
© Bibliothèque du Musée d'histoire des sciences (photos Ph. Wagneur)

Ma Gabriel Cramer fece per la matematica assai più che lasciare una regola onnipresente nei libri di testo: il suo capolavoro contribuì in maniera sostanziale alla diffusione della geometria analitica; pubblicò studi importanti sul calcolo delle probabilità che influenzarono profondamente Buffon; si fece carico della cura e della pubblicazione dei due fratelli Bernoulli più famosi, Johann e Jacob.

A differenza di Castore e Polluce, Cramer e Calandrini erano entrambi mortali, e nella seconda parte della loro esistenza terrena percorsero sentieri diversi. Ma, in qualche modo, ci sembra legittimo concludere che Cramer non sarebbe stato Cramer senza Calandrini, come Calandrini non sarebbe stato Calandrini senza Cramer: e se avessimo ragione, non potrebbe esserci dimostrazione più stringente della loro profonda e reale fratellanza, proprio come quella dei Dioscuri generati da Leda.

[6] «Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques», Ginevra, 1750.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Ai Bordi del Poligono			
Una GROSSA scacchiera			

2.1 Ai Bordi del Poligono

Non *quei* poligoni, l'altro. Quello di Tiro (non quella fenicia, l'altro. Oh, insomma! Basta!). Ma cominciamo con una divagazione e una domanda aperta, con la quale Rudy si è scontrato lavorando su questo problema.

Vi è mai capitato di trovare un concetto di matematica elementare (nel senso comune del termine, non in quello specialistico: come diceva Schroeder, "La matematica elementare è la più complicata di tutte") che non sia mai stato nominato durante l'iter classico delle scuole dell'obbligo ma in grado di rivestire un certo interesse? Lo scrivente al momento ne ha raccattati due, vi si chiede di contribuire all'elenco.

Il primo, che non ha nessun rapporto con il problema (almeno, a giudicare dalla soluzione che abbiamo), è il concetto di *frazione continua*: come sapete, Rudy la considera utilissima (oltre che molto divertente), ma non ci risulta compaia in alcun programma ministeriale.

L'altro, lo mettiamo nel problema: consigliamo quindi un attimo di meditazione, se volete contribuire alla lista, prima di andare avanti.

Prima, però, un paio di buone notizie.

In primis Rudy e Doc, approfittando di una pausa nella pioggia verso i primi giorni di giugno, sono riusciti nuovamente a tirare con l'arco e Rudy, con tre frecce, è riuscito a fare undici punti.

In secundis, le altre ventun frecce si sono fermate sul fermafrecce, senza finire nel campo di granturco che ormai è più alto sia di Rudy che di Doc (quindi tutte fuori dalla zona punti, ma *"Be optimist!"*).

Questa volta, Rudy ha intenzione di affibbiare la colpa alla nuova decorazione dei bordi della linea di tiro (da cui il titolo del problema: tutto chiaro, adesso?). Infatti, Doc si è lanciato in una decorazione che, come ama dire Rudy, "se un camaleonte cerca di nascondersi lì sopra, esplode".

Il Nostro ha tracciato una serie di triangoli ai lati del corridoio di tiro: per mantenere una vivace asimmetria, questi triangoli sono tutti diversi tra loro anche se, per avere una qualche forma di regolarità soggiacente ma non troppo, hanno tutti la stessa area (che considereremo unitaria).

Adesso, arriva il concetto ignorato nelle scuole dell'obbligo: Doc ha tracciato, per ogni triangolo, due *ceviane*[7] un po' speciali: infatti, partendo da due angoli diversi, dividono il triangolo in quattro zone, tre triangolari e una quadrangolare: ma la particolarità è che tre delle aree *sono equivalenti*, ossia hanno tutte la stessa area.

L'idea di Doc è di lasciare l'area restante (quella non equivalente) "a sabbia" (fa molto giardino Zen), ma mettere giustappunto nelle altre zone fiori di vari colori (un colore per zona) in modo da far esplodere il suddetto camaleonte; sa, il Nostro, che i semi si comprano "a metro quadro" (seminabile), e deve quindi calcolare l'area di ogni zona da seminare.

La domanda sorprendente è: quanto vale ognuna delle aree seminabili?

Ora, siccome vorrei usare la scusa dell'asimmetria al contorno anche la prossima volta che tireremo, prendetevela pure comoda (ma non troppo: tira anche Fred, la prossima volta. E quello ci straccia entrambi).

2.2 Una GROSSA scacchiera

…Quanto tempo è che non vi capita di giocarvi un finale del tipo "Donna e Re contro Re"? Insomma, uno di quelli nei quali compaiono sì e no un pezzo (e il Re) contro l'altro Re? A me *[Rudy speaking]* non sono mai piaciuti molto: nel tempo che cercavo di ricordarmi se dovevo chiudere il Re nell'angolo, su un bordo o cose del genere e da dove doveva bloccare il mio Re, l'avversario riusciva tranquillamente a farsi un giro panoramico della scacchiera e a costringermi alla patta.

Recentemente, però, rimettendo in ordine vecchi file, ho trovato un problema che mi pare piuttosto interessante.

Per prima cosa, abolite la regola della patta dopo un tot di mosse.

Poi, prendete una scacchiera *infinita*, e quindi senza bordi o angoli.

Il bianco piazza, nella posizione che preferisce, un certo numero (fissato) di Donne.

Il nero, a questo punto, piazza sempre nella posizione che preferisce il proprio Re.

Scopo del gioco è che il bianco dia matto al nero.

La prima domanda (non troppo difficile) è: *quante Donne vi servono*, per essere sicuri di vincere?

La seconda domanda (e la terza, la quarta e la quinta) sono un'immediata estensione di questa: se al posto delle Donne avete delle Torri? Degli Alfieri? Dei Cavalli?

Siamo ragionevolmente sicuri che *non* soppianterà né gli scacchi né il *rugby*, ma sin quando stiamo sul livello teorico, visto che in estate è meglio girare leggeri, potrebbe essere interessante. Non solo, ma i risultati hanno un'interessante caratteristica: molto probabilmente una coincidenza, ma inquietante… Ne parliamo poi la prossima volta.

3. Bungee Jumpers

Dati gli n numeri $a_1, a_2, \ldots, a_n$, trovare *[senza derivate! (RdA)]* il valore di x che minimizza la somma:

$$(x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \ldots + (x-a_n)^2 .$$

La soluzione, a "Pagina 46"

[7] Prendono il nome da Giovanni CEVA, matematico milanese *[Nobody's perfect (RdA)]*. A quanto ci risulta, la definizione migliore di ceviana è: "segmento che parte da un angolo e arriva da qualche parte nel lato opposto all'angolo di partenza". Da cui si ricava che la maggior parte delle cose studiate dentro un triangolo (ma anche no: quelle fuori tipo un'altezza, per un triangolo ottusangolo... boh, dettagli) sono ceviane. A noi pare un concetto importante: per quale motivo non lo si studia?

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

Questa rubrica esce così di rado che ogni volta che risorge dalle sue ceneri è indispensabile ricordare quali caratteristiche abbia. Questa volta, poi, le ragioni per ricostruirne la natura sono davvero pregnanti, quasi stupefacenti.

In breve: Rudi Mathematici (intesa come rivista) ritiene doveroso avere una rubrica di recensioni, i libri ci piacciono tanto, ne abbiamo un sacro rispetto, e non esiste rivista degna di questo nome che non ospiti una rubrica specifica sulle novità editoriali dell'argomento eponimo, che nel nostro caso (toh!) è la matematica. Ergo, RM deve avere una rubrica di recensioni. Il problema è che Rudi Mathematici (intesa come triade sfaccendata dei componenti la Redazione) è pigra, lenta, e millanta continua carenza di tempo: quadro che diventa vieppiù drammatico se si prende in considerazione che l'estensore principale delle note di recensione è usualmente il più bradipo dei tre.

Il titanico confrontarsi di queste due pulsioni contrapposte ha trovato come punto di equilibrio uno strano compromesso, basato su alcuni solidi pilastri: pilastro uno, la rubrica non avrà cadenza fissa, esce quando esce, e non si impegna a rimanere viva più di tanto. Pilastro due, la rubrica non recensirà banalmente dei "libri", perché di libri ne escono troppi: scriverà qualcosa solo in merito a dei libri particolarissimi, ovvero quelli in cui mettono le mani i lettori di RM. Magari come autori, o traduttori, o curatori, disegnatori, quel che sia… ma è cruciale che debba esserci, all'interno del prodotto recensito, la mano di un lettore di RM. Pilastro tre, viste la condizione uno e soprattutto la condizione due, le recensioni non saranno per niente obiettive, perché l'intenzione ultima non è tanto quella di esortare il leggente all'acquisto, quanto quella di vantarci perché conosciamo gente importante che scrive libri.

È del tutto evidente che simili condizioni sono state costruite ad arte per schivare la fatica del recensire: infatti somigliano molto a quelle che si sentono raccontare i bambini: per catturare il passerotto devi mettergli il sale sulla coda, ti regalo la playstation se riesci a girare la testa di scatto così velocemente da riuscire a morderti un orecchio, e così via. Diamine, quanti libri vedranno mai il contributo di un RMer? Uno per decennio? Due per secolo? Insomma, il curatore della rubrica ha accettato l'idea di rubricarla nella speranza di poter bellamente battere la fiacca.

In realtà, la rubrica si è poi rivelata molto più alimentata di quanto credeva la Redazione, al punto che si è cominciato seriamente a perdere dei colpi. La risposta del colpevole principale era sempre del tipo "vabbè… tanto non abbiamo vincoli di uscita… ancora un mese di riposo, poi recupero. Poi recupero…". Non che fosse credibile, come promessa, ma tant'era.

Solo che poi, verso dicembre dell'anno 2013, è arrivato un vero e proprio colpo di grazia. Un editore temerario ha preso di petto Maurizio Codogno e lo ha incaricato di portare avanti una collana di brevi e-book di matematica.

Tragedia. Panico. Terrore e raccapriccio (cit.).

Si trattava evidentemente di una congiura metodicamente orchestrata dal Rio Destino ai danni del curatore, è palese. Primo, perché gli e-book si pubblicano in fretta; secondo, perché gli e-book corti si pubblicano ancora più fretta degli e-book normali; terzo, perché il giro dei compagni di merende di .mau. (noto nome d'arte del Codogno) ha una larga sovrapposizione con i lettori e affiliati di RM; quarto, perché anche se gli autori della collana fossero al di fuori del cerchio magico degli RMer, Maurizio Codogno c'è sempre stato dentro fino al collo, e visto che è il curatore della collana, tutte le uscite della collana hanno pieno (pienissimo, perfino) diritto ad un recensione in questa rubrica.

Il bradipo, colto dal panico, ha imitato ricci, tartarughe e struzzi, facendo finta di non vedere e chiudendosi in casa. Mentre fingeva di non vedere, ben sette e-book sono stati partoriti da "*Altramatematica*", che è imperlappunto la collana delle edizioni *40KUnofficial* curata dal dotto Codogno.

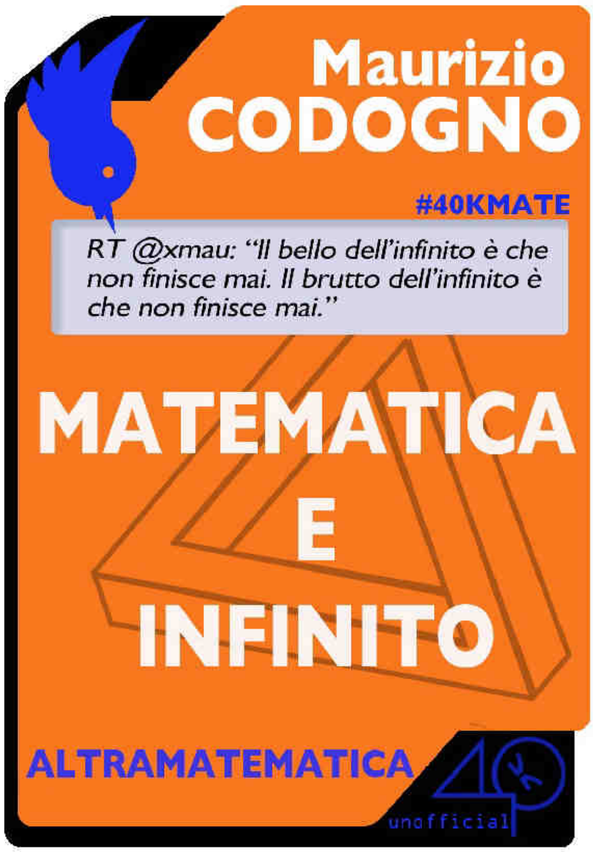
Infine, la tragedia finale: l'ottava uscita della collana è stata scritta proprio dai Rudi Mathematici, insomma da noi. E a questo punto, non c'era davvero più via di scampo. Con che faccia ci potremmo presentare su queste pagine, su questa rubrica, celebrando il nostro libercolo senza aver parlato prima dei suoi sette confratelli? Ci vorrebbe una faccia da bronzo di Riace, e noi siamo notoriamente meno belli. Ma anche se (col capo coperto di cenere) decidessimo di rimediare e quindi di recensire, per quanto in spudorato ritardo, tutte le uscite della collana, a cosa andremmo incontro? Beh, il conto si fa presto… una recensione al mese a cominciare da Luglio 2014, l'ottava recensione che tanto ci interessa uscirebbe a Febbraio 2015. Non sarebbe troppo tempestiva, nevvero? Senza contare che, perdindirindina, quella collana sforna e-book più velocemente di quanto noi si sforni numeri di RM, e il circolo, più che vizioso, diventerebbe una corsa tra Achille e la Tartaruga, solo che stavolta è Achille a partire con mezzo percorso di vantaggio[8].

E allora, via, proviamo l'ennesimo compromesso. I libri sono corti (ve l'abbiamo detto, no, che devono canonicamente quotare sui 40 Kilobyte, insomma sulle quarantamila battute, seppur con vasto margine d'errore?) e le recensioni potranno essere parimenti corte. Per non morire nel tentativo di inseguimento, triplichiamo la velocità della tartaruga, pardon del bradipo, e proviamo a recensirne tre per volta. Così, quantomeno, riusciremmo a parlare del nostro libretto verso Settembre, il che non è poi troppo male, per i nostri standard.

Male è che magari nel frattempo leggete le recensioni dei libri precedenti, che sono carucci anzichenò, e ci metterete a confronto con essi, con nostro grande scorno. Quasi quasi violiamo il pilastro numero tre della rubrica, e cominciamo a stroncare di brutto…

4.1 Matematica e Infinito

« Un solo infinito è troppo poco.»



Se avete letto le righe precedenti, non sarete stupiti nello scoprire che la prima uscita nella collana "Altramatematica" di 40KUnofficial porta la firma del curatore di tutta la collana, ovvero Maurizio Codogno. Se siete lettori più o meno affezionati di RM, è verosimile che abbiate riconosciuto nel nome e cognome dell'autore colui che in rete è spesso noto come .mau., tra gli RMers come PuntoMauPunto, tra i frequentatori del Carnevale della Matematica come il Padre Fondatore dei Carnevali. E potremmo continuare a lungo, ma ci siamo ripromessi di fare delle recensioni dell'ordine delle mille battute (il 2,5% del testo: applicato a "Guerra e Pace", il criterio genererebbe una recensione da quaranta pagine), quindi gli altri titoli di merito dell'autore dobbiamo lasciarli sottintesi.

È in qualche modo caratteristico di .mau. affrontare un quesito e, prima

[8] Non diciamo tanto per dire: tra la stesura di queste note e l'uscita di questo numero di RM, la collana ha fatto in tempo a partorire la nona uscita…

ancora di risolverlo, dare uno sguardo agli estremi del suo campo di esistenza, andare a vedere innanzitutto dove va a parare nei casi limite. Forse per questo, nell'aprire una collana di matematica, ha deciso di affrontare l'ultima frontiera, quella insuperabile per definizione: l'infinito.

Un altro aspetto curioso dell'autore è che solitamente precisa bene i termini del discorso e li qualifica rigorosamente, per poi sentirsi libero di condurre il lettore portandolo, attraverso le definizioni condivise, sul terreno che più gli aggrada: è facile sentirlo precisare, ad esempio, che l'"infinito matematico" è una cosa, mentre con l'infinito tout court spesso se ne intende un'altra. Ciò non di meno – anzi forse proprio perché ben riesce a distinguere le caratteristiche e le limitazioni di entrambi – nel suo libro Maurizio non disdegna di accennare a come nell'infinito matematico si nascondano le pieghe più decise dell'infinito filosofico e, probabilmente, anche viceversa. E, da questo punto di vista, "iniziare" qualcosa parlando di ciò "che non ha fine", palesa una coerenza (e una fiducia) invidiabile.

La verità vera, naturalmente, è più semplice e diretta: e sta tutta nel fatto che la matematica ha sempre avuto a che fare – problematicamente – con l'infinito, e ripercorrere la storia del concetto è un modo efficace per ripercorrere i grandi temi – appunto problematici – della matematica[9]. Fin dai tempi di Zenone, fin da quelli di Pitagora, il demone dell'infinito è lì, in agguato, pronto a dissestare le più eleganti generalizzazioni matematiche: e superare i paradossi, bypassare gli ostacoli dell'impossibilità di visualizzare, aggirare la paura dei numeri troppo grandi o troppo piccoli è stato, ed è tutt'ora, uno degli esercizi più difficili per i matematici.

Nelle poche pagine che gli sono concesse, .mau. ripercorre le tappe essenziali e, più ancora, mette in evidenza come la gara tra matematici e infinito sia diventata sempre più sottile e complessa col passare del tempo e col raffinarsi delle tecniche di indagine.

Dalla differenza concettuale tra infinito in potenza e in atto al metodo di esaustione di Eudosso, dalle critiche di Berkeley al calcolo di Newton e Leibnitz, dalla tromba di Torricelli alle sezioni di Dirichlet, fino alle meraviglie innumerabili di Cantor, alle curve che saturano il piano di Peano (quasi un nomen-omen) e alle magie duplicatrici di sfere di Banach e Tarski.

L'infinito e la sua storia in poche migliaia di battute, disseminate di paradossi antichi e moderni.

Non era mica impresa facile.

Titolo	Matematica e Infinito
Sottotitolo (tweet)	*Il bello dell'infinito è che non finisce mai. Il brutto dell'infinito è che non finisce mai.*
Autore	Maurizio Codogno (.mau.)
Editore	40K Unofficial
Collana	Altramatematica 1
Data Pubblicazione	Dicembre 2013
Prezzo	1,99 euro
ISBN	9788898001354
Pagine	E-book (circa 32)

[9] .mau. è anche il tenutario di una raccolta di citazioni e aforismi matematici, che ogni tanto aggiorna a sua discrezione. Con l'evidente intenzione di esservi (nuovamente) citato, l'estensore di queste note ripete spesso l'ardito aforisma "L'Infinito è Mezza Matematica", sperando di solleticare l'interesse nel nostro eroe. Senza la minima speranza di successo.

4.2 Più Per Meno Diviso

> *«I segni matematici hanno questo di interessante, che la loro è la somma di due storie: quella del calcolo e quella della scrittura.»*

Se conoscete Peppe Liberti, certo saprete che è invischiato in una complicata relazione con Laura Pausini.

Se invece non lo conoscete, è probabile che la frase precedente vi abbia un po' stupito, soprattutto nel caso che, pur non conoscendo Peppe, conosciate invece Laura Pausini.

In entrambi i casi, la parola responsabile (anzi, diciamola tutta: colpevole) di tanto stupore è proprio "relazione", che avrà scatenato particolari evoluzioni immaginifiche degne delle migliori copertine di *Novella 2000*.

In verità, "relazione" è parola davvero magica e cruciale, specialmente in matematica. Nonostante quanto credono i non iniziati (pitagoricamente parlando), l'oggetto di studio della matematica non sono tanto i numeri, quanto le relazioni; ed è pertanto davvero interessante esplorare quegli oggetti che marcano e definiscono proprio le relazioni, ovvero i simboli fondamentali delle operazioni aritmetiche: ed è proprio questo l'oggetto del libro di Peppe Liberti.

L'idea di parlare della storia dei simboli matematici – racconta Peppe – gli è venuta per superare una sorta di imbarazzo causato dal dover parlare di matematica pur essendo un fisico: imbarazzo che, per quanto palesemente ridicolo (i fisici hanno il sacrosanto diritto di concionare su ogni aspetto della matematica e dell'universo, come dimostra ex-post l'esistenza stessa di RM), è stato senza dubbio salutare, vista la ricchezza e la piacevolezza contenute in questo "Più Per Meno Diviso", volume secondo di *Altramatematica*.

Il punto è che i simboli saranno pure solo dei segni, delle abbreviazioni, ma di sicuro non sono privi di significato. Anzi, al contrario: sono un concentrato di significato, sono degli acceleratori di comprensione, e perché svolgano la loro funzione degnamente devono avere molte virtù. Devono essere facili da scrivere, devono essere ancor più facili da leggere. Devono essere chiari, devono evitare di essere confusi con altri. Soprattutto, devono essere condivisi, riconosciuti, fatti propri da molti. Un po' come le banconote da 500 euro, per le quali la gente che le riconosce si ammazza e si scanna, mentre per i pochi aborigeni che non conoscono il denaro non valgono quanto una buccia di patata.

E perché i simboli diventino semplici, riconoscibili, chiari e condivisi ci vuole tempo: anzi, di più, ci vuole una storia, ci vuole la Storia. Andranno bene due paralleline per identificare l'uguale, o sarà meglio una specie di simbolo di costellazione? Come si arriva a definire una cosa complicata come la sottrazione (non ridete, ricordatevi la fatica che avete fatto, da piccoli, per capire il significato dei numeri negativi) con un trattino che più semplice non si può? A suo tempo, sareste stati partigiani dell'*obelus* o del *colon*, quando si trattava di avventurarsi nei meandri burrascosi delle divisioni?

I simboli nascono quasi per caso, ma poi prendono vita propria. Sulle lavagne un meno si può trasformare in un più automaticamente, senza pensieri; un denominatore salta al livello superiore in un passaggio algebrico facendo scomparire un'intera linea di frazione, e in generale la danza dei simboli nei vari passaggi astrae e concentra una quantità di concetti (di relazioni!) che a volerle descrivere a parole necessiterebbero di interi quarti d'ora. E più procede l'astrazione, più i simboli prendono vita propria: si spezzano i simboli delle derivate nella notazione di Leibnitz e i due mezzi simboli differenziali operano indipendentemente; gli operatori logici si cannibalizzano nella logica formale e nella prova di Goedel, alimentandosi di sé stessi, e così via. Sono oggetti misteriosi e terribili, i simboli.

Quello sfaccendato di Peppe Liberti, preso dalla sua relazione con la Pausini, finora si è limitato a trattare solo i primi quattro che campeggiano sulla copertina del suo libro (più l'uguale, vabbè…). Bisognerebbe proprio provare a convincerlo che questi quarantamila caratteri non possono essere altro che una prima puntata: la esse allungata dell'integrale, la sigma maiuscola della sommatoria, l'invadente esclamativo dei fattoriali, le invalicabili pareti del valore assoluto, le nabla che popolano le equazioni di Maxwell, i delta corsivi delle derivate parziali, i geniali *bra* e *ket* che solo i fisici quantistici frequentano, quali misteriose storie potrebbero raccontare? Ce n'è abbastanza per popolare mezza collana di Altramatematica.

E lui pigro, lì. A sentir cantare Laura, invece di scrivere[10].

Titolo	Più Per Meno Diviso
Sottotitolo (tweet)	*Come se fosse facile, lasciare un segno.*
Autore	Peppe Liberti (Rangle)
Editore	40K Unofficial
Collana	Altramatematica 2
Data Pubblicazione	Dicembre 2013
Prezzo	1,99 euro
ISBN	9788898001446
Pagine	E-book (circa 33)

[10] A scanso equivoci e a scanso querele (soprattutto da parte di Peppe, più che dalla Pausini), ci tocca almeno una nota piè di pagina. La "complicata relazione" che invischia il Liberti e la Pausini è veicolata dai vicini di Peppe che fanno vibrare con un numero di decibel indecente per l'aere condiviso i dischi della nota cantante emiliana. Siccome Peppe, oltre a fare l'ex-fisico, a mandare avanti quel gran sito che è Rangle e a fare molte altre cose, amerebbe anche salvarsi l'apparato uditivo, sfoga la sua frustrazione narrando in rete gli alti lai che l'argentina voce della Laura nazionale gli procura. Siccome lo fa in maniera divertente, per contrappasso dantesco il suo cognome, sul web, è ormai indissolubilmente legato a quello della Pausini. Non è la "relazione" che i malpensanti tra voi avranno probabilmente immaginato, e certo non esiste ancora un simbolo acconcio per descriverla, ma non di meno sempre di "relazione" si tratta. Ergo, si tratta di matematica.

4.3 La Matematica dei Pink Floyd

«La matematica del lato oscuro.»

A proposito di citazioni memorabili, una particolarmente pregnante (e incontrovertibilmente vera) viene ripetuta spesso dal GC: "la matematica è dappertutto[11]". A leggere il libro di Paolo Alessandrini si direbbe che anche l'autore sia profondamente convinto dell'asserzione.

In rete, Paolo è noto come di Mr.Palomar, ed è un nome che la dice lunga. Oddio, a pensarci bene, forse la dice meno lunga a coloro che hanno una carta d'identità ancora poco usurata, e che quando si parla di immagini astronomiche pensano sempre e soltanto a Hubble o ai grandi telescopi compositi di ultima generazione. Per coloro che hanno calpestato il pianeta Terra anche per qualche decade del precedente millennio, invece, Palomar è rimanda subito a quello che è stato per tanto tempo il più grande telescopio del mondo. Lo specchio di cinque metri di diametro del telescopio Hale, piazzato su quel monte della California, per lungo tempo è stato l'occhio più lungimirante dell'umanità, e molti adolescenti tappezzavano le pareti delle camerette con le stupefacenti immagini (anche se un po' sfocate, al confronto di quelle di oggi) che solo da quella montagna arrivavano alle retine. Se uno sceglie un nickname del genere, come si fa a non immaginarselo poeta, filosofo, contemplatore?

Il bello è che l'Alessandrini è davvero tutte queste cose insieme, ma è il nostro immaginario che sbaglia nel prefigurare un poeta filosofo contemplatore come un maturo saggio dalla barba bianca con gli occhi acquosi persi nella Nebulosa di Orione. Perché l'Alessandrini la Nebulosa di Orione se la guarda con *Stairway to Heaven* dei Led Zeppelin sparata nelle cuffie dell'i-pod, probabilmente.

La dote migliore del suo libro (a parte il titolo, semplice quanto geniale) sta proprio in questo messaggio subliminale: la matematica sta dappertutto, basta cercarla. Se siete estimatori dei Pink Floyd, probabilmente rimarrete stupiti nel vedere come i Ching permeino i testi di Syd Barrett, o come la copertina di Ummagumma sia la porta verso un vortice di rotazioni, permutazioni e cambi di scala che, in ultima analisi, fanno pensare sia al regresso all'infinito che ai frattali di Mandelbrot; ma se siete appassionati di matematica sarete soprattutto stupiti dal fatto che si riesca a parlare di matematica senza fatica, in maniera curiosa e divertente, a partire quasi da qualsiasi argomento, *progressive rock* compreso.

È che Paolo Alessandrini sa guardare, e si diverte a raccontare: sperando che non se la prenda per il paragone (merita certo confronti migliori), le sue pagine ricordano un po' la

[11] A voler essere precisi, l'estensore di queste note l'ha sentita citata *solo* dal GC: insomma, potrebbe perfino essere farina del suo sacco.

filosofia dei compleanni di RM: si parte da un testo misterioso dei Pink Floyd, si vede che è strutturato su un esagramma dei Ching; gli esagrammi portano a Yin e Yang, bigrammi, logica binaria, ed eccoci allora in piena matematica. Si guarda la copertina di Ummagumma, si vede il chitarrista Gilmour che passa dal primo piano al quarto in una copia più piccola della copertina all'interno di sé stessa, mentre Mason il batterista cresce, affianca Waters, supera Wright, e la band si scompone in permutazioni ripetute e autoreferenti. E permutazioni e autoreferenza sono matematica.

Potrebbe fare la stessa cosa, Mr.Palomar, con un disco di Laura Pausini o con il testo dell'Inno alla Gioia? Noi siamo convintissimi di sì. Se siete fan dei Pink Floyd, forse la cosa potrebbe deludervi un po', ma fareste male. La matematica sta dappertutto, nella mente irrequieta di Barrett, nell'obiettivo del fotografo di Ummagumma, ma anche nella matita smozzicata dello scolaro, nella scarpa del centravanti in televisione, nella Luna che tramonta a Ovest e nel DNA della portinaia che rientra dal supermercato.

Paolo Alessandrini l'ha tirata fuori dai Pink Floyd, e il merito è tutto suo: molto più che di Barrett, Waters, Gilmour, Wright e Mason.

Titolo	La Matematica dei Pink Floyd
Sottotitolo (tweet)	*Ve la suono io la matematica. Pop. Anzi, rock!*
Autore	Paolo Alessandrini (Mr.Palomar)
Editore	40K Unofficial
Collana	Altramatematica 3
Data Pubblicazione	Gennaio 2014
Prezzo	1,99 euro
ISBN	9788898001491
Pagine	E-book (circa 50)

5. Soluzioni e Note

Luglio.

È tradizione cominciare questa sezione con il mese che dovremmo coprire, insomma, quello che si vede in alto nella pagina, ma – malgrado sia già luglio – ancora dalle mie parti continua a piovere. Non molta fortuna sulla mia estate. Tradizionalmente luglio ospita il Comitato di Redazione Estivo, insomma, la visita di Rudy e Piotr nella mia Svizzera verde: di sicuro la troveranno verdissima, data la quantità di precipitazioni, ma spero che mi portino un po' di sole italiano… vi dirò il mese prossimo.

L'unica grande novità del mese è l'incredibile lancio del nostro nuovo e-book, edito nella collana Altramatematica di 40K. Adesso ne faccio un po' di spudorata pubblicità: si intitola "Di 28 ce n'è 1", parla dei calendari e dei molti misteri che ne hanno accompagnato la storia; usa ben poca matematica, e racconta un sacco di aneddoti che gli autori hanno trovato (e che speriamo anche i lettori trovino) divertenti sull'arte del conteggio dei giorni[12]. È lungo una quarantina di pagine (essendo un e-book, il numero di pagine cessa di essere un parametro costante) e costa due euro meno un centesimo. Si può facilmente comprare su Book Republic (http://www.bookrepublic.it/book/9788898001835-

[12] Forse non ve lo ricordate, ma i miei compari hanno portato in giro una serie di conferenze in proposito, quindi sono quasi degli esperti. Se invece ve lo ricordate e ci siete stati, non potete esimervi da comprare lo stesso il testo perché è diverso dall'esperienza dal vivo…

di-28-ce-ne-1/) e Amazon (http://www.amazon.it/Di-28-Altramatematica-Rudi-Mathematici-ebook/dp/B00KXAFUPC/), e saremo molto contenti se lo farete.

Va bene, fine spazio pubblicità. Andiamo alle soluzioni.

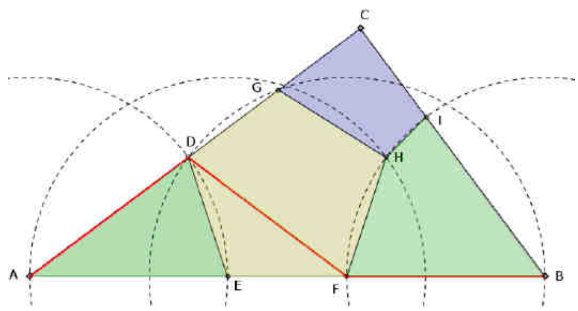
5.1 [183]

5.1.1 Si riparte con il tiro con l'arco!

Per fortuna che c'è ancora qualcuno che legge le mie rubriche! Questa volta si tratta di ***Gnugnu***, che mi ha subito mandato la soluzione a questo problemino geometrico, al solito spiegato in maniera più fumosa possibile dal nostro produttore di problemi:

> *Si definisce diametro di una parte del piano E il limite superiore delle distanze ottenibili considerando due punti qualsiasi di E.*
>
> *Si consideri un appezzamento di terreno opportunamente circondato da fermafreccia dalla forma di un triangolo rettangolo pitagorico di lati* [3,4,5] *(unità arbitrarie). Vogliamo sezionare il triangolo in quattro parti disgiunte in modo tale da rendere minimo il maggiore dei quattro diametri, che diventerà la linea di tiro.*
>
> *Per un generico triangolo pitagorico [p,q,r], con $p^2+q^2=r^2$, riuscite a progettare la linea di tiro? E se considerassimo come linee di tiro tutti i diametri delle quattro partizioni fissate come sopra, quanto verrebbero le distanze?*

C'erano anche altre divagazioni, ma ci fermiamo qui e vi passiamo i pensieri di ***Gnugnu***:

> Un triangolo rettangolo di lati 3, 4 e 5 si può dividere in 4 parti disgiunte in modo che il maggiore dei 'diametri' misuri 25/13. La figura riporta una possibile suddivisione, la spezzata in rosso è formata da tre segmenti di lunghezza pari al diametro *d* che è anche il raggio delle circonferenze tratteggiate i cui centri sono in A, E, F e B.
>
> 
>
>
> Costruiamo la figura passo a passo.
>
> Le semirette AB e AC formano un angolo il cui coseno e 4/5, la circonferenza di centro A (il raggio, come già detto, misura *d*) individua i punti D ed E. Essendo AFD isoscele sarà AF=8/5 *d* e quindi AB=13/5 *d*; ma AB misura 5, dunque *d*=25/13.
>
> La circonferenza di centro B passa, ovviamente, per F ed individua I. Quella di centro E, passa per A e interseca la precedente in H. I due triangoli AED e BFH sono simmetrici rispetto all'asse di AB e perciò AEHD (come BFDH) è un rombo, quindi anche DH=*d* e H appartiene alla bisettrice di BAC. Infine la circonferenza di centro F, passa per D ed individua il punto G che è interno al cerchio di centro E (come I e interno a quello di centro F).
>
> Tutti i lati e le diagonali dei poligoni hanno lunghezze non maggiori di *d*.
>
> Resta da dimostrare che e impossibile fare di meglio, cioè trovare una suddivisione con diametri tutti minori di 25/13. Supponendo che esista un *d'*<25/13, la figura cui appartiene A ed ha diametro *d'* non può contenere D, come a quella che ospita B non può appartenere F. Ci ritroviamo allora con tre punti D, F e C vertici di un triangolo di lati tutti maggiori di *d'*: per dividerlo in regioni con questo diametro ne servirebbero almeno altre 3.
>
> E qui cominciano le strane richieste del GC; se ho ben capito vuole conoscere i diametri di ciascun poligono. Per i tre in basso la risposta e scontata: *d*. Invece,

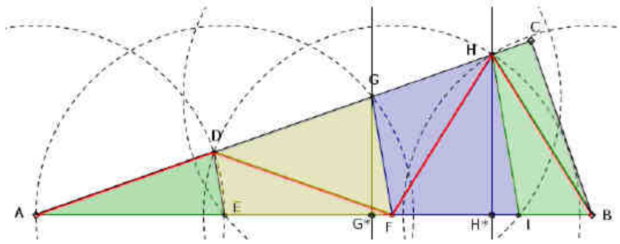
CGHI non è determinato; rubando terreno ai suoi vicini è possibile far variare il suo diametro fra $\sqrt{365}/13$ e 25/13. Curiosamente in quello di diametro minimo, riportato in figura, il segmento GC misura esattamente 1.

Chiede poi di generalizzare i risultati considerando qualsiasi terna pitagorica. Purissimo sadismo! I numeri interi sono sicuramente anche reali e per passare a qualsiasi triangolo rettangolo basta sostituire a 4/5 il coseno dell'angolo ABC, cioè il rapporto k fra cateto il maggiore b e l'ipotenusa c; sarà: $AF=2kd$, $AB=(2k+1)d$ e quindi $d=c/(2k+1)$.

Qualcosa non funziona!! Quando il triangolo degenera in un segmento, B coincide con C, $k=1$ ed allora $d=c/3$. Ma un segmento si può dividere in quattro parti uguali e pertanto dovrebbe essere $d=c/4$. La dimostrazione è farlocca, ma dov'è l'errore?

Beh! Se il triangolo è magro, C continua ad essere troppo lontano da F e D ma, quando dista da B meno di d, non occorre più cercare un poligono che lo contenga: è un punto della regione individuata da B. Esiste una partizione adatta ai triangoli anoressici, questi possono essere divisi, a partire da A, in un triangolo isoscele, due trapezi isosceli ed un quadrilatero con un angolo retto, tutti di diametro m.

Calcolare il valore di m *è* semplice, ma noioso.



G* e H* sono le proiezioni di G ed H su AC.

$AD=AE=m$, $AG=AF=2km$, $AG^*=2k^2m$, il triangolo EIG è isoscele, dunque G* è il punto medio di EI.

$AI=AH=2AG^*-AE= 4k^2m - m$, $AH^*=k(4k^2-1)m$.

Anche FBH è isoscele ed allora H* è il punto medio di FB,

$2AH^*= AF+AB$, $2k(4k^2-1)m = 2km + c$, $4k(2k^2-1)m = c$.

Parrebbe giusta: per $k=1$ si trova $m=c/4$.

Due partizioni strutturalmente diverse una per triangoli rettangoli cicciottelli e l'altra per quelli smilzi, la prima fornisce $d = c / (2k+1)$, la seconda

$m = c / [4k\ (2k^2-1)]$; due funzioni di k decrescenti (naturalmente per i valori di k accettabili), per stabilire quando usare l'una o l'altra basta trovare per quali valori di k forniscono il medesimo risultato. $d=m \rightarrow 2k+1=4k(2k^2-1) \rightarrow 8k^3-6k=1$.

Un'equazione di terzo grado con tre soluzioni reali, una sola di queste è positiva. Ne cerchiamo un valore approssimato o sviluppiamo i calcoli con i numeri complessi? Beh! La fortuna ci è amica: basta la goniometria (smorfia di disgusto!).

Ricordando che k è il coseno di BAC, posto $BAC=\varphi$, $0\leq\varphi\leq\pi/4$, $k=\cos\varphi$, abbiamo:

$8\cos^3\varphi-6\cos\varphi=1 \rightarrow 4\cos^2\varphi-3\cos\varphi=1/2 \rightarrow \cos(3\varphi)=\cos(\pi/3) \rightarrow \varphi=\pi/9$.

Il pareggio avviene esattamente a 20°, con $k = \cos(\pi/9)= 0.93969...$ ed $m=d=c \cdot 0.347296...$, per angoli fra 0° e 20° il diametro minimo e m, fra 20° e 45° e d, non ci vuole molto a costruire un'applicazione GeoGebra: http://www.geogebratube.org/student/m122959, da cui sono tratte le figure riportate, che permette di spostare a piacere i tre vertici ed ottenere la partizione col minimo valore del diametro più grande.

Per valori di k maggiori di 4/5 capita poco di interessante, si può solo osservare che quando il triangolo è isoscele D e G coincidono ed altrettanto fanno H ed I. Il poligono centrale diventa un trapezio isoscele e gli altri triangoli, tutti hanno diametro $d=c(\sqrt{2}-1)=c\cdot 0.41421\ldots$, che è la più grande misura necessaria (si potrebbe anche dire: il massimo del minimo dei massimi delle massime distanze fra due punti di una parte della partizione).

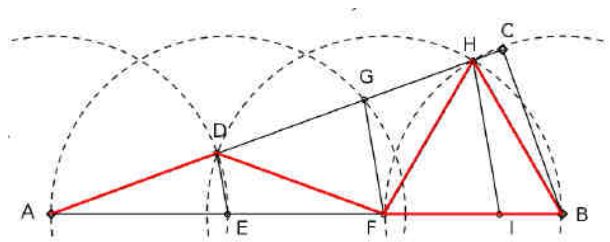
Per valori minori di 4/5 le cose sono meno semplici, quando BAC misura 36° il punto G si trova all'intersezione delle due circonferenze di centro E ed F. Il pentagono centrale è regolare, con tutte le diagonali che misurano $d=c \cdot 0.38196...$ Per angoli minori la circonferenza di centro E sostituisce quella di centro F nell'individuare G.

Quando BAC vale 30° succede qualcosa di simile sull'altro cateto; le circonferenze di centro F e B si intersecano in I, BIF è equilatero, il quadrilatero BIHF è formato da due triangoli congruenti con ADE, il punto H è l'incentro di ABC, $d=c\cdot(\sqrt{3}-1)/2=0.36602\ldots$ Per angoli minori la circonferenza di centro F servirà per individuare I. Poi più niente da notare fino a 20°.

Non resta che l'ultima questione: bisogna calcolare l'area minima di un qualcosagono che possa essere diviso in 4 parti di diametro 9, 7, 5 e 3 decametri. La risposta, demenziale, ma corretta, a mio avviso è: piccola a piacere. Basta considerare un triangolo di base 240 m di altezza arbitrariamente piccola e spezzarlo nei quasi segmenti opportuni. Son certo che non sia quel che si aspettava Rudy, ma soddisfa a tutte le condizioni che ha digitato.

Appendice: ...20 ore dopo!

Uno manda la soluzione e poi si dice: "caro gnugnu hai fatto smorfie sentendo parlare di goniometria, hai sempre sostenuto fosse solo una noiosa applicazione di similitudini, hai ritenuto incompetente chi aveva voluto farne il fulcro dell'ultimo anno al classico... e poi usi, senza scrupoli (sbagliando pure un esponente), una formula di triplicazione? Quel che si dimostra con la goniometria si può dimostrare con la sola geometria!"



Basta, infatti, sovrapporre le due spezzate rosse ed il gioco è fatto. Quando $m=d$ abbiamo:

$\sphericalangle FAD=\sphericalangle AFD=\varphi$ perché AFD e isoscele,

$\sphericalangle FHD=\sphericalangle FDH=2\varphi$ perché FHD è isoscele e l'angolo in D è angolo esterno di AFD,

$\sphericalangle AFD+\sphericalangle BFH=4\varphi$ perché assieme formano l'angolo esterno in F a FHD; ma BFH è equilatero e sostituendo $\varphi+60\,°=4\varphi \rightarrow \varphi=20\,°$.

Non solo ritroviamo l'ampiezza dell'angolo FAD quando $m=d$, abbiamo anche costruito una 'macchina' per trisecare gli angoli (basta eliminare il segmento HB); purtroppo il brevetto l'ha già depositato Archimede.

Il bello delle soluzioni di ***Gnugnu*** è che lui ci bacchetta sempre, e noi lo sappiamo di meritarlo, quindi siamo contentissimi... però i triangoli con varie tendenze all'ingrassamento e al dimagrimento sono meravigliosi. Andiamo avanti con un altro problema dallo stesso numero.

5.1.2 *Le Rouge et le Noir*: omaggio ad Henry

Forse vi ricordate questo problema-omaggio a Stendhal:

> *Abbiamo due poligoni convessi P_1 e P_2 su due diversi piani nello spazio, per i quali ciascuno degli n lati è etichettato con un numero* 1, 2, 3,...*n; consideriamo l'insieme E dei segmenti che uniscono ciascuno dei vertici di P_1 ai vertici di P_2: tutti questi*

> *segmenti, così come i lati dei poligoni, sono tracciati con l'inchiostro rouge o noir in modo tale che non esiste nessun triangolo monocromatico tra tutti quelli che sono formati da un lato di un poligono e da due elementi di E. Il lato* 1 *di P_1 è rosso: nei due casi n=*2012 *e n=*2013*, di che colore sono il lato* 1783 *di P_1 e il lato* 1842 *di P_2?*

In RM184 avevamo pubblicato risposte e soluzioni di ***Alberto R.***, ***GaS*** e ***Franco57***, ed è proprio ad una nota di quest'ultimo che si riferisce ***trentatre***:

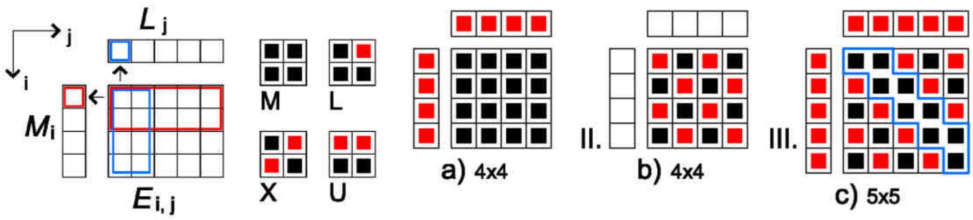
> Ho provato, con una certa fatica, a verificare la nota di ***Franco57*** sul problema 183. 2.2 del numero precedente. Allego, fuori da ogni possibile tempo utile, e cestinabile a discrezione, una pagina di commento.
>
> *"quasi da necessità constretto a scriverla mi conduco, quanto maggiore è stata del salire e dello smontare una montagna aspra e erta la gravezza"* (Boccaccio).

Beh, quando è arrivata eravamo già alla fine del numero, ma adesso lo spazio c'è, tanto siamo in ritardo comunque… eccolo, il nostro ***trentatre***:

> Ho cercato di seguire la soluzione del problema 183 2.2. di ***Franco57***, pubblicata in RM184, ma mi sono un po' perso. Ritengo che si possa mettere in forma più chiara, senza cambiare i risultati (che non ho verificato interamente) osservando che
>
> - i vettori L_i, M_i e la matrice $E_{i,j}$ (anche nel caso di lati diversi n e m) possono essere rappresentati con due serie di n e m caselle e una scacchiera $n \times m$
>
> - le connessioni fra $L_i, M_i, E_{i,j}$ sono in figura (M_i e ogni coppia di caselle delle due righe $E_{i,j}, E_{i+1,j}$ devono essere bicolori, ecc.)
>
> - nella scacchiera il gruppo 2x2 indicato con U è <u>proibito</u> (genera un triangolo monocolore)
>
> - una soluzione resta tale per le trasformazioni consentite dalla geometria del problema
>
> . slittamento orizzontale o verticale della scacchiera (rotazione dei poligoni)
>
> . ribaltamento lungo gli assi (inversione di senso dei poligoni)
>
> . nel caso quadrato ribaltamento lungo le diagonali (scambio dei poligoni)
>
> - gli indici sono ciclici e la scacchiera va vista con i bordi destro e sinistro, alto e basso come collegati (nello spazio diventa un toro)
>
> - di conseguenza <u>le soluzioni sono componibili</u>; accostando una scacchiera a se stessa si ha ancora una soluzione (p. es. da una 3×4 si hanno $3\times8, 3\times12, 6\times4, 6\times8$ ecc.)
>
> Nel caso quadrato pari, la soluzione banale a) si ha componendo M, quella alternata b), con i vettori indeterminati, da X.
>
> Nel caso quadrato dispari
>
> - la soluzione a) esiste sempre
>
> - la soluzione b) non esiste (non si può comporre con X)
>
> - la soluzione c) - un zig-zag diagonale e il resto alternato - è <u>minima</u> nel senso che
>
> . cambiare caselle da rosso a nero (fino alla soluzione banale) non cambia il risultato
>
> . cambiare caselle da nero a rosso, anche una sola, è proibito (genera U)
>
> . qualsiasi slittamento di una riga o colonna è proibito (idem)
>
> - c) resta minima anche con le trasformazioni consentite
>
> Si può trovare una soluzione minima per ogni $n\times m$.
>
> Sempre nel caso dispari, con n_N caselle nere e n_R rosse, $n_N + n_R = n^2$, una scacchiera che non contiene U è una soluzione se

$n_N \geq \binom{n+1}{2}$ - poligoni rossi , $n_R \geq \binom{n+1}{2}$ - poligoni neri

- fuori da questi intervalli, cioè se $|n_R - n_N| \leq n-2$, non ci sono soluzioni (gruppi U).



Vediamo che ne dice ***Franco57***, e cosa ne dite tutti voi.

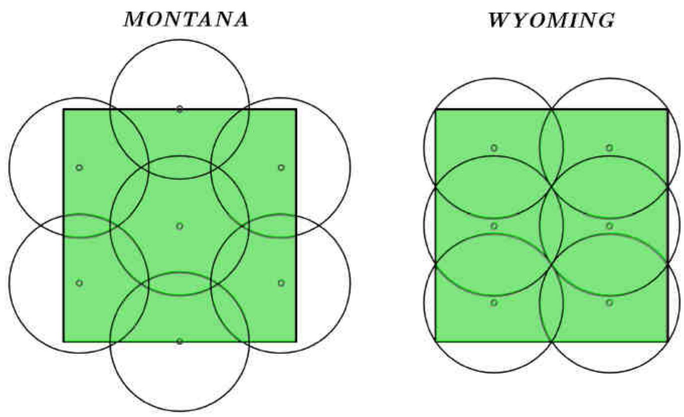
5.2 [184]

5.2.1 I guardiani del bosco matematico

Questo era l'unico problema di maggio di cui avevamo ricevuto soluzione:

> *Il "Bosco Matematico" è un perfetto quadrato boschivo pianeggiante, con alberi tutti della stessa altezza e superficie pari a* 100 *chilometri quadrati. Per evitare incendi, sono state installate delle torrette antincendio: lo spazio di osservazione di ogni torretta deve essere un cerchio di* 3 *chilometri di raggio. Qual è il numero minimo e la posizione delle torri per coprire l'intero quadrato?*

La soluzione era di ***trentatré***, ma a RM già impaginato è arrivato il contributo di ***Gnugnu***, che io pubblico sempre molto volentieri:

> Non una, due soluzioni per difendere la natura!
>
> Dopo il grande incendio che, verso la fine del secolo scorso, interessò più di metà del parco di Yellowstone, l'amministrazione centrale modifico le direttive riguardanti la prevenzione. Lo stato del Montana recepì, senza obiezioni, le nuove disposizioni.
>
> Mentre lo (il? Mah! A suono: lo) Wyoming osservò, invece, che nel calcolare l'ubicazione ottimale delle torrette, la distanza dovesse essere misurata fra la posizione dell'osservatore ed il limite dell'area controllata. Se una torretta ha raggio r e la massima distanza utile è d, l'area controllata è un cerchio di raggio $d+r$. Questione di lana caprina? Apparentemente sì, ma nel problema che ci viene proposto assume un ruolo importante.
>
> 
>
>
> Nella parte destra della figura è riportata una soluzione con sei torrette. Calcolare il raggio dei sei cerchi congruenti è immediato: il diametro di uno di quelli d'angolo ha per estremi il punto medio di un lato e quello che si trova ad un terzo dell'altro, $\frac{1}{2}\sqrt{5^2+\left(\frac{10}{3}\right)^2} = \frac{5}{6}\sqrt{13} = 3.0046\ldots$Km.

Risultato maggiore dei 3 Km imposti da Rudy. Siamo costretti ad usare 7 torrette (soluzione Montana) oppure costruiamo 6 torrette di raggio 5 m l'una (soluzione Wyoming).

Io tifo Wyoming, uno stato dai confini esempio di perfezione geometrica: due paralleli (41°N e 45°N) e due meridiani (104°W e 111°W). I suoi abitanti sono pochi ma tosti; innovatori e precursori, estesero il voto alle donne fin dal 1869. Non badarono alle insinuazioni delle malelingue: non l'avevano fatto solo per arrivare ad un numero di elettori che permettesse il superamento dello status di territorio, lo dimostrarono 20 anni dopo, rifiutandosi di abolire il voto femminile in cambio della promozione a Stato. E l'ebbero vinta.

Con una motivazione del genere tifo per loro anche io… Ma non mi devo perdere in chiacchierate, siamo finalmente arrivati ai problemi di giugno.

5.3 [185]

5.3.1 Ho troppe idee

Anche se il titolo è senz'altro molto adatto al Grande Capo, il primo problema presentato il mese scorso è veramente detto in meno di due righe:

> *Dato il triangolo ABC, trovare il punto P tale che i perimetri dei triangoli ABP, BCP, CAP siano uguali.*

Cominciamo subito dalla soluzione di ***trentatré***:

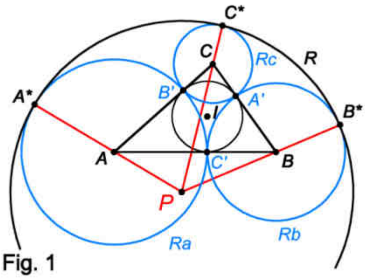


Fig. 1

In fig. 1

K: incerchio del triangolo *ABC* di centro *I*

R_a, R_b, R_c: cerchi di raggio r_a, r_b, r_c con centro in *A*, *B*, *C* e tangenti a due a due

A', B', C': punti di contatto di *K* e dei cerchi con i lati di *ABC*.

R: cerchio di raggio *r* tangente esternamente a R_a, R_b, R_c nei punti *A**, *B**, *C**.

<u>Il punto *P* cercato è il centro di *R*.</u>

Infatti da $r_b + r_c = a, r_c + r_a = b, r_a + r_b = c$ si hanno i raggi

$$r_a = (c+b-a)/2,\quad r_b = (a+c-b)/2,\quad r_c = (b+a-c)/2$$

e da $r = PA + r_a = PB + r_b = PC + r_c$

$$PB + PC + a = PC + PA + b = PA + PB + c = 2r\,.$$

Cioè i triangoli *PAB*, *PBC*, *PCA* hanno lo stesso perimetro. Con riga e compasso si possono facilmente disegnare i quattro cerchi K, R_a, R_b, R_c.

Il cerchio R richiede la soluzione del *problema di Apollonio*, che in generale ha otto soluzioni, ma in questo caso – tre cerchi tangenti – ne ha solo due, i *circoli di Soddy esterno e interno*. *R* è quello esterno.

Un procedimento di soluzione è

- i triangoli *ABC* e $A'B'C'$ sono omologici, e i lati corrispondenti si incontrano su tre punti allineati sulla retta *S*

- se $A°, B°, C°$ sono i poli di S nella polarità stabilita dai tre cerchi, le rette da questi ad I determinano su R_a, R_b, R_c i punti di contatto con i due circoli di Soddy.

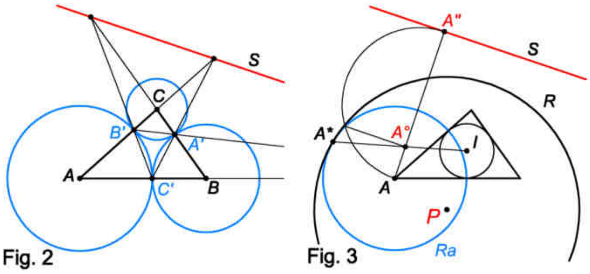


Fig. 2 Fig. 3

Soluzione con riga e compasso.
- fig. 2 : costruzione di S
- fig. 3 : costruzione del polo $A°$ (da ripetere per gli altri)

$AA"$: ortogonale da A ad S

$A°$: proiezione su $AA"$ dell'incrocio di R_a con un semicerchio su $AA"$

$A*$: intersezione della retta $IA°$ con R_a.

Trovati i punti di contatto $A*, B*, C*$ si può tracciare R e il suo centro P. Ma R non occorre, infatti P è il circocentro del triangolo $A*B*C*$ che si può ottenere tracciando gli assi dei lati.

Tutto si ricava frugando su internet. Il punto P (il "punto isoperimetrico") è indicato come X(175) nella *Encyclopedia of Triangle Centers* che si trova in http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html#X6. Da qui ho imparato che

- P è il centro del *circolo di Soddy esterno*, per definizione il cerchio R
- P esiste solo se $\tan(\alpha/2)+\tan(\beta/2)+\tan(\gamma/2)<2$ (quando R degenera in una retta).

Per il problema di Apollonio ho adattato al caso la *soluzione di Gergonne*. Vedi p.es. http://whistleralley.com/tangents/tangents.html oppure http://mathworld.wolfram.com/ApolloniusProblem.html .

Beh, è senz'altro bene che anche voi abbiate i riferimenti della ricerca. Vediamo la soluzione di ***Silvano***:

Deriva dalla seguente considerazione: sia d_{XY} la distanza tra due punti X e Y, si ha che, per un triangolo di vertici ABC, scelto un punto P del piano affinché esso sia il luogo dei perimetri uguali deve essere rispettato che:

$$d_{AB}+d_{BP}+d_{AP}=d_{AC}+d_{AP}+d_{CP}=d_{BC}+d_{BP}+d_{CP}$$

Da cui si ha:

$$d_{AB}+d_{BP}=d_{AC}+d_{CP}$$
$$d_{AB}+d_{AP}=d_{BC}+d_{CP}$$

Quindi:

$$-d_{CP}+d_{BP}=d_{AC}-d_{AB}$$
$$-d_{CP}+d_{AP}=d_{BC}-d_{AB}$$

Ponendo $A(X_A,Y_A)$, $B(X_B,Y_B)$, $C(X_C,Y_C)$ e $P(X,Y)$:

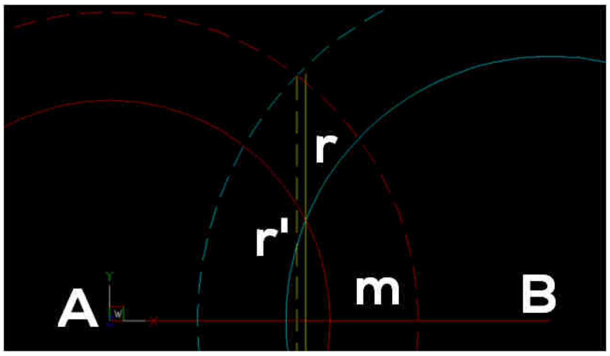
$$\begin{cases}-\sqrt{(Y-Y_C)^2+(X-X_C)^2}+\sqrt{(Y-Y_B)^2+(X-X_B)^2}=\sqrt{(Y_A-Y_C)^2+(X_A-X_C)^2}-\sqrt{(Y_A-Y_B)^2+(X_A-X_B)^2}\\-\sqrt{(Y-Y_C)^2+(X-X_C)^2}+\sqrt{(Y-Y_A)^2+(X-X_A)^2}=\sqrt{(Y_B-Y_C)^2+(X_B-X_C)^2}-\sqrt{(Y_A-Y_B)^2+(X_A-X_B)^2}\end{cases}$$

Risolto il sistema (A,B,C sono dati) otteniamo le soluzioni.

SOLUZIONE 2: CON COMPASSO

Dato che si chiedeva una soluzione al compasso, invece, faccio una considerazione.

Considero due circonferenze intersecanti con centro agli estremi di un segmento AB, aventi raggio diverso R1 < R2 (nel disegno che segue sono quelle con linea continua) e traccio l'asse radicale delle due circonferenze, ottengo la retta continua gialla "r".



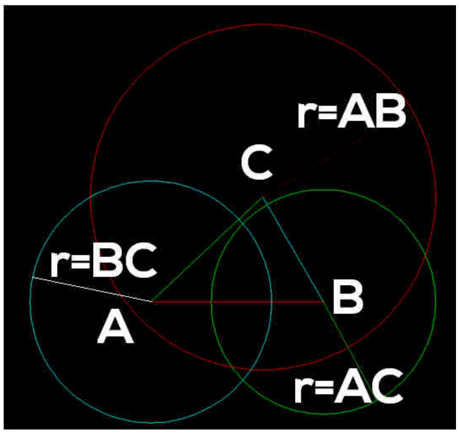
Adesso incremento R1 e R2 di una stessa medesima quantità m, e traccio il nuovo asse R'. Si dimostra dall'intersezione di due circonferenze che l'asse si sposta verso l'estremo del segmento R1 (il minore) di un valore pari a:

$$Spostamento\ asse = m\frac{R2 - R1}{AB}$$

Che altri non è che la distanza r,r'. Questa considerazione mi ha ispirato questa considerazione per una soluzione iterativa con i seguenti passi.

1. Individuo una soluzione parziale
2. Definisco un metodo per trovare una soluzione migliore spostando gli assi radicali.

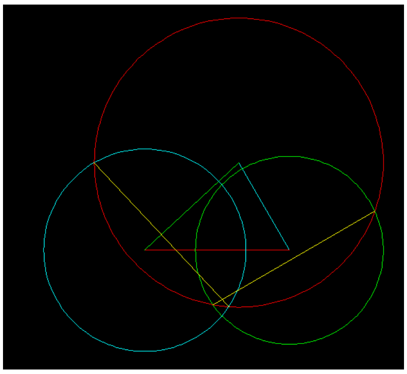
Trovare una soluzione parziale, per me, significava trovare un punto P che soddisfacesse il perimetro uguale per almeno due lati del triangolo ABC. Per far ciò, intorno a ogni vertice ho fatto una circonferenza di raggio pari al vertice opposto, come in figura seguente.



I punti di intersezione sono proprio i luoghi che stavo cercando, infatti per costruzione si ha che l'intersezione ad esempio della circonferenza rossa con quella celeste sono i luoghi in cui le circonferenze stesse e i lati del triangolo omologhi hanno la stessa lunghezza. Se dovessero esserci dei problemi sulla completa intersezione si può iniziare anche dalle medesime circonferenze, considerando però il diametro e non il raggio delle stesse pari al segmento opposto alla circonferenza.

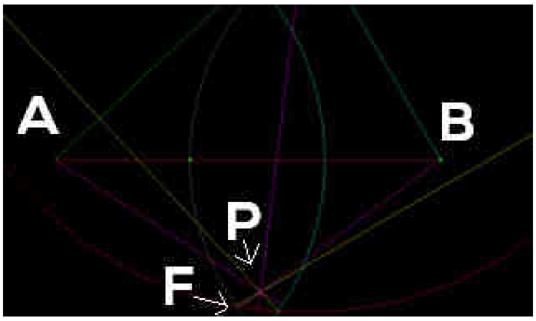
Adesso l'idea è modificare le circonferenze in modo da ridurle o ingrandirle fino ad arrivare al punto P che è l'intersezione di tutte e tre le circonferenze tracciate, un po' come buttando un sasso in uno stagno attendiamo la propagazione dell'onda circolare.

In questo mi viene di aiuto il concetto di asse di intersezione che avevo indicato prima. Traccio gli assi che si congiungono in un punto (rette gialle).

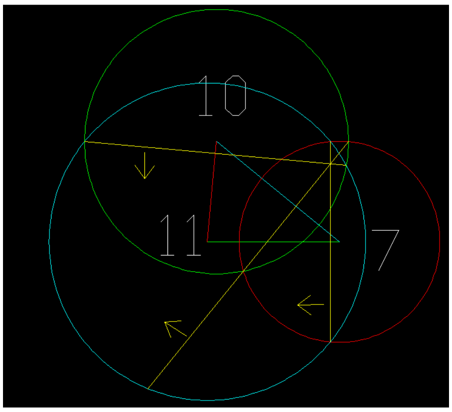


Sono sufficienti 2 rette perché si congiungano almeno in un punto, in quanto sono sempre coincidenti le 3 intersezioni (assi rosso-azzurro, rosso-verde, azzurro-verde). Il punto appena trovato sarà il mio riferimento e traccio dai vertici del triangolo ABC n. 3 semirette prolungandole fino all'incrocio con la circonferenza (in magenta prossimo disegno) prolungandoli fino ad intersecare il punto trovato e la circonferenza stessa del vertice (in magenta).

A questo punto considero il segmento di lunghezza minore rispetto all'incrocio della circonferenza e riduco o incremento il raggio di tutte le circonferenze di una quantità pari al segmento che ho individuato. (PF)



Le nuove circonferenze saranno ovviamente migliori delle precedenti in quanto spostano l'asse radicale proprio nella direzione della soluzione in quanto i tre segmenti AB, BC e CA come in figura.



Riducendo il raggio delle circonferenza, la loro intersezione si sposterà secondo il verso della freccia indicata, ma poiché abbiamo detto prima che l'asse radicale si sposta di:

$$Spostamento\ asse = m\frac{R2 - R1}{AC}$$

E Nel nostro caso i raggi R2 e R1 sono pari ai rispettivi segmenti AB e BC, più o meno un eventuale addendo, ossia:

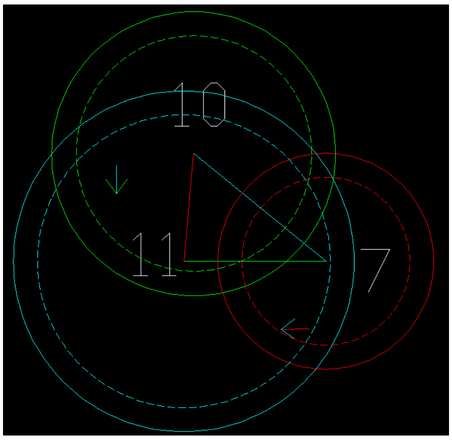
1 >(AB-BC)/AC > 0

Infatti un lato di un triangolo è sempre superiore alla differenza degli altri due, quindi non oltrepasseremo mai la soluzione perché una riduzione di "m" del segmento non consente uno spostamento degli assi radicali superiore allo spostamento della circonferenza stessa che si attesta sul triangolo di partenza.

A volte (per aumentare la convergenza e velocizzare) è possibile utilizzare anche i segmenti maggiori verificando che la costruzione del punto successivo non causi l'inversione della posizione del punto di incrocio tra gli assi radicali da interno a esterno alle circonferenze.

Nel qual caso, ovviamente la re circonferenze sui vertici, per convergere verso la soluzione andrebbero aumentate anziché diminuite come nel caso in esame.

Nella figura seguente un passaggio completo della soluzione (dalle righe continue a quelle tratteggiate):



Un ultima nota: in qualche caso le circonferenze di inizio procedimento potrebbero essere non intersecanti all'inizio del procedimento: in questo caso si possono modificare i cerchi iniziali di un valore comune rispetto a tutti i lati opposti.

Speriamo che le figure con sfondo nero restino visibili. No, non li abbiamo ancora visti tutti, c'è quella di ***MBG***, che si fa in fretta:

Scrivo solo la mia traccia di soluzione perché non ho ricavato quella quantitativa, ne tantomeno usando solo riga e compasso (però con un paio di cordicelle ce la potrei fare...).

Niente figure, che mi sono già degnato di fare quella dell'altro problema.

Consideriamo i due triangoli ABP e ACP: il lato AP è in comune, per cui i perimetri sono uguali se la somma AB+BP e uguale a AC+CP , ovvero BP – CP = AB – AC . Ma questa è una costante, perché il triangolo è dato. Allora capite subito dove vado a parare: il punto P deve stare su un'iperbole i cui fuochi sono B e C.

Stesso ragionamento con altra coppia di lati, trovo l'intersezione tra le iperboli e il gioco è fatto.

Semplice? Mah, passiamo al prossimo problema.

5.3.2 Resistere, resistere, resistere!

Beh, come descrivere i modi incredibili di fare gli scongiuri del nostro Rudy? Ecco che il Nostro si trova alle prese con un quattrozampe teorico:

Rudy porta il cane ad un parco dalla forma di triangolo equilatero di lato 350 *metri, lo sgancia e si reca all'unica panchina disponibile. La bestiola parte verso un*

> *lato del triangolo e lo marca, quindi, si reca verso un altro lato sul quale ripete la stessa operazione e si lancia a completare il lavoro sul lato restante; infine si reca al punto di partenza, recupera il guinzaglio abbandonato per terra e quindi va verso Rudy. Quest'ultimo nota che la bestia ha fatto il percorso minimo, percorrendo in totale* 1275 *metri. Dov'erano, all'interno del triangolo, il guinzaglio e la panchina?*

Ecco, fin qui il problema. A breve ci scrive ***Gnugnu***, con una precisazione:

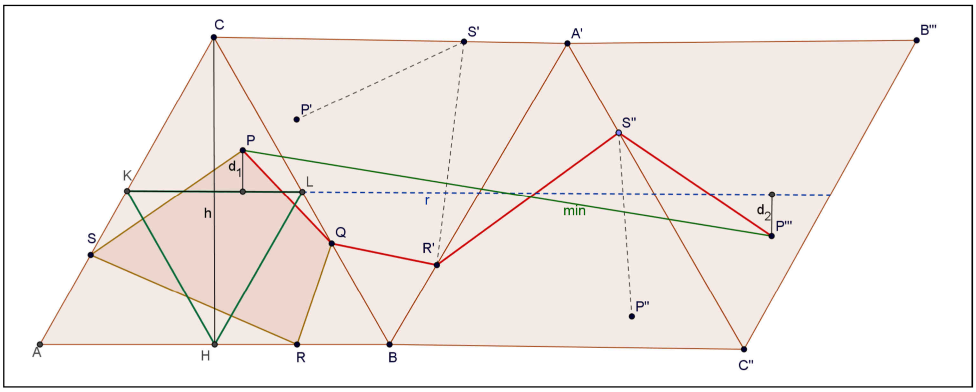
> volevo segnalarvi l'esistenza di una svista numerica nel 2° problema: se il prato è un triangolo equilatero di lato 350 m è impossibile che il bastardino ne percorra addirittura 1275 nel percorso più breve. Con quella misura potrebbe fare tutto il perimetro.

Il Capo, interpellato, risponde:

> *In primis*, non vedo il problema: la Bestia parte da un punto dentro il campo, va su un lato, poi sull'altro lato, poi sul terzo, poi torna al punto d'origine (qui, vedi "*in secundis*") e poi raggiunge Rudy. Insomma, i segmenti percorsi sono quattro: un quadrilatero più la strada dal guinzaglio a Rudy: possono essere maggiori del perimetro, direi…
>
> *In secundis*, ho riverificato la formulazione originale. Il percorso era:
>
> ORIGINALE: Guinzaglio->Lato BC->Lato CA->Lato AB->Rudy->Guinzaglio
>
> RM_185: Guinzaglio->Lato1->Lato2->Lato3->Guinzaglio->Rudy
>
> Si noti nel finale l'inversione tra "Rudy" e "Guinzaglio".
>
> Quindi, sì, un errore c'è, ma non mi pare quello che dice ***Gnugnu***.

Siamo a posto, un errore lo si trova sempre, ma può rendere il tutto più interessante. Del resto ***Franco57*** aveva provato a trovare una soluzione senza riuscirci in pieno:

> Sganciato nel punto P, l'energico quadrupede sceglierà l'ordine dei lati da marcare del parco equilatero ABC. Mettiamo che scelga nell'ordine BC, AB, AC, marchiando rispettivamente in Q, R, S.



> Facciamo adesso le riflessioni prima su BC ottenendo A' da A, poi su $A'B$ ottenendo C'' da i e infine su $A'C''$ ottenendo B''' da B. Un qualsiasi percorso $PQRSP$ è equivalente nelle riflessioni alla spezzata $PQR'S''P'''$ in rosso nella figura, dove R' è ottenuto dalla prima riflessione di R, S'' dalle prime due riflessioni di S e P''' da tutte e tre le riflessioni di P.
>
> La corrispondenza tra le spezzate di questo tipo e i percorsi di marcatura di uguale lunghezza è biunivoca, perciò la linea diretta verde in figura tra P e P''' corrisponde al percorso minimo.
>
> Notiamo che $A'B'''C''$ è ottenuto da ABC per traslazione di un lato e mezzo in direzione AB seguito da una riflessione sulla r retta parallela ad AB e a metà altezza (o viceversa perché le due isometrie commutano). Basta verificarlo sui vertici A, B, C.
>
> P e P''' sono quindi equidistanti da r da parti opposte. Poniamo $d = d_1 = d_2$ questa distanza. La distanza di P da P''' lungo la direzione di r vale 3/2 l dove l è il lato del

parco. Perciò il percorso minimo vale $min = \sqrt{\left(\frac{3}{2}l\right)^2 + (2d)^2}$ che è una funzione crescente di d.

Siccome il furbo bastardino sceglie opportunamente l'ordine dei lati, il vero percorso minimo che metterà in atto dipenderà dalla distanza di P dal triangolo *HKL* ottenuto congiungendo i punti medi dei lati del Parco Equilatero, in verde scuro nella figura, ed è crescente al crescere di questa distanza.

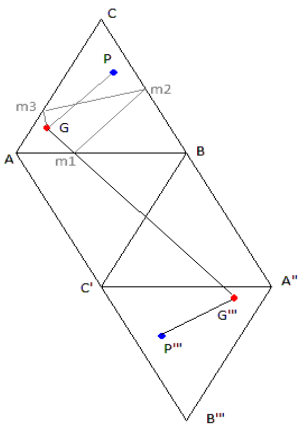
Quindi, il minimo dei percorsi ottimali vale $3/2l$ e si ottiene nel perimetro del triangolo *HKL* suddetto e il massimo dei percorsi ottimali si ha quando P coincide con un vertice e vale

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2}l\right)^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}l\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}\cdot l = \sqrt{\frac{12}{4}}\cdot l = \sqrt{3}\cdot l\,.$$

Se anche la panchina fosse nel posto più lontano quindi in un altro vertice, il massimo che la simpatica bestiola può percorre vale l più di questo cioè $\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot l$, non abbastanza da raggiungere 1275 metri per un lato di 350 metri … oppure mi è sfuggito qualcosa.

Sicuramente gli è sfuggito l'immancabile trabocchetto del Capo, visto che anche ***MBG*** (come già si capiva dai commenti alla soluzione precedente) era arrivato a qualcosa di molto simile:

Faccio riferimento alla figura, dove ABC è il Parco dell'Equilatero, G il punto in cui Rudy sgancia e lascia il guinzaglio e P la posizione della panchina (Nota: dopo improcrastinabile cambio di PC ho per il momento abbandonato il vecchio Word 2000 per convertirmi a OpenOffice; spero che vediate l'immagine nel posto giusto … e soprattutto che ci sia!!!)



Supponendo che il pulcioso e simpatico amico del Capo si diriga prima verso il lato AB, poi BC e infine CA, possiamo determinare il percorso minimo immaginando che dopo ogni marcatura il nostro eroe non cambi direzione, ma prosegua diritto attraverso il muro in una replica riflessa del parco, come se il muro fosse uno specchio. Quindi costruiamo un parco esteso virtuale riflettendo prima sul lato AB, da cui il triangolo ABC'; poi riflettiamo su BC' e disegniamo A"BC'; infine su A"C' per ottenere A"B'"C'.

Il percorso minimo da G che tocca i lati AB, BC e CA (rispettivamente nei punti m1, m2 e m3) cambiando ogni volta la direzione per tornare a G, si può così visualizzare come la retta da G a G"' che taglia prima AB, poi BC' e C'A".

A questo punto il calcolo della distanza GG"' è semplice e basta aggiungere il tratto GP per avere la lunghezza totale percorsa. A questo punto però, se il lato è 350m, qualsiasi percorso GG"'P mi risulta inferiore a 1275m per cui o ho sbagliato qualcosa io, oppure il GC nel fornirci i dati.

Comunque, anche se la mia soluzione è sbagliata, Rudy potrebbe tenerne conto e cercare di convincere il pulcioso che è quella migliore … sperando poi che la segua alla lettera e nella sua folle corsa si schianti contro il primo muro andando diritto.

Beh, probabilmente voleva vedere se ve ne accorgevate, come al solito… Ma mi fermo qui, che il ritardo si sta facendo ridicolo. Alla prossima!

6. Quick & Dirty

Vi abbiamo detto che Rudy e Doc in gioventù hanno (vanamente) cercato di imparare a giocare bene a bridge. Per risolvere questo problema le uniche cose che vi serve sapere è che si gioca in quattro, il compagno è quello davanti a voi e si distribuiscono tutte le carte di un mazzo di cinquantadue; le altre regole ve le studiate da soli. Secondo voi, è più probabile che voi e il vostro compagno abbiate tutte le carte di picche o che nessuno di voi due abbia carte di picche?

> *Le due probabilità sono equivalenti: se voi due avete tutte le picche, i vostri avversari non hanno picche e viceversa.*

7. Pagina 46

Sia X un numero arbitrario, e consideriamo la differenza:

$$(X-a)^2-(x-a)^2 .$$

Possiamo scrivere la differenza:

$$\sum_{i=1}^{n}(X-a_i)^2-\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)^2=n\left(X^2-x^2\right)-2(X-x)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right).$$

Se nel secondo membro sostituiamo x con $\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}$, allora il secondo membro sarà non negativo, in quanto:

$$\sum_{i=1}^{n}(X-a_i)^2-\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)^2=n\left(X^2-x^2\right)-2nx(X-x)=n\left(X^2-x^2-2Xx+2x^2\right)=n(X-x)^2\ 0$$

Da cui segue che il valore cercato risulta essere:

$$x=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}.$$

8. Paraphernalia Mathematica

La perfezione di un problema matematico dipende dalla risposta ad un'unica domanda: riuscireste a spiegarlo alla prima persona incontrata per strada?

David HILBERT, durante la presentazione dei "23 problemi"

No, non avete sbagliato rubrica: una volta tanto, abbiamo deciso anche noi di cominciare con una citazione. E, anche questa volta (per lo stesso motivo dell'altra volta, ma ce la faremo) affrontiamo un aspetto laterale ma interessante della serie "Oltre Platone". Promesso, prima o poi scriviamo l'ultimo capitolo.

8.1 Miele e cannoni – 1 – Cheppalle!

Per almeno quattro motivi, la frase "Burro o cannoni?" non mi è mai stata simpatica: sorvolando sul primo, gli altri sono che si tratta di una domanda retorica, che impone comunque una scelta e che il burro con lo zucchero sul pane non mi è mai piaciuto, preferisco ampiamente il miele (se poi è di castagno, la durata del vaso da un chilo si misura in femtosecondi). Adesso, potreste provare a capire di cosa abbiamo intenzione di parlare.

Esatto, palle di cannone e alveari: quindi, la "e" del titolo viene ad essere giustificata dal fatto che tratteremo di entrambi gli argomenti. Ma partiamo da Hilbert: verso la fine dello scorso millennio, quando questa rivista muoveva i primi vagiti, forte del fatto che ***Thomas Hales*** aveva appena gridato "Eureka!", un giornalista di Plymouth (quella della Nuova Zelanda) decise di sottoporre alla "Prova di Hilbert" il diciottesimo problema del medesimo, quello che chiede se esista un modo migliore di impaccare sfere rispetto a quello che siamo abituati a vedere con arance e palle di cannone. Il luogo deputato a questo test non poteva essere altro che il locale mercato ortofrutticolo, e la storia narra che la risposta più gentile ricevuta sia stata "Mio padre mi ha insegnato il modo migliore quando avevo quattro anni".

Non dovete pensare che la categoria dei commercianti ortofrutticoli sia particolarmente refrattaria alla cultura matematica[13]: Hales insegna nel Michigan e conserva ancora il telegramma dei venditori di frutta e verdura del mercato di Ann Harbor: "Complimenti per la dimostrazione, con le arance sta andando benissimo. Adesso, se ci deste una mano con i carciofi...".

Torniamo seri, anzi filosofi, tanto il lavoro lo ha già fatto tutto Hales: nelle varie conferenze che ha tenuto, ha sempre posto un domanda (retorica): perché esiste un abisso, tra l'intuizione e la dimostrazione? È "ovvio" che le arance si impilano in quel modo ma, nelle sue parole, "ci sono voluti secoli perché gli utensili della dimostrazione raggiungessero la potenza dell'intuito".

Come al solito, cominciamo con qualche definizione.

Un *impaccamento di sfere*, anche se il termine non è correttissimo, si riferisce all'impaccamento di palle piene ("pacco di palle" suonava malissimo); si definisce allora la *densità* dell'impaccamento come la frazione della regione di spazio occupata dalle palle.

Le arance ordinate sono un esempio (proveniente dalla chimica) di impaccamento *cubico a facce centrate*: dal punto di vista storico, Walter Raleigh (sì, quello di Pocahontas) è ricordato come il primo a porre il problema di trovare il numero di sfere impaccate in questo modo. Dato che in matematica non era una meraviglia, lo ha chiesto a ***Thomas Harriot***, che ha risolto il problema senza difficoltà: quando il lavoro di Harriot è arrivato

[13] Mio zio Magno *[Rudy speaking]*, commerciante mercatale di frutta e verdura, mi ha insegnato tutta la matematica che ho imparato tra gli zero e i dieci anni. E sì, anche lui le impilava "giuste", le arance.

a Keplero, quest'ultimo gli ha scritto lamentando il fatto che era stato costretto a basare il suo ultimo lavoro sull'ottica sulla teologia anziché sulla matematica; giusto per mostrarvi che tipo era il buon Thomas, si mette al lavoro e praticamente riscrive il libro di Keplero, sfruttando il fatto che aveva scoperto la Legge di Snell vent'anni prima di Snell e quaranta prima i Cartesio *[...ricorda niente, una storia del genere?]*.

Non che i due filassero d'amore e d'accordo: Harriot era un atomista[14], quindi per lui era fondamentale impaccare le sfere. Keplero invece, forte del fatto che *Natura abhorret vacuum*, no: tra gli atomi dovrebbe esserci il vuoto, e quindi non possono esistere.

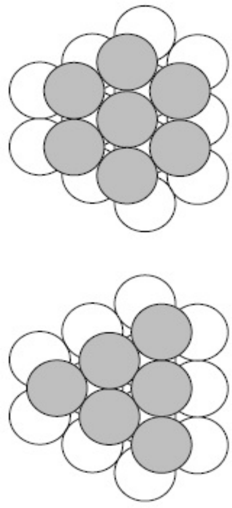
Ma poi è arrivato Natale, Keplero era in difficoltà finanziarie e si è trovato a scrivere la *Strena seu de nive sexangula*: quel regalo di Natale a un principe ha influenzato la cristallografia per i successivi duecento anni. E qui casca l'asino.

Infatti, Keplero fa un'affermazione che non dimostra, ossia che nessun impaccamento possa essere più denso dell'impaccamento a facce centrate: questa affermazione resiste indimostrata per quattrocento anni, sin quando Hales e il suo studente ***Samuel P. Ferguson*** non riescono a dimostrarla.

L'impaccamento *cfc* ("cubico a facce centrate") viene costruito a cominciare a uno strato di sfere in cui ogni centro sfera è il vertice di un triangolo equilatero, e ponendo gli strati successivi nella stessa disposizione opportunamente sfalsati: in questo modo, ottenete un impaccamento che (ve lo calcolate voi) ha una densità pari a:

$$D = \frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0.74.$$

Ma esiste anche almeno un altro impaccamento che permette di ottenere la stessa densità, quello *cubico a corpo centrato*. La sottile differenza nasce dalla cristallografia, e qui non ci interessa: la decisione tra il *cfc* e il *ccc* dovete prenderla quando costruite il secondo livello, e secondo noi l'immagine qui a fianco chiarisce il concetto, considerate che il reticolo di sfere bianche del "piano di sotto" è lo stesso nei due casi, e guardate dove vanno a finire i centri. Speriamo ora la cosa sia leggermente più chiara, soprattutto perché il nostro scopo è vedere come è stato dimostrato che aveva ragione Keplero.



7 cfc versus ccc

A questo punto, poteva non cacciarci il suo naso curioso anche Gauss? Evidentemente no. E il suo genio riesce a dimostrare che *se i centri delle sfere sono coincidenti con i punti di un reticolo*, allora il miglior impaccamento è il cubico a facce centrate: avete visto la parte in corsivo, vero? Bene, pare il problema principale sia tutto lì: il teorema non è difficile da dimostrare, ma è piuttosto noioso, quindi, se volete, chiedete.

La fregatura, in questo caso, è proprio il concetto di "reticolo". Nelle immortali parole di Martin Gardner, "attorno a una sfera ce ne stanno altre dodici, ma c'è *quasi* lo spazio per la tredicesima: siamo sicuri che non si possano "sommare" in un qualche modo questi spazi e ottenere qualcosa, sulla lunga distanza, più efficiente?"

Adesso, prendiamola due righe più bassa.

In due dimensioni, per fortuna, abbiamo qualche certezza in più. Infatti, nel 1890, ***Thue***, con indubbia fantasia, ha enunciato il *Teorema di Thue*: l'impaccamento esagonale, in cui ogni disco è circondato da altri sei, è il più denso possibile. Qui la densità è piuttosto facile da calcolare, e risulta:

$$D = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \approx 0.9069.$$

[14] Atomi "alla Thompson", per citare un nostro recente problema.

Per vedere come funziona, prendiamo un impaccamento arbitrario di dischi unitari sul piano; scopo del gioco è dimostrare che possiamo partizionare il piano in regioni e verificare che ogni regione ha al più la densità vista sopra. Nel seguito le parti in corsivo tra parentesi quadre le abbiamo inserite noi e ci pare rendano più chiaro il tutto: se non siete d'accordo, cancellatele pure.

Per fare questo, iniziamo con il disegnare dei cerchi attorno ad ognuno dei dischi di raggio $\frac{2}{\sqrt{3}}$: ogni volta che due di questi cerchi si intersecano (e lo faranno di sicuro da qualche parte, visto che il raggio dei cerchi è maggiore di quello dei dischi), tracciate il segmento che unisce i due punti di intersezione e tracciate i due triangoli isosceli (che sono *congruenti*) avente base il segmento e vertice nei centri dei rispettivi cerchi.

Notate, a questo punto, che non può esserci *[più di]* un punto che sia interno a tre cerchi: al più infatti tre cerchi si incontrano in un punto, posto che i loro centri siano i vertici di un triangolo equilatero di lato 2.

A questo punto, abbiamo partizionato il nostro spazio bidimensionale: abbiamo regioni al di fuori dei cerchi grandi, abbiamo regioni *[dentro ai cerchi e]* dentro ai triangoli e regioni dentro ai cerchi ma fuori dai triangoli. Esaminiamo *[la densità di]* queste regioni una per una.

Le regioni al di fuori dei cerchi grandi hanno densità 0 *[in quanto sono costruiti apposta per non lasciare spazio]*.

Le regioni all'interno dei cerchi grandi hanno densità $\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)^2 < \frac{\pi}{\sqrt{12}}$ *[l'ultimo termine dentro la parentesi è il rapporto dei raggi dei dischi e delle circonferenze]*. La diseguaglianza si verifica graficamente disegnando l'esagono che circoscrive il disco e inscritto nel cerchio relativo: la densità dell'esagono è il secondo termine della diseguaglianza, e sarà maggiore della densità all'interno del cerchio.

Arriva la parte pesante. Per calcolare la densità dei triangoli isosceli, applichiamo una trasformazione lineare *[e quindi conservando i rapporti tra le aree e quindi le densità]* al triangolo tale da trasformare il triangolo isoscele in un equilatero. Questa trasformazione deforma il cerchio in un'ellisse[15] ma mantiene le lunghezze e i due lati uguali del triangolo isoscele, e quindi l'ellisse taglia questi lati ad una distanza 1 dal centro *[che è anche il vertice del triangolo]*. Quindi, i quattro punti di intersezione sono le intersezioni tra l'ellisse e il cerchio unitario di ugual centro. In particolare, la densità dei triangoli equilateri viene incrementata se l'ellisse viene sostituita da un cerchio di raggio unitario; e se riuniamo i triangoli equilateri in modo tale da formare un esagono regolare inscritto nel cerchio di raggio unitario, otteniamo il massimo impaccamento possibile, che è quello esagonale. Come Volevasi Dimostrare.

Prima di tornare alle tre dimensioni, una domanda: non vi ricorda niente, quella divisione per i due punti di intersezione dei cerchi? Proprio lui, che infatti è il personaggio dei prossimi paragrafi.

Prendiamo adesso un numero reale $t>1$: definiamo *raggruppamento*[16] di palle un insieme di palle colorate[17] non sovrapponentesi attorno ad una palla centrata nell'origine, con la proprietà che i centri delle palle hanno al più una distanza $2t$ dall'origine.

[15] Mi sono ricordato per centoottantacinque numeri che "ellisse" è femminile. Doc è fiero di me.

[16] Non vi piace? Preferite *cluster*? Anche noi, quindi fate pure.

[17] Non fateci caso: il colorare le palle permette di evitare alcuni casi patologici di quelli che piacciono tanto ai matematici. Nelle bellissime parole di Hales, "Prendiamo un mucchio di palle colorate, e dipingiamole tutte di nero".

La palla nell'origine è contenuta in una *cella troncata di* ***Voronoi*** (proprio lui!).

Possiamo definire la cella di Voronoi come l'insieme dei punti che sono più vicini al centro nell'origine che a qualunque altro centro di sfera: la *cella troncata* non è altro che l'intersezione tra la cella di Voronoi e la sfera di raggio *t* centrata nell'origine.

8 *Un paio di "quasiquasi-rombidodecaedri"*

Se tornate un attimo alle due dimensioni, vi accorgete che gli esagoni regolari che tassellavano non sono altro che celle di Voronoi, mentre i dischi tagliati per diventare dei triangoli isosceli sono le celle troncate.

Vi state tutti chiedendo come siano fatte le celle di Voronoi dell'impaccamento cubico a facce centrate, vero? Bene, possiamo soddisfare (parzialmente) questa vostra insana voglia. Sono dei *rombidodecaedri*, ossia degli aggeggi formati da otto quadrati e quattro rombi: vedete alcuni (pietosi) tentativi di costruzione nell'immagine[18] qui a fianco (il problema nasce dal fatto che controventare un quadrato con il geomag è complicatissimo: comunque, se volete provare, questo aggeggio può servire come traccia).

Possiamo calcolare facilmente la densità dell'impaccamento cubico a facce centrate, calcolando il rapporto tra il volume della sfera e il volume del rombidodecaedro v_{cfc} :

$$\frac{\frac{4\pi}{3}}{v_{cfc}} = \frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0.74 .$$

I vertici più lontani del rombidodecaedro distano dal centro $\sqrt{2}$, e quindi se $t \leq \sqrt{2}$ la troncatura non ha effetto, mentre se $t > \sqrt{2}$ la troncatura taglia il rombidodecaedro e distrugge la relazione tra il suo volume e la nostra densità obiettivo, quindi la troncatura viene fissata a $t = \sqrt{2}$.

Sorvolando come d'uso sulle dimostrazioni, vi comunichiamo che nel 1999 **Sean McLaughlin** ha dimostrato come vera la congettura di **Fejes Tòth**: il volume della cella di Voronoi di un impaccamento di sfere è minimizzato dal dodecaedro regolare per cui la sfera inscritta ha raggio 1.

E qui casca l'asino.

Infatti in due dimensioni potevate utilizzare la cella minimizzante (l'esagono) per tassellare il piano e andare avanti tranquilli con la vostra mappatura dei dischi: in tre dimensioni, siccome *il dodecaedro non satura lo spazio*, non potete usare lo stesso trucco: e se preferite dire la cosa in modo complicato, *l'ottimizzazione locale del cluster non corrisponde all'ottimizzazione globale*.

Come è uscito dall'impasse il nostro? Secondo noi, un po' "a tentativi": infatti, se *V*(*p*) è il volume del nostro cluster *p*, definiamo una generica funzione *f* continua e consideriamo il problema di minimizzazione:

$$\min_{p} \left(vol\left(V\left(p\right)\right) + f\left(p\right) \right).$$

[18] Prima che pensiate a filmati in *slow motion* con il quasiquasirombicoso lanciato per aria, vi ricordiamo che Rudy ha un tavolo di cristallo: si è limitato a sdraiarsi per terra sotto il tavolo.

Adesso, come sempre in matematica, ci inventiamo qualche termine.

Per cominciare, diciamo che f è *cfc-compatibile* se il minimo della funzione è pari al volume del rombidodecaedro.

Adesso, sia Λ l'insieme dei centri delle sfere in un generico impaccamento: per $\lambda \in \Lambda$, consideriamo il cluster delle sfere il cui centro è ad una distanza al più $2t = 2\sqrt{2}$ da λ, e spostiamo il cluster nell'origine in modo da ottenere un ben preciso cluster p_λ, e sia $\Lambda_R = \Lambda \cap B_R$ l'insieme dei centri ad una distanza minore di R dall'origine: diciamo che f è *transiente* se:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_R} f(p_\lambda) = o(R^3).$$

Insomma, se la nostra funzione di correzione è un "infinitesimo sui volumi".

Mettiamo assieme le due definizioni.

Se f è transiente e cfc-compatibile, sommando abbiamo:

$$v_{cfc} \leq vol(V(p)) + f(p).$$

"Integrando" su tutto Λ_R, abbiamo:

$$(\Lambda_R) v_{cfc} \leq vol(B_R) + o(R^3).$$

Con un passaggio da terza media, dividiamo per $R^3 v_{cfc}$ per ottenere la densità:

$$\frac{\Lambda_R}{R^3} \leq \frac{\frac{4\pi}{3}}{v_{cfc}} + o(1) = \frac{\pi}{\sqrt{18}} + o(1).$$

E questa è molto importante, in quanto dimostra che se è vera la congettura di Keplero, allora esiste una f cfc-compatibile e transiente: Hales è partito a cercare una f che inizialmente fosse transiente, il che (secondo lui) semplificava molto la cosa.

Qualcuno si è accorto che abbiamo nascosto la polvere sotto il tappeto? Infatti, nulla ci garantisce che f esista (e noi chiediamo addirittura che sia *continua*).

Per fortuna, Hales era un epigono, in questo campo, e sui termini di correzione ci aveva lavorato già Tòth: la differenza era che i suoi cluster erano talmente grandi che nessuno era mai riuscito a stabilire se f era o no cfc-compatibile: non solo, ma il buon Fejes se ne era uscito con la frase classica dei *B-movies* di fantascienza: "...e se chiedessimo all'elaboratore?" (oh, giovini, era il 1964, quando per l'IBM i computer al mondo dovevano essere quattro, più uno per la Scozia!).

La forma del termine di correzione sembra complicata, ma si può smontare:

$$\sum_q a(p,q) v(q).$$

dove l'indice spazia su tutti i centri delle palle all'interno di una data distanza dal centro del cluster p *[e appartenenti al cluster]*, mentre l'ultimo termine è il volume della cella di Voronoi *[troncata]* centrata in q. La funzione a è il colpo da maestro del termine di correzione: infatti, si impone la condizione *[confermo, qui l'indice è "p"]*:

$$\sum_p a(p,q) = 0.$$

Nel momento stesso nel quale si sommi su tutti i cluster p dell'impaccamento: in pratica, f viene costruita come somma di volumi che vengono *sommati in q* e *sottratti in p*, ottenendo quindi una somma telescopica:

$$\sum f(p) = 1 - 1 + 1 - 1 \ldots.$$

Insomma, i termini spariscono tutti, come ci si aspetta da qualsiasi funzione di correzione che si comporta bene.

Questa specie di scambio sottobanco dei volumi tra p e q, però, non è che piaccia a tutti: infatti ***Delaunay*** aveva provato un'altra via. Prendiamo le nostre celle *[non troncate]* di Voronoi e consideriamo i loro centri, e tracciamo un segmento tra i centri che condividono una faccia *[insomma, una specie di duale della "cellatura"]*. Se consideriamo queste linee come spigoli, otteniamo un insieme di *simplessi che tassellano lo spazio*, e che sono noti come ***simplessi di Delaunay***. Su questi oggetti, almeno in teoria, è possibile lavorare per ottimizzare la nostra tassellatura.

Hales si è quindi ritrovato di fronte ad un dilemma: Voronoi troncate o simplessi di Delaunay? In realtà ci ha provato con entrambe, ma tutte e due portavano a delle complicazioni non trattabili.

Nel 1994, fortunatamente, ha avuto il lampo di genio: perché non usare un sistema *ibrido*? Questo approccio aveva un grande vantaggio: partendo con Delaunay, ogni volta che si trovava nei guai poteva "cambiare un pochino" la funzione[19] f, e uscire dal pantano.

La soluzione è stata trovata da ***Ferguson*** (Studente di Hales: siccome voleva finalmente laurearsi, ha detto "Basta" – senza punto esclamativo, che è molto più minaccioso – e ha minimizzato per l'ultima volta f: nelle parole di Hales, "Se potessi tornare indietro, cambierei f...".

Se f "sta ferma un attimo" (nel senso che legate Hales mani e piedi ad una sedia) ed è transiente, tutto quello che resta da risolvere è il problema di minimizzazione: piccolo guaio, lo spazio dei cluster è talmente complicato che la funzione volume non si può minimizzare in modo diretto, e qui l'idea è stata di associare ad ogni cluster un grafo *[planare]* che ne evidenzia le caratteristiche più interessanti, per poi stabilire un limite inferiore per $F(p)$, che diventa unicamente funzione della struttura del grafo: se riusciamo a dimostrare che questo limite minimo è sempre maggiore di v_{cfc}, abbiamo finito il lavoro.

La buona notizia è che nella maggior parte dei casi è *maggiore*, la cattiva notizia è che è maggiore nella *maggior parte dei casi*: esistono circa cinquemila grafi (trovati per enumerazione via computer) per i quali la funzione è *minore* del limite dato.

Come si costruisce il grafo di un cluster? Ogni arco corrisponde ad una coppia di sfere che sono "vicine" a quella nell'origine e "vicine" tra di loro: la vicinanza è determinata attraverso un parametro T, compreso nell'intervallo $\left(2{,}4\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$: se due centri di sfere hanno distanza al più T tra di loro e al più T dall'origine, allora si traccia l'arco di circonferenza che connette i due versori che puntano ai centri delle sfere.

Esempio: il grafo dell'impaccamento cubico a facce centrate è una struttura alternata di triangoli equilateri e quadrati, con due triangoli e due quadrati che si incontrano in ogni vertice, mentre il grafo planare associato al cluster dodecaedrico è il grafo icosaedrico.

Ogni componente chiusa di questi aggeggi viene definita *regione standard*: nei casi più semplici non è altro che un insieme di poligoni sferici sulla superficie di una sfera, ma esistono casi in cui è più complicata, e la parte difficile del provare la congettura di Keplero consiste proprio nel dimostrare che quelle complicate non rappresentano impaccamenti ottimali: il grande lavoro di Hales è stato giustappunto trasformare questo problema di ottimizzazione in un problema lineare, riuscendo (narra Hales medesimo, quindi dovremmo fidarci) a risolverne 4.999: l'ultimo, particolarmente ostico, è diventato la tesi di dottorato di Ferguson.

[19] Hales racconta che ad ogni convegno arrivava minimizzando una nuova funzione f e doveva ricalcolare tutto da capo: non solo, ma gli articoli che aveva scritto dovevano ogni volta venir ritrattati e riscritti con la nuova funzione. Chi aveva raccontato la barzelletta che i miglior strumento di calcolo è un dottorando? Alla faccia del *publish or perish*...

Quindi, Keplero aveva ragione. La prossima volta, vediamo un caso in cui invece aveva torto.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms