Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 181 – Febbraio 2014 – Anno Sedicesimo

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM180 ha diffuso 3'093 copie e il 03/02/2014 per Google eravamo in 10'700 pagine.

A ***Andy Quitmeyer*** (http://andy.dorkfort.com/andy/), come a molta altra gente, piace lavorare all'aria aperta nei boschi, ma se seguite il sano metodo scout (*mai* i glutei appoggiati a terra!) tenere il laptop in equilibrio sulle ginocchia è quasi impossibile. Ma basta pensarci un attimo e, con un tagliatore laser e un po' di compensato si risolve il problema. *Et voila.* I pezzi verticali nell'originale sono sei: non sappiamo (ma ci sentiamo di consigliarlo) se il tutto sia montabile a incastro, per non occupare uno spazio enorme nello zaino. Andy, ma quanto ti porti dietro, di prolunga?

1. Punti di vista

Mathemata
mathematicis
scribuntur

La citazione messa in testa a quest'articolo è indicativa di una storica – e forse troppo raramente considerata – contraddizione della scienza. La scienza, infatti, altro non dovrebbe essere ciò che etimologicamente recita la parola stessa: le "cose conosciute": e per cose conosciute non si intende certo la somma di tutte le nozioni individuali, dal compleanno di zia Marta al numero di patate raccolte nel 1987 nell'orto del vicino, ma proprio le cose che sono universalmente note, metodologicamente appurate, e di conseguenza condivise, tali insomma da meritarsi l'ambito titolo di "conosciute dall'umanità". Eppure la citazione (che potremmo tradurre come "*le cose della matematica sono scritte per i matematici*") mette bene in evidenza che per raggiungere un certo grado di profondità, di obiettività scientifica, è necessario un linguaggio specifico e di uso tutt'altro che comune; linguaggio che possono intendere solo gli addetti ai lavori.

Dal punto di vista storico, per lungo tempo l'esercizio della scienza è stato lasciato ad un numero estremamente ristretto di persone: esistevano gli accademici, gli "eruditi", insomma saggi riconosciuti che però di certo coprivano, se commisurati al numero degli esseri umani esistenti sul pianeta, una percentuale ridicolmente piccola del totale. L'istruzione è stata per lungo tempo un lusso riservato a pochissimi, e la distanza tra il linguaggio di Newton e quello di un suo contemporaneo contadino dello Yorkshire era così ampia da rendere semplicemente insignificante il problema della reciproca comunicazione scientifica. È solo negli ultimi secoli, con l'avvento di una formazione scolastica pubblica, che può nascere effettivamente la questione: perché mai una persona che è in grado di scrivere, leggere, far di conto e che sia in possesso di un decente sostrato di cultura generale deve scontrarsi con le enormi (e senza dubbio oggettive) difficoltà nel comprendere appieno una moderna teoria scientifica?

Se è vero che il "gap" tra cultura di base e cultura scientifica è ciò che alimenta una schiera sempre più folta di professionisti che si dedicano alla relativamente giovane disciplina della "divulgazione scientifica", non per questo la domanda fondamentale deve essere considerata evasa. Il concetto di divulgazione è sacrosantamente bello e giusto, e si applica felicemente non solo alla scienza: esistono brillanti "divulgatori d'arte", che riescono a spiegare amabilmente e con successo il valore estetico di un quadro o di una sinfonia, perché per quasi ogni opera dell'ingegno umano vale il principio che tanto più a fondo la si conosce, tanto più consapevole e profondo sarà l'apprezzamento; ma in generale questi benemeriti non devono superare lo scoglio di una vera e propria lingua/barriera come invece capita ai divulgatori scientifici. Esistono certo anche per loro dei termini tecnici, dei principi informativi anche complessi da trasmettere, ma il lavoro di "traduzione" dal lavoro specialistico alla sua divulgazione è sempre più difficile e complesso per i divulgatori della scienza. Non è affatto semplice spiegare perché la Monna Lisa di Leonardo sia così bella, significativa e importante: ma spiegare l'estetica e l'importanza dell'Equazione di Schrödinger richiede necessariamente più fatica: l'informazione che vi è contenuta è più codificata, sostanzialmente criptata, e prima di poter discutere convenientemente del suo significato, occorre spendere molte energie per illustrare quantomeno i principi essenziali del significante, ovvero come "leggere"

$$\boxed{H(t)|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle}$$

l'equazione stessa. Anche per godere appieno della Gioconda si deve "imparare a leggerla", ma quantomeno in essa è immediato il riconoscimento per così dire "naturale" (quadro, ritratto di donna, paesaggio sullo sfondo…)[1], mentre un'equazione matematica, senza un minimo di addestramento, è del tutto muta.

La ragione di questa complessità sta tutta nel fatto che la scienza ha la volontà di essere universale. Non vi è dubbio che le grandi opere d'arte riescano ad essere "universali" nel senso più diretto possibile: apprezzabili e significative virtualmente per ogni essere umano che si predisponga ad ammirarle; ma è verosimile che questo sia un risultato ottenibile solo per alcune grandi opere di sommi artisti e – quel che più conta – il risultato eclatante e universale non è necessariamente consapevole fin dal primo colpo di scalpello sul marmo o dal primo tratto di colore sulla tela.

A differenza dell'arte, che produce effettivamente degli "oggetti" artistici, i prodotti essenziali della scienza sono solamente delle teorie, cioè delle pure informazioni. Informazioni che poi, grazie al cielo, si traducono in una pletora di oggetti e macchine utilissime, certo: ma il punto cruciale è che la costruzione di una teoria deve essere condotta fin dall'inizio con criteri e linguaggi perfettamente definiti e verificabili. Per dirla in breve e in maniera semplificata, una teoria scientifica deve essere, fin dalla sua concezione, totalmente scevra da personalizzazioni; insomma indipendente dai vari punti di vista.

1 *Se vi sembra che quest'immagine non abbia niente a che vedere coi punti di vista, allora, beh… provate a cambiare punto di vista.*

L'espressione "punto di vista" è interessante sia concettualmente sia linguisticamente[2]. La sineddoche che sostituisce ad un generale stato di relazione individuale (fisico, emotivo, formativo… perfino economico e politico, in ultima analisi) la semplice espressione di "luogo da cui si osservano i fatti" palesa subito una specificità se non altro biologica; gli essere umani esprimono giudizi sulla base di ciò che vedono, e sono ben consci che quel che vedono può dipendere non solo dagli oggetti osservati, ma anche dallo specialissimo angolo di osservazione con il quale il soggetto li esamina. Vedere, osservare, apparire: tutti verbi legati alla vista. Viene da chiedersi se, in una società evoluta di esseri il cui senso informativo principale non fosse la vista, sarebbero nate espressioni linguistiche analoghe: "punto d'olfatto", in una società governata da cani; "punto d'udito", in un sistema culturale organizzato dai pipistrelli[3], e così via. Gusto e tatto richiedono una vicinanza del tutto specifica tra soggetto esaminatore e oggetto esaminato, e verosimilmente gli errori di prospettiva (che, guarda caso, in fondo non significa altro che "punto di vista") non hanno possibilità di verificarsi.

---

[1] Va riconosciuto che, dall'astrattismo in poi, e specialmente per gran parte dell'arte contemporanea, una "guida alla lettura" è necessaria anche per il primo approccio che abbiamo definito "naturale".

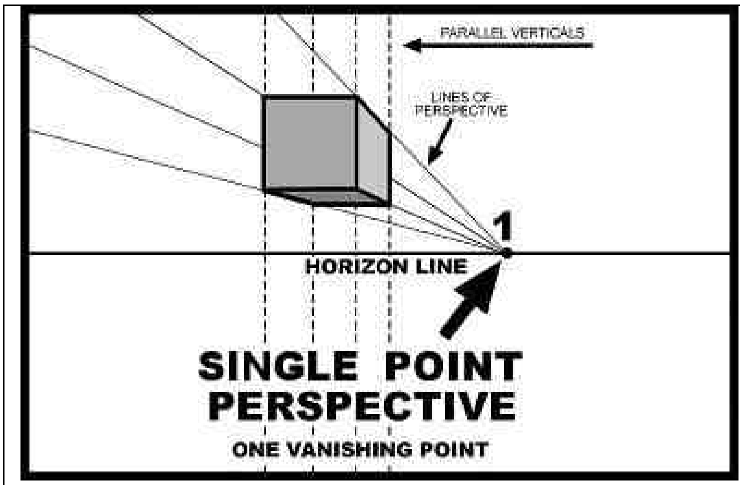
[2] La frase è troppo densa di avverbi, è evidente. Ma la carneficina di ripetizioni della prima stesura ("*L'espressione punto di vista è interessante sia dal punto di vista concettuale, sia dal punto di vista linguistico"*) ci sembrava davvero un'esagerazione.

[3] Inutile dire che esistono migliaia di professionisti che lavorano quotidianamente al fine di garantire il massimo risultato specifico di un ascolto, e spendono una gran quantità di tempo ed energie per assicurare a tutti il miglior "punto di udito": musicisti, tecnici del suono, architetti che progettano teatri, e cento altre categorie ancora. Ciò non di meno, la locuzione verbale non prende piede, per evidente inferiorità espressiva rispetto a "punto di vista".

Inoltre, è implicita la consapevolezza che ciò che appare da un "punto di vista" è necessariamente solo uno dei molti "apparire" possibili, ed introduce – quantomeno a livello espressivo – una sorta di principio di relatività. Questo è un duro colpo al concetto di "assoluto", ma è probabilmente un colpo salutare: se il "relativismo" è visto come fumo negli occhi da parte di quelle entità che cercano di salvaguardare una o più idee di "assoluto", è sostanzialmente solo perché la loro dottrina prevede che la verità risieda in un unico luogo (sia esso fisico o meno), ovvero laddove risiede proprio l'assoluto in cui credono. Quasi sempre, è proprio perché i fondamentalisti credono ognuno in una peculiarità del proprio Assoluto che non riescono a scambiare opinioni e pace con altri fondamentalisti: se esiste un Punto di Vista Assoluto, allora non possono coesistere due (o più) Punti di Vista Assoluti.

In ogni caso, su questa tematica specifica la Matematica ha vita più facile della Fisica: e per dimostrarlo possono bastare un paio di esempi, uno di natura per così dire "diretta e pratica", l'altro più vicino all'essenza concettuale del pensiero matematico.

L'esempio pratico è quello della geometria proiettiva. Nel procedere della costruzione di concetti matematici, ad un certo momento il concetto di "punto di vista" ha assunto un carattere centrale; certo con la complicità dell'arte e dei pittori, che da sempre hanno avuto a che fare col non trascurabile problema di rappresentare su superfici a due dimensioni un mondo che, con tutta evidenza, di dimensioni spaziali ne ha almeno tre. Sta di fatto che "essere" un cerchio non impedisce alla più matematica delle figure geometriche di "apparire" ellittico[4], se lo si guarda da qualsiasi punto di vista che non sia perfettamente ortogonale alla sua superficie.



2 *Prospettiva*

La geometria proiettiva si fa carico di tutte le "anomalie", chiamiamole così, che sorgono quando oggetti familiari – e tra questi possiamo serenamente metterci anche le care vecchie figure geometriche della geometria euclidea – sono visti da un punto di vista poco familiare. Il risultato di quest'operazione è però probabilmente più prezioso e sorprendente di quanto ci si potesse aspettare: si scoprono relazioni impreviste, effetti divertenti e aperture inattese. Tanto per dire, Euclide avrà disegnato migliaia di parallele con il suo stilo, ma forse oggi si stupirebbe nel rendersi conto che il modo migliore per rendere graficamente su un foglio una coppia di rette parallele non è tanto quello di porre attenzione a non farle incrociare mai, ma piuttosto proprio quello di farle congiungere, e per di più di farlo in corrispondenza di una terza retta, quella che rappresenta l'orizzonte.

Per quanto riguarda gli aspetti divertenti, basta vedere quanto si siano sbizzarriti i pittori una volta chiarite le regole auree della prospettiva: l'uso principe è stato ovviamente quello di rendere la profondità tridimensionale su una tela bidimensionale, rendendo così davvero realistica un'immagine pittorica. Ma è evidente che, dopo aver capito che si può disegnare qualcosa in modo apparentemente sbagliato da un certo punto di vista (2D) ma tale fa farlo apparire corretto da un altro (3D), si può anche fare in modo

[4] E finché si rimane sull'ellissi va ancora bene. Il caso estremo è naturalmente quello in cui si guarda un cerchio da un punto esterno ma appartenente allo stesso piano. Come insegna Flatlandia, il suo aspetto sarà quello di un segmento (lungo esattamente una semicirconferenza, ma di lunghezza apparente pari solo al diametro).

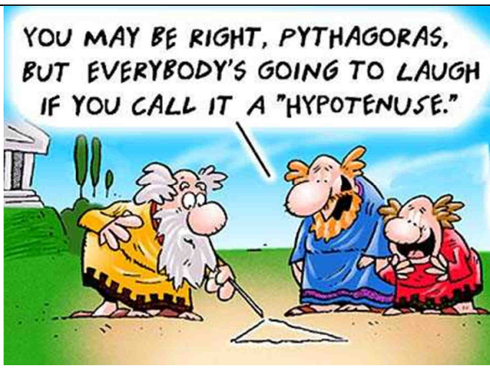
che una cosa apparentemente sbagliata dal punto di vista dell'osservatore principale assuma tutto un altro aspetto da un punto di vista secondario.

3 *Slide riciclata da conferenza RM: "Gli ambasciatori" di Hans Holbein il Giovane, 1533*

A questo proposito, è molto famoso il quadro "Gli Ambasciatori" di Hans Holbein il Giovane: la tela contiene, oltre al ritratto a figura intera di due diplomatici, anche un misterioso oggetto nella parte bassa del dipinto. Oggetto che, se osservato da un particolare punto di vista (e sia l'artista sia il proprietario del quadro avevano ben presente quale dovesse essere questo particolare luogo d'osservazione) si rivela essere un teschio umano disegnato con estrema perizia pittorica e – naturalmente – prospettica. Del resto, quando entrano in campo gli artisti, il gioco diventa quasi fin troppo facile. Come insegna il grande Douglas Hofstadter, è evidente che occorra saper unire arte e scienza, per ottenere una sintesi in quei capolavori creativi che sono gli ambigrammi, ma siamo pronti a scommettere che neppure lui sarebbe riuscito ad immaginare un capolavoro ambigrammatico come quello riportato in figura, dove Arte, Scienza e Filosofia sono indissolubilmente legati:

4 *Ambigramma che sposa Arte, Scienza e Filosofia*

In ogni caso, la presa di posizione della matematica nei confronti dei "punti di vista" è decisamente più categorica di quanto possa apparire ad un esame superficiale. In effetti, si può quasi affermare che il particolarismo, di cui i punti di vista sono ovviamente portabandiera, è visto dai matematici come il fumo negli occhi, essendo loro del tutto devoti alla Dea Generalizzazione.



5 *Questa vignetta l'abbiamo già usata, ma non riusciamo a resistere alla tentazione*

Questo vale fin dalla notte dei tempi: il più noto – e probabilmente più antico – teorema di matematica è il Teorema di Pitagora. Che sia stato realmente Pitagora a dimostrarlo per primo è cosa tutta da discutere, non fosse altro per la ragione che la stessa figura di Pitagora è talmente avvolta nel mito che è difficile anche solo dimostrare con assoluta certezza che sia mai davvero esistito[5], o quantomeno che sia esistito un solo uomo che riunisse tutti gli aspetti leggendari che a Pitagora si attribuiscono. Certo è che, dal punto di vista matematico, non ha molto significato il fatto che civiltà più antiche di quella greca conoscessero casi particolari del teorema. È appurato che già nell'antico Egitto, probabilmente anche in Mesopotamia, India e Cina si fosse scoperto che, costruendo un triangolo di lati 3, 4 e 5, l'angolo sotteso dai due lati più corti risultava essere un elegante angolo retto. Ed è altrettanto probabile che oltre alla terna[6] 3, 4 e 5 ne fossero note molte altre; ma il punto è che anche se le terne conosciute fossero state centinaia, migliaia o milioni, non per questo sarebbe opportuno togliere al Teorema di Pitagora il suo eroe eponimo: ciò che rende un teorema tale, è la sua valenza generale, non la sua molteplice applicabilità. E si arriva a conoscenze matematiche generali (in altre parole, a teoremi) proprio staccandosi dai casi particolari, e quindi, almeno in un certo senso, dagli specifici punti di vista. Paradossalmente, anzi, le maggiori conquiste della matematica sono forse proprio quelle che riconoscono, in maniera del tutto inaspettata, che la struttura logica generale di diverse categorie è la stessa, operando così una generalizzazione preziosa: casi, insomma, in cui i "punti di vista" erano così fortemente distanti l'uno dall'altro che non era neppure immaginabile che da essi si stesse osservando la medesima cosa.

Ma la matematica, per molti versi, non è neppure una scienza propriamente detta, e può permettersi degli assoluti che anche le discipline che le sono più affini spesso non possono utilizzare. Basta guardare alla fisica, o meglio ancora, all'astronomia: quasi tutta la sua storia potrebbe essere raccontata usando come filo conduttore le sue grandi rivoluzioni teoriche, che altro non sono, in ultima analisi, che radicali cambi di punti di vista.

La più celebrata delle teorie fisiche si porta appresso, nel nome, un manifesto di intenti: la Teoria della Relatività nasce e si sviluppa analizzando come i diversi fenomeni fisici possano apparire diversi ad osservatori diversi, e non ci sarebbe stato niente di male se si fosse chiamata direttamente "Teoria dei Punti di Vista". Per quanto sia verissimo che il concetto di relatività dei moti era ben noto già a Galileo[7], e che anzi, a ben vedere, lo sforzo principale di Einstein è sempre stato diretto alla ricerca degli invarianti (e quindi in un certo senso degli "assoluti") piuttosto che alla specificità dei sistemi di riferimento, è inevitabile che l'eredità concettuale più significativa della teoria einsteniana si risolva proprio nell'asserzione che non esistono punti di vista privilegiati. E anche se la sua importanza è estesa ad ogni campo della fisica, il suo atto di nascita risale ad un esperimento in ultima analisi astronomico ("*l'etere permea o non permea l'universo?*", si chiedevano Michelson e Morley nel 1887…), e il suo frutto più grande è la Relatività Generale, ovvero essenzialmente una moderna teoria della Gravitazione Universale.

Prima della Relatività, però, un'altra rivoluzione aveva già sconvolto il mondo dell'astronomia; e per quanto il lavoro di Einstein abbia dato di che meditare non solo a

[5] Di lui abbiamo parlato in RM102, "In principio era il numero".

[6] Terna che fa parte della famiglia di quelle che, non a caso, sono chiamate "terne pitagoriche".

[7] La "relatività galileiana" è troppo spesso dimenticata, forse perché è stata integrata in quella di Einstein; eppure, costituisce la base di quasi ogni scoperta cinematica e meccanica di Galileo, nonché il punto di partenza del lavoro fondamentale di Newton.

matematici e fisici, ma anche a epistemologi, filosofi, scienziati d'ogni tipo e perfino a uomini che di scienza non si interessano per nulla, è indubbio che la rivoluzione precedente abbia sconvolto ben di più le coscienze degli uomini che erano in vita quando questa si manifestò. E il suo impatto sugli uomini, anche di quelli che nulla sapevano di filosofia naturale, fu certo ancora maggiore, e talvolta perfino tragico. A dimostrarlo, come sempre, restano le parole e i modi di dire; quando uno sconvolgimento radicale, profondo e imprevisto ridefinisce per intero un modo di vita non si dice che è avvenuta una "rivoluzione einsteniana": l'espressione che si usa ancora è quella di "rivoluzione copernicana".

6 *Copernico*

Nicolaus Nicolai de Torunia, ma è certo meglio se diciamo Nicolaus Koppernigk, o forse dovremmo piuttosto dire Mikolaj Kopernik, anche se probabilmente saremmo meglio compresi se dicessimo Nicolaus Copernicus[8], nacque a Torun (Thorun? Turon? Turun? Toron? Thoron? Thorn?), in Polonia (Germania? Prussia? Slesia?) il 19 Febbraio 1473.

Quasi a voler ribadire quanto sia complesso, nelle quotidiane attività umane, rendersi indipendenti dai punti di vista, la Storia sembra aver riservato ad una delle personalità più soggette al relativismo culturale il ruolo di maggiore rivoluzionario nella prospettiva universale. I nomi che ha indossato colui che noi chiamiamo italicamente Niccolò Copernico e gli anglosassoni latinamente Nicolaus Copernicus, sono tanti e variati in funzione del luogo, delle persone alle quali venivano comunicati, e anche del fine per il quale venivano usati. Quel che è abbastanza curioso è che, in ultima analisi, il nome destinato a diventar celebre in tutto il mondo sia legato ad un elemento chimico, il rame. Dal latino *cuprum* all'attuale inglese *copper*, il rosso metallo ha sempre portato con se quella radice che è facilmente riconoscibile in "Koppernigk", e il cognome della famiglia di Niccolò è evidentemente uno di quelli che sono discesi dal luogo di origine, appunto il villaggio minerario della Slesia, regione storica dell'Europa centrale condivisa tra le attuali Polonia, Repubblica Ceca e Germania.

Al pari del suo nome, è incerta – o forse sarebbe meglio dire contesa – la sua nazionalità. La città che gli ha dato i natali è oggi ben collocata al centro della Polonia, ma pochi stati hanno visto i propri confini violentati dalla storia come quello polacco. Negli annali si leggono interi capitoli sulle diverse "spartizioni della Polonia", per non parlare del brutale e letterale "scivolamento verso ovest" che ha subito il territorio polacco dopo la seconda guerra mondiale. Quel che è certo è che, nonostante nel periodo compreso tra la prima e la seconda guerra mondiale si sia assistito ad una vera e propria controversia culturale tra tedeschi e polacchi in merito alla nazionalità di Copernico, la questione è con ogni probabilità senza alcun significato reale. La famiglia di Niccolò era certamente di origini tedesche, ed è verosimile che Copernico si considerasse, almeno in un certo senso, un prussiano. Ciò non di meno sapeva certamente parlare polacco, ed è rimasto un fedele suddito dei governanti polacchi di Cracovia e Warmia durante tutta la sua vita. Il punto,

[8] Non li abbiamo elencati tutti. Ci sono anche "Niclas Koppernigk" (usato nella giovinezza in Polonia); "Nicolaus Kopperlingk de Thorn" (all'iscrizione a Bologna); "Nicolaus Copernik" (a Padova); "Coppernicus" (sempre a Padova). Il più stabile "Nicolaus Copernicus" appare in forma genitiva "Nicolai Copernici" sulla copertina del libro di Rheticus che lo rende famoso, il "De Revolutionibus".

come sottolineano ormai gli storici, è che il concetto stesso di "nazione" aveva poco senso nei tempi e nei luoghi di Copernico. L'astronomo risiedeva in un territorio in cui si parlava tedesco e che era sotto la sovranità polacca, e lui stesso era il risultato genetico di un miscuglio tra le due culture. Per dirla con un o storico inglese, "*…prendendo tutto in debita considerazione, è ragionevole considerarlo sia Tedesco sia Polacco; ma, almeno nel senso in cui i nazionalisti moderni intendono il concetto, non era nessuno dei due*."

Sotto quest'aspetto così contenzioso, sembra quasi una presa in giro la storia di un altro elemento chimico, il 112° della tavola periodica: dopo un certo periodo di tempo in cui, come sempre accade, si è portato addosso il nome provvisorio di unumbium[9], il 14 Luglio del 2009 ha assunto l'importante nome di Copernicium (simbolo Cn), in onore al nostro protagonista. La cosa divertente è che, nella scelta dei nomi degli elementi transuranici, si è scatenata presto una sorta di battaglia tra gli istituti di ricerca che avevano i mezzi e le capacità di scoprirli. Per un certo periodo lo scettro dei migliori scopritori (ma forse sarebbe meglio dire "sintetizzatori") è restato a Berkeley, California, e non è certo un caso se i nomi degli elementi 95, 97 e 98 sono rispettivamente Americio, Berkelio e Californio. Più recentemente, però, gli americani sono stati superati dai tedeschi dello *Gesellschaft für Schwerionenforschung* di Darmstadt, nell'Assia, che hanno naturalmente provveduto a chiamare Hassio l'elemento numero 108 e Darmstadtio il numero 110[10]. Anche il 112 è stato scoperto nel medesimo istituto: con fare magnanimo e degno di lode, il direttore dell'Istituto annunciò che la scelta di Copernico come nume tutelare del centododicesimo elemento non era scaturita dalla volontà di onorare un tedesco, ma proprio un genio universale e universalmente noto.

Per i nostri ben più modesti intenti, possiamo limitarci ad acquisire cotanta contesa come l'ennesima dimostrazione di quanto possano diversi, lontani, e soprattutto sopravvalutati i diversi "punti di vista". Anche perché, a ben vedere, se proprio volessimo mettere ogni elemento nel calderone, persino noi Italiani potremmo avanzare delle pretese. Conta più il luogo di nascita o di formazione? Soprattutto per un uomo che ha rivoluzionato la visione del mondo per mezzo delle idee, conta di più la lingua che parla, o quella in cui quelle preziose idee sono state formate, generate, educate? Se avesse mai dovuto scrivere un curriculum, Copernico vi avrebbe elencato quattro università, e tre di queste sono italiane: all'originale Cracovia si affiancano infatti Bologna, Padova, Ferrara. E abbiamo tutti i diritti di sospettare che gli anni più creativi di Copernico siano stati quelli italiani: Niccolò ha vissuto e studiato in Italia dal 1497 al 1503, ovvero dai venticinque ai trent'anni.

Quel che Copernico fece, una volta tornato a casa dall'Italia, fu di immaginare un sistema che non prevedesse più la Terra come il centro dell'Universo. Al suo posto regnava il Sole, fiamma di luce incontrastata. Questo lo si leggeva facilmente nei sette postulati della sua dottrina:

1) *Non vi è un unico punto centro delle orbite celesti e delle sfere celesti;*

[9] Dove – ci abbiamo messo un po' a capirlo, si vede che stiamo invecchiando – lo strano latinismo sta semplicemente per unum+unum+bis (più desinenza "um"), insomma proprio (1+1+2)esimo.

[10] La battaglia coi nomi degli elementi non si limitava solo alle denominazioni geografiche: anche i più consoni nomi dedicati a famosi scienziati erano ovviamente scelti in funzione della loro nazionalità, e tra gli elementi superpesanti abbondano gli scienziati tedeschi.

2) *Il centro della Terra non è il centro dell'Universo, ma solo il centro della massa terrestre e della sfera lunare;*
3) *Tutte le sfere ruotano attorno al Sole, che quindi è in mezzo a tutte, e il centro dell'Universo si trova vicino a esso;*
4) *Il rapporto della distanza tra il Sole e la Terra con l'altezza del firmamento, è tanto più piccolo di quello tra il raggio della Terra e la distanza di questa dal Sole, che, nei confronti dell'altezza del firmamento, tale distanza è impercettibile. (Non viene quindi percepito alcun movimento apparente nelle stelle fisse);*
5) *Qualsiasi movimento appaia nel firmamento non appartiene a esso, ma alla Terra. Pertanto la Terra, con gli elementi contigui, compie in un giorno un intero giro attorno ai suoi poli fissi, mentre il firmamento resta immobile, inalterato con l'ultimo cielo.*
6) *Qualunque movimento ci appaia del Sole, non appartiene a esso, ma dipende dalla Terra e dalla nostra sfera, insieme alla quale noi ruotiamo intorno al Sole come qualsiasi altro pianeta, e così la Terra compie più movimenti.;*
7) *Per i pianeti appare un moto retrogrado e un moto diretto; ciò in realtà non dipende da loro, ma dalla Terra; pertanto, il moto di questa sola basta a spiegare tante irregolarità celesti.*[11]

Quel che tali postulati hanno comportato è di portata così vasta che non ha molto senso ricordarlo in un articolo come questo. È però forse curioso notare come, in ultima analisi, il copernicanesimo che tanto ha modificato lo spirito degli uomini e forse perfino lo stesso rapporto dell'Uomo con la Scienza, sia ormai così poco scientifico, almeno dal punto di vista strettamente tecnico: la Relatività insegna che, a ben vedere, non è poi così sbagliato sostenere che sia il Sole a girare attorno alla Terra, una volta che ci si metta d'accordo nel considerare il sistema di riferimento della Terra come quello in quiete. E lo stesso Copernico rabbrividirebbe e tremerebbe come una foglia, se potesse vedere adesso quali siano le reali dimensioni dell'Universo, e soprattutto quanto infima e insignificante sia quella gialla stellina che, a suo parere, era il Centro Assoluto di tutto l'Universo.
Perfino dal punto di vista strettamente matematico, ci sarebbe da trovare qualche pelo nell'uovo: le orbite di Niccolò, quei bei cerchi perfetti, non sono mica tanto in accordo con le osservazioni… bisognerà aspettare l'arrivo di Keplero, che li trasformerà in ellissi, per avere davvero un serio miglioramento nella spiegazione delle orbite retrograde e degli epicicli. Così come lo pensava Copernico, l'universo non è che fosse poi tanto migliore di quello del suo gran predecessore Tolomeo, almeno dal punto di vista dei calcoli.

Ma, nonostante il suo fosse un lavoro essenzialmente di scienza (non per niente è del pugno di Copernico la frase messa in testa a quest'articolo), l'impatto che ebbe fu soprattutto filosofico, culturale, perfino politico. Gli amanti della scienza, soprattutto gli astronomi, si disperano spesso al pensiero che, in pieno XXI secolo, siano ancora diffusissime rubriche, trasmissioni e grandi discussioni sull'astrologia, mentre non c'è niente di simile per l'astronomia. Eppure l'astrologia è in tutta evidenza una sciocchezza, mentre con pari evidenza l'astronomia è una scienza: falso contro vero; eppure è la fandonia, la follia a stravincere in popolarità. Il mistero inspiegabile è in realtà spiegabilissimo, non appena lo si analizza dal corretto punto di vista: e cioè che non è una gara tra scienza e non-scienza, tra verità e menzogna; è, molto più semplicemente, una gara persa in partenza dalla scienza, perché questa parla di stelle, mentre l'astrologia parla di uomini e donne. A nessun seguace dell'astrologia interessa davvero sapere la differenza tra stella e pianeta, e la maggior parte di loro non ha mai visto in cielo la costellazione che corrisponde al suo segno zodiacale: ciò non di meno, ascolta con avidità l'astrologo in TV che gli assicura gioie e dolori in amore, lavoro, salute.

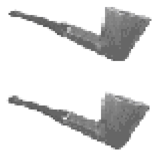
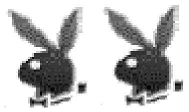
Copernico riuscì – e non è detto che mai qualcun altro riuscirà a fare altrettanto – a far riconsiderare all'Uomo il suo ruolo nell'Universo. A ben vedere, lo spostamento astronomico è stato davvero piccolo: cosa mai può interessare, dal punto di vista della Via Lattea, delle altre galassie, o del più remoto quasar, se il presunto centro dell'universo si

[11] Grazie, Wikipedia.it.

sposta dalla Terra al Sole? Un'unità astronomica è davvero molto meno di nulla, su scala universale. Ma quell'infinitesimo spostamento cambia la storia dell'Uomo: per un assolutista come l'uomo prerinascimentale, o si è il Centro del Mondo, o non si è nulla.

E Niccolò Copernico gli ha insinuato il feroce dubbio che possa davvero essere Nulla, piuttosto che la forma più alta e nobile dell'Universo, come aveva sempre creduto. E ci è riuscito solo grazie ad un piccolo, minuscolo, quasi insignificante cambio di punto di vista.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Supertask!			
Guardando il soffitto in un giorno di festa			

2.1 Supertask!

Abbiamo la ragionevole certezza di aver già intitolato un problema in questo modo, ma siamo anche convinti che questo sia l'unico titolo possibile. Vi ricordate cosa sono? Quei lavoretti del tipo: "Alle 11:30 togliete una pallina dal sacchetto, alle 11:45 ne togliete due, alle 11:52:30 ne togliete tre... e avanti dimezzando i tempi. Quante palline avete nel sacchetto a mezzogiorno?". Insomma, dei lavori analizzabili dal punto di vista teorico, ma praticamente irrealizzabili.

Qualche tempo fa, Rudy si è scontrato con un *Supertask* nella vita reale. Segue aneddoto.

In un'allegra serata con amici, uno di loro osservava interessato la libreria di casa d'Alembert[12]: Rudy si avvicinava, pronto a far partire una disquisizione letteraria, ma veniva gelato dall'affermazione dell'ospite, purtroppo udita dalla moglie di Rudy: "Sai, faccio il geologo... Interessanti, gli strati di polvere sui tuoi libri".

Corvée del week end successivo: "PULISCI QUELLA LIBRERIA!!!". E questo, per Rudy, è un *Supertask*. Infatti la pulizia della libreria richiede di:

1. Estrarre un libro
2. Spennellare (con pennello nuovo, comprato per l'occasione) la *testa* (sarebbe la parte sopra)
3. Riporre il libro.

...e non volete dare un'occhiata almeno all'autore del libro, intanto? Segue dialogo interiore-ma-non-troppo[13]:

"*Abbott*. Questo me l'ha regalato Doc, che voleva essere il primo nella libreria. Memo: comprare un libro di Anvar Aalto, a qualsiasi prezzo. *Adams*. È un mucchio che non lo leggo! Adesso mi segno di rileggerlo in treno, visto che ho l'elettronico. *Afanasjef-Aleramo-Alfieri*... Questi passano veloci, li ha portati Paola in famiglia. *Alighieri*. Ma cosa ci fa Fred con l'Inferno, sono tre anni che lo ha in camera sua. *Amendola*. Oeu, che fine ha fatto 'Un'Isola'? (ricerca del bigliettino per scoprire a chi l'ho prestato). *Apollinaire*.

[12] Quella in sala (letteraria), non quella nel *Math Manor*. Lì, il disordine regna incontrastato e *Paulette d'Alembert* (che continua a *non* studiare francese) vieta l'ingresso a chiunque.

[13] Come vi abbiamo detto *ad nauseam*, Rudy tiene i libri di letteratura (e ultimamente anche quelli di matematica ricreativa) rigorosamente in ordine alfabetico per autore.

Edizione della Pléiade. Il giorno che Paola dice di sapere il francese le rifilo questo, ci sarà da divertirsi. *Apuleio*. Com'è che non è ancora missing in action in un Liceo Classico a caso? *Ariosto*. Uh, sotto la "C" deve esserci la riscrittura di Calvino. Magari lo rileggo. *Asimov*."

E qui casca l'asino (pun intended). Perché Rudy comincia a leggere.

Due anni fa ha ricominciato *Foundation*. L'anno scorso i *Vedovi Neri*. Quest'anno si è fermato agli Enigmi dell'Union Club.

"Aspetta, solo un attimo, c'era quel racconto... Oh, Cavolo!"

L'esclamazione nasce dal fatto che il racconto gli ha appena dato un'idea su un grazioso problemino: prima, però, un breve riassunto del racconto, con molti sorvoli.

Un carcerato deve mandare il nome del capo della preparanda rivolta al direttore del carcere: per essere sicuro (anche in caso di "soffiata") di non essere individuato, manda il messaggio in un modo piuttosto criptico: su un nastro di calcolatrice, ci sono scritti i numeri da 1 a 999 (estremi inclusi). Come si chiama il capo della rivolta? *[Soluzione al fondo: non è questo, il problema!].*

A Rudy è venuto in mente una prosecuzione del racconto:

Sventata la rivolta (il Direttore aveva capito) e archiviata in triplice copia tutta la documentazione, vissero tutti per molti anni felici e contenti. Anni dopo, in fase di informatizzazione del carcere, due archivisti trovano la triplice copia del nastro di calcolatrice: salvando l'originale, prima di buttare via le due inutili copie, fanno un gioco.

Ipazia d'Alessandria (sì, si chiama così: e allora?): "Su questi nastri ci sono i numeri 1, 2, 3, 4, eccetera, *scritti di seguito e senza spazi*, sino a cento. Tu tieni questa copia, io tengo l'altra".

Jorge da Burgos (oh, nomi di fantasia! Comunque lavoravano tutti e due in una biblioteca, quindi siamo giustificati): "...e cosa ci faccio?"

Id'A: "Cancelli esattamente cento cifre, come faccio io"

JdB: "E poi vediamo se abbiamo cancellato le stesse? Divertente come il mal di denti"

Id'A: "No, perché io cercherò di ottenere, con le cifre restanti scritte di seguito e lasciate nello stesso ordine, il numero *più grande* possibile, mentre tu dovrai ottenere con lo stesso metodo il numero *più piccolo* possibile".

Sapete tutti che quei due sono dei tipi tosti, quando si tratta di giochi del genere: supponendo che entrambi giochino razionalmente, quanto vale la differenza tra il numero di Ipazia e il numero di Jorge? **Attenzione**, che ci sono due soluzioni: dipende da quanto siete cattivi...

Noterete che abbiamo "ridotto" la dimensione del nastro: secondo noi non è una complicazione eccessiva, quindi, se volete provare con dei nastri "più lunghi", fate pure.

Questo era il problema, ma adesso vorrete sapere come andava a finire il racconto di Asimov. Se volete provarci voi, non leggete il prossimo paragrafo.

Se scrivete in lettere i numeri da uno a cento, vi servono tutte le vocali tranne una, che vi servirebbe però per scrivere 1000: *one thousand* è il primo numero in cui compare la "a". E siccome nel nastro non compariva, il nome del facinoroso doveva essere *Noah*.

2.2 Guardando il soffitto, in un giorno di festa

Nel senso che un'accettabile risposta al problema è: "MaChiSseNeFregaTantoèFesta!". E girarsi dall'altra parte.

Partiamo comunque dall'ambientazione.

Rudy ha un orologio (visto che non facciamo pubblicità: della *Oregon Scientific*. Promesso, la prima volta che passiamo dall'Oregon andiamo a trovarli) di quelli che proiettano l'ora su un soffitto, simulando (visto che in realtà fa tutto a quadratini, ma il risultato è molto simile all'originale) la scrittura a sette segmenti.

Il "guaio" (non vorremmo che la O.S. si arrabbiasse), è che la stessa Tiranna del problema precedente ogni tanto decide di spolverare (con la dovuta energia) l'oggetto: e, se conoscete il sarchiapone di cui stiamo parlando, sapete benissimo che una prolungata (un paio di secondi) pressione sul tasto "Snooze" *inverte* la proiezione, come se aveste l'orologio girato al contrario (insomma, avete capito. E se non avete capito compratevi l'orologio e fate la prova, che la O.S. ci passa la tangente – trigonometrica).

Siccome Rudy usa come sveglia il telefono (alle quattro del mattino, il basso di "Smoke on the Water" vi assicura una competitiva visione del mondo), il fatto che sul soffitto ci sia l'ora sbagliata non lo preoccupa particolarmente; il guaio è, giustappunto, durante i week-end, quando la sveglia telefonica è disabilitata: aprendo gli occhi in un momento non determinabile della giornata (no, non ha passato la notte in bagordi: l'ha passata scrivendo articoli per una Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa), il primo dubbio è: "Ma siamo sicuri che l'ora non sia al contrario?".

Ora, per schematizzare la cosa, presumendo Rudy riapra le stanche palpebre in un momento qualunque delle ventiquattr'ore (e considerato che la sveglia è settata per dare l'ora in formato "24h"), quante sono, secondo voi, le ore "ambigue"?

Come penultima notazione: la sveglia segna ore e minuti, zeri davanti (se necessari) inclusi. Ma... e se segnasse anche i secondi, quante sarebbero le ore ambigue?

Ah, l'ultima notazione? Facile. Qualcuno sa che filo devo tagliare, per fare in modo che *non giri*?

3. Bungee Jumpers

Il numero di combinazioni di 1000 oggetti, presi 500 alla volta, è divisibile per 7?

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Febbraio.

Mese corto e denso, ma non potrà essere tanto corto quanto lo è stato gennaio per ottenere le vostre soluzioni… eppure ce l'avete fatta, a scriverci, a risolvere. Bene, bravi, continuate così.

Prima di andare avanti, voglio presentare le mie scuse a ***Gnugnu***, che ci aveva mandato una tabella risolutiva che fa la sua comparsa a pagina 13 di RM180, falsamente attribuita a ***Sawdust***: a quest'ultimo un ringraziamento per essersene accorto ed aver segnalato l'errore, e a ***Gnugnu***, ovvio, un grazie speciale per averci scritto. Nella stessa mail il grande ***Gnugnu*** proponeva al Capo un BJ di quelli fulminanti, che giriamo a voi mentre Rudy è distratto:

> $P_g(n)$ è il polinomio di grado g tale che: $P_g(1)=1$ e $P_g(i+1)=2P_g(i)$ per ogni i appartenente all'intervallo $1..g$. Dimostrare che $P_g(2g+2)$ è il quadrato di $P_g(g+1)$.

Spaventati? No, di sicuro no. Però un po' intimiditi di scuro sì.

Dal canto suo ***Sawdust*** continua a risolvere i problemi dei calendari, e quest'anno potrà produrre soluzioni in anticipo con l'avvento del mese, perché il Capo – come dicevamo già prima – è distratto ed ha messo gli stessi problemi del 2005 in questo 2013. Pazienza: nessuno ci aveva ancora mandato soluzioni in proposito, quindi andiamo bene.

Ma perché il Problemista Massimo ha la testa tra le nuvole in questi giorni? Può darsi che sia il fatto che con questo gennaio anche il più giovane dei Validi Assistenti di Laboratorio di Rudi Mathematici (VAdLdRM) è diventato maggiorenne, ed ha avanzato la pretesa di essere assunto con regolare contratto: anche se lo stipendio è – così come i nostri di padri fondatori – un moltiplicatore del costo degli abbonamenti, e quindi resta una voce in bilancio assolutamente ininfluente, ci tocca rivedere le nostre politiche di assunzione e collaborazione. Anche Doc a questo proposito non si pronuncia volentieri, in quanto Tesoriere, Postino, Autista, insomma Tuttofare, aveva già da tempo richiesto di modificare i moltiplicatori dei Redattori e degli Assistenti in funzione del numero dei loro compiti (anche perché a lui affibbiamo tutto quello che non vogliamo fare noi), ma è terrorizzato dalla possibilità che Rudy decida di creare un Problema Impossibile e lo faccia risolvere a noi invece che a voi. Restate in attesa, e siate preoccupati.

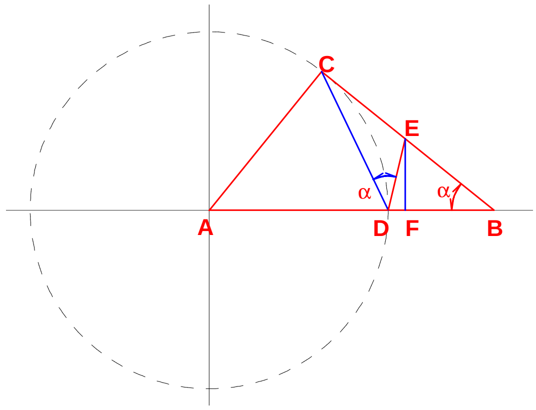
4.1 Calendari

Due soluzioni, entrambe di ***Sawdust***. Ve le passo così come sono, con nessun commento, buon divertimento!

4.1.1 Luglio 2005 (2014) – Putnam 1999, B1

Il triangolo rettangolo ABC ha l'angolo retto in C e $ABC = \theta$; il punto D su AB è tale che $|AC|=|AD|=1$; il punto E su BC è tale che $CDE = \theta$. La perpendicolare a BC per E incontra AB in F. Valutate $\lim_{\theta\to 0}|EF|$

Posto A nell'origine di un sistema di assi cartesiani, il punto C su una circonferenza centrata in A e di raggio 1 e il punto D a un'intersezione di questa con l'asse delle ascisse, la perpendicolare ad AC passante per C individua il punto B sull'asse X.



Perché l'angolo ABC tenda a 0 il punto B deve tendere all'infinito, cosa che porta AC a coincidere con l'asse Y. Ma se l'angolo CDE tende a 0 come ABC, il punto E finisce in C mentre F cade su A. Quindi $\lim_{\theta\to 0}|EF|=1$.

Q.E.F.

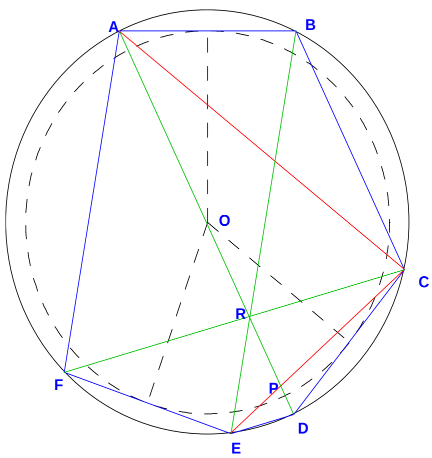
4.1.2 Marzo 2004 – USAMO 1994, 3

Un esagono convesso $ABCDEF$ è inscritto in una circonferenza in modo tale che $AB=CD=EF$ e le diagonali AD, BE e CF sono concorrenti.

Sia P l'intersezione di AD con CE. Provare che $\dfrac{\overline{CP}}{\overline{PE}} = \dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{CE}^2}$

I 3 lati uguali sono anche tangenti a una circonferenza interna e concentrica alla prima e, presi a coppie, sono i lati obliqui di 3 trapezi isosceli le cui basi maggiori sono le 3 diagonali concorrenti.

La prima domanda da porsi è: quale deve essere il raggio della cfr. interna perché si possa realizzare la condizione del quesito? Poiché le basi maggiori dei trapezi siano concorrenti non deve esserci nessuna superficie comune a tutti e 3 i trapezi (o meglio, devono avere un solo punto in comune) e questo avviene solo se i lati uguali sono minori o uguali rispetto ai lati di un ipotetico esagono regolare inscritto nella cfr. di partenza, perciò il raggio della cfr. interna deve essere $r \geq R\frac{\sqrt{3}}{2}$. Chiaramente nel caso dell'uguaglianza la concorrenza delle diagonali si ha solo se si tratta di un esagono regolare e allora $CP = PE$ e $AC = CE$, che soddisfa il problema, ma è un caso particolare.



Questa potrebbe essere una rappresentazione grafica del quesito in cui il punto di concorrenza delle diagonali in oggetto è indicato con R:

Tutto dovrebbe dipendere dalla similitudine tra i 3 triangoli RDE, CRD e BCR che presi a coppie formano anche i 2 quadrilateri simili $CRED$ e $BCDR$, oltre al fatto che i segmenti (o diagonali di 2° livello) *AC* e *BD*, essendo 2 diagonali del trapezio isoscele *ABCD*, sono uguali e quindi il segmento *BD* viene diviso in *G* dalla diagonale *CF* in 2 parti che sono proporzionali ai segmenti *CP* e *PE*.

Comunque se ci limitiamo ai 2 quadrilateri possiamo scrivere $\overline{CP} : \overline{PE} = \overline{BG} : \overline{GD}$, che per la proprietà del comporre diventa

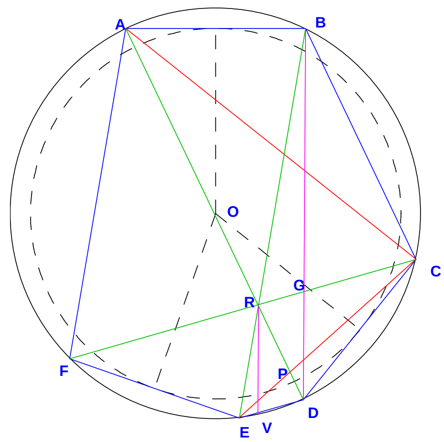
$$\left(\overline{CP} + \overline{PE}\right) : \overline{PE} = \left(\overline{BG} + \overline{GD}\right) : \overline{GD}$$

ma $\overline{CP} + \overline{PE} = \overline{CE}$ e $\overline{BG} + \overline{GD} = \overline{BD} = \overline{AC}$

e quindi $\overline{CE} : \overline{PE} = \overline{AC} : \overline{GD}$

che a sua volta per l'inversione degli estremi diventa $\overline{GD} : \overline{PE} = \overline{AC} : \overline{CE}$.

Se a questo punto tracciamo una parallela a *GD* passante per *R*, tra la sua intersezione con *DE* e il punto *R* abbiamo il segmento *RV* che è uguale a *GD* (il trapezio *CDEF* è isoscele, quindi le sue basi sono parallele).



Ora, poiché i triangoli *RDE* e *CRD* sono simili possiamo scrivere

$$\overline{PE} : \overline{GD} = \overline{GD} : \overline{CP}$$

ma allora $\overline{GD} = \sqrt{\overline{PE} * \overline{CP}}$

e quindi $\sqrt{\overline{PE} * \overline{CP}} : \overline{PE} = \overline{AC} : \overline{CE}$

ma siccome elevando a una potenza qualsiasi tutti i termini di una proporzione essa rimane vera, elevando tutti i termini al quadrato otteniamo

$$\frac{\overline{PE} * \overline{CP}}{\overline{PE}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{CE}^2}$$ che chiaramente è uguale a

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{CE}^2}$$

Q.E.D.

4.2 [180]

4.2.1 Il peggior problema di Alice

Dato che Alice sono io, non commento nemmeno il titolo, l'avete già capito che questo problema mi interessa poco. Ecco il testo:

> *A uno dei nostri VAdLdRM viene offerta come premio una busta, contenente N euro. Dopo che il Nostro ha aperto ed ispezionato il contenuto della busta, gliene viene offerta una seconda, che contiene o la metà di quanto c'era nella prima busta o il doppio, con probabilità pari. Il malcapitato VAdLdRM ha la possibilità di scambiare le due buste: che cosa conviene fare?*

Il problema alternativo è il seguente:

> *Al VAdLdRM vengono mostrate due buste: una contiene il doppio del denaro dell'altra. Ne può scegliere una e aprirla. Adesso conviene scambiare?E qual è la differenza rispetto al primo problema?*

Non immaginerete mai chi ci ha scritto per primo… era tanto tempo che non ricevevamo una risposta criptica del nostro ***.mau.***! Eccola:

> Nel primo caso (immaginando che la busta in mano sia fissata, e a quel punto si lanci una moneta per decidere se nella busta 2 ci sia metà o il doppio dei soldi)

conviene cambiare, perché se nella busta 1 ci sono x euro, nella busta 2 il valore atteso è $(2x + x/2)/2 = 5x/4$.

Nel secondo caso (immaginando che le due buste siano preparate in anticipo e messe lì perché uno scelga) è irrilevante cambiare o no: basta pensare a un esperimento parallelo dove l'antiAlberto ha inizialmente preso l'altra busta, e notare come la situazione è simmetrica.

Anti-Alberto!? No, per carità, soprattutto perché ora arriva ***Alberto R***, che ha aggiunto all'inizio ed in coda dei commenti per me – gli unici che ho veramente letto – fenomenali:

Se vogliamo essere cittadini e non sudditi dobbiamo essere in grado, leggendo un decreto o una legge, di capire cosa c'è scritto.

Ciò significa saper decifrare anche il testo più oscuro, contorto e criptico, abilità che si acquisisce solo con un lungo e paziente esercizio.

Siamo quindi riconoscenti a Rudi per il suo impegno civile in questa meritoria opera di educazione.

E veniamo al quesito.

Dopo attenta lettura e rilettura ho concluso (non senza residui dubbi che giustificano la premessa) che l'unica differenza tra i due casi è che nell'uno compaiono le parole "rimetti dentro i soldi", dunque Alberto ha aperto la busta e sa quanto contiene; nell'altro la proposta di cambiare busta segue "immediatamente" la consegna della prima busta, che quindi possiamo supporre ancora chiusa, o quantomeno, possiamo pensare che non c'è stato tempo di contare i soldi.

A prima vista sembrerebbe che conoscere il contenuto della prima busta non fornisca nessuna informazione circa il contenuto della seconda che potrà essere, con ugual probabilità, il doppio o la metà, per cui cambiare o non cambiare è indifferente.

Ma le cose non stanno così. L'insieme dei valori possibili è limitato: è impensabile, ad esempio, un regalo di 50 centesimi o uno di 50000 euro. Alberto stimerà ragionevole una somma compresa, supponiamo, tra i 50 e i 250 euro, con una distribuzione di probabilità a forma di campana avente il massimo nella zona centrale dell'intervallo e prossima a zero agli estremi. Se Alberto ha trovato nella prima busta 120 euro non avrà valide indicazioni a favore o a sfavore del cambio. Farà invece bene a cambiare se vi ha trovato 60 euro (poco probabile una misera busta da 30 euro) e farà bene a non cambiare se vi ha trovato 200 euro (poco probabile una busta da 400 euro).

In definitiva le risposte alle due domande sono diverse perché conoscere il contenuto della prima busta può, almeno in alcuni casi, fornire utili indizi circa il contenuto della seconda. In altre parole se le due buste sono entrambe chiuse esse sono equivalenti "per evidenti ragioni di simmetria", ma l'apertura di una busta rompe la simmetria.

Appendice.

Il problema delle due buste è interessante anche perché, se cucinato in modo opportuno, si presta a un simpatico paradosso. Vi propongo la mia ricetta.

Se da una certa azione possono derivare, con uguale probabilità, due conseguenze, l'una che comporta un vantaggio V e l'altra che comporta uno svantaggio S, se V>S l'azione va eseguita. (a meno di non essere penitenti o masochisti).

Questa è una norma di comportamento (cioè non è un'affermazione di verità) e, come tale, può essere condivisa o no (personalmente mi sembra molto sensata), ma, in sé, non è né vera né falsa.

Tuttavia, poiché non è auto-contraddittoria, non dovrebbe generare antinomie.

Ciò premesso seguiamo questo racconto:

Il conte Megaeuro, ricchissimo, eccentrico e fantasioso, convoca il suo segretario e, dopo averlo lodato per la diligenza con cui sta gestendo il patrimonio affidatogli, annuncia l'intenzione di dargli una ricompensa.

"Su questo tavolo ci sono due buste, una rossa e una verde. Una contiene un assegno di un certo importo e l'altra un assegno di importo doppio. Prendi quella che vuoi. Dopo che l'avrai aperta, se lo desideri, ti mostrerò il contenuto dell'altra busta, tanto per soddisfare la tua legittima curiosità di sapere se hai imbroccato la busta più ricca."

Il segretario sceglie la busta rossa, ringrazia e fa per andarsene, ma il conte aggiunge: "Se cambi idea prima di aver aperto la busta, puoi sempre tornare nel mio studio, depositare sulla scrivania la busta originariamente scelta e prendere l'altra. Potrai far ciò tutte le volte che vorrai."

Il segretario ringrazia nuovamente e precisa di non intravedere alcun motivo per cambiare la busta, posto che nessun elemento oggettivo suggerisce che la somma doppia sia contenuta nella busta verde piuttosto che in quella rossa, o viceversa.

Tornato nella sua stanza, il segretario si rigira soddisfatto la busta rossa tra le mani, fantasticando (nota la generosità del conte) su come spendere i non pochi soldi che vi troverà.

"Se ci sono – ipotizziamo – 20.000 euro, mi ci scappa una bella vacanza a Montecarlo con visita al casinò. Mi piace il gioco d'azzardo!."

Ma poi osserva: "Perché andare al casinò di Montecarlo quando posso scommettere qui? Basta che giochi a cambiare la busta. Gioco emozionante: se mi va bene vinco 20.000 euro se mi va male ne perdo 10.000".

Ci ripensa e il calcolo lo turba: Ma come? La probabilità di guadagnarci o di rimetterci è la stessa, eppure la vincita (20.000) è doppia della perdita (10.000) !"

"Forse che l'anomalia dipende dalla arbitraria ipotesi che la busta rossa contenga proprio 20.000 euro? No di certo! Perché il ragionamento non cambia qualunque sia il contenuto (chiamiamolo X) della busta rossa: Se il cambio da rosso a verde mi è favorevole (probabilità ½) lascio X euro per prenderne 2X (guadagno = X), se invece sono sfortunato (probabilità ancora uguale a ½) lascio X per prendere X/2 (perdita = X/2). In ogni caso la vincita è doppia della perdita, mentre la probabilità di vincere è uguale alla probabilità di perdere. Altro che roulette a Montecarlo! Questo sì che è un gioco conveniente!

In forza di questo ineccepibile ragionamento e anche nell'inconsapevole adesione alla saggia norma comportamentale innanzi scritta in corsivo, il segretario si reca nello studio del conte, deposita la busta rossa e prende quella verde.

Ma, tornato nella sua stanza con la busta verde in mano, si rende conto che tutti i ragionamenti precedentemente fatti potevano essere ripetuti, con pari validità, permutando le parole "rosso" con "verde". Avrebbe quindi dovuto nuovamente scambiare le buste ….. e così all'infinito. Come si esce da questo paradosso ?

Soluzione.

Premettiamo che una variabile aleatoria è discreta se può assumere solo valori interi (una somma di denaro è sempre discreta: anche 20.35 euro, apparentemente decimale, si trasforma nell'intero 2035 cents). Inoltre una variabile aleatoria è illimitata se è infinito il numero di valori diversi che essa può assumere, ed è uniforme se tutti i suoi valori sono equiprobabili.

Distribuzioni di probabilità discrete illimitate si trovano nei libri di statistica (ad es. quella di Poisson) o possono essere costruite, ad esempio il numero dei lanci di un dado che precedono la prima uscita del 6. Ma queste distribuzioni illimitate non sono uniformi. Nella vita pratica si incontrano distribuzioni discrete uniformi ma limitate (gioco del lotto limitato tra 1 e 90, lancio di un dado limitato tra 1 e 6 etc).

Ma sarebbe inutile cercare una distribuzione discreta che sia contemporaneamente illimitata e uniforme perché tale distribuzione non può esistere!

Il contenuto X della busta in mano al segretario, è una variabile aleatoria discreta che il segretario, in mancanza di informazione, presume essere illimitata e uniforme ed agisce di conseguenza, ma "discreta", "illimitata" e "uniforme" sono fra loro incompatibili, e siccome ex falso sequitur quodlibet …. ecco che nasce il paradosso.

Per chiarire la situazione limitiamo il possibile contenuto delle due buste X, Y supponendo che il conte abbia preso in considerazione solo importi compresi tra un minimo di 1000 euro (per non fare la figura del taccagno) e un massimo di 100.000 euro (sua disponibilità attuale in conto corrente). Adesso la probabilità di cambio favorevole non è più la costante 1/2, ma è una funzione di X. Infatti per X uguale, ad esempio, a 1200 euro lo scambio sarebbe certamente favorevole dovendosi escludere una busta con soli 600 euro; mentre per X uguale a 90.000 euro lo scambio sarebbe certamente sfavorevole non esistendo una busta con 180.000 euro.

Se l'intervallo delle possibili X è limitato il calcolo della "speranza matematica" è noioso ma non difficile e il risultato di questo calcolo ci dimostra che cambiare o non cambiare è indifferente.

Esistono numerosi pseudoparadossi basati sullo stesso trucco, ma la morale è questa: non ha senso parlare di una variabile aleatoria se non è data la sua distribuzione di probabilità oppure non è dettagliatamente descritto il procedimento con cui i valori della variabile vengono di volta in volta scelti.

Un altro esempio di apparente paradosso, basato sull'arbitraria assunzione di variabili aleatorie scelte a caso senza che sia precisato come la scelta viene effettuata, è il seguente:

Due giocatori ricevono ciascuno una busta contenente un numero scelto a caso. vince chi ha il numero minore e la vincita è pari proprio al numero minore. Cosi, ad esempio, se Antonio apre la busta e trova "100" mentre Bruno vi trova "180", Bruno paga ad Antonio 100 euro.

Mettiamoci nei panni di Antonio e seguiamo il suo ragionamento:

Sia X il numero contenuto nella mia busta. Ho la stessa probabilità di vincere o di perdere, ma, se vinco, vinco X, mentre, se perdo, perdo meno di X. Dunque il gioco per me è vantaggioso. Però … lo stesso identico ragionamento potrebbe farlo Bruno!

PS: La probabilità è un serpente velenoso nascosto tra le foglie dell'albero del buonsenso; il calcolo delle probabilità è l'arte di afferrare il serpente per il collo onde cogliere senza rischi i frutti dell'albero. Alice, condividi?

Come no. In pieno. Vediamo la versione di ***Rub***:

Ho due buste, ne scelgo una, la apro, vedo un importo A; le seconda busta potrebbe contenere A/2 oppure 2A. Scambio oppure no?

E' evidente che abbiamo il 50% di probabilità in entrambi i casi, e sembrerebbe inutile scegliere di scambiare, ma se calcolo IL GUADAGNO MEDIO ATTESO rispetto al valore A che ho teoricamente già incamerato, abbiamo:

$$GMA=50\%x(2A-A)+50\%(A/2-A)=+A/4$$

Pertanto in questo caso scambio, perché ho un valore positivo medio pesato di guadagno rispetto al semplice incasso di A.

Nel l'altro esempio, invece, la prima busta viene data *consapevolmente* sapendo che la seconda busta contiene solamente o 2A oppure A/2. Considerando quindi l'insieme dei casi possibili di A, 2A ed A/2 distribuiti in due buste (sei combinazioni) ed escludendo *a priori* quelli in cui la prima busta non consente di avere nella seconda il doppio oppure la metà (2A ed A/2; A/2 e 2A), rimangono solo queste quattro possibilità, tutte equiprobabili:

prima busta	seconda busta	Guadagno/Perdita nel Cambio
A	2A	+A
A	A/2	-A/2
2A	A	-A
A/2	A	+A/2

quindi IL GUADAGNO MEDIO ATTESO rispetto al valore che ho teoricamente già incamerato, adesso viene:

GMA=25%x(+A)+25%(-A/2)+ 25%x(-A)+25%(A/2)=0

Pertanto in questo caso lo scambio risulta inutile, perché ho un valore medio pesato di guadagno nullo rispetto al semplice incasso di A.

I due casi sono diversi, dunque? Paiono tutti d'accordo, anche ***GaS***:

Partiamo dal secondo caso che è più facile: ovviamente cambiare è indifferente perché nella scelta iniziale si hanno il 50% delle probabilità di aver preso la busta "migliore" e 50% di avere scelto la busta "peggiore".

Più contro-intuitivo il primo problema. Sia X l'importo che Alberto trova nella busta, dalle condizioni poste dal genitore la seconda busta contiene con probabilità del 50% (quindi equiprobabili) X/2 oppure 2X. Il valore atteso della seconda busta è quindi X/2*1/2+2X*1/2=5/4*X che è maggiore di quanto ha in mano (X) e quindi conviene cambiare busta.

Certo che queste cose le potete trovare divertenti solo voi, io sto ancora grattandomi la testa con la storia delle tre porte e della capra. Andiamo avanti.

4.2.2 Presa di posizione

Il secondo problema era invece un modo tutto tipico del Capo di promuovere il sistema metrico decimale e l'euro allo stesso tempo, supponendo di avere una nuova valuta e qualche problema correlato:

Lo Stato emette una nuova moneta, l'Italo, che compare in dodici valori facciali distinti tali che qualsiasi importo intero da 1 a N Italo possa essere sempre composto con un insieme di otto monete o meno (non necessariamente distinte): N viene fissato per decreto all'inizio.

Supponiamo sia stato fissato N=6543: che insieme di Italo stampate?

Causa svalutazione ritirate tutto il vecchio conquibus e emettete una nuova serie sempre da 12 pezzi, ma questa volta con gli otto pezzi sempre non necessariamente distinti dovete riuscire a pagare sino a N=13000: trovate la serie.

Prevedendo ulteriori svalutazioni nel futuro, cominciate a porvi il problema di quale sia il massimo N per cui con la solita serie da dodici e impegnando al più otto pezzi non necessariamente distinti, potete continuare a fare questo giochino.

La soluzione che pubblichiamo è di ***trentatré***, ed è arrivata proprio mentre decidevamo di non mettere questo capitolo nelle S&N:

Con

T_n : n-esimo taglio (o valore facciale) della moneta

$\{T_1, T_2, \ldots T_n\}$: insieme dei tagli fino a n con i T_n crescenti

$[1 \ldots N_n]$: sequenza degli importi che si ottengono da $\{T_1, T_2, \ldots T_n\}$.

T_{n+1} può ampliare la sequenza $[1 \ldots N_n]$ solo se è disponibile almeno una moneta e se $T_n < T_{n+1} \leq N_n + 1$. Costruisco quindi la sequenza con i criteri (a) ogni N_n impiega al più n monete; (b) $T_{n+1} = N_n + 1$. Si ha

$T_1 = N_1 = 1$

$T_2 = N_1 + 1 = 2$, con $\{1, 2\}$ e 2 monete si ha $[1 \ldots 4]$ (5 richiede 3 monete)

$T_3 = N_2 + 1 = 5$, con $\{1, 2, 5\}$ e 3 monete si ha $[1 \ldots 12]$ (13 richiede 4 monete)

e seguitando

$T_n = F_{2n-1}$: numeri di Fibonacci di indice dispari

$N_n = T_{n+1} - 1 = F_{2n+1} - 1$.

Che con n monete e $\{F_1, F_3, \ldots F_{2n-1}\}$ si ottengono tutti gli importi $[1 \ldots (F_{2n+1} - 1)]$ è una proprietà dei numeri di Fibonacci che si può dimostrare per induzione.
Valgono inoltre le

$F_{2n+1} = F_1 + F_3 + \ldots F_{2n-3} + 2F_{2n-1} = 3F_{2n-1} - F_{2n-3}$

da cui

$T_n = 3T_{n-1} - T_{n-2} = T_1 + T_2 + \ldots T_{n-2} + 2T_{n-1}$

$N_n = F_3 + \ldots F_{2n-3} + 2F_{2n-1}$ (che comprende infatti n monete).

Disponendo non di 8 ma di 12 monete si avrebbe la sequenza

T_n	1	2	5	13	34	89	233	610	1597	4181	10946	28657

con gli importi $[1 \ldots N_{12}] = [1 \ldots 75024]$.

Con 8 monete la sequenza vale solo fino a $T_8 = F_{15} = 610$, $N_8 = F_{17} - 1 = 1596$ e vanno determinati i termini successivi. Si può ancora utilizzare (b) $T_{n+1} = N_n + 1$, e quindi $T_9 = N_8 + 1 = F_{17} = 1597$.

Il calcolo degli intervalli $[1 \ldots N_n], n \geq 9$ si può fare lasciando 7 monete per $[1 \ldots N_{n-1}]$ e usando l'ottava per $[1 \ldots N_n]$; tralasciando i dettagli si ha in definitiva

T_n	1	2	5	13	34	89	233	610	1597	2584	3571	4558
N_n	1	4	12	33	88	232	609	1596	2583	3570	4557	5544

L'importo massimo è 5544 che non risolve il problema.
Per gli ultimi valori, anziché $T_n = 3T_{n-1} - T_{n-2}$ vale la ricorrenza $T_n = 2T_{n-1} - T_{n-2}$, cioè tutti i tagli sono legati da $T_n = pT_{n-1} - T_{n-2}$, con p opportuno.

Variando p fra i diversi termini ho ricavato (con un programma e per tentativi) la sequenza

T_n	1	2	5	13	34	89	144	343	542	1283	2024	4789
N_n	8	16	37	85	190	410	630	1227	1824	3306	4788	7553
p			3	3	3	3	2	3	2	3	2	3

(qui non ho usato i criteri (a) e (b) e gli N_n sono ricavati usando tutte le otto monete).
La sequenza risolve il problema per $N \leq 7553$ e quindi anche per 6543.
Non dubito che esista una sequenza per 13000 e oltre, ma mi fermo qui.

E qui ci fermiamo anche noi. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Rudy ha iniziato una serie di scommesse al bar; tutte le sere si trova con un amico e tirano una moneta; se viene testa Rudy beve a spese dell'amico, altrimenti paga lui. L'altro giorno si è svolta una scena di questo genere.

"Rudy, le ultime tre volte hai vinto tu! Dovresti darmi una qualche forma di vantaggio!"

"Proviamo in questo modo: tu tiri due monete, io ne tiro una. Se ci sono più "teste", vinco io; altrimenti, vinci tu"

"Oh, grazie! Proviamo subito".

Secondo voi, l'amico aveva ragione di ringraziare?

6. Pagina 46

Il numero di combinazioni di 1000 oggetti, presi 500 alla volta, si può indicare come:

$$\frac{1000!}{(500!)^2}.$$

Essendo 7 un numero primo, la più grande potenza di 7 che sia fattore di 1000! risulta essere:

$$\left[\frac{1000}{7}\right]+\left[\frac{1000}{49}\right]+\left[\frac{1000}{343}\right]=142+20+2=164.$$

Similmente, la più grande potenza di 7 che sia fattore di 500! risulta essere:

$$\left[\frac{500}{7}\right]+\left[\frac{500}{49}\right]+\left[\frac{500}{343}\right]=71+10+1=82.$$

Quindi (considerando l'elevazione al quadrato) il grado con cui 7 compare nello sviluppo del denominatore risulta pari a $82 \cdot 2 = 164$, ossia numeratore e denominatore contengono il fattore 7 lo stesso numero di volte.

Una volta che il fattore 7^{164} venga semplificato, non resteranno multipli di 7 nelle due scomposizioni, quindi neppure nel risultato finale.

Quindi il numero cercato non è divisibile per 7.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Oltre Platone

Volevamo intitolare il pezzo *Senza alcun disegno*, ma poi ci siamo accorti che in realtà di disegni ne mettevamo un mucchio; l'alternativa che ci è parsa possibile per un certo tempo era *Senza alcuna formula*, ma verso la fine il Formula Editor si è rivelato indispensabile. Il titolo selezionato è, secondo noi, è piuttosto insoddisfacente, ma è tutto quello che ci è venuto in mente.

Come ultimo punto di questa introduzione che ormai sta diventando troppo lunga, troviamo un lavoro ad Alice: *Treccia*[14]*, come cavolo si legge 'sto nome??*.

Bene, andiamo ad incominciare. Divagando.

Vi ricordate la dimostrazione di ***Teeteto*** [*No, Treccia, tranquilla. Non è questo il nome*] sul fatto che i solidi platonici tridimensionali sono solo cinque? Per fare un vertice[15] ci vogliono tre facce, e la somma degli angoli delle figure che fanno da facce deve essere minore di 360°, in modo tale che il solido si "chiuda" su sé stesso[16]. A questo punto con tre triangoli equilateri fate il tetraedro, con quattro l'ottaedro, con cinque l'icosaedro e basta (sei vi fanno un bellissimo pavimento, quindi non funziona); passate al quadrato e con tre ottenete il cubo, e basta (quattro vi fanno il pavimento di mia nonna, se li scegliete color *sangue di bue*); passate quindi al pentagono e con tre ottenete il dodecaedro, e basta (per quelli come me che non si ricordano mai, l'angolo è di 108°, quindi quattro non ci stanno); con l'esagono (120°) niente da fare (anche qui il pavimento merita).

Siccome quando affrontiamo questo punto alle conferenze ormai restano solo quelli a cui piace la matematica (gli altri sono scappati mentre Doc parla della *Leggenda di Sessa*), tutti hanno presente di cosa stiamo parlando, ma hanno comunque un'aria sollevata nel vederli a video (un po' meno quando Rudy passa a quattro o più dimensioni): anche quei disegni sono presi da *Wikipedia*, visto che Rudy non si sogna neanche di farli, ma la cosa infastidisce: possibile che non ci sia modo di descriverli *senza disegni*?

Due buone notizie: non solo il modo esiste, ma funziona *anche per dimensioni superiori*.

Lo ha trovato ***Schläfli*** [*Oy, Treccia! È questo il nome da leggere! Svelta, che devo citarlo alla prossima conferenza!*], e non solo permette di evitare di fare i disegni, ma permette (cosa che quando si parla di matematica è importantissima) di fare anche qualche conto.

La notizia che sembra cattiva è che si definisce *ricorsivamente*. "Sembra" in quanto, alla fine, si rivelerà un potentissimo vantaggio.

Prendiamo un tetraedro: è fatto di triangoli, quindi per prima cosa inventiamoci il Simbolo di Schläfli per il triangolo: siccome è fatto di *tre* cose uguali (segmenti che si incontrano), usiamo la notazione {3}, ad indicare che è la figura *regolare* che ottengo mettendo assieme *tre* aggeggi di dimensione *uno*: questo ultimo valore si ricava dal fatto che il numero (l'unico che c'è) è in *prima* posizione.

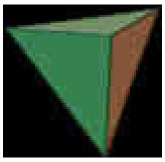
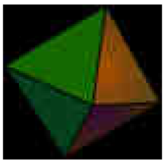
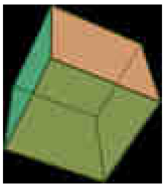
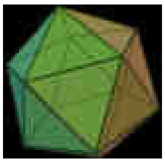
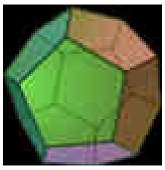
---

[14] *Il Capo ha disseminato questo articolo di affermazioni che mi vedono come massima esperta delle abitudini svizzere e delle pronunce locali, quando ben sa che alcuni dei nostri lettori ne sanno molto più di me, ma non ho voluto eliminare le richieste dando risposte più o meno valide così che voi attenti lettori vi godeste le angherie di Rudy, ed aveste la possibilità di dire la vostra. Contenti? [Nota di Alice]*

[15] Ne approfitto [*Rudy speaking*] per chiarire un motivo di litigio continuo (ad ogni conferenza) con Doc: la *sua* formula di Eulero non mi piace (o meglio, non mi piace come la scrive lui: ho trovato qualche tempo fa una forma *bellissima*) per colpa di mia nonna materna. Infatti, quando lo scrivente (e due cuccioli di dinosauri nostri vicini, l'epoca era circa quella) stava imparando a camminare, viveva con la suddetta nonna (di nome Lucia) la quale, terrorizzata dall'infante caracollante in prossimità del tavolo, si esibiva in un torinesissimo "attento allo *spigolo*!" In realtà trattavasi del *vertice* del tavolo, ma la cosa mi è rimasta talmente impressa che più di cinquanta anni dopo devo ancora pensarci un attimo: di primo acchito, per me, il vertice è uno *spigolo*!

[16] Ho sempre avuto un dubbio, a questo punto: esiste un modo *semplice* e *generale* per dimostrare che l'aggeggio si chiude *esattamente* su sé stesso? Senza avere una faccia che, allegramente, va a intersecarsi con la prima? Se trovate il modo, possibilmente senza invocare *evidenti* ragioni di simmetria (per non far arrabbiare Doc), spiegatecelo: pubblicheremo.

Non dovreste avere eccessivi problemi a capire di cosa si sta parlando se scrivo {4}, {5}, {6}... Si ottengono tutti mettendo assieme il numero indicato di oggetti unidimensionali (e cercando di ottenere una figura regolare). *Et voila*, siete in grado di descrivere tutti i poligoni regolari.

Tetraedro	{3, 3}	
Ottaedro	{3, 4}	
Esaedro	{4, 3}	
Icosaedro	{3, 5}	
Dodecaedro	{5, 3}	

"Grazie tante, quelli ci riuscivo anche da solo...". Infatti, questo era solo il primo passo della ricorsione: prendiamo il tetraedro.

Abbiamo tre {3} che si incontrano in un punto: a questo punto, diventa immediato scrivere {3, 3} per indicare il nostro oggetto.

Per chiarire il concetto, facciamo un altro passo: prendiamo *quattro* triangoli da far incontrare in un punto, in modo da ottenere l'ottaedro. Il simbolo che lo descrive, quindi, non è altro che {3, 4}.

Siccome sappiamo che siete pigri, di seguito vi diamo le definizioni dei solidi platonici (completi di figura: il fondo nero è colpa di *Wikipedia*).

Insomma, senza bisogno di cercarci i disegni (li abbiamo scelti brutti apposta), siete in grado di descrivere tutti i solidi platonici.

"...e che calcoli si possono fare?" Un attimo, prima estendiamo ancora il concetto: quattro dimensioni? Semplice, basta aggiungere un numero tra le parentesi: il *policoro* {*a, b, c*} avrà le *facce* formate da poligoni {*a*}, mentre le *celle* saranno i poliedri {*a, b*}: il bello è che i *vertici* di questo aggeggio sono dei solidi tridimensionali di tipo {*b, c*}, mentre gli *spigoli* sono dei poligoni di tipo {c}: la cosa non è immediata (anzi, gradiremmo dimostrazione), ma ammettete che è una grossa semplificazione: a questo punto non ci vuole molto a capire che:

Simbolo	**Nome**	**Celle**	**Vertici**	**Spigoli**	**Facce**
{3, 3, 3}	5-celle (simplesso)	{3, 3} (tetraedro)	{3, 3} (tetraedri)	{3} (triangoli)	{3} (triangoli)
{3, 3, 4}	16-celle (cross-politopo)	{3, 3} (tetraedro)	{3, 4} (ottaedri)	{4} (quadrati)	{3} (triangoli)
{4, 3, 3}	8-celle (tesseratte)	{4, 3} (cubo)	{3, 3} (tetraedri)	{3} (triangoli)	{4} (quadrati)
{3, 4, 3}	24-celle	{3, 4} (ottaedro)	{4, 3} (cubi)	{3} (triangoli)	{3} (triangoli)
{5, 3, 3}	120-celle	{5, 3} (dodecaedro)	{3, 3} (tetraedri)	{3} (triangoli)	{5} (pentagoni)
{3, 3, 5}	600-celle	{3, 3} (tetraedro)	{3, 5} (icosaedri)	{5} (pentagoni)	{3} (triangoli)

E la cosa è decisamente comoda: se i "triangoli del tetraedro" li vedono tutti, gli aggeggi nei vertici non sono facili da individuare. E la cosa funziona anche per le dimensioni superiori (anche se queste sono meno interessanti, visto che "sopravvivono" solo il tetraedro, l'ottaedro e il cubo, come abbiamo visto tempo fa).

OK, utile per andare a ripescare le componenti, ma avevamo detto che si possono fare anche dei *conti*. Vero, e sono dei conti semplicissimi (da fare): supponiamo un solido in n dimensioni, quindi descritto da $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}\}$; a questo punto, possiamo dire che:

1. Le *facce* (sensu lato) hanno simbolo $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}\}$.
2. I *vertici* hanno simbolo $\{a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}\}$.
3. Il *duale* del solido considerato ha simbolo $\{a_{n-1}, \ldots, a_3, a_2, a_1\}$

E soprattutto l'ultima a noi pare bellissima: notate che *un solido è autoduale se e solo se la sequenza è palindroma.* Queste intersezioni tra matematica e struttura linguistica ci hanno sempre intrigato.

A noi le condizioni *necessarie ma non sufficienti* non sono mai piaciute molto, ma questa ha l'aria interessante (e in un caso l'abbiamo anche utilizzata): condizione necessaria affinché il simbolo $\{p, q\}$ sia una tassellatura è che:

- su una *sfera*, sia $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<\frac{1}{2}$.
- su un *piano euclideo*, sia $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$
- su un *piano iperbolico*, sia $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$

A questo punto potrebbe venirvi un'idea, ma ne parliamo un'altra volta. Adesso, affrontiamo un discorso con un mucchio di paroloni strani (tranquilli, restiamo in 3D – forse).

Prendiamo un solido platonico $\{p, q\}$ (ad esempio il cubo $\{4, 3\}$, che è facile), e cominciamo a tagliare dei pezzi. È evidente che potremo tagliarli in vari modi, ma quello che vogliamo esplorare è come questi tagli modifichino le cose. Limitiamoci ai tagli che diano qualcosa di regolare.

La prima operazione che possiamo eseguire è quella che ci permette di ottenere un solido *troncato*: tagliamo via i vertici, e mettiamo un faccia nuova. Siccome nel nostro vertice si incontravano q facce, otterremo un q-agono al posto del vertice, e se il nostro solido era composto di facce p-gonali, otterremo al posto delle facce dei $2p$-agoni (visto che abbiamo preso un cubo: le facce quadrate diventano degli ottagoni, al posto degli spigoli saltano fuori dei triangoli); "aggiustiamo" il taglio in modo tale che il nostro $2p$-agono sia regolare (e quindi vengano regolari anche i p-agoni), *et voila*: abbiamo ottenuto il nostro *cubo troncato*.

Pronti alla delusione? Il simbolo per questo aggeggio è enormemente insoddisfacente, dal mio punto di vista: si indica infatti come $t\{4, 3\}$, ad indicare che è un cubo troncato o, per amor di complicazione, come $t_{0,1}\{4, 3\}$: in questo secondo caso, che speriamo di riuscire ad approfondire in una puntata successiva, il nostro cubo originale si indica con $t_0\{4, 3\}$.

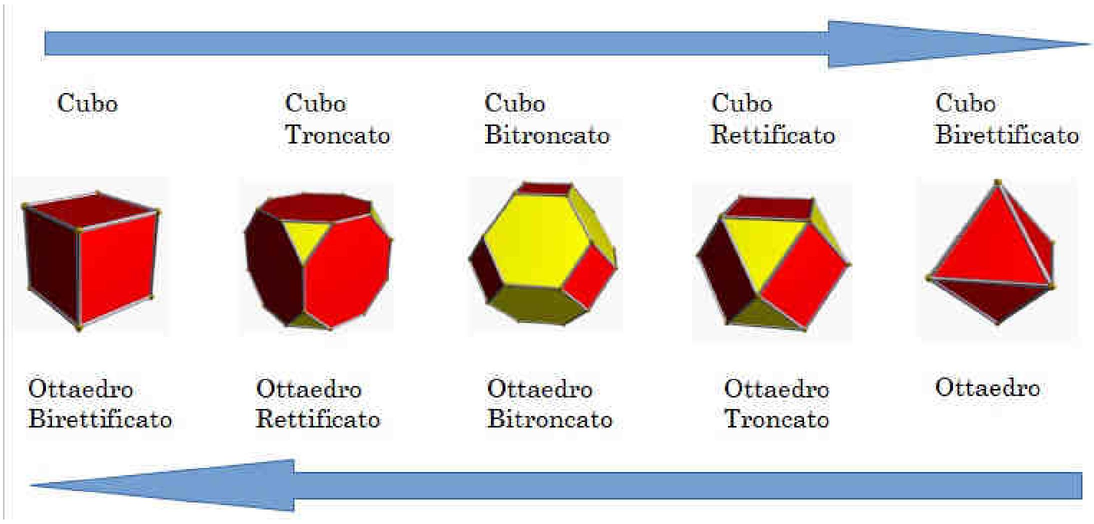
Adesso saltiamo un'operazione, visto che secondo me è più corretto parlarne dopo.

Insistiamo comunque con la lima, allargando i triangoli che avevamo nei vertici sino a ridurre gli spigoli del quadrato originale a dei punti: i nostri triangoli sono cresciuti (in area), e i nostri ottagoni sono tornati ad essere dei quadrati, ma molto più piccoli: a questo punto il cubo è *rettificato* (noto anche come *cuboottaedro*): grande insoddisfazione nei simboli, qui, visto che sono addirittura tre: $\begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix}$, oppure $t_1\{p, q\}$, o anche $r\{p, q\}$; siamo fortemente indecisi su quale sia la peggiore, ma sappiate che l'ultima l'ha inventata ***Norman Johnson*** (le altre due non vi diciamo chi è stato: vorremmo farvi una sorpresa , un qualche mese nel futuro).

Insistiamo? Insistiamo. Se continuate a scavare il nostro aggeggio, che ormai di cubico ha ben poco, vi accorgete che i triangoli che erano finiti al posto degli spigoli adesso diventano degli *esagoni*: insistete sin quando gli esagoni diventano regolari (i quadrati che rappresentano i resti delle facce originali sono ormai ridotti a dimensioni minime), e il vostro cubo adesso si chiama *cubo bitroncato* o, se preferite, *ottaedro troncato*, con simboli $t_{1,2}\{p, q\}$, oppure $2t\{p, q\}$ o (...e questa è carina, anche se rovina il finale...), $t\{q, p\}$.

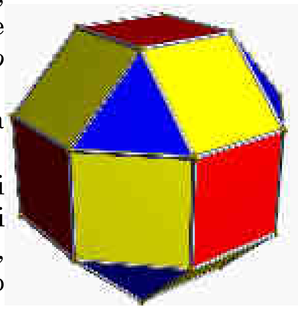
Coraggio, l'ultimo passo. Insistete a scavare sino alla sparizione completa dei quadrati che erano le facce del cubo: in fin della fiera, avete messo un *vertice* al posto di ogni faccia, e una *faccia* al posto di ogni vertice. Ma questa non è altro che la definizione di *duale*, quindi il nostro aggeggio è diventato $\{q, p\}$. E se vi piacciono i paroloni, potete sempre dire che l'ottaedro è un cubo *birettificato*.

Riassumendo, con il valido aiuto di Wikipedia[17]:



Tutto più chiaro adesso, vero?

Bene, allora possiamo complicarci la vita: nello schema qui sopra abbiamo scelto un *ben preciso* vertice e abbiamo cominciato a limare; nulla vieta, però, di partire da una di queste figure e *ricominciare*: ad esempio, se procedete rettificazione di un cubo rettificato, ottenete un *cubo cantellato*: anche qui tre simboli, $r\begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix}$, $rr\{p, q\}$, o $t_{0,2}\{p, q\}$; la cosa interessante (posto che non vi piaccia il – secondo noi bellissimo – nome *cantellato*) è che avete un altro modo di ottenere la figura, attraverso l'*espansione*: prendete un cubo, allontanate le facce dal centro in senso normale alle loro superfici sin quando gli spazi intermedi sono riempibili con triangoli equilateri e quadrati... fatto. Il risultato (sempre da Wikipedia) qui di fianco. E, oltre che *cubo cantellato*, lo potete anche chiamare *piccolo rombicubottaedro*, ma qui forse stiamo complicando troppo la cosa, visto che vederci i rombi non è facile. Il cubo e l'ottaedro, invece, non dovrebbero essere un problema, e non dovrebbe neanche essere difficile capire cosa succede se *cantello* un ottaedro.



Coraggio, ancora un passo: sono sicuro che vi state chiedendo cosa succede se tronchiamo un cantellato: semplice, ottenete un *cantitruncato*: sempre nel nostro esempio, i triangoli blu diventano degli esagoni, i quadrati gialli diventano più grandi e i quadrati rossi diventano degli ottagoni: il simbolo (o meglio, i simboli: anche qui sono tre) sono scontati: $t\begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix}$, $tr\{p, q\}$, o $t_{0,1,2}\{p, q\}$, e si chiama evidentemente *cubottaedro troncato*.

[17] Secondo noi, l'ottaedro stava meglio giallo. Ma siccome questo disegno ce lo siamo inventati noi, non staremo a sindacare.

Mal di testa? Va bene, allora quelli delle dimensioni superiori li cantellate voi. Attenzione però che da quelle parti esiste anche la *runcinazione*, che lavora contemporaneamente su tutti gli elementi e si indica come $t_{0,1,2,3}\{p, q, r\}$ (a questo punto dovreste cominciare ad intuire come funziona questo simbolo), quindi potreste trovarvi ad aver a che fare con un *crosspolitopo cantiruncitroncato* (esiste – in senso matematico – sul serio!), mentre in cinque l'operazione equivalente, che lima anche le 4-celle, si chiama *sterificazione*.

A dimensioni ci fermiamo qui, che le altre non sono divertenti: sappiate comunque che dopo le *pentellazioni* ci sono le *esicazioni* ("*c*", non "*t*", anche se sembra più giusta la seconda), che si compongono in *biesicazioni* e *triesicazioni*; quindi anche le *esaruncinazioni* avranno le medesime *complicazioni*.

In realtà, potreste fare danni ai poliedri anche in un altro modo: prendete un oggetto (meglio se tridimensionale) con delle facce aventi un numero pari di lati, ad esempio il cubo troncato (ha degli ottagoni): adesso, togliete solo i vertici che hanno un indice *pari* sull'ottagono, mettendo al loro posto dei triangoli (nel nostro caso): qui abbiamo remato un po' per trovare il nome, ma ci sono venute in soccorso alcune lingue straniere: infatti in inglese si chiama *alternation*, in esperanto *alternado*, ma il portoghese *snubificação* finalmente ci ha acceso una luce: col che, visto che *alternazione* è orribile anche per un ticinese *[Questa ve la spiega Treccia]*, proponiamo *camusazione*. Oh, attenti che è *chirale*: infatti, in funzione dei vertici che eliminate, potreste ottenere quello *sinistro* o quello *destro*. E questo spiega finalmente da dove nasca il *cubo camuso*: basta prendere un cubo troncato e "alternarlo" (no, non abbiamo il coraggio di trasformare "camusazione" in un verbo).

Adesso, la gara è chi riesce a costruire il solido con il nome più lungo. Con forbici e colla.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms