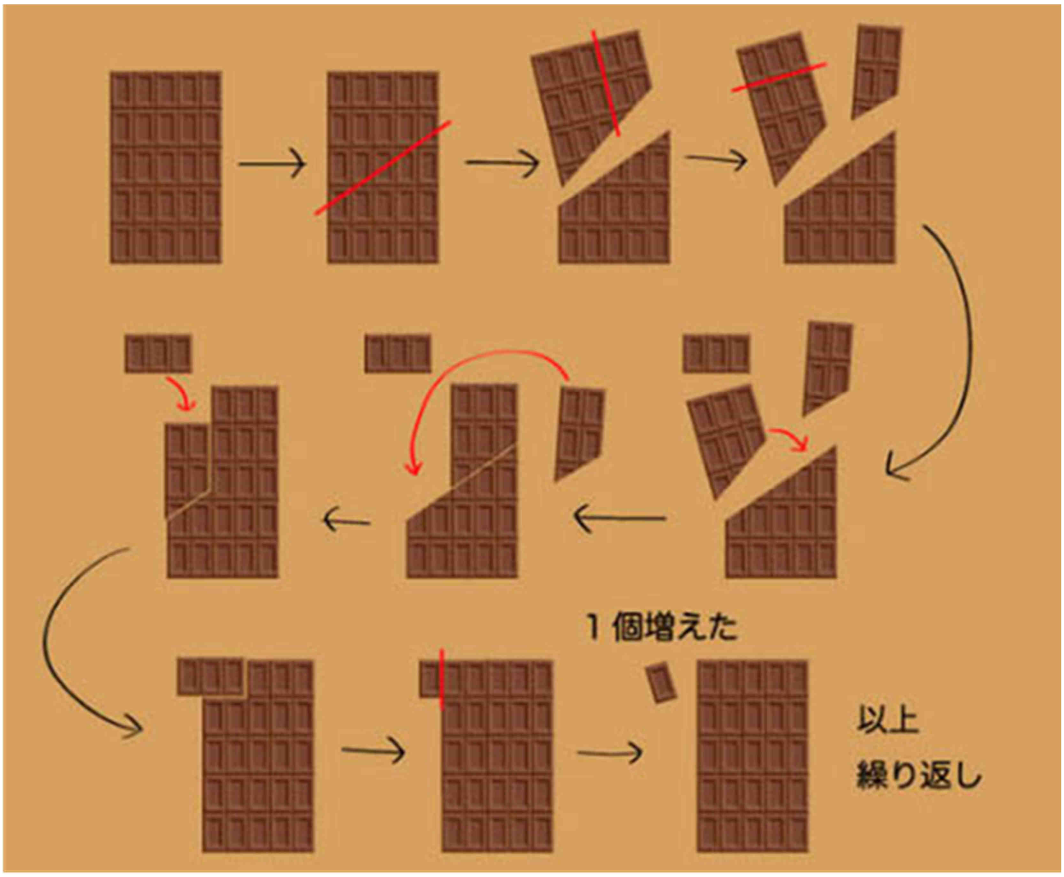
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 180 – Gennaio 2014 – Anno Sedicesimo



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM178 ha diffuso 3'069 copie e il 12/01/2014 per Google eravamo in 11'000 pagine.

OK, è una variazione sul tema del *più vecchio* problema di RM. Ma è più ricreativa la matematica con i fogli di carta o quella con il cioccolato? (Autore sconosciuto, purtroppo. Ma sicuramente satollo).

1. Cupio dissolvi[1]

"Tanto per cominciare, tutto il meccanismo mi risultava incomprensibile; potevo solo provare a indovinare, e in qualche modo realizzai che il denaro veniva puntato su numeri (pari e dispari) e sui colori. Ero sconvolto all'idea di mettere alla prova la mia fortuna con il centinaio di fiorini di Polina Alexandrovna, quella sera. L'idea di cominciare a giocare per conto di qualcun altro mi infastidiva. Era una sensazione estremamente spiacevole, e volevo liberarmene appena possibile. Mi pareva che giocando per conto di Polina avrei corrotto la mia stessa fortuna. Ma è davvero impossibile toccare un tavolo da gioco senza essere immediatamente infettati dalla superstizione?"
(Fëdor Dostoevskij, "Il giocatore")

In ritardo, e non è mai una novità. Colpa del traffico quando prendo la macchina, colpa dei treni quando prendo il treno, colpa del ghiaccio da sbrinare quando è inverno, colpa della doccia che funziona male, colpa della sveglia che non suona, colpa dei lacci delle scarpe anche quando porto i mocassini, colpa degli dei dell'Olimpo se non ci sono altri alibi, scusanti, capri espiatori a disposizione.

In ritardo, e non conta quasi mai il numero dei minuti: la relazione tra la gravità del ritardo e la quantità dei minuti di sforamento è solo approssimativamente lineare; i parametri che entrano in gioco sono più numerosi e complessi, e non sono infrequenti i casi in cui dieci minuti di assenza dalla scrivania si rivelano assai più devastanti di tre quarti d'ora di contumacia perpetrati in giorni più tranquilli.

In ritardo sempre, quasi la normalità? No, qualche volta è davvero eccessivo: può accadere, accade che gli accidenti/scusanti siano più accidenti reali che scusanti fittizie, e (quel che è peggio) che evitino accuratamente di considerarsi mutuamente esclusivi, anzi, si rivelano drammaticamente additivi e associativi, (lo dicono anche i proverbi) e in alcuni casi particolarmente notevoli mostrano perfino una sorprendente capacità di produrre un'interferenza costruttiva, al pari delle onde. Ogni punto massimo del disastro moltiplicato per quattro, anziché solo per due.

Di solito è proprio quando più cause ritardanti concertano e si coagulano che l'ansia cade, diminuisce, scema… o forse piuttosto si sublima. Dovevo arrivare in ufficio un'ora e mezzo fa, ormai sarà tutto un disastro. Allora basta correre, a che serve? Anzi, guarda che bell'autogrill fra 1500 metri sulla destra, quasi quasi mi fermo, prendo un caffè, così almeno diamo una bella ragion d'essere a quest'incipiente *cupio dissolvi*.

Cupio dissolvi: bello il latino, eh? Fa tanto acculturato, liceo classico, lingue antiche e filosofia, le vere arene del ragionamento, secondo i criteri della pubblica istruzione di svariati lustri fa. E comunque c'è poco da fare, in alcuni casi il latino ha davvero una potenza espressiva che non è facile riprodurre nell'italiano, che pure del latino è il figliuolo prediletto. Cupio Dissolvi sembra quasi un nome e cognome (e sorvoliamo pure sul fatto che, almeno nelle lande nordoccidentali che ospitano quest'autogrill, il nome sarebbe decisamente poco ortodosso e connotato di volgarità con intenti offensivi), e questo dà già un'aura di familiarità alla locuzione; e poi, soprattutto, gli è che in latino esiste questo affascinante tempo verbale che è l'infinito passivo veicolato da una sola parola, senza l'ausiliare richiesto dalla nostra lingua madre. *Dissolvi*, essere dissolto, essere sciolto; insomma scomparire, morire, senza neppure lo sforzo di agire per ottenere

[1] Titolo e locuzione riportati recentemente alla ribalta dal Presidente del Consiglio dei Ministri. Che ci crediate o meno, si tratta di una mera coincidenza.

la distruzione; il tutto retto dal desiderio ardente sacramentato dal verbo del massimo desiderio: *cupio*. Desidero essere distrutto, e allora chi se ne importa di tutto, che il mondo vada pure in malora, e in questa cosmica disperazione un caffè ci sta benissimo. Perché il senso vero, un po' traslato ma non troppo, è che il *cupio dissolvi* ha anche una sottintesa parte attiva, quella celata dietro il briciolo di arroganza che abita anche nelle persone più modeste: che io sia distrutto, sciolto, devastato, che io sia in pace ed esonerato, licenziato, martoriato, ma per la miseria che con me sparisca pure quel per cui corro e lotto, *cupio dissolvi atque dissolvere*, a dirla tutta, un po' come diceva il capellone biblico, muoia Sansone, ma con tutti i Filistei.

Giorno feriale, ore dieci e mezza del mattino, autostrada per pendolari; insomma un nastro d'asfalto che ha problemi di eccesso di popolazione soltanto in certe fasce orarie ben definite. Il flusso principale mattutino è ormai espletato, quello serale uguale contrario ancora lontano da venire, e l'autogrill è deserto come l'asfalto. O quasi.

Cassa e bancone sono abitati solo dagli addetti, senza clienti in coda: ma nell'angolo più riparato della sala troneggiano ben cinque videopoker, ed è abbastanza stupefacente vedere che ben quattro di essi sono assiduamente presidiati e usati. L'espressione latina – tanto affascinante per un ritardatario cronico – acquista improvvisamente una valenza più pregnante e realistica. Come diavolo si fa a passare la mattina feriale d'una uggiosa giornata invernale dietro le luci perfide di una slot-machine di un autogrill perso nella campagna? Cupio dissolvi, per la miseria… meglio riservare il termine a cose più serie d'un ritardo sul lavoro.

1 *Quattro secondi a partita. O meno.*

I videopoker ronzano, sono macchine rumorose quando cedono le vincite, mute quando ingoiano le entrate. Il loro ronzio è l'unico rumore del locale, viene quasi voglia d'ordinare un altro caffè solo per sentire delle parole normali, voci domande, risposte. Ci vorrebbero psicologi, forse. Forse sociologi, magari politici, o anche solo amici, fidanzate, vicini di casa, forze dell'ordine, chissà. Servirebbero pure degli scienziati? Magari… Ma è davvero possibile? Possibile che non basti il buon senso a far capire che alla lunga, non può accadere altro che rovinarsi la vita in cambio del frullio di suoni e lucette elettroniche? Erano gli stessi gangster di Las Vegas a chiamare le slot-machine "banditi con un braccio solo", quando invece dei led e dei circuiti integrati avevano ingranaggi, leve e ruote dentate, e non si possono certo portare quei galantuomini ad esempio di incorruttibile moralità. Il gioco d'azzardo non ha mai un vero senso logico, ma dovrebbe essere quantomeno evidente che, a voler proprio salvare il salvabile, può essere accettabile di giocare molto poco denaro e molto, molto raramente, cercando il disperato colpo di fortuna che faccia casualmente incocciare nella fluttuazione statistica ai margini della curva a campana resa celebre da Gauss. Ma che senso ha farlo in modo continuativo?

Eppure la cosa non deve essere così universalmente evidente, visto il proliferare dei videopoker, dei giochi d'azzardo legali, e soprattutto vista l'assiduità dei frequentatori. E vengono alla mente assurdità connotate da pura idiozia (nel senso matematico del termine) e da pura barbarie (nel senso morale del termine): come quel gruppo di amici che si era messo in testa che la malefica macchinetta prima o poi (ma certo più prima che poi) avrebbe sganciato la vincita definitiva, il jackpot salvifico, e quindi avevano affrontato l'impegno con metodo: a turno, ognuno del gruppo nutriva di monete la mangiasoldi, in attesa della restituzione del capitale con congrui interessi. Turno dopo turno, la vincita sarebbe arrivata, e gli amici avrebbero diviso il meritato malloppo. E il progetto continuava, continuava, quando, in un momento di distrazione, un ignoto e ignaro avventore del bar ove il piano si sviluppava ha cominciato a versare qualche moneta nella fatidica macchinetta momentaneamente lasciata sguarnita dalla gang. Non appena si sono accorti che qualcuno stava deflorando il marchingegno da loro così amorevolmente coltivato, i nostri sono insorti, e hanno spiegato all'incauto giocatore che quello era territorio di caccia riservato; e siccome la dialettica verbale non era il loro forte, glielo hanno spiegato massacrandolo di botte.

Ci vorrebbe più psicologia che matematica, senza dubbio. Ma un po' di matematica non può fare che bene, perlomeno all'inizio, perlomeno prima che il demone raccontato da Dostoevskij cresca alimentandosi di sé stesso e dell'idiozia dei suoi posseduti. Perché all'inizio c'è anche chi prova a razionalizzare, a giustificare: "*Ma scusa, ammetti o non ammetti che la probabilità che il* 42 *sulla ruota di Bari non esca per cento estrazioni di seguito è molto bassa? E allora, se lo ammetti, non è forse ragionevole che io ci punti sopra lo stipendio, visto che non esce da* 118 *estrazioni?*".

Ragionamento sbagliato, sbagliatissimo. Ma, perdindirindina, pur sempre un ragionamento, e allora ci si può provare, a spiegare: "*Guarda che è vero che la probabilità che il tal numero non esca per cento estrazioni di seguito è bassa: ma guarda meglio, per l'amore dei tuoi figli e della Dea Ragione, che se non è uscito per* 99 *volte, non è che la probabilità di uscita della centesima sia diversa dalla prima.*" Facile. Anzi, no, non è vero, non è facile per niente; ma almeno ci si può provare, la speranza è ancora viva. Perché quella che governa tutto è certo l'irrazionalità, ma se uno si fa domande fa almeno metà del lavoro, e la meta verso la salvezza è più vicina: "*E la Legge dei Grandi Numeri? Che mi dici della Legge dei Grandi Numeri? Non dice forse che a lungo andare la media reale sarà sempre più vicina alla media teorica?*". "*No, non dice questo; o meglio non dice questo nel senso che tu credi, ovvero che la distanza tra il numero di estrazioni attese e quello delle estrazioni reali diventa sempre più piccola in valore assoluto, anzi, dice il contrario. Lì c'è la panacea dell'infinito, che livella le distanze, e l'infinito è roba solo per gli angeli e per i matematici, non per vincere sulla ruota di Bari*".

2 *Grandi numeri, ma quelli che giocano contro sono ancora più grandi.*

Ci si può provare, perché c'è sempre la speranza che il sano scetticismo attecchisca, che il buon vecchio senso comune torni a rifiorire, che gli esempi numerici e fisici diano i loro frutti. In fondo, quelle sono le stesse persone che quando prendi un mazzo di carte, gli fai scegliere una carta senza vederla, e dopo qualche manipolazione gliela mostri dicendo "*è questa?*" non dubitano nemmeno per un istante che tu non abbia fatto qualche trucco. "*Impossibile*", ti risponderanno, se gli assicuri che l'hai solo pescata per caso, ispirato dalla Santa Protettrice dei Fortunati Prestigiatori. Impossibile, ci deve essere il trucco, e stavolta hanno certo ragione. Il trucco c'è, ma la cosa più significativa, più eclatante, è che in quel momento basta loro una misera probabilità su 52 per bollare l'evento come "impossibile". Nulla di male, anzi: se non fosse che mentre lo dicono stanno compilando la schedina del superenalotto e si crogiolano nell'idea di azzeccare l'agognato "sei". Una probabilità su 52 è tanto rara da essere bollata come impossibile; una probabilità su 623.614.630 la si cavalca a suon di soldi, perché non si sa mai… anzi, meglio raddoppiare le probabilità, meglio giocare non una schedina ma due, quattro, dieci, cento.

Basta a farsi capire? Non basta, perché "*Però qualcuno vince*", rispondono, e la speranza è sempre quella, di essere proprio quel qualcuno lì. E va bene, qualcuno vince, e facciamo finta di non vedere quanti milioni perdono, quante migliaia si rovinano, in cambio di quel qualcuno che vince: ma almeno… almeno capire che se puntare un euro alla settimana può avere il suo perché (la "tassa sulla speranza", la chiamavano i napoletani), moltiplicare le giocate è del tutto folle? Non basta: non basta mostrargli Las Vegas, città inventata dal nulla, prospera e ricca, che in ultima analisi è nata, cresciuta, prosperata sulla presenza dello zero verde sul tavolo della roulette. Una misera probabilità su 37, in aggiunta al fatto che in cambio di una puntata con probabilità 1/37 di uscita è retribuita con un fattore 36, un briciolo meno di quanto sarebbe matematicamente corretto[2], e dal nulla compare uno dei più grossi giri d'affari del pianeta. Non basta spiegargli che le società che organizzano i giochi, Stato in primis, non vanno mai in perdita, e anzi moltiplicano per quanto possibile le occasioni di gioco, e quindi, non fosse altro che per un normale principio di conservazione della quantità di denaro giocata, chi gioca è destinato a rimetterci. Non basta, ma bisogna provarci, e per fortuna qualcuno lo fa.

3 *Paolo Canova, Diego Rizzuto e Sara Zaccone.*

Ci provano i ragazzi di Taxi1729[3], ad esempio. Ci provano con il loro grande progetto "Fate il nostro gioco" girano il paese a spiegare quali siano i rischi del gioco d'azzardo. Lo fanno andando a tenere conferenze in tutte le scuole d'Italia, divertendo chi ascolta e mostrando cosa voglia dire, in pratica, giocare ad un qualsiasi gioco d'azzardo. Lasciano immaginare un viaggio da Napoli a Stoccolma fatto mettendo uno dietro l'altro i biglietti dei gratta e vinci, per poi far provare a immaginare quanti siano quelli vincenti. Costruiscono contenitori grandi un metro cubo e li riempiono di microscopiche palline bianche, e poi ci buttano dentro una altrettanto microscopica pallina rossa, tanto per far davvero "vedere" agli occhi degli spettatori cosa significhi cercare di vincere con una certa probabilità. Fanno rotolare palline di roulette, fanno riempire schedine di WinForLife, tengono banco con il Blackjack, e invece di intascare i soldi che di solito accompagnano certi riti, alla fine ti spiegano perché è normale, naturale che quasi tutti perdano la scommessa, e che tutti, se continuano, perderanno denaro e serenità. Soprattutto, spiegano con chiarezza ed esattezza perché un gioco è costruito in tal modo, quali siano gli aspetti fondamentali (di solito, si limitano a "far sembrare facile la vincita, mentre è facile e garantita la perdita"): sono scienziati, i ragazzi, analizzano con metodo scientifico,

[2] Un scommessa con probabilità di vittoria 1/100 è "onesta" se viene compensata con un fattore 100 a moltiplicare la posta puntata. Se 90 amici organizzano una riffa, pagano un euro e scelgono un numero del lotto, e chi azzecca il primo estratto prende tutto, fanno una scommessa "onesta", perché alla fine i premi eguagliano le perdite. I gestori dei tavoli di roulette basano i loro introiti sulla presenza dello "zero": le quote di vincita sembrano apparentemente oneste: le puntate pari/dispari, rosso/nero, passe/manque pagano alla pari (un euro puntato, due euro la vincita), perché sono divisi in gruppi da 18 e 18. E così anche le altre puntate: puntare su una coppia di due numeri porta una vincita di 18, su tre una vincita di 12 e così via… fino alla puntata su numero singolo che cha paga 36 volte la posta. Ma lo zero sbilancia in realtà tutte le quote apparentemente oneste, perché nella definizione di probabilità (casi favorevoli/casi possibili) il denominatore "casi possibili" non è mai l'apparente 36, ma il reale 37 (i 36 numeri normali più, appunto, lo zero). È per questo che i casinò americani, per aumentare le entrate, hanno spesso roulette dove, oltre allo "zero", esiste anche il "doppio zero": in questo il denominatore sale a 38.

[3] www.taxi1729.it – Saranno diversi i lettori che avranno capito al volo il riferimento aneddotico e matematico che si cela dietro le parole "Taxi 1729"; quelli che non l'hanno riconosciuto possono andare a far un giro sul loro sito, dove Paolo Canova, Diego Rizzuto e Sara Zaccone sveleranno il mistero. Ma già che sono, anche quelli che hanno subito sentito puzza di Hardy potrebbero farcelo, il giretto.

e con questo raccontano la vita, vera e triste, che si nasconde dietro le scommesse di ogni ordine e grado.

Bevo il caffè all'autogrill, guardo i disperati che fanno suonare i videopoker, e penso che ci vorrebbero qua, Diego Paolo e Sara, i tre coraggiosi ragazzi che hanno lasciato il lavoro per inventarsene uno del tutto nuovo, a provare a spiegare a quei quattro seguaci del vero *cupio dissolvi* perché farebbero meglio ad uscire dall'autogrill, o quantomeno a uscire da quegli angoli, venirsi a prendere un caffè con noi, a parlare del tempo o perfino di calcio, se proprio si deve. Sempre meglio che il ronzio silenzioso delle macchinette, della teoria delle probabilità usata a fini truffaldini.

Perché c'è anche questo aspetto, inutile negarlo. La Teoria delle Probabilità è un ramo della matematica strano, affascinante, e verosimilmente quello che produce il maggior numero di risultati inattesi, controintuitivi, stupefacenti. E nasce proprio per analizzare il gioco, anzi, meglio ancora: il caso che è alla base del gioco. Esistono giochi che non lasciano nulla al caso, ma quelli che hanno maggior successo di pubblico riservano sempre almeno una quota di potere alla Dea Bendata. Specialmente i giochi di simulazione richiedono dati e sorte, perché la vita è imprevedibile, lascia spazio all'improbabile, e per simulare l'imprevisto e l'imprevedibile non c'è niente di meglio che il rotolare dei dadi. Così, le sei facce del dado, i semi e i valori delle 52 carte diventano presto i mezzi e gli esempi perfetti per lo studio delle probabilità: e se l'alea che governa le probabilità è un simulacro della vita, allora tramite carte e dadi ed eventi randomici si studia il caso, e quindi la vita stessa, almeno in un certo senso.

La teoria delle probabilità, rafforzata dalla statistica, cala la matematica nel mondo reale e immediato. Aiuta a leggere il mondo, e per farlo continuerà a lungo, almeno all'inizio, ad usare dadi e carte per argomentare e spiegare con esempi. Riveste d'una nobiltà antica il gioco e i suoi strumenti, e allora diventa fastidioso vedere fiori quadri cuori picche declassate solo a strumenti di rovina. Preoccuparsi della riabilitazione dei simboli del gioco a qualcosa di più dignitoso è cosa probabilmente ridicola, certo: e sicuramente a bassissima priorità nelle emergenze morali del paese. Ma tant'è, un po' conta anche quello.

Perché le carte sono il veicolo del Caso, e il Caso merita d'essere studiato. E prima di arrivare alle formule che lo governano, è quasi inevitabile passare per la via più diretta e divertente delle carte, mescolate, restituite al caso ogni volta dal mazziere, prima di consegnarle piene di mistero ad ogni giocatore. E se la metafora sembra troppo squilibrata e forte, è solo perché non avete mai sentito parlare di Persi Diaconis.

4 *Persi Diaconis*

Persi Diaconis nasce il 31 Gennaio 1945[4] a New York, e la prima cosa da dire è che il suo nome starebbe benissimo ad un astronomo. Meglio ancora, ad una stella: Beta Orionis, Alfa Centauri, Persi Diaconis, Delta Tauri, Eta Carinae… non ci sta benissimo? Probabilmente dipende dal fatto che il Dragone è una vera costellazione, e quindi nomi di stella del tipo "Alfa

[4] … e siccome, una volta ogni tanto, celebriamo un matematico ancora vivo, facciamogli gli auguri tutti in coro per il suo 69° compleanno.

Draconis" esistono davvero (nell'esempio specifico, stiamo parlando di una stella di tutto rispetto, che ha anche un nome proprio: Thuban); giusto una lettera di differenza, nel "cognome". Per contro, non esiste nell'alfabeto greco una lettera che assomigli troppo a "Persi", ma sempre tra le costellazioni troneggia Perseo, il cui genitivo "Persei" (come in "beta Persei", la demoniaca Algol) è quasi identico al nome di battesimo del nostro protagonista; il risultato finale non è pertanto né preciso né reale, ma l'impressione rimane forte lo stesso.

Certo è che la passione principale di Persi Diaconis non è mai stata rivolta allo stupore che è in grado di indurre la volta celeste, ma piuttosto alla meraviglia che si disegna sui volti degli spettatori dei giochi di prestigio. Virgulto d'una famiglia di musicisti, Persi frequenta per dieci anni la più prestigiosa scuola di musica degli Stati Uniti, la Juilliard, ma fin dalla tenera età di cinque anni rimane incantato dai giochi di prestigio, e prova ad inventarsene alcuni. Giunto al liceo, scopre che la matematica gli piace e lo interessa, ma i giochi di prestigio restano il suo amore principale: è membro attivo del club di prestidigitazione. Siamo negli anni in cui un adolescente al quale piacciono sia la matematica sia i giochi di prestigio ha la possibilità di unire felicemente i suoi interessi: sulle pagine della più prestigiosa rivista di divulgazione scientifica statunitense, infatti, troneggia già la rubrica di Martin Gardner, "*Mathematical Games*", e Gardner[5] è certo uno che sa apprezzare gli aspetti divertenti della matematica. Fatto che un tredicenne Persi Diaconis riesce ad incontrare Martin Gardner nel 1958; e se Gardner rimane tanto impressionato dalle sue abilità di prestidigitazione da parlare di alcuni trucchi di Persi nella sua rubrica, Persi per contro scopre che la matematica cela anche aspetti assai divertenti, e comincia a leggere regolarmente *Scientific American*, e a far sempre più uso della matematica nei suoi trucchi.

Il suo rendimento scolastico è ottimo, ma questo non implica che il giovane sia un modello di diligenza. Avrebbe dovuto ottenere la licenza dalla sua George Washington High School a soli quindici anni, ma Dai Vernon, famoso mago, lo invita ad unirsi a lui per tenere spettacoli di magia. Per Persi è un vero e proprio invito a nozze, e non se lo fa ripetere due volte: per evitare rischi di proibizioni e veti, parte per il suo tour di spettacoli con Vernon senza dire nulla ai suoi genitori. Era ormai abile nella manipolazione come un professionista della prestidigitazione, con in più l'effetto sorpresa dato dal fatto che il pubblico non credeva di essere di fronte ad un professionista, visto che era così giovane.

Il guaio era che per fare questa vita aveva abbandonato tutto, e quindi anche la scuola. Persi Diaconis andava davvero molto bene, nelle materie scolastiche: era uno studente che raggiungeva l'eccellenza con facilità. Di fronte alla sua sparizione i professori avrebbero dovuto negargli il diploma, ma vista l'eccezionalità dello studente, decisero di conferirglielo ugualmente, nonostante l'abbandono. Persi scoprì solo molto più tardi, e solo perché continuavano ad arrivargli offerte di lavoro che iniziavano con "Caro Diplomato…", di essere effettivamente tale.

Dopo un paio d'anni al seguito di Dai Vernon, il nostro eroe si mette in proprio e si arrangia a vivere a Chicago. Come sa ogni giocatore di poker, è quasi impossibile interessarsi di carte senza finire con l'appassionarsi al calcolo delle probabilità: un amico di Persi gli raccomanda un libro[6], lui prova a leggerlo, ma scopre di non riuscirci bene, perché non conosce abbastanza bene il calcolo differenziale. Decide allora di riprendere gli studi; ottiene in fretta un baccalaureato a New York, ci prende gusto e decide di proseguire verso il PhD, massimo grado di laurea, ma non è facile trovare l'università giusta. Il suo sogno è Harvard, ma si sa… Harvard è il top, e per entrarci ci vogliono titoli particolari o particolari santi in paradiso. Persi Diaconis non ha i titoli giusti (il suo baccalaureato al City College di New York non è abbastanza prestigioso) ma ha un gran bel santo in paradiso: mette a conoscenza del suo desiderio Martin Gardner, e Martin

[5] Una nostra celebrazione (purtroppo postuma) del grande Martin si trova in RM137, "Nient'altro che un giornalista".

[6] "Introduzione alla Teoria delle Probabilità e alle sue applicazioni", di William Feller.

chiama Frederick Moesteller, capo del Dipartimento di Statistica. Sapeva che Moesteller era appassionato di magia, e anziché spiegargli quanto fosse brillante Persi come studente, Gardner racconta di come il ragazzo sia uno dei più abili manipolatori di carte che egli abbia conosciuto. La strada era aperta.

The algorithm continues, trying to improve the current f by making random transpositions. The coin tosses allow it to go to less plausible f's, and keep it from getting stuck in local maxima.

Of course, the space of f's is huge (40! or so). Why should this Metropolis random walk succeed? To investigate this, Marc tried the algorithm out on a problem to which he knew the answer. Figure 2 shows a well-known section of Shakespeare's *Hamlet*.

```
ENTER HAMLET HAM TO BE OR NOT TO BE THAT IS THE QUESTION WHETHER TIS
NOBLER IN THE MIND TO SUFFER THE SLINGS AND ARROWS OF OUTRAGEOUS
FORTUNE OR TO TAKE ARMS AGAINST A SEA OF TROUBLES AND BY OPPOSING END
```

Figure 2

The text was scrambled at random and the Monte Carlo algorithm was run. Figure 3 shows sample output.

```
 100 ER ENOHDLAE OHDLO UOZEOUNORU O UOZEO HD OITO HEOQSET IUROFHE HENO ITORUZAEN
 200 ES ELOHRNDE OHRNO UOVEOULOSU O UOVEO HR OITO HEOQAET IUSOPHE HELO ITOSUVDEL
 300 ES ELOHANDE OHANO UOVEOULOSU O UOVEO HA OITO HEOQRET IUSOFHE HELO ITOSUVDEL
 400 ES ELOHINME OHINO UOVEOULOSU O UOVEO HI OATO HEOQRET AUSOWHE HELO ATOSUVMEL
 500 ES ELOHINME OHINO UODEOULOSU O UODEO HI OATO HEOQRET AUSOWHE HELO ATOSUDMEL
 600 ES ELOHINME OHINO UODEOULOSU O UODEO HI OATO HEOQRET AUSOWHE HELO ATOSUDMEL
 900 ES ELOHANME OHANO UODEOULOSU O UODEO HA OITO HEOQRET IUSOWHE HELO ITOSUDMEL
1000 IS ILOHANMI OHANO RODIORLOSR O RODIO HA OETO HIOQUIT ERSOWHI HILO ETOSRDMIL
1100 ISTILOHANMITOHANOT ODIO LOS TOT ODIOTHATOEROTHIOQUIRTE SOWHITHILOTEROS DMIL
1200 ISTILOHANMITOHANOT ODIO LOS TOT ODIOTHATOEROTHIOQUIRTE SOWHITHILOTEROS DMIL
1300 ISTILOHARMITOHAROT ODIO LOS TOT ODIOTHATOENOTHIOQUINTE SOWHITHILOTENOS DMIL
1400 ISTILOHAMRITOHAMOT OFIO LOS TOT OFIOTHATOENOTHIOQUINTE SOWHITHILOTENOS FRIL
1600 ESTEL HAMRET HAM TO CE OL SOT TO CE THAT IN THE QUENTIOS WHETHEL TIN SOCREL
1700 ESTEL HAMRET HAM TO BE OL SOT TO BE THAT IN THE QUENTIOS WHETHEL TIN SOBREL
1800 ESTER HAMLET HAM TO BE OR SOT TO BE THAT IN THE QUENTIOS WHETHER TIN SOBLER
1900 ENTER HAMLET HAM TO BE OR NOT TO BE THAT IS THE QUESTION WHETHER TIS NOBLER
2000 ENTER HAMLET HAM TO BE OR NOT TO BE THAT IS THE QUESTION WHETHER TIS NOBLER
```

Figure 3

After 100 steps, the message is a mess. After two thousand steps, the decrypted message makes sense. It stays essentially the same as further steps are tried. I find it remarkable that a few thousand steps of this simple optimization procedure work so well. Over the past few years, friends in math and computer science

5 *Pagina di una memoria di Persi Diaconis, dove si vede quanto sia complicato riuscire a definire il concetto di "a caso": un algoritmo trasforma Amleto in una stringa senza senso in* 100 *passaggi, ma Shakespeare torna poi, più avanti.*

A ben vedere, non sembra una storia troppo edificante: un ragazzino che scappa di casa inseguendo un mago, giochi di prestigio e raccomandazioni usati per aprire porte altrimenti chiuse[7]. In realtà Moesteller sottopone Persi ad un vero colloquio, e restato impressionato gli suggerisce subito di interessarsi della distribuzione dei divisori primi di un intero scelto a caso. Un tema che entusiasma il giovane: in fondo, nessuno meglio di un prestigiatore, un manipolatore in grado di mischiare più volte un mazzo di carte fino a farlo ritornare esattamente nella stessa condizione iniziale, può capire bene quanto sia fragile, misterioso e mal definito il concetto di "a caso".

Persi sposa matematica e casualità, e diventa presto uno dei maggiori esperti del ramo. Il suo primo compito si trasforma in una pubblicazione, il dottorato arriva ed è meritatissimo, al punto che nel 1971 Diaconis è già Professore Associato di Statistica all'Università di Stanford, dove insegna tuttora. Nella sua carriera ha pubblicato più di 200 articoli, vinto una quantità di premi e messo in luce una significativa relazione tra le Catene di Markov e il Metodo di Montecarlo: e, come accade quasi sempre, per qualche ragione di affinità matematica, è finito anche con il doversi occupare del prezzemolo della matematica moderna, la Teoria dei Gruppi.

[7] *Ma forse, anche per questo, una storia in cui ci è più facile identificarci, noi tre, privi di titoli accademici e con solo tanto entusiasmo [nota di Alice].*

6 *Ron Graham*[8], *Martin Gardner e Persi Diaconis: un giocoliere, un giornalista ed un prestigiatore, ovvero tre matematici.*

Sul sito dell'Università di Stanford si trovano facilmente indirizzi e numeri di telefono. Se volete fargli dal vivo gli auguri di buon compleanno, non dovreste aver difficoltà a scoprire quali tasti premere sulla tastiera del telefonino. Non siamo sicuri che sarà allietato dalla cosa, ma dobbiamo ancora trovare una sua foto in cui non appaia sorridente e gentile, quindi il rischio di scatenare una sfuriata è basso.

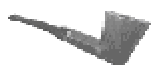
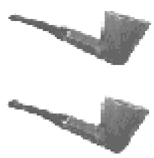
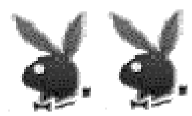
Se però per ricambiare vi invita a fare una partitina a carte, datemi retta, meglio rifiutare; il rischio di lasciarci camicia e mutande deve essere davvero altissimo.

[8] Tra i protagonisti di "Bello e impossibile" in RM110.

2. Problemi

Mentre stava aspettando Natale, Rudy ha trovato un problema che non è adatto alla stagione: colto da improvviso eccesso di bontà (e visto che è un *bel* problema), eccezionalmente lo passa nei BJ.

...ma dal mese prossimo, la bontà è finita!

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Il peggior problema di Alice			
Presa di posizione			

2.1 Il peggior problema di Alice

Sapete tutti che ad Alice non piace il calcolo delle probabilità in quanto le sembra sempre che si stia giocando con le parole, con dettagli insignificanti secondo il senso comune che diventano fondamentali nel ragionamento.

Abbiamo trovato un problema in cui questo "stiracchiamento" del senso comune sembra portato effettivamente all'estremo limite, quindi abbiamo la ragionevole certezza che per lei sia il più brutto problema esistente; siccome però ad alcuni di voi questi problemi piacciono e a Natale anche lei è più buona, ve lo proponiamo.

Siccome in famiglia scarseggiamo ad idee per quanto riguarda il regalo di Alberto[9], gli abbiamo proposto un paio di interessanti giochini. Quando è stato il mio turno, mi sono espresso in questi termini:

"Come premio per la Valida Assistenza di Laboratorio, il regalo consiste in questa busta, contenente N euro; sei libero di aprirla".

A seguito dello sguardo moderatamente soddisfatto di Alberto, ho lanciato una seconda proposta:

"In questa busta ho messo o la metà di quanto c'era nella prima busta o il doppio, con probabilità pari. Hai la possibilità di scambiare le due buste (no, calma, nella prima *rimetti dentro i soldi!*): che fai, tieni quella o scambi?"

Non crediate il problema sia finito qui: adesso, infatti, tocca a *Paulette d'Alembert*. Vi traduciamo il discorso, ma l'originale era in un aulico francese sovrassaturo di *"erre roulée*":

9 Per Fred non c'è problema: sono mesi che, ad ogni sufficienza, arriva a casa strillando "...Voglio la chitarra basso!" (e negando la prossimità del Natale quando arriva l'insufficienza). Lo avrà, per la pace delle nostre orecchie (nel senso che se suona il basso non suona la batteria...). Deve imparare "Smoke on the Water" entro luglio, se vuole fare da spalla ai Deep Purple *[Nota alla Nota: Sì, dovrebbero essere verso il 18 dalle parti di Cuneo. Prevendita dal 30 dicembre, quindi siete in ritardo]*

"Qui invece ci sono due buste: una contiene il doppio del denaro dell'altra. Puoi sceglierne una e sei libero di aprirla".

Stessa scena di moderata soddisfazione, immediatamente seguita dalla proposta:

"Adesso, scambi la busta?"

Oh, evidentemente, se le risposte alle due domande sono uguali, ci aspettiamo giustifichiate la cosa. E anche se le risposte sono diverse. Insomma, non andate a naso, fate qualche conto.

2.2 Presa di posizione

La Maggioranza Qualificata Maschile (questa affermazione non è sessista, ma puramente geografica) della Redazione intende prendere una ferma posizione politica: non abbiamo nessuna intenzione di uscire dall'Euro, e faremo di tutto per evitarlo.

Nel nostro piccolo, l'unica azione che ci pare possibile intraprendere è quella di incasinare (scusate il termine non esattamente raffinato, ma come dicevamo sopra siamo piuttosto risoluti in merito) il più possibile le cose a questi economisti da strapazzo, quindi procediamo con la proposta di legge in merito.

L'idea è di emettere una nuova moneta, che temporaneamente chiameremo *Italo*: l'Italo compare in *dodici* valori facciali distinti tali che qualsiasi importo intero (sapete, con il cambio moneta tutti arrotondano... E sempre verso l'alto) da 1 a N Italo (difettivo: un Italo, due Italo, … perché lo dice il Capo, chiaro?) possa essere sempre composto con un insieme di *otto* monete o meno (non necessariamente distinte): N viene fissato per decreto all'inizio della buriana.

Supponiamo sia stato fissato N=6543: che insieme di Italo stampate?

Causa svalutazione (qualcuno dice che serve: come lavoratori dipendenti, avremmo dei dubbi) ritirate tutto il vecchio conquibus e emettete una nuova serie sempre da 12 pezzi, ma questa volta con gli otto pezzi sempre non necessariamente distinti dovete riuscire a pagare sino a N=13000: trovate la serie, che il droghiere altrimenti si arrabbia.

Prevedendo ulteriori svalutazioni nel futuro, cominciate provi il problema di quale sia il massimo N per cui con la solita serie da dodici e impegnando al più otto pezzi non necessariamente distinti, potete continuare a fare questo giochino.

Una nota al fondo: chi ci ha proposto questi problemi, consigliava per il secondo l'uso dell'elaboratore (il primo no, carta e matita!) e per il terzo un elaboratore *particolarmente potente*. ...ma abbiamo imparato a non fidarci, di certi elaboratoristi da strapazzo.

3. Bungee Jumpers

Come dicevamo prima, avete rischiato di riceverlo come problema.

Un rettangolo viene diviso in rettangoli più piccoli, ognuno dei quali ha almeno una coppia di lati di lunghezza intera.

Provate che il rettangolo originale ha la medesima proprietà.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Gennaio.

Se leggete queste righe vuol dire che siamo riusciti ad uscire anche questo mese, anche se mentre le scriviamo non siamo proprio sicuri.

Siamo un po' affannati e la fine dell'anno con allegata pausa lavorativa non ha aiutato a prendere aria: il nostro Postino si è perfino preso il raffreddore, la sottoscritta è più stanca di prima, ed il Capo… beh, no il nostro Problemista Massimo non ha mai nessun problema, ed arriva sempre in anticipo. Pazienza, anzi meglio per noi, almeno uno che ci riesce c'è sempre...

Vediamo di procedere velocemente verso le soluzioni, che tanto saremo brevi. Se non vedete le vostre soluzioni pubblicate o menzionate, significa che probabilmente ce le siamo perse: riscriveteci. Abbiamo anche cominciato a ricevere soluzioni ai problemi del calendario (certo, dal nostro ***Sawdust***), ma non ho fatto a tempo a guardarle ancora, cercherò di pubblicarle il mese prossimo.

4.1 [177]

4.1.1 Una Grande Rivista (o un Piccolo Archivio)

Velocemente il testo di questo problema di spartimento di torte:

> *I nostri protagonisti sanno dell'esistenza di due torte. Alberto taglia sia la prima sia la seconda, Fred sceglie un pezzo della prima torta e chi sceglie il pezzo più grosso della prima sceglie per secondo sulla seconda torta. Alberto deve tagliare la seconda torta dopo aver fatto tutte le operazioni (scelta di Fred compresa) sulla prima: due torte, sul tavolo, non ci stanno. Considerato che ciascuno dei due vuole il massimo di torta, come deve tagliare Alberto la prima e la seconda torta?*
>
> *E se le torte sono tre, Alberto continua a tagliare, ma Fred avrà la prima scelta due volte, mentre Alberto l'avrà una sola: per intenderci, Alberto taglia, e Fred decide se scegliere per primo o per secondo (e il primo che sceglie prende la fetta grossa); poi Alberto taglia la seconda torta, e anche qui Fred sceglie se scegliere per primo o per secondo (idem); infine, Alberto taglia l'ultima torta, e qui la scelta di chi sceglie per primo è obbligata.*
>
> 1. *Come può Alberto assicurarsi nei due casi la massima razione di torta?*
> 2. *Generalizzazioni (n torte, k giovini, tagliano in più di uno...)*
> 3. *Tornando ai due, esiste un modo per garantire ai due estremamente golosi e estremamente logici la stessa dose di torta?*

Il mese passato vi ho passato la soluzione di ***Alberto R.***, ed ora vi passo l'intervento lampo di ***Sawdust***, che sarebbe solo una tabella:

Intervallo di validità	Dimensione fetta	Totale ceduto
$k \geq n$	$\frac{1}{2}$	$\frac{n}{2}$
Qualsiasi k. Ottime con: $0 < k \leqslant \frac{n}{2}$	$2^{-n} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-1}{i}$	$k - 2^{-n} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} (k-i) \binom{n}{i}$
Qualsiasi k. Ottime con: $\frac{n}{2} < k < n$	$\frac{1}{2} - 2^{-n} \cdot \sum_{i=k}^{n-1} \binom{n-1}{i}$	$\frac{n}{2} - 2^{-n} \cdot \sum_{i=0}^{n-k-1} (n-k-i) \binom{n}{i}$

Non ho nessun commento da fornire, magari lo farete voi quando vedrete la tabella. E con questo passiamo alle soluzioni di dicembre.

4.2 [179]

4.2.1 VenghinoVenghino, SempreSiVince...

Chi ci segue ormai da anni sa che ognuno di noi ha i suoi tormentoni, come il mio odio per la probabilità e statistica ed il corrispondente amore del Capo per lo stesso argomento, o le capacità logiche del Doc, ma anche i suoi giochetti da baro. In effetti il Nostro è il protagonista del primo problema del mese scorso:

> *Doc ha N monete da un cent, e le ha appena suddivise in cinque mucchietti ciascuno ben visibile ai giocatori. Fred sceglie un numero compreso tra 1 e N e Doc preleva dai cinque mucchietti un certo numero d di monetine per costruirne un sesto, in modo tale che sommando le monetine di un certo numero (decide Doc) di mucchietti, si ottenga esattamente il numero comunicato da Fred.*
>
> *Fred vince il numero d di monetine spostate; considerato che, evidentemente, Fred vuole massimizzare d e Doc vuole minimizzarlo, riuscite a trovare una strategia per i nostri due eroi?*

Come al solito, visto che siamo usciti tardi e non rispondiamo più molto alle mail, sono pochi quelli che ancora ci scrivono proponendo soluzioni. Uno di questi pochi, ma buonissimi (soprattutto con noi) è senz'altro ***Alberto R.***, che comincia con uno dei nostri verbi preferiti:

> Generalizziamo.
>
> N monete in K mucchietti contenenti le quantità M_1, M_2, ... M_K con $\Sigma M = N$.
>
> Dall'insieme dei K mucchietti si possono estrarre 2^K sottoinsiemi (compreso quello vuoto e quello totale) ciascuno dei quali totalizza un certo numero S_i di monete compreso tra 0 ed N.
>
> Dopo che Fred avrà scelto il numero X tra 1 ed N, Doc individuerà il sottoinsieme delle M più opportuno, cioè quello cui corrisponde l'S_i più prossimo a X.
>
> Se $S_i < X$ con differenza d, Doc formerà un ulteriore mucchietto con d monete prese dai mucchietti scartati e presenterà a Fred il sottoinsieme prescelto incrementato del nuovo mucchietto.
>
> Se invece $X < S_i$ con differenza d, Doc formerà un ulteriore "mucchietto degli scarti" con d monete prese dai mucchietti del sottoinsieme prescelto e presenterà a Fred il sottoinsieme così alleggerito.
>
> Se mettiamo gli S_i in ordine crescente, Fred, che vuol massimizzare d, troverà la coppia consecutiva S_i S_{i+1} avente la *massima differenza* e sceglierà X nel bel mezzo tra S_i ed $S_{i+1.}$
>
> Ne discende che Doc avrà interesse a rendere minima la suddetta *massima differenza*, cioè a far sì che le S_i siano uniformemente distribuite nell'intervallo 0-N.
>
> A tal fine sceglierà:
>
> $M_1 = q$ $M_2 = 2q$ $M_3 = 4q$ ... $M_K = (2^k)q$
>
> In tal modo i sottoinsiemi delle M formano tutti i multipli di q cioè generano 2^k valori S_i uniformemente distribuiti con passo q nell'intervallo 0-N (pensiamo alla numerazione binaria...).
>
> q è definito dalla relazione $\Sigma M = N$, ma gli M che ne risultano dovranno essere opportunamente arrotondati perché non è detto che l'equazione dia soluzione intera.
>
> Ad esempio nel caso specifico di $N = 2013$ e 5 mucchietti l'equazione
>
> $q + 2q + 4q + 8q + 16q = 2013$
>
> fornisce $q = 64{,}935$ quindi, arrotondando all'intero più vicino:
>
> $M_1 = 65$ $M_2 = 130$ $M_3 = 260$ $M_4 = 519$ $M_5 = 1039$
>
> Anche se Fred sceglie X nel modo per lui più conveniente. Doc se la cava spostando solo 32 monetine.
>
> Molto più difficile è l'altra domanda, non esplicitata, ma alla quale chiaramente si allude: quale marchingegno ha inventato Doc per barare a questo gioco? Non so rispondere.

Onesto, anche. Però lo sa, che il Doc troverà il modo di barare, ci conosce bene. Dopo una breve assenza torna il grandissimo ***Franco57***, anche lui con una soluzione ben dettagliata:

> Mantenendosi sulle generali, abbiamo N monetine che Doc deve astutamente suddividere in r mucchietti rispettivamente di numero S_1, S_2, …, S_r, che supponiamo in ordine $S_1 \le S_2 \le \ldots \le S_r$, per minimizzare la quantità massima d di monetine che dovrà elargire a Fred.
>
> Ho visto che condizione necessaria e sufficiente affinché non debba mai prelevarne più di d è che: $\forall k \quad 1 \le k \le r \quad S_k \le S_1 + S_2 + \ldots + S_{k-1} + 2d + 1$ (1)

La <u>condizione è necessaria</u> perché posto $s=S_1+S_2+\ldots+S_{k-1}+d+1$, se fosse $s>N$ sarebbe $S_1+S_2+\ldots+S_{k-1}+d+1>S_1+S_2+\ldots+S_{k-1}+S_k+\ldots+S_r$ e in particolare $S_k<d$, che verifica la (1).

Se invece $s\leq N$ non si potrebbe ottenere s come somma dai mucchietti. Infatti da S_k si possono togliere al massimo d monete e se la (1) fosse falsa, in S_k resterebbero più di d monete (sarebbe $S_k > S_1+S_2+\ldots+S_{k-1}+2d+1>d$) e a maggior ragione anche nei successivi $S_{k+1},\ldots, S_r$, quindi questi mucchi non potrebbero concorrere a produrre s. D'altra parte anche raggranellando da tutti gli altri mucchi, con il prelevo massimo di d monetine da $S_{k+1},\ldots, S_r$, si potrebbe arrivare al più a $S_1+S_2+\ldots+S_{k-1}+d$, quindi uno meno di s.

Che <u>la condizione è sufficiente</u> si dimostra per induzione sul numero r di mucchi supponendo la (1) vera fino a $r-1$. Posto s un qualsiasi numero tra 1 e N ci sono 4 casi:

1) $s \leq S_1+S_2+\ldots+S_{r-1}$, per l'ipotesi induttiva s si ricava giocando solo sui primi $r-1$ insiemi;

2) $S_1+S_2+\ldots+S_{r-1} < s \leq S_1+S_2+\ldots+S_{r-1}+d$, basta sommare S_1, S_2, …, S_{r-1} più quello che serve a raggiungere s preso da S_r che necessariamente non può superare d;

3) $S_1+S_2+\ldots+S_{r-1}+d < s \leq S_r$, in questo caso ottengo s togliendo da S_r la quantità positiva o nulla S_r-s e lo si può fare perché non supera d, infatti $S_r-s \leq S_1+S_2+\ldots+S_{r-1}+2d+1-s = (S_1+S_2+\ldots+S_{r-1}+d-s)+d+1 < d+1$.

4) $S_r < s \leq S_1+S_2+\ldots+S_{r-1}+ S_r$, in questo caso applico ricorsivamente il problema a $s'=s-S_r$ sui primi $r-1$ mucchi ($0 < s-S_r \leq S_1+S_2+\ldots+S_{r-1}$) e vi aggiungo S_r.

Il caso $r=1$ è compreso nei punti 2) e 3) con $S_1+S_2+\ldots+S_{r-1}=0$ perché somma priva di addendi.

La prova della condizione di sufficienza della (1) è costruttiva perché fornisce un algoritmo ricorsivo per produrre s. Da notare che non c'è mai la necessità di togliere da più di un mucchietto.

Se tutti gli S_k fossero massimali avremmo $S_1=2d+1$, $S_2 = S_1+(2d+1) =2\cdot(2d+1)$, …, $S_{r-1}=2^{r-2}\cdot(2d+1)$, $S_r=2^{r-1}\cdot(2d+1)$ e quindi $N=(2^r-1)\cdot(2d+1)$. In generale N sarà tra due di questi interi, quindi il valore massimale di d è l'unico tale che se $2(d-1)+1<\frac{N}{2^r-1}\leq 2d+1$.

Per quanto visto, Doc potrà scegliere massimali i primi $r-1$ mucchi, e lasciare in S_r la parte restante.

Ad esempio nel caso di 2013 cent da suddividere in 5 mucchietti abbiamo $2013/(2^5-1)=64{,}93\ldots$

Quindi $d=32$ è quanto Fred riuscirà a scucirli e i mucchietti potranno essere di 65, 130, 260, 520, 1038 monetine.

Ecco infine un esempio di applicazione dell'algoritmo in un caso più semplice con $d=5$ e $N=77$. Si parte con tre mucchi da $S_1=11$, $S_2=22$, $S_3=44$ monete. Il mucchio S_0 è quello dove finiscono le monete tolte che possono essere x che varia da 1 a 5 o y che varia da 5 a 0. Gli insiemi da scegliere per formare s sono incorniciati.

S_0	S_1	S_2	S_3	Range per s
$\boxed{x}$	$11-x$	22	44	$1\rightarrow 5$
y	$\boxed{11-y}$	22	44	$6\rightarrow 11$
$\boxed{x}$	$\boxed{11}$	$22-x$	44	$12\rightarrow 16$
y	11	$\boxed{22-y}$	44	$17\rightarrow 22$
$\boxed{x}$	$11-x$	$\boxed{22}$	44	$23\rightarrow 27$
y	$\boxed{11-y}$	$\boxed{22}$	44	$28\rightarrow 33$
$\boxed{x}$	$\boxed{11}$	$\boxed{22}$	$44-x$	$34\rightarrow 38$
y	11	22	$\boxed{44-y}$	$39\rightarrow 44$
$\boxed{x}$	$11-x$	22	$\boxed{44}$	$45\rightarrow 49$
y	$\boxed{11-y}$	22	$\boxed{44}$	$50\rightarrow 55$
$\boxed{x}$	$\boxed{11}$	$22-x$	$\boxed{44}$	$56\rightarrow 60$
y	11	$\boxed{22-y}$	$\boxed{44}$	$61\rightarrow 66$
$\boxed{x}$	$11-x$	$\boxed{22}$	$\boxed{44}$	$67\rightarrow 71$
y	$\boxed{11-y}$	$\boxed{22}$	$\boxed{44}$	$72\rightarrow 77$

Non sono bravissima a interpretare e confrontare le soluzioni, ma mi sembra che le conclusioni siano tutte coerenti, per una volta. Prima di chiudere con questo problema vi passo ancora l'opinione di ***Sawdust***, in linea con le altre per le conclusioni:

Senza stare a riscrivere tutto il testo del problema, tanto per cominciare penso che a Doc convenga formare i 5 mucchietti iniziali ponendo nei primi 4 un numero di monetine par alle più alte potenze di 2 possibili in senso decrescente e nel 5° le rimanenti.

Prendendo esempio dal valore del testo i mucchietti potrebbero essere

1024	512	256	128	93
2^{10}	2^9	2^8	2^7	resto

Il problema più difficile è vedere quale numero debba chiamare Fred per massimizzare la sua vincita.

Infatti per qualunque numero superiore al mucchietto più alto basta che Doc tolga qualche monetina dal mucchietto più piccolo e lo stesso può fare anche per ogni altro numero, quindi Fred intascherà sempre solo una cifra inferiore alla metà del mucchietto più piccolo.

Come esempio proviamo con 24 numeri casuali e otteniamo la tabella a lato.

Chiamata di Fred	Spostati da Doc	Somma
1930	10 dal 5°	primi 4 più il 6°
1870	15 dal 5°	primi 5
1794	2 dal 5°	primi 3 più il 6°
1768	24 dal 3°	primi 3
1712	45 dal 5°	1, 2, 4 e 5
1685	21 dal 4°	1, 2, 4 e 6
1646	18 dal 4°	1, 2 e 4
1324	44 dal 5°	1, 3 e 6
1314	34 dal 5°	1, 3 e 6
1224	21 dal 5°	1, 4 e 5
1160	8 dal 5°	1, 4 e 6
1087	30 dal 5°	1 e 5
1004	20 dal 1°	1
914	18 dal 5°	2, 3, 4 e 6
904	8 dal 5°	2, 3, 4 e 6
875	21 dal 4°	2, 3 e 4
816	45 dal 5°	2, 3 e 5
637	3 dal 4°	2 e 4
618	22 dal 4°	2 e 4
444	33 dal 5°	3, 4 e 5
384	nessuno	3 e 4
333	16 dal 5°	3 e 5
203	18 dal 5°	4 e 5
20	20 dal 5°	5

Quindi Fred, come al solito quando ha a che fare con Doc, intasca solo le briciole!

La conclusione, come dicevo prima, è generalmente condividibile. Andiamo avanti.

4.2.2 Temporaneo bel tempo (nel giardino di Doc)

Bene, malgrado le feste e il poco tempo a disposizione siamo riusciti a raccogliere un po' di soluzioni e ne siamo contentissimi. Il testo del secondo problema era suppergiù:

Doc ha individuato un'area triangolare nel suo giardino che vorrebbe definire lungo i bordi piantando diversi arbusti. Betulle nei vertici, e nei piedi delle altezze e delle bisettrici bosso e ligustro rispettivamente, visto che i punti sono tutti distinti.

Solo con la riga, riuscite a trovare dove va il bosso e dove il ligustro?

Il problema è risolvibile con tre soli tracciamenti di righe?

Quali triangoli non possono esistere nel giardino di Doc?

Solo da ***Sawdust*** è arrivato un commento, ma abbiamo fiducia in voi, sono sicura che a gennaio arriverà altro. Ecco la soluzione del Nostro:

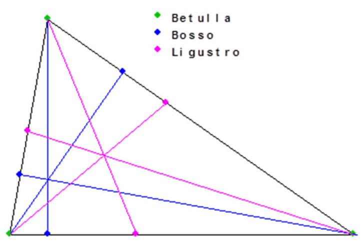
(…) per quanto riguarda l'allegra brigata di Sherwood, mi limito anche stavolta solo all'ultima domanda.

Nel caso di un triangolo equilatero chiaramente i bossi e i ligustri cresceranno intrecciando le loro radici, e il problema vale anche per una coppia nel caso di un triangolo isoscele.

Se il triangolo fosse rettangolo 2 bossi finirebbero a cercare di soffocare una betulla.

Ovviamente nel caso di un triangolo ottusangolo i 2 suddetti bossi non troverebbero posto.

Quindi il triangolo deve essere scaleno e acutangolo.



Non credo sia possibile disporre gli arbusti equidistanti tra loro, così come mi pare addirittura impossibile trovare una disposizione tale che, percorrendo il perimetro, si incontrino gli arbusti in maniera ciclica, ossia che ripetano sempre la stessa successione.

> La distribuzione meno “ammucchiata” si dovrebbe ottenere con un triangolo i cui angoli siano circa 80°, 65° e 35° come nel disegno allegato.

Bene, ci fermiamo qui. Dal mese prossimo celebriamo i nostri compleanni e cerchiamo di essere un po’ più buoni. Ma per quest’anno non ci siamo ancora impegnati a fare niente, e i buoni propositi per il 2014 li facciamo magari più avanti, quando troviamo il tempo per guardare indietro al 2013. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Il ristorante più vicino a casa di Rudy costa poco, ma il servizio è (a voler essere gentili) fetente. L’ultima volta gli è arrivato un caffè con dentro delle strane cose galleggianti e la prudenza lo ha spinto a chiederne la sostituzione. Arrivato il nuovo caffè, lo appoggia alle labbra e comincia a strillare che è lo stesso di prima, ripulito in qualche modo. Come ha fatto a capirlo?

> *Rudy beve sempre il caffè amaro, ma per precauzione questa volta prima di mandarlo indietro lo aveva zuccherato. Al ritorno, lo ha assaggiato ed era dolce.*

6. Zugzwang!

Offerta speciale, a questo giro. Due al prezzo di uno. In quanto il primo – secondo me – non vi piace; ve l’avevamo (fuori da qui e in forma leggermente diversa) già proposto, ma lo avete bellamente ignorato. Potreste, almeno, studiare le sue similitudini e differenze rispetto all’altro (“...e qual era?” “Eh, no, troppo facile, così...”).

6.1 China Great Walls

Probabilmente anche a voi è venuto il dubbio su quel plurale: di Muraglie con la maiuscola, in Cina, ce ne risulta una sola. Beh, qui sono alcune.

Per prima cosa, si comincia disegnando una ***mappa***: bella grossa, visto che una trentina di regioni rappresentano un gioco piuttosto veloce. L’importante è che tutte le zone siano *connesse***,** ossia vietate le isole o le regioni che si toccano solo in un punto (tenderemmo anche a vietare *The Vatican Syndrome*, quindi un paese ne deve toccare almeno altri due, e sono quindi vietate le *enclaves*).

Raggiunto l’accordo sulla mappa (e su chi debba giocare per primo), comincia il gioco vero e proprio: ad ogni ***mossa***, il giocatore traccia una Muraglia che inizia da un paese, traversa tutto un paese limitrofo e finisce in un paese diverso dal primo e confinante con il secondo. E se la frase vi sembra arzigogolata avete ragione, ma serve per evitare sporchi trucchi tipo farsi Italia-Svizzera-Italia o cose di questo genere. Evidentemente, un paese che abbia già un pezzo di muraglia (inizio, mezzo o fine) non può più essere “muragliato”, quindi da lì non ci passate.

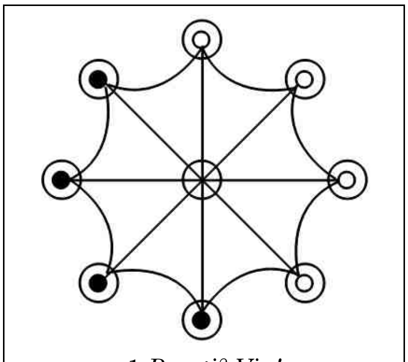
La ***fine gioco*** ci pare evidente: quando un giocatore non riesce a fare la propria mossa, ha perso.

Piace poco? Beh, se preferite le salse piccanti, potete sempre provare con il prossimo.

6.2 PerePere

Non nel senso dei frutti, nel senso Maori. E per prima cosa vi chiariamo la frase che chiude il gioco precedente.

Abbiamo il ricordo, nella nostra infanzia, di un tubetto di origini esotiche di salsa ricavata da peperoncini (molto) piccanti di nome Piri-Piri: visto che quello che fa da titolo è il nome delle pedine utilizzate, nel caso ci fosse una relazione per tranquillizzarvi vi diamo subito la risposta alla domanda: “Quando si mangia?” “Mai”.



1 *Pronti? Via!*

Per prima cosa, la ***scacchiera***: facile, è una stella (nel senso informatico del termine) ottagonale con le connessioni ai lati. Va benissimo un ottagono con le diagonali maggiori, ma se volete fare i raffinati in figura trovate la scacchiera originale. Notate che ci sono otto *piripiri* (quattro bianche e quattro nere) posizionati sui *khawai,* mentre il *putahi* centrale è libero (piaciuto, come vi abbiamo spiegato il nome delle caselle? Così dovete fare attenzione).

Al proprio ***turno*** il giocatore muove uno dei suoi *piripiri* da un *khawai* a un altro *khawai* adiacente libero, oppure dal *khawai* al *putahi* o dal *putahi* a un *khawai* libero: ma se volete andare sul *putahi* dovete avere almeno un *piripiri* dell'avversario in uno dei *khawai* adiacenti al *piripiri* che muovete (sono due? Meglio), e il *putahi* deve essere libero.

Non potendosi mangiare i peperoncini, si ha il ***fine gioco*** quando un giocatore non può muovere, e perde.

Esiste anche una ***variante***, nella quale la restrizione sulla mossa sul *putahi* vale solo per le prime due mosse, ma a noi non piace.

Veloce e simpatico, si direbbe. E se non vi piace giocarlo adesso, maschietti contro femminucce in spiaggia dovrebbe anche essere divertente: logicamente sono i giocatori stessi che fanno da pedine, e le strategie sono stabilite urlando.

7. Pagina 46

Poniamo il rettangolo nel piano cartesiano, con i lati paralleli agli assi, e consideriamo la funzione:

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{2\pi i x}\mathrm{e}^{2\pi i y}$$

Teorema: L'integrale di *f(x,y)* su un rettangolo i cui lati siano paralleli agli assi vale zero se e solo se almeno una coppia di lati ha lunghezza intera.

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_c^d \mathrm{e}^{2\pi i x}\mathrm{e}^{2\pi i y}\,dxdy &= \int_a^b \mathrm{e}^{2\pi i x}dx\int_c^d \mathrm{e}^{2\pi i y}dy \\ &= -\frac{1}{4\pi^2}\left(\mathrm{e}^{2\pi i b}-\mathrm{e}^{2\pi i a}\right)\left(\mathrm{e}^{2\pi i d}-\mathrm{e}^{2\pi i c}\right) \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{2\pi i a}\mathrm{e}^{2\pi i c}}{4\pi^2}\left(\mathrm{e}^{2\pi i(b-a)}-1\right)\left(\mathrm{e}^{2\pi i(d-c)}-1\right)\end{aligned}$$

L'ultima espressione vale zero se e solo se uno dei fattori in parentesi vale zero. In altre parole, vale zero se e solo se almeno uno tra $(b - a)$ e $(d - c)$ è un intero.

Dalle condizioni del problema sappiamo che ognuno dei rettangoli risultanti ha un lato intero, ogni integrale esteso ad uno dei rettangoli risultanti varrà zero. Quindi la somma degli integrali su tutti i rettangoli varrà zero, e quindi il rettangolo originale avrà almeno una coppia di lati interi.

Note:

Una proprietà analoga vale evidentemente anche per un numero superiore di dimensioni: se un parallelepipedo N-dimensionale viene diviso in parallelepipedi più piccoli, ognuno dei quali avente la proprietà di avere almeno un lato intero, allora il parallelepipedo originale ha la medesima proprietà.

La cosa si può ulteriormente generalizzare: dato un parallelepipedo N-dimensionale diviso in parallelepipedi più piccoli ciascuno dei quali avente la proprietà che almeno n

spigoli "non equivalenti" (ossia non paralleli tra loro) abbiano lunghezze intere, allora anche il parallelepipedo originale deve avere la medesima proprietà.

Questo segue dal considerare le $\binom{N}{m}$ funzioni (con $m = N + 1 - n$) della forma:

$$f\left(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}\right) = \mathrm{e}^{2\pi i x_{j_1}} \mathrm{e}^{2\pi i x_{j_2}} \ldots \mathrm{e}^{2\pi i x_{j_m}}$$

in cui gli indici $\{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$ sono un sottoinsieme degli indici {1, 2, …, N} e dimostrando quindi che gli integrali di queste $\binom{N}{m}$ funzioni, su un parallelepipedo N-dimensionale, sono *tutte* uguali a zero se e solo se almeno n spigoli "non equivalenti" del parallelepipedo hanno lunghezza intera.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Un po' peggio delle api

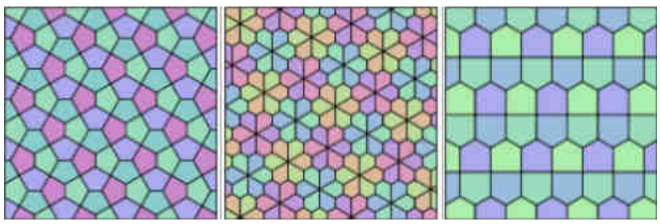
Cominciamo con l'errore che lo scrivente ha fatto appena partito con il primo articolo sull'argomento: "Prendete un pentagono *equilatero*..." E subito, nella nostra mente si è cristallizzato un bellissimo pentagono *regolare*.

Sbagliato, come possono mostrarvi cinque secondi di esercizio con *GeoMag* o cinque segmenti uguali in PowerPoint. Un poligono può essere *equilatero* ma, se non è anche *equiangolo* non sarà *regolare,* e la cosa (con l'*ovvia*[10] eccezione del triangolo) non è scontata.

Sappiamo tutti che non possiamo tassellare il piano con pentagoni *regolari,* visto che il pavimento verrebbe a chiudersi su un dodecaedro, ma non è così scontato che la cosa sia altrettanto impossibile con quelli *equilateri*: una volta tanto, cominciamo dal fondo, più precisamente dal 2001: in quell'anno, ***Thomas Hales*** ha dimostrato la cosiddetta ***Congettura dell'alveare*** *[Honeycomb Conjecture: forse sarebbe meglio "del favo", ma a noi piace di più la prima]*, statuente che *La tassellatura di minimo perimetro per area unitaria è quella esagonale*: qui la facciamo semplice, ma Hales la rigira per ventiquattro pagine irte di matematica nelle quali esamina (...senza disegnare neanche un esagono!) le tassellature su regioni disconnesse, su un toro e amenità consimili: posto che non vi fidiate di noi, il tutto è disponibile su Arxiv all'indirizzo http://arxiv.org/pdf/math/9906042v2.pdf, e se volete scrivere un pezzo, ben felici di pubblicare.

La dimostrazione di questo teorema è considerata piuttosto importante, visto che la congettura risale a ***Pappo*** e Marco Terenzio Varo, parlando di agricoltura e di api, dice: "...i geometri hanno provato che questo esagono iscritto in un cerchio contiene il massimo spazio disponibile". Sapete come la pensiamo sui matematici romani e sulla loro inettitudine ad esprimere un concetto in modo matematicamente corretto, quindi diamo una specie di traduzione: quello che voleva dire il Nostro (e che intendeva Pappo) è che delle tassellature regolari del piano, quella che impegna meno materiale per costruire il perimetro è quella esagonale utilizzata dalle api per il "davanti" dell'alveare[11].

Formalmente si definisce *tassellatura poligonale* del piano una sua decomposizione in poligoni che si incontrano solo lungo i loro confini [*ossia che non hanno sovrapposizioni*]; inoltre, la tassellatura si dice *bordo a bordo* [*preferite "*spalla a spalla*"? Fate pure, l'originale è "*edge to edge*"*] se i vari tasselli si incontrano solo lungo interi bordi; inoltre una tassellatura si dice *monoedrica* se formata solo da copie congruenti della stessa *protopiastrella*. Il *rapporto perimetrico* di una tassellatura regolare è definito come il limite superiore per R tendente ad infinito del perimetro all'interno di un R-*disco* (tranquilli: cerchio di raggio R) diviso per l'area πR^2, in cui vengono contati come "perimetro" tutti i bordi e pezzi di bordi che si trovano all'interno del cerchio.



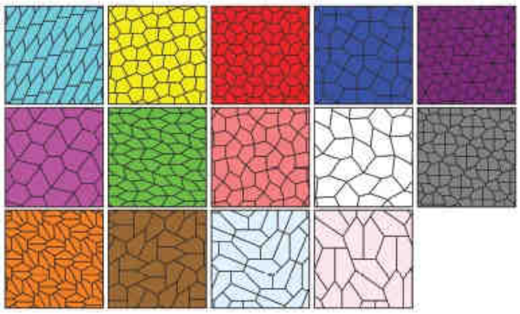
2 *Cairo, Floret e Prismatica.*

Adesso, definiamone qualcuna in modo meno formale, nel senso che le disegniamo (prese da *Wikipedia*) e diamo il nome, senza stare a definirle troppo strettamente (anche perché su certe "definizioni" vorremmo prima o poi scrivere un pezzo, e non vogliamo anticiparvi il materiale): le tre più interessanti sono la *Cairo*, sulla quale ci pare di avere da qualche

10 Certo, Hardy. E se vi sembra "ovvio", dimostratelo.

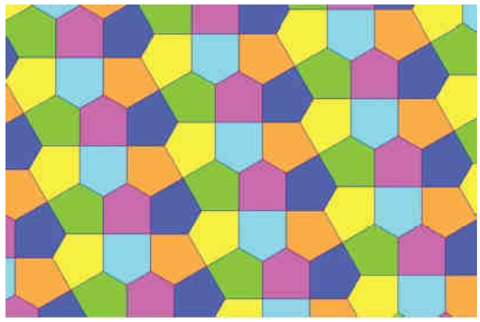
11 ...e calcolare il "fondo" è dura: abbiamo riportato una dimostrazione (presa dal Ghersi, con un disegno in meno) nell'ottavo numero di RM (dicembre 1999).

parte un gioco che la usa come scacchiera (promesso, prima o poi ve lo raccontiamo: messo in lista), la *Floret*, per la quale manteniamo il termine inglese in quanto "*infiorescenza del cavolfiore"* non ci pare particolarmente azzeccato, e la *Prismatica*, che francamente non ci sembra un gran che. Le trovate tutte nella figura, fateci sapere quale vi sembra più carina.



3 …*tutte qui*...

"Sicuro che non ci siano altre piastrellature?" Abbastanza: anche in questo ramo esiste un grazioso teorema (è grazioso il teorema, non la dimostrazione) secondo il quale le possibili tassellature pentagonali convesse sono solo *quattordici*, e sempre Wikipedia le rappresenta tutte: la prismatica l'hanno complicata un pochino, ma se guardate bene la trovate.

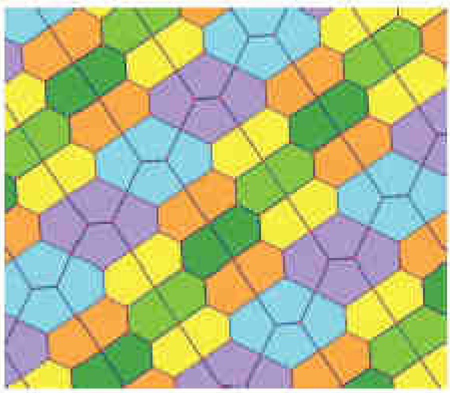


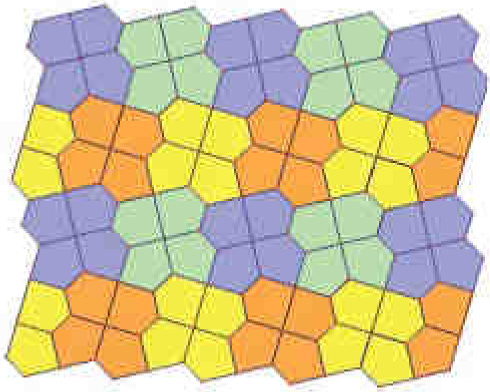
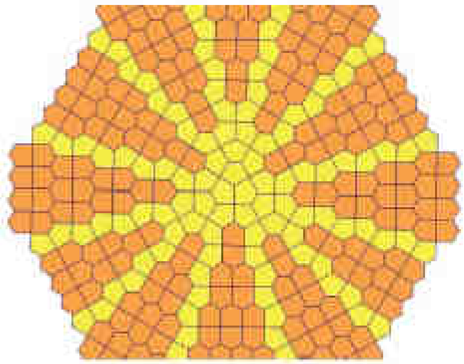
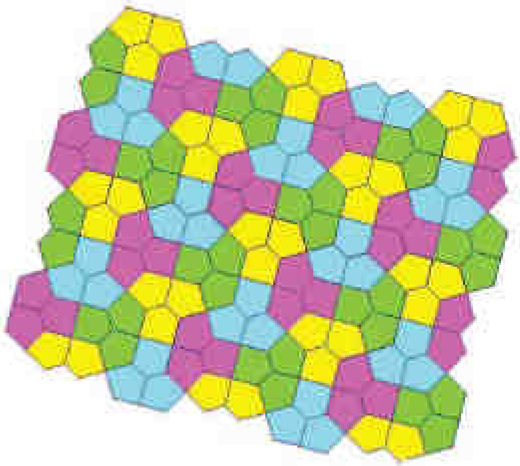
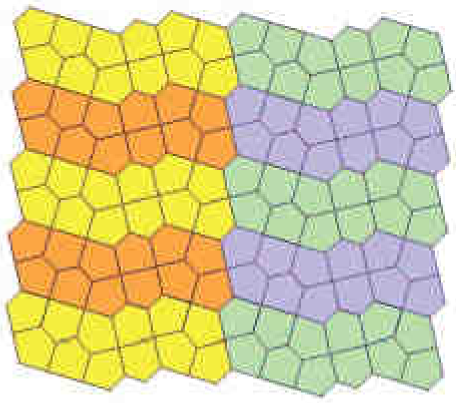
4 *Un inizio dell'infinito.*

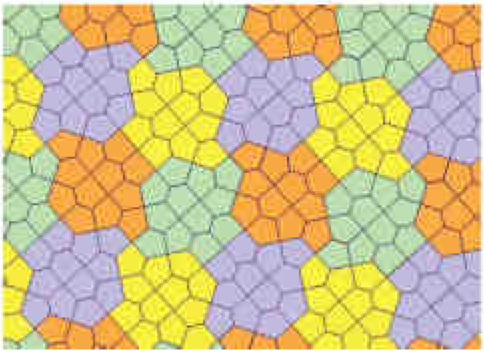
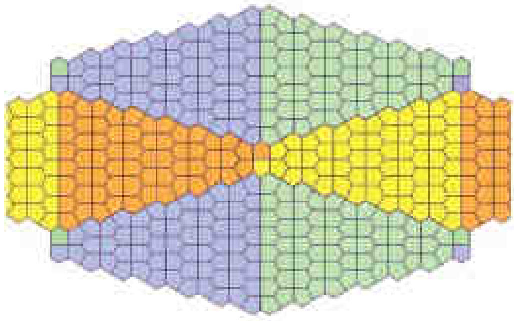
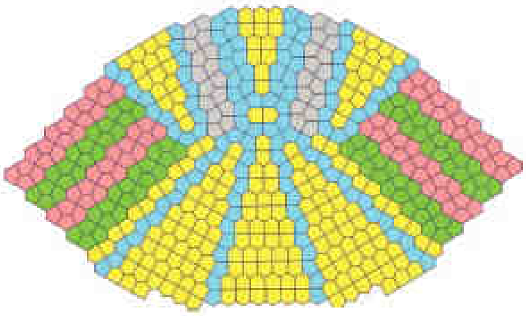
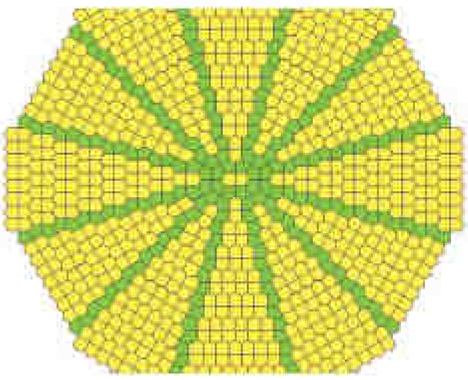
Anche su cose così semplici, si riescono a costruire interessanti teoremi: ad esempio, si dimostra che *esiste un'unica tassellatura Cairo* e che *esiste un'unica tassellatura Prismatica*; in compenso, *esistono infinite tassellature Cairo-Prismatiche*, e in merito esiste un simpatico aneddoto. La domanda se esistesse una Cairo-Prismatica era stata lasciata irrisolta ad un convegno, ed è stata risolta poche ore dopo la chiusura da uno studente *undergraduate* che assisteva per caso alla conferenza (immediatamente cooptato nel gruppo di ricerca, chiaramente): vi diamo lo schema di una di queste, non dovreste avere problemi a capire come si fa a crearne infinite: il giorno che avremo un ufficio la metteremo sul pavimento, posto che si riesca trovare un piastrellista sufficientemente masochista. Magari con colori meglio assortiti…

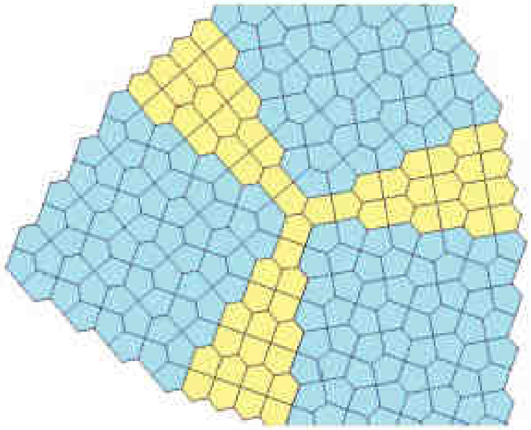
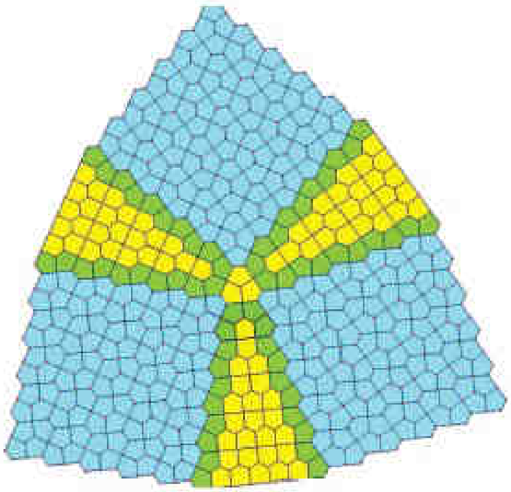
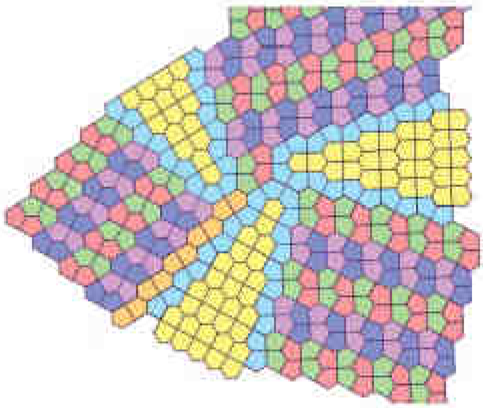
Comunque, una volta trovata la prima, altre sono seguite: qualcuna che segue un qualche schema di simmetria, mentre ne esistono alcune non periodiche (...e siamo sicuri di come finirà il nostro pavimento): di seguito, un (penoso) tentativo di classificazione (e se non vi ricordate le simmetrie implicate, potremmo consigliarvi un aureo libretto che ***sicuramente*** avrete comprato, ora esaurito...).

In questa tassellatura C-P, le diagonali formate dalle Cairo sono separate da tre diagonali formate dalle Prismatiche



Questa ha anche ricevuto un nome: "Strisce". Segue, come potete notare, il gruppo di simmetria delle tappezzerie ***p2*** (Gruppo primitivo, rotazione di 180°, niente riflessioni o glissosimmetrie).	
Nonperiodica, ma senza nome: però sappiamo che l'ha scoperta ***Marjorie Rice***.	
Questa l'hanno chiamata "Pillole" (e in effetti ci sembra dura, da mandare giù): ha comunque un gruppo di simmetria (sempre delle tappezzerie) ***p4g*** (Gruppo primitivo, rotazione di 90°, riflessioni in linee che si intersecano a 45°)	
Questo deve essere sembrato molto "compatto", a chi lo ha scoperto: infatti lo hanno chiamato "Sardine": gruppo di simmetria ***p1*** (Gruppo primitivo, senza rotazioni, senza riflessioni, senza glissosimmetrie)	

Qui siamo d'accordo sul nome: "Astronavi" ha un gruppo di simmetria ***p4g*** (lo stesso delle "Pillole", quindi non ve lo ripetiamo)	
Ci vuole una certa fantasia a trovare qui dentro l'*Albero di Natale*, poi ci si accorge che sono due, in orizzontale. Gruppo ***cmm*** (Reticolo centrato, riflessione a 180°, in due direzioni diverse, centri di rotazione fuori dalle linee di riflessione).	
...chi ci vede un "Coniglio" è bravo. A noi ricorda l'elmo di Darth Vader. Qui il gruppo di simmetria è *evidentemente* ***D1*** (no, non è delle tappezzerie: è il gruppo diedrico).	
"Plaza", con gruppo di simmetria ***D2*** (anche qui, gruppo diedrico, non di tappezzerie).	

Questo l'hanno chiamato "Ruota ad acqua": e se non vi pare un grosso sforzo di fantasia, sappiate che il nome è stato scelto per distinguerlo dal prossimo (***D3***, chiaramente).	
...e questo, per distinguerlo da quello prima, "Mulino a vento"! Non stiamo neanche a dirvelo, che anche lui ha una simmetria ***D3***.	
Nessuna simmetria. Quindi, il nome mi pare evidente: "Chaos" (con l'acca sembra ancora più disordinato).	

Torniamo alle piastrellature fatte con una sola piastrella. Una cosa che ci ha colpito è come le due piastrellature siano imparentate: se guardate i disegni, vi accorgete che hanno un paio di cose in comune:

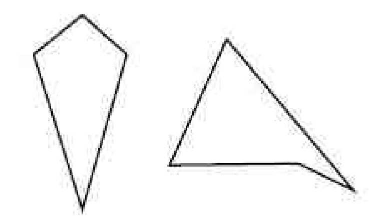
Tre angoli valgono $\frac{2\pi}{3}$, gli altri due valgono $\frac{\pi}{2}$.

In ogni piastrella è inscrivibile un cerchio.

Incredibile come due cose così simili possano venire fuori così diverse, solo cambiando la sequenza degli angoli.

Insomma, si gioca tutto sugli angoli: infatti, una delle basi sulle quali costruire il resto è una proposizione anche piuttosto insignificante: *per **n** angoli dati* $0 < \alpha_i \leq \pi$ *, l'n-agono circoscritto attorno al cerchio unitario è quello che minimizza il perimetro per la sua area; scalato all'area unitaria, il perimetro risulta* $2\sqrt{\cot\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)}$ *e dal fatto che la cotangente è una funzione strettamente convessa si deduce che più sono simili tra loro gli angoli, minore risulta il perimetro*. Se la cosa non vi lascia particolarmente scossi, avete ragione: un teorema molto simile (lì si trattava di massimizzare l'area per un dato perimetro) qualcuno di voi ha deciso di dimostrarlo prendendo in considerazione il cerchio circoscritto. Siamo fieri di voi.

Partendo da questo semplice teorema (e complicandosi la vita con un paio di lemmi), si arriva a dimostrare che effettivamente le piastrelle Cairo e Prisma sono, tra quelle convesse, quelle che minimizzano il perimetro; attenzione che non abbiamo detto *le tassellature,* ma *le piastrelle*: potete metterle in un mucchio di modi, e anche mescolarle assieme.



5 *Vince il secondo.*

Si è notato che abbiamo messo un certo qual stress sul concetto di *convesso*? Infatti, se si abbandona questa ipotesi, le cose si complicano al punto che si sta ancora *congetturando*: uno dei pochi risultati certi al momento è che il minimo perimetro per n=4 non si ha per un oggetto ragionevolmente regolare come quello della figura qui a fianco, ma per l'aggeggio che sembra un triangolo con il pungiglione. Il che è decisamente controintuitivo, secondo noi. Ma qui stiamo andando in una *terra incognita*: per dire la più semplice, una domanda ancora senza risposta è se le Cairo e le Prisma mantengano la loro caratteristica di minimizzare il perimetro, nel momento stesso in cui sia ammessa, nella piastrellatura, la presenza di tasselli non convessi.

Adesso basta, che il prossimo minaccia di essere lungo.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms