Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 177 – Ottobre 2013 – Anno Quindicesimo

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM176 ha diffuso 3'050 copie e il 05/10/2013 per Google eravamo in 48'500 pagine.

Vi chiederete cosa ci sia di strano nell'orologio in copertina. Tanto per cominciare, non richiede pile. E non ha celle fotovoltaiche da nessuna parte. La Meridiana Digitale (www.digitalsundial.com), grazie a due maschere calcolate con la precisione di un decimillesimo di pollice, visualizza con l'approssimazione di dieci minuti l'ora ed è, a tutti gli effetti, una meridiana. Può essere attaccata al vetro di una finestra che guardi a sud e, se ogni mese avete un paio di minuti (di luce) da perdere, potete correggerla secondo l'equazione del tempo. Una volta tanto, non è la "solita americanata": la fanno a Mechernich (Germania), e vi arriva a casa per meno di 100 euro, spese di spedizione incluse.

1. Fiori per la signora

"Rose rosse per te
ho comprato stasera
e il tuo cuore lo sa
cosa voglio da te"
(E. Polito - G.Bigazzi,1969)

In una striscia di Mafalda, il personaggio creato dal disegnatore argentino Quino, si vede la piccola protagonista che passeggia per il parco con il fratellino Nando. Giunti vicino ad un austero monumento, Nando chiede alla sorella quale sia il significato di quella imponente statua, e Mafalda gli spiega con fraterna sollecitudine che la persona raffigurata nel marmo è stato di certo un uomo importante, che ha fatto del bene alla comunità con le sua azioni ed opere, ed erigergli un monumento è, in buona conclusione, un modo per dirgli grazie. Nando si sofferma a guardare con riverenza la figura scolpita (un signore serissimo, in doppiopetto, baffuto e dall'aria nobile e decisa), e conclude con l'osservazione "Non ha l'aria di dire "*non c'è di che*", vero?".

Non si può negare che l'osservazione di Nando sia pregnante; raramente l'eroe celebrato nel bronzo o nel marmo ha l'aria sorridente di chi affabilmente ringrazia per aver ricevuto un complimento. A discolpa dei signori scolpiti si può comunque considerare che, quasi senza eccezioni, non vengono mai consultati quando si prende la decisione di raffigurarli nel bel mezzo delle piazze cittadine. Resta comunque precisa e chiara la spiegazione di Mafalda, illuminante nella sua infantile semplicità: erigere un monumento a qualcuno è una forma (per quanto senza dubbio elaborata, collettiva e costosa) di ringraziarlo.

Sotto questo punto di vista, può essere curioso scoprire che esiste un monumento dedicato ad un serpente. Non una semplice statua: il serpente è un animale il cui significato simbolico è così vasto e diffuso che lo si ritrova rappresentato in migliaia di opere d'arte; trovare esempi di statue in cui sono presenti serpenti[1] è facile quasi quanto trovare un litro di latte in un supermercato. Serpenti che vengono schiacciati sotto i piedi, serpenti che offrono mele del peccato, serpenti che avvolgono poveri laocoonti nelle spire crudeli, serpenti aztechi e maya, cinesi e indiani: ma, appunto, più che all'animale in sé sono statue che si riferiscono a qualche concetto che il serpente veicola simbolicamente, e quasi sempre si tratta di concetti tutt'altro che gradevoli. Nessuna ombra di ringraziamento, in opere del genere.

In Brasile, invece, troneggia una vera statua-monumento, un ringraziamento eretto e dedicato esplicitamente solo ad una ben determinata specie di serpente: e non ad un particolare individuo particolare, come si potrebbe pensare qualora si immaginasse che un ben preciso rettile avesse, per qualche fortuita combinazione, salvato la vita a qualcuno. La statua è dedicata a tutta la specie del *mussurana*. Si trova da qualche parte[2] all'interno dell'Istituto Butantan di San Paolo del Brasile.

I mussurana sono serpenti che, a vederli, incutono il giusto grado di timore: hanno dimensioni tutt'altro che limitate (arrivano anche a due metri e mezzo), sono neri con riflessi blu, hanno spire pericolose come tutti i *constrictor* eppure anche una bella dotazione di denti; e sono anche velenosi. È assai improbabile che, ad incontrarli nel bel mezzo della giungla amazzonica, non si provi un ragionevole fremito di puro terrore. Eppure, si sono meritati un monumento.

Il fatto è che i mussurana hanno alcune caratteristiche davvero peculiari che li rendono particolarmente simpatici all'uomo. Innanzitutto, il loro veleno non è un grande pericolo

[1] Non è stato fatto di proposito, ma una volta scritto, non è possibile non notare che "presenti serpenti" è un grazioso anagramma.

[2] Cercata un'immagine della statua in questione in lungo e largo nella rete, senza successo. Se qualcuno riesce a scovarla, ce lo faccia sapere.

per gli esseri umani: viene usato per catturare piccoli mammiferi, e i pochi casi registrati di morsi a persone si sono tutti risolti senza esisto letale. Ma ciò che rende davvero speciale il mussurana è che, più che piccoli mammiferi, adora nutrirsi di altri serpenti; specialmente i velenosissimi crotali[3].

1 *Mussurana*

Con la paura atavica che l'uomo coltiva nei confronti dei rettili velenosi, scoprire che un grosso serpente non pericoloso è un autentico spauracchio per i crotali, lo ha reso immediatamente simpatico. Per un certo periodo, il governo brasiliano ha anche preso seriamente in considerazione l'idea di diffondere ad arte i mussurana nelle zone del paese più infestate dai serpenti velenosi, proprio per rendere i luoghi più sicuri. L'idea non ha funzionato come si sperava, ma resta il fatto che il mussurana è un temibilissimo predatore per i crotali: la rete abbonda di fotografie abbastanza raccapriccianti in cui si vede un mussurana nell'atto di ingoiare per intero un crotalo di dimensioni pari alle sue, lasciando nello spettatore un ovvio senso di disgusto e un *serpeggiante* interrogativo puramente geometrico: "come diavolo fa ad ingoiarlo?"[4]

Il suo debole veleno non arreca danni ai serpenti vittima: ma la cosa notevolissima è che il veleno delle vittime, per quanto potente possa essere, non arreca nessun danno al mussurana; non per niente, sembra essere l'unico predatore esistente in natura (Homo Sapiens a parte, che ben si meriterebbe il titolo di *predator universalis*) del temutissimo serpente corallo.

2 *Istituto Butantan, San Paolo del Brasile*

Questa sua stupefacente immunità è stata sempre oggetto di studi accurati, specie da parte di quegli scienziati e istituzioni che hanno come missione la ricerca di sieri antiveleno. L'Istituto Butantan di San Paolo ha una lunga tradizione in tal senso, e molti dei suoi successi dipendono dallo studio del mussurana. L'erezione di una statua è stata davvero una forma di ringraziamento.

Attorno alla metà del diciottesimo secolo, non vi erano molte donne in posizione di eccellenza, neppure in Europa. Una grande eccezione a questa regola era però costituita da Maria Teresa d'Asburgo: riuniva nella sua persona i titoli di Arciduchessa regnante d'Austria, Re apostolico d'Ungheria, Regina regnante di

[3] Tutt'altro che esperti di erpetologia, ci affidiamo alla rete per chiarire che il termine "crotalo" indica un intero genere di serpenti. Diffusi soltanto nelle Americhe, prendono il nome dal sonaglio (*krotalon*, in greco) che li caratterizza. Il mussurana, per quanto possa sembrare cannibale, quantomeno è di un genere diverso: è infatti un colubride, e i colubridi di solito non sono neppure velenosi.

[4] C'è chi sostiene che il mussurana riesca ad ingoiare anche prede *più grandi* di sé stesso. Sembra che la sua capacità elastiche di estendersi e allungarsi glielo consentano. Così, dopo il simbolo dell'infinito che talvolta è richiamato dalla classica immagine del serpente che si mangia la coda, col mussurana che si mangia un serpente grande quanto sé stesso si può intravvedere, col giusto grado di fantasia, una sorta di inversione del paradosso di Banach-Tarski. Oppure ci si può ricordare del *Piccolo Principe* e del disegno del serpente che aveva mangiato un elefante…

Boemia, Croazia e Slavonia, Duchessa regnante di Parma e Piacenza, Duca di Milano e di Mantova, Granduchessa consorte di Toscana e Imperatrice consorte del Sacro Romano Impero. È pur vero che per poter collezionare una tale sequela di titoli suo padre, l'imperatore Carlo VI, dovette arrampicarsi sugli specchi e inventarsi (e far digerire ad un sacco di persone contrarie) quel mirabile artificio legale e regale che fu la *Prammatica Sanzione*; una ulteriore dimostrazione di come essere donna sia stato (e in buona parte sia tuttora) tutt'altro che facile, nella corsa al successo.


3 *La contessa Grillo-Borromeo*

È quindi ancora più sorprendente che, tra i mille affanni del suo mandato imperiale, Maria Teresa abbia dovuto far fronte anche ad un *affaire* politico che la vide contrapposta ad una altra donna: la contessa Grillo-Borromeo.

Questa era una vera personalità eccezionale del suo tempo: il contrasto con Maria Teresa – che inizialmente la condannò all'esilio, per poi perdonarla in tempi successivi – nacque dalla palese appartenenza della contessa al partito filo-spagnolo della corte asburgica, quando gli equilibri a Vienna erano invece orientati, da parte della stessa Maria Teresa, verso il partito filo-tedesco.

Ma la contessa non poteva certo posizionarsi altrimenti: figlia del conte Marco Antonio Grillo, marchese di Contafuentes e duca di Mondragone, era già segnata dalla sua nascita, avvenuta il 29 Giugno 1684 a Genova, alla difesa degli interessi spagnoli[5].

A prescindere dalle sue manovre politiche, la contessa Grillo-Borromeo era comunque una donna davvero notevole. Montesquieu la definì "*femme la plus admirabile de l'Universe*", e il suo salotto fu sempre un vero crogiolo culturale per le scienze e per le arti. Fino alla sua morte, avvenuta il 23 Agosto 1777, si occupò, protesse e si circondò dei più eminenti studiosi del suo tempo. Pietro Verri, quasi a ratificare la difficoltà per una donna di ergersi a nume tutelare delle scienze e delle arti, scrisse di lei, nell'elogio funebre, che aveva "superato le frontiere del proprio sesso".

Tra i suoi ospiti abituali si potevano contare Ludovico Antonio Muratori, Giuseppe Antonio Sassi, il filosofo Tommaso Ceva, il matematico Girolamo Saccheri[6], Giovanni Crivelli, Francesco Saverio Quadrio, Antonio Conti, Mauro Alessandro Lazzarelli, Louis Bouguet e altri ancora: e molto spesso i protetti della contessa, grati, dedicavano a lei le loro opere migliori.

Il passaggio dall'erpetologia sudamericana ai salotti letterari dell'Europa settecentesca è indubbiamente un bel salto, ma visto che il mondo è piccolo e la sua storia breve, almeno su scala universale, non stupirà scoprire che ciò che lega le due situazioni è un singolo, ovvio passaggio. Passaggio che, a ben vedere, discende da uno di quegli episodi a metà strada tra storia e leggenda che tanto andavano di moda alle scuole elementari di qualche tempo fa. A quei tempi, i ragazzini delle elementari erano bombardati, più che da dati e nozioni da mandare a memoria, da episodi gloriosi e aneddoti memorabili. Forse era una maniera per rendere la storia più accettabile alle giovini menti, forse – ancora più semplicemente – era l'esperienza dei maestri che sapevano già che di tutte le informazioni pazientemente travasate sarebbero sopravvissute solo quelle particolarmente eroiche, o strane.

[5] http://www.eulaleia.eu/progetti/2.13LATTESA/2.13saveriocataldogrillo.html - Quasi tutto quel che siamo riusciti a scoprire sulla contessa Borromeo lo abbiamo trovato in un articolo scritto da Saverio Cataldo Grillo, consultabile seguendo il link.

[6] Protagonista di "Le sue prime settanta pagine", RM128.

Così, specialmente per quanto riguardava la storia di Roma antica, si pescava abbondantemente nell'opera di Tito Livio e si selezionavano con cura gli eventi più affascinanti, a prescindere dalla loro credibilità storica. Ritti in piedi nei loro grembiulini bianchi (per le femminucce) o neri (per i maschietti), gli scolari, fieri del loro fiocco blu diligentemente annodato ripetevano seriosi della botte irta di chiodi che trasformò Attilio Regolo in un sanguinolento pezzo di gruviera, della mano bruciacchiata di Muzio, il primo mancino artificiale della storia che per questo veniva chiamato Scevola dagli amici, di Orazio Coclite che difendeva da solo Ponte Milvio (lo avrebbe fatto, se avesse saputo che sarebbe poi finito appesantito dai lucchetti dei fan di Moccia?), del primo derby Roma-Lazio giocato con squadre di soli tre giocatori per parte, Orazi e Curiazi, di oche capitoline già molto patriottiche, e così via. Non erano molti, neppure tra gli aneddoti liviani, quelli che avevano per protagoniste delle signore: il più celebre è forse quello della mamma dei Gracchi, Cornelia, che alle pietre preziose preferiva la sua celebre coppia di figlioli, ma va da sé che, nel caso specifico, la gloria femminile si riduce ad essere null'altro che gloria riflessa della virile apoteosi della sua maschia prole.


4 *In fuga a nuoto da Porsenna*

Più indipendente e autonoma è invece la fama che raccoglie la fanciulla che, portata con altre compagne all'accampamento dell'assediante re etrusco Porsenna, indomita tenta la fuga, esortando le compagne a fare altrettanto, e riuscendo nell'intento grazie ad una traversata a nuoto del Tevere degna di Federica Pellegrini. L'eroismo nella fuga non dette però frutti immediati: il Senato e il Popolo Romano erano composti da tipi che, almeno nei primi tempi della Repubblica, tenevano fede ai patti, così rimpacchettarono le fuggiasche e le riportarono di nuovo da Porsenna. Il re etrusco interrogò le fanciulle, chiedendo chi avesse organizzato la fuga. Inutile dire che la nostra eroina, all'istante, si autodenuncia e, sprizzante romano orgoglio, ribadisce che avrebbe tentato di rifarlo se gliene fosse presentata l'occasione. Porsenna, che sarà pure stato un etrusco, ma era pur sempre un re che ammirava il coraggio e il patriottismo, colpito dall'audacia della giovane, la lascia libera insieme alle compagne. Il nome dell'eroica fanciulla, come molti avranno ricordato, è Clelia: nome non propriamente romano, ma albano[7]; ma a quei tempi gli albani erano ormai romani a tutti gli effetti, e potevano quindi contribuire alla mitologia repubblicana. Il suo significato più probabile è "famosa, celebre", e in questo caso sarebbe del tutto assimilabile a Clara e Chiara.

Il passaggio ardito dai serpenti alle contesse è quindi immediato: il nome di battesimo della Grillo-Borromeo è Clelia, e il nome scientifico del mussurana è Clelia Clelia[8].

C'è ovviamente un ulteriore passaggio da completare, che è quello che dovrebbe condurci, partendo dalla mitologia romana e passando alla zoologia brasiliana e alla storia italiana,

[7] La prima volta che il nome appare nelle cronache è nella forma maschile, Cloelius, re albano.

[8] Clelia Clelia, doppia ripetizione: capita spesso nella terminologia scientifica, quando si parla dell'elemento più rappresentativo di una specie (Clelia Clelia) che dà il nome anche al soprastante livello di genere (Clelia). Non a caso, chi scrive e legge quest'articolo appartiene alla specie Homo Sapiens Sapiens. Ma, nonostante la duplice affermazione di sapienza, non siamo riusciti a capire per quale ragione i mussurana e i loro parenti stretti si chiamino "clelia".

finalmente alla matematica. Ma il passaggio finale è davvero immediato: se può stupire, infatti, che esiste un'intera famiglia di curve che si chiamano "Clelie", non sarà affatto stupefacente venire a sapere che portano questo nome proprio in onore di Clelia Borromeo. Tra gli studiosi che frequentavano la sua corte c'era anche un brillante matematico; quando questi si ritrovò a studiare delle belle curve geometriche che avevano la caratteristica di assomigliare a dei fiori, le battezzò col nome della sua mecenate.

Guido Grandi nasce il 1° Ottobre 1671 a Cremona. Cosa non insolita a quei tempi, ha una vita strettamente legata alle organizzazioni religiose. Studia presso i Gesuiti, quindi diventa membro dell'ordine dei Camaldolesi. Si stabilisce inizialmente in un monastero a Ferrara, poi passa in un altro a Roma. A soli ventiquattro anni diventa insegnante di teologia e filosofia a Firenze, ed è solo a questo punto che comincia ad interessarsi di matematica, anche se continuerà ad insegnare filosofia prima a Roma e poi a Pisa.


5 *Guido Grandi*

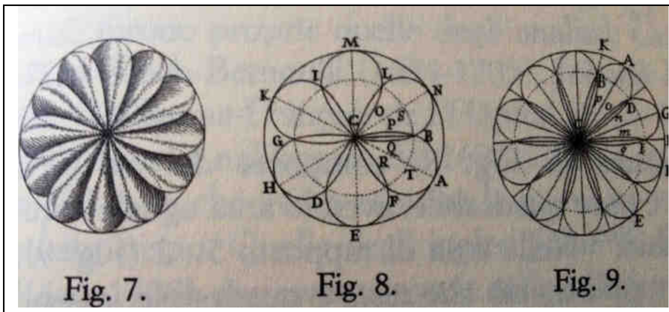
Giunto nel Granducato di Toscana, Guido comincia seriamente ad occuparsi di matematica, al punto di diventare il matematico di corte di Cosimo III de' Medici. L'ambiente è sufficientemente internazionale da consentirgli di frequentare anche studiosi stranieri, fino al punto di diventare membro della Royal Society[9]. Nel 1714 continua ad insegnare all'Università di Pisa, ma stavolta la sua disciplina è la matematica, non più la filosofia.

Ciò che più lo interessa sono le curve: comincia con lo studiare le analogie tra circonferenza e l'iperbole equilatera, e si mostra un pioniere nello studiare le curve non sul piano, ma sulla superficie d'una sfera. Si occupa di quadrature, e di curve insolite quali la lossodromica e la Versiera di Agnesi[10]. Non trascura altri aspetti della matematica: nel 1703 scrive un'opera importante ai fini dell'introduzione del calcolo differenziale, nella versione di Leibniz, in Italia.

L'opera per cui rimane famoso è comunque la *Flores Geometrici*, pubblicata nel 1728, e che contiene davvero quei "fiori geometrici" che Grandi dedica alla contessa Clelia Borromeo. Nel libro presenta le "rodonee", curve che, a dar retta al nome, dovrebbero essere delle "rose": in verità, per quanto decisamente floreali, ricordano assai più le margherite.

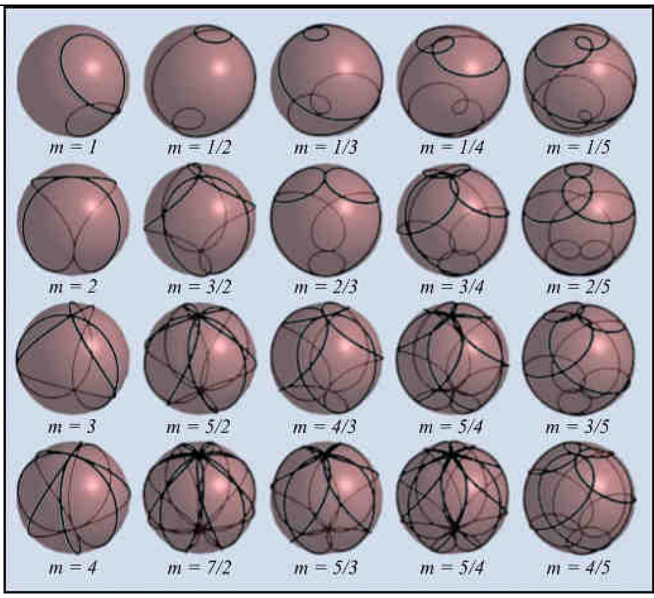
[9] Di come è nata la Royal Society parliamo in RM070.

[10] Stando a quanto racconta Luciano Cresci nel suo bel libro "*Le Curve Celebri*" (ed. Muzzio), la celebre "versiera" non fu scoperta da Gaetana Agnesi (che la studiò a lungo e le trasmise il nome) ma proprio da Grandi, che la chiamo "curva con seno verso", dove "verso" sta per "contrario". Da "verso" a "versiera" il passo è breve: per la terminologia inglese, invece, sembra più complesso, ma non impossibile: "verso" è la radice di "avversario", e l'avversario per antonomasia è il diavolo. Dal diavolo alla strega ("*witch of Agnesi*") il salto è piccolissimo. Ma di questo sapete già tutto, avendo letto il compleanno di Gaetana in RM112.



6 *Le clelie di Grandi*

Le "clelie", esplicitamente dedicate alla Contessa, danno invece il meglio di sé quando prendono posizione su una superficie sferica:



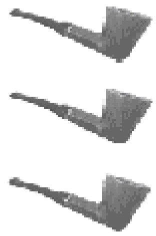
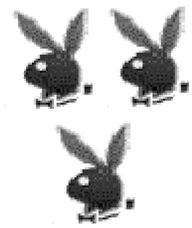
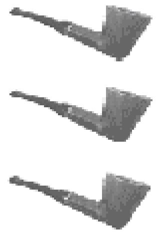
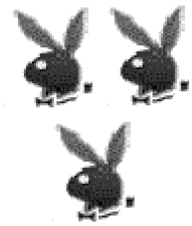
7 *Le clelie sono parametrizzate così:*
$x = a\sin(m\theta)\cos(\theta)$; $y = a\sin(m\theta)\cos(\theta)$; $z = a\cos(m\theta)$
nella figura, clelie per diversi valori di m

curve su superficie curva, si disegnano in un susseguirsi di spire che, oltre a mostrarsi inaspettatamente in natura nelle retine di plastica che solitamente avvolgono i nuovi palloni da calcio, in qualche maniera potrebbero anche chiudere il cerchio dei significati richiamando le spire del mussurana.

8 *Le clelie quando meno te le aspetti*

O, più semplicemente e direttamente, dei fiori incapaci di appassire, e pertanto adattissimi ad essere il dono per una signora.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Una serie di classici			
Una Grande Rivista (o un Piccolo Archivio)			

2.1 Una serie di classici

> *Adesso l'Oceano è un mare o un sistema di mari; per i greci, era un fiume circolare che contornava la terra. Tutte le acque fluivano da esso, ed esso non aveva foci né fonti. Era anche un dio o un titano, forse il più antico, perché il Sonno, nel libro XIV dell'*Iliade*, lo chiama origine degli dèi; nella* Teogonia *di Esiodo è il padre di tutti i fiumi del mondo, che sono tremila, e la cui lista si apre con l'Alfeo e col Nilo. Un veglio dalla barba copiosa era la sua personificazione abituale; dopo secoli, l'umanità trovò un simbolo migliore.*
> *Eraclito aveva detto che nella circonferenza il principio e la fine sono un solo punto. Un amuleto greco del secolo III, conservato nel Museo Britannico, ci dà l'immagine che meglio può illustrare questa infinitezza: il serpente che si morde la coda, come dirà acconciamente Martinez Estrada, "che comincia alla fine della coda".* Uroboros *("che si divora la coda") è il nome tecnico di questo mostro, di cui poi gli alchimisti fecero spreco.*
> *La sua comparsa più famosa si ha nella cosmogonia scandinava. Dall'*Edda *in prosa, o* Edda Minore*, risulta che Loki generò un lupo ed un serpente. Un oracolo avvertì gli dèi che queste creature sarebbero state la perdizione della terra. Il lupo,* Fenrir*, fu messo a una catena forgiata con sei cose immaginarie: il rumore del passo del gatto, la barba della donna, la radice della roccia, i tendini dell'orso, l'alito del pesce e la saliva dell'uccello. Il serpente,* Jörmungandr*, "fu gettato nel mare che circonda la terra; e nel mare è talmente cresciuto, che adesso anche lui circonda la terra, e si morde la coda".*
> *Nello* Jötunheim*, o dimora dei giganti, Utgarda-Loki sfida il dio Thor a sollevare un gatto; il dio, impiegando tutta la sua forza, appena riesce a sollevare di poco una zampa; il gatto è il serpente. Thor è stato ingannato con arti magiche.*
> *Quando giungerà il Crepuscolo degli Dèi, il serpente divorerà la terra, e il lupo il sole.*
>
> J. L. BORGES e M. GUERRERO: Manuale di zoologia fantastica.
> Traduzione di F. LUCENTINI.

Piaciuto, come partiamo stavolta?

In realtà, *comincio citando Walt Withman*[11]. E vi racconto di un problema che abbiamo (io e Doc).

La nostra Treccia preferita sostiene che siamo (io e Doc) in grado di cavare fuori problemi divertenti e interessanti (almeno come ambientazione) da qualsiasi cosa: siccome il fare questo richiede che quei tre neuroni (in due: sempre io e Doc) sperduti nel buio delle

[11] Mi rifiuto (Rudy speaking) di mettere per l'ennesima volta la stessa citazione sul fatto che mi contraddico, ma anche questa è una citazione: poeta, sudamericano e premio Nobel anche lui, dai che è facile. Ma una citazione che parla di una citazione, è una meta-citazione?

scatole craniche *lavorino*, siamo entrambi in completo disaccordo con lei; come al solito, io esprimo il concetto in modo categorico, scatologico e definitivo (pur di non lavorare, questo ed altro), anche perché l'aggiunta di Treccia è "basta che non parli di probabilità", e tra il fatto che a me le probabilità piacciono e che sono i problemi più facili da rigirare, capite che la cosa mi secca alquanto.

Meglio se vi spiego il (mio) problema: credo di essere riuscito in un'impresa epica, in questo campo, partendo da un problema che *meno adattabile non si può*, tra i libri delle vacanze ne avevo uno con un problema particolarmente balordo (dal punto di vista dell'adattabilità)... Beh, veniamo al problema.

Dalla citazione iniziale, dovreste aver capito cos'è un *uroboro*: messa nel modo più prosaico, un serpente che si morde la coda. L'avere un figlio (Al, il primo dei VadLdRM) che si interessa di "Detartrasi al coccodrillo", come amo dire[12], ha fatto sì che ci si focalizzasse su un ben preciso *environment* per quanto riguarda l'ambientazione.

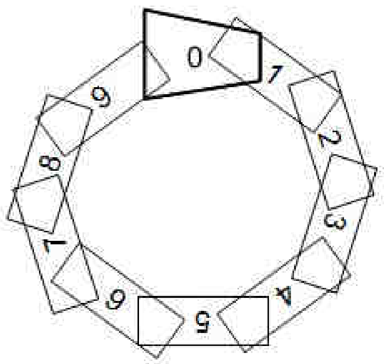
Bene, siete dei biologi.

Invidiosi del fatto che un vostro collega abbia appena catalogato il *Parnassius Guccinii*[13], siete partiti alla ricerca di un qualche animale cui dare il vostro nome; siccome siete stati fortunati, avete trovato un esemplare vivente di *uroboro* ma, visto che già un mucchio di gente ne ha parlato (anche se non è mai stato catalogato con precisione), decidete di stare a guardare le sue abitudini, per scrivere un articolo su una rivista con un buon Impact Factor. E qui cominciano i guai.

Infatti, avete trovato un *Uroborus Vulgaris* (o *Uroborus Pickoverensis*): lo si distingue dal fatto che i numeri sui diversi segmenti partono da zero e sono in progressione aritmetica in base uno.

Meglio, a questo punto, consultare qualche manuale sull'allevamento degli Uroboro (o "Urobori"? Dipende se la considerate parola straniera o no: a noi capita raramente di dirlo, quindi non ci pare un problema da perderci le notti). E qui, sarebbe il caso di cedere la parola al nostro allevatore di roba strana di fiducia (sarebbe Alberto).

A quanto pare, gli Urobori si nutrono di sé stessi, e mangiando segmenti con sopra un determinato numero generano un "out-poo-t"[14] che è su un altro segmento con sopra un numero, ma tutto da un'altra parte: ogni segmento, a partire dalla testa, indica quanti segmenti con il numero di indice ha mangiato al giro prima: per capirci, l'Uroboro in figura (quella trapezoidale è la testa) ha mangiato zero segmenti contenenti 0, un segmento contenente 1, due segmenti contenti 2, eccetera: per la semplicità costruttiva, è noto come *Vulgaris*.



1*U. Vulgaris (il trapezio è la testa)*

Il fatto è che voi sapete, dai segni lasciati sul terreno dall'uroboro (che non si muove, come ben dicono i testi fondamentali sull'argomento[15]), che il vostro *U. Vulgaris* è alla *sesta* (ri)generazione: considerato che si è "mangiato tutto", quindi, per ~~sei~~ cinque[16] generazioni, ha continuato a mangiare sé stesso e, con il metodo indicato, ha generato i nuovi segmenti.

[12] Si dia inizio ai festeggiamenti! *Ha passato Anatomia!* Ah, ve l'avevo già detto? Beh, si festeggi di nuovo.

[13] Esiste sul serio, anche se forse abbiamo messo una "i" di troppo.

[14] Noi due (sempre io e Doc) ci riteniamo autorizzati a fare dei giochi di parole estremamente volgari, se questi coinvolgono almeno una lingua straniera.

[15] Albert d'ALEMBERT, *Ecologia dell'Uroboro*; idem, Ouroboros: *An Example of Static Environemtal Evolution*. [Arziv.org]

[16] Il solito JFO-E, come ben sa chi mi conosce.

A questo punto, il Nostro si pone una serie di probemi:

1. Ma come era fatto, l'Uroboro iniziale?
2. Riuscirò mai a trovare l'*Uuroborus Ectalis perfectus* (sarebbe quello con i numeri da 0 a 99, in ordine: non fate i pignoli), e in quel caso, da cosa nasce?
3. Esiste l'*Uroborus Periodicus*, ossia quello che ripete la numerazione dopo un certo numero di (ri)generazioni? Non necessariamente quella del *Vulgaris*, chiaro.

Fermo restando che abbiamo le risposte (ma non le *soluzioni*) a un terzo (scarso) delle domande poste, sentitevi liberi di espandere l'analisi: non credo esistano l'*U. Rationalis*, *U. Realis*, *U. Complexus*, ma, se trovate il modo di farli riprodurre, loro di sicuro si divertiranno da matti: la mente vacilla, di fronte agli *U. Quaternarius*, *U. Octonarius* e *U. Sedenionensis*. Forse abbiamo sbagliato scatola del tabacco, fumando della roba un po' strana.

Scusate, al fondo una nota di servizio: Gigi, come avrai notato ho ricomprato il "Manuale" di Borges e Guerrero. Siccome nel 1979 ti avevo tolto il saluto per avermelo perso (assieme ai *Sei problemi per don Isidro*: trovato anche quello), se ti incrocio per strada non ti strozzo. Quindi, tranquillo; puoi uscire dal rifugio antiatomico.

No, non te li presto.

2.2 Una Grande Rivista (o un Piccolo Archivio)

Secondo i miei calcoli (Rudy speaking), al momento siamo dalle parti dei *trecentottanta* problemi proposti, da queste parti. E "dall'altra parte" (della realtà, come diceva Asimov) abbiamo superato la settantina.

Non che la cosa ci faccia venire voglia di smettere (siamo "ggiovani ddentro", come dicono gli anziani amanti delle ddoppie), ma dal punto di vista pianificatorio stiamo (Rudy, in realtà: per gli altri due qui "pianificazione" è una parolaccia[17]) piuttosto malmessi: abbiamo ("Rudy ha") un bellissimo archivio dei problemi, ma ogni volta che ne us(iam)o uno bisogna aggiornare il database (pacco di fogli Calc/Excel, in realtà[18]) in un numero di punti variabili da tre a cinque (dipende da dove ho pescato il problema), e uno o due punti di aggiornamento si dimenticano in un amen (ma ci vuole, l'apostrofo? Foneticamente ci sta bene: "inunamen" è una bella allitterazione, se non siete raffreddati, ma amen ci sembra maschile…).

Tutta 'sta manfrina per dire che... No, momento. C'è un'altra premessa importante. A casa d'Alembert abbiamo cambiato tutte le finestre: 65% di detrazione fiscale (burocrazia a cura di Paulette d'Alembert: adesso si chiama così perché ha detto che studierà francese, da novembre *[Non ci crede nessuno (RdA)]*), per non parlare del fatto che lo spiffero più piccolo dai vetri sembrava la Niña, vi ricordate di quando ho traslocato, vero?

Ora, un buon problema potrebbe essere "trovate la relazione tra queste due cose", ma siccome siamo buoni[19] ve la dico e andiamo avanti.

Siccome i defenestratori (i nostri, non quelli di Praga) avevano bisogno di spazio, un tot di cose (leggasi: nove metri cubi di roba) sono stati cacciati nel *Math Manor* (quello da cinque metri cubi: non fate domande, che se la roba se ne accorge siamo nei guai); il sottoscritto, sfruttando la sua magrezza, riesce comunque a creare un cunicolo che gli permettere di raggiungere l'ASUSina (la sua computera) per scrivere queste note, quindi la cosa potrebbe avere per voi un interesse decisamente minore di epsilon: ma "cunicolando", ho trovato un vecchio numero di una Prestigiosa Rivista di Divulgazione Scientifica e, fatte salve le pause pipa (nel Math Manor è vietato fumare, tranne durante

[17] Non fuori di qui, dove loro se la cavano benissimo e Rudy sta cercando un sinonimo di "procrastinazione" che abbia minori connotazioni di urgenza. Ma siamo ragionevolmente sicuri che non ve ne importa nulla, del nostro "mondo di là".

[18] Siete autorizzati a dire la frase "Usa Access/MySQL" solo se seguita dalla subordinata "ti carico io il pregresso". Cos'è questo improvviso silenzio?

[19] *Questa, detta dal Capo, è tutta un programma.[NdAR]*

le foto ufficiali), ho rivisto un problema che, *secondo il database*, da queste parti non era mai comparso. Possibile?!?

Mah, forse è ora di passare al problema.

A settembre, abbiamo festeggiato un tot di cose (non ve l'abbiamo detto? Fred ha riparato latino e greco, e Al ha compiuto gli anni), e per il Drammatico Duo abbiamo preparato due torte perfettamente identiche.

L'intento primevo era di darne una a testa, che se la mangiassero e via andare; allo scrivente, però (il quale sapeva come sarebbero andate a finire le cose) era venuta un'idea.

Rudy: "Giovini, qui avete la prima torta, alla quale siete sicuri ne seguirà una seconda. Alberto, tu devi dividere la torta in due fette.."

Alberto: "Metodo di Newton, uno taglia e l'altro sceglie?"

Rudy: "...quasi: entrambi sapete che c'è una seconda torta, e tu taglierai anche quella. Fred sceglie un pezzo della prima torta e chi sceglie il pezzo più grosso della prima sceglie per secondo sulla seconda torta".

Alberto: "E la seconda, chi la taglia?"

Rudy: "Sempre tu, altrimenti non sarebbe divertente".

A questo punto, va sottolineato un particolare che potrebbe sembrare insignificante: il tavolo è piccolissimo, e Alberto deve tagliare la seconda torta *dopo* aver fatto tutte le operazioni (scelta di Fred compresa) sulla prima: due torte, sul tavolo, non ci stanno.

Ora, considerato che ciascuno dei due vuole il massimo di torta, come deve tagliare Alberto la prima e la seconda torta?

Una settimana dopo...

A quanto pare, il gioco ha divertito i due fanciulli: questa settimana (compleanni in famiglia coincidenti con compitinclasse/esami/vantaggiatiriconlarco[20], i VadLdRM si sono ritrovati con *tre* torte. In questo caso, Alberto continua a tagliare, ma Fred avrà la prima scelta due volte, mentre Alberto l'avrà una sola: per intenderci, Alberto taglia, e Fred decide se scegliere per primo o per secondo (e il primo che sceglie prende la fetta grossa); poi Alberto taglia la seconda torta, e anche qui Fred sceglie se scegliere per primo o per secondo (idem); infine, Alberto taglia l'ultima torta, e qui la scelta di chi sceglie per primo è obbligata.

Adesso, abbiamo un tot di domande (e di qualcuna, tipo la seconda, non sappiamo la risposta).

1. Come può Alberto assicurarsi nei due casi la massima razione di torta?
2. Generalizzazioni (*n* torte, *k* giovini, tagliano in più di uno...)
3. Tornando ai due, esiste un modo per garantire ai due *estremamente golosi e estremamente logici* la stessa dose di torta?

Muovetevi, che a Natale vorremmo essere equi.

3. Bungee Jumpers

Nel BJ di RM149 abbiamo trovato *quattro* diverse dimostrazioni della diseguaglianza di *Cauchy-Schwarz* (o di *Caucy-Buniakowsky*):

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\ 2}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\ 2}\right),$$

verificando che l'uguaglianza vale solo se:

[20] L'ultima ve la spieghiamo poi. A Rudy gira il girabile ancora adesso, qualunque sia la data di uscita di questo numero.

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$

PROBLEMA 1: Dimostrare, a mezzo della disuguaglianza qui sopra che per un qualsiasi insieme di numeri positivi vale la diseguaglianza:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\leq n^2$$

esaminando i casi nei quali vale l'uguaglianza.

PROBLEMA 2: Provate attraverso la diseguaglianza del PROBLEMA 1 che la media aritmetica di n numeri positivi è sempre minore o uguale della loro media quadratica.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Ottobre.

Questo numero è già parecchio lungo perché il Capo si impegna da mesi a preparare il suo materiale, ed io dovrei limitarmi, ma c'è tanto da dire, in realtà. Per cominciare, questo mese i miei compari dovrebbero presentarsi in carne ed ossa ad un paio di eventi, di cui il primo in programma è il dieci ottobre a Brescia. Se non avete notato l'evento sul nostro sito, provate a seguire questo link:

http://www.rudimathematici.com/extradoc/programma_MB_2013-14.pdf

Poi coroneranno un paio di spettacoli dell'ottima serie "Teatro e Scienza: i Numeri", se guardate nel Memento (http://www.rudimathematici.com/memento/mementodb.php), trovate le date: non vi assicuro che parleranno di quello che promette il programma, ma di sicuro sarà interessante. Negli scorsi giorni il calendario è andato arricchendosi di varie attività, quindi ritornate a guardare gli eventi in Memento, ne aggiungeremo ancora appena otteniamo le informazioni più dettagliate: sarà un autunno ricco di iniziative interessanti.

Che altro? Ne stanno succedendo di tutti i colori. Qualcuno ha deciso di intervistarci (vi diremo tutto quando – e se – veramente l'intervista sarà pubblicata), continuiamo imperterriti e malgrado i nostri molti limiti a fare più cose di quante ne sappiamo fare… ma lo sapete, siamo rudi, e non solo di nome.

Voi lo sapete, a settembre sono stata in vacanza per qualche giorno. Durante una "scalata" di un trecento gradini circa per andare a visitare qualche punto topico locale (che per definizione deve trovarsi in cima ad un innumerevole numero di gradini), ho notato che qualche responsabile turistico aveva pensato bene di incoraggiare i turisti numerando i benedetti scalini – uno ogni cinque. Vi assicuro che io non mi sono sentita per nulla incoraggiata, tranne quando ho trovato un gradino speciale: chissà se si vede nella foto? Anche in vacanza, RM è sempre nei miei pensieri.

9 *Anche in vacanza*

Speriamo che l'autunno vi sia dolce e piacevole, noi siamo ancora qui. E sono proprio contenta di dirvi che ci siete anche voi, data la mole di materiale che ci avete inviato questo mese. Andiamo a vedere.

4.1 [174]

4.1.1 Strani, simpatici, ridicoli numeri

Sono mesi e mesi che parliamo di questo problema soprattutto a causa di Sawdust e trentatre, che continuano a lavorarci. Al solito cominciamo con il testo del problema:

> *Diciamo che un numero n è un anagramma precedente il doppio (APD) se il numero* $2n–1$ *è formato dalle stesse cifre di n in ordine diverso: ad esempio,* 37 *è un numero APD.*

Trovare delle caratteristiche matematicamente interessanti di questi numeri non è facile, ma ne esiste almeno una che è tanto bella quanto "stupida", almeno a prima vista: e, infatti, vi chiediamo di dimostrarla.

Se n è un APD che termina con 3, allora deve contenere un 8.

Per qualsiasi intero positivo n, esiste un intero positivo k tale che 2km è un anagramma di km.

In RM175 abbiamo pubblicato una soluzione di ***Camillo*** e ***Carlo***, e in RM176 molte più interessanti proposte di ***Sawdust*** e ***trentatre***, che non hanno ancora smesso di divertirsi, e noi pubblichiamo volentieri, a partire da ***trentatre***, che comincia con:

> Il problema è ormai vecchio e può interessare solo i pochi che lo hanno già affrontato; vedete voi. Anziché esplorare la "montagna di numeri" in modo smodatamente empirico, ho tentato lo stile complementare: non numeri ma dimostrazioni. Viene la tentazione di scrivere un trattatello, inutile ma non ridicolo. Mi guardo bene dal provarci: il piacere della matematica, come ogni altro, va praticato con moderazione.

Trattatello? Moderazione? Soprattutto questo numero non conosce questa seconda parola. Un nuovo contributo per il nostro Bookshelf? Se i nostri eroi hanno voglia di scriverlo, noi abbiamo voglia di sistemarlo sul sito, con i nostri tempi. Ma per il momento abbiamo a malapena tempo di mettere insieme i numeri di RM, per cui procediamo con la trattazione di ***trentatre***:

> ***Sawdust***, con un esteso ricorso alla tabulazione numerica, individua una serie di proprietà. Aggiungo la dimostrazione di alcuni punti, con le notazioni della nota precedente:
>
> $a @ b$: a è anagramma di b
>
> $a \times b$: i numeri a e b scritti di seguito
>
> $(c)_m$: la cifra c ripetuta m volte
>
> $|c|$: il numero di cifre di n uguali alla cifra c .
>
> I. se n è anagramma di n' allora $(n - n')$ è un multiplo di 9; cioè
>
> [1] $n @ n' \Rightarrow n \equiv n' \pmod 9$
>
> Per i vari casi si ha
>
> $n @ 2n \Rightarrow n = 9k$
>
> $n @ (2n-1) \Rightarrow n = 9k+1$ (il caso *APD* del problema)
>
> $n @ xn \Rightarrow (x-1)n \equiv 9k$, e quindi n è multiplo di 9 per $x = 2,3,5,6,8,9$
>
> - per $x = 4,7$, n è in certi casi multiplo solo di 3
>
> $n @ (xn \pm 1) \Rightarrow (x-1)n = 9k \mp 1$
>
> - per $x = 4$ si ha $3n = 9k \mp 1$ che non ha soluzioni (idem per $x = 7$)
>
> - in generale $n @ (xn \pm y)$ ha soluzioni per $x = 4,7$ solo se y è multiplo di 3.
>
> II. siano, per ogni $x = 2,3,\dots 9$, $|y| = 0,1,2,\dots 9$, gli insiemi
>
> $\boldsymbol{U}_{x,y} = \{n \ge 0 : n @ (xn + y)\}, \boldsymbol{U}_x \equiv \boldsymbol{U}_{x,0}$; valgono le
>
> [2] $n \in \boldsymbol{U}_x, n' \in \boldsymbol{U}_{x,y} \Rightarrow (n \times n') \in \boldsymbol{U}_{x,y}$
>
> $n, n' \in \boldsymbol{U}_x \Rightarrow (n \times n') \in \boldsymbol{U}_x$
>
> $n \in \boldsymbol{U}_x \Rightarrow n \times (0)_k = n \cdot 10^k \in \boldsymbol{U}_x,\ k \ge 0$
>
> [3] per ogni m e per ogni x esiste k tale che $km @ xkm$
>
> - equivale alla esistenza, in ogni $\boldsymbol{U}_x$, di multipli di ogni numero m.

III. per $n@2n$, cioè in $\boldsymbol{U}_2$, il numero di cifre di n dei vari tipi rispetta le

[4] $|0|+|5|=|0|+|1| \Rightarrow |5|=|1|$
$|1|+|6|=|2|+|3|$
$|2|+|7|=|4|+|5|$
$|3|+|8|=|6|+|7|$
$|4|+|9|=|8|+|9| \Rightarrow |4|=|8|$
$|1|+|3|=|6|+|8|$

$|0|,|9|$ non sono vincolati – infatti prima di una cifra >4 si può inserire $(9)_k$, e prima di una <5 o alla fine si può inserire $(0)_k$; esclusi 0, 9 restano per le altre 8 variabili le 5 condizioni

[5] $|5|=|1|, |8|=|4|$.
$|1|-|2|=|3|-|6|=|7|-|4|=|4|-|1|$

Si ricava p.es.

[6] n ha almeno 6 cifre; contiene le cifre 1,4,5,8 e almeno 2 cifre in (2,7)
se n ha 6 cifre è anagramma di 125874 (l'n minimo)
nb. le cifre (3,6) compaiono per la prima volta in 12356784.

IV. per $n@2n-1$ (il caso *APD*) cioè in $\boldsymbol{U}_{2,-1}$, le [4] si differenziano a seconda dell'ultima cifra c_1 di *n*; sviluppo solo il caso $c_1 = 3$. $|0|,|9|$ non sono vincolati; prima di una cifra >4 si può inserire $(9)_k$, e prima di una <5 si può inserire $(0)_k$. Le [5] diventano

[7] $|5|=|1|, |8|=|4|$.
$|1|-|2|=|3|-|6|=|7|-|4|+1=|4|-|1|+1$

Si ricava p.es.

[8] esiste almeno un 8 (e un 4)

[9] ogni n ha almeno 6 cifre e contiene 1,3,4,5,8 e almeno una cifra in (2,7)
ogni n di 6 cifre è anagramma di 158743 (l'n minimo che termina con 3).

Con lo stesso processo si ottengono formule analoghe per gli altri valori della cifra finale, e anche per il caso generale $n@(2n+y)$.

<u>dimostrazioni</u>

[1] con $S(n)$: somma delle cifre di *n*, è $n \equiv S(n)$ (mod 9) (la cosiddetta prova del 9) ma $n@n' \Rightarrow S(n)=S(n')$ da cui la [1].

[2] se $n \in \boldsymbol{U}_x, n' \in \boldsymbol{U}_{x,y}$, *n* ha le stesse cifre di *xn*, ed *n*' di (*xn*' + *y*), cioè

$xn \times (xn'+y) @ (n \times n') \Rightarrow (n \times n') \in \boldsymbol{U}_{x,y}$

le altre seguono per $\boldsymbol{U}_x \equiv \boldsymbol{U}_{x,0}$, $(0)_k \in \boldsymbol{U}_x$

- valgono per gli insiemi i prodotti cartesiani $\boldsymbol{U}_x \times \boldsymbol{U}_x = \boldsymbol{U}_x$, $\boldsymbol{U}_x \times \boldsymbol{U}_{x,y} = \boldsymbol{U}_{x,y}$

[3] non ripeto la dimostrazione già data per $\boldsymbol{U}_2$, che si applica ad ogni *x*

[4] p.es. in $n \to 2n$ solo le cifre 2,7 generano 4,5 (senza o con riporto) ecc.
l'ultima delle [4] deriva da (n° cifre dispari = n° riporti), cioè
$|1|+|3|+|5|+|7|+|9|=|5|+|6|+|7|+|8|+|9| \Rightarrow |1|+|3|=|6|+|8|$

[5] nb. le [4] non sono indipendenti: la somma delle prime 5 dà una identità e restano pertanto solo 5 condizioni

[6] la cifra 1 deve esserci per

$|1|=0 \Rightarrow |2|=|4|=|5|=|7|=|8|=0$

- restano solo le cifre 0,3,6,9 che non bastano a costruire *n*, perché la prima cifra 6,9 che compare genera 2,8 , pertanto

$|1|\geq 1 \Rightarrow 2\cdot|4|=|1|+|7|\geq 1 \Rightarrow |4|\geq 1$, $|2|+|7|=|1|+|4|\geq 2$

n contiene 1,4,5,8 e almeno 2 cifre in (2,7); se *n* ha 6 cifre $|1|=|4|=|5|=|8|=1$, $|2|+|7|=2$

ma | 2 | e | 7 | non possono essere nulle per

$|2|=0 \Rightarrow |2|+|7|=2\cdot|4|-|1|=1\neq 2$

$|7|=0 \Rightarrow |2|+|7|=2\cdot|1|-|4|=1\neq 2$

quindi $n@125874$

[7] in ognuna delle [4] le cifre a sinistra generano quelle a destra; $c_1=3$ genera 5

le [7] derivano dalle [5] diminuendo di 1 il termine $|3|$ a sinistra e il termine $|5|$ a destra

si può procedere nello stesso modo per le altre cifre finali (salvo 0).

[8] $|4|=0 \Rightarrow |7|+|1|=0 \Rightarrow |1|=|5|=|7|=0 \Rightarrow |2|=-1$ impossibile, quindi $|4|=|8|>0$

[9] 3 genera 5 e $|1|=|5|$: *n* contiene 1,3,5

$|4|=0 \Rightarrow |1|+|7|=0<|1| \Rightarrow |4|=|8|\geq 1$: *n* contiene 1,3,4,5,8

$|2|+|7|=|1|+|4|-1\geq 1$: *n* contiene cifre in (2,7) ed ha almeno 6 cifre; se le cifre sono 6

$|1|=|3|=|4|=|5|=|8|=1$, $|2|+|7|=1$

ma $|7|=2\cdot|4|-|1|=1 \Rightarrow |2|=0$ e quindi $n@134578$

nb. 2 manca se *n* ha meno di 10 cifre; che manchi in ogni *n* resta una congettura.

Ecco, ***Sawdust*** sarà deliziato, ma anche lui ha continuato a pensarci:

Sto cominciando veramente a dare i numeri! Non so neanche più quante mail vi ho mandato su questo argomento, così come non riesco quasi più a raccapezzarmi in mezzo al mare di cifre che mi ha veramente sommerso, ma il vaso di Pandora l'avete aperto voi, e allora adesso…

Come già vi ho scritto, esistono i sesquianagrammi[21], ma non solo, ossia numeri, chiamiamoli *m* tanto per mantenere la stessa simbologia, il cui multiplo *xm* è l'anagramma di *ym*.

Un breve esempio è riportato nella tabella a destra.

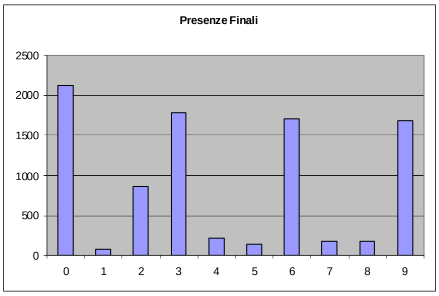
m	119m	133m
657	78.183	87.381
918	109.242	122.094
1.422	169.218	189.126
1.836	218.484	244.188
2.205	262.395	293.265
6.570	781.830	873.810
9.180	1.092.420	1.220.940
9.936	1.182.384	1.321.488
14.193	1.688.967	1.887.669
14.220	1.692.180	1.891.260
14.571	1.733.949	1.937.943
18.360	2.184.840	2.441.880
20.628	2.454.732	2.743.524
22.050	2.623.950	2.932.650
28.143	3.349.017	3.743.019
28.755	3.421.845	3.824.415
42.714	5.082.966	5.680.962
42.867	5.101.173	5.701.311
43.857	5.218.983	5.832.981
52.983	6.304.977	7.046.739
57.105	6.795.495	7.594.965
63.999	7.615.881	8.511.867
65.700	7.818.300	8.738.100
72.081	8.577.639	9.586.773
72.756	8.657.964	9.676.548
84.285	10.029.915	11.209.905
85.707	10.199.133	11.399.031
91.800	10.924.200	12.209.400
91.809	10.925.271	12.210.597
94.257	11.216.583	12.536.181
99.360	11.823.840	13.214.880
99.936	11.892.384	13.291.488

Le prime cose che mi sono saltate agli occhi a riguardo di questi numeri sono:

- I valori di *m*, e di conseguenza le differenze tra i valori di *m*, sono quasi sempre tutti multipli di 9, in alcuni casi, come ad esempio per *x*=2 e *y*=5 o 8 (oppure *x*=47 e *y*=59), sono comunque multipli di 3, 6 e 9.
- La distribuzione delle cifre finali di *m* è sempre abbastanza irregolare. L'esempio più

[21] Ve lo ricordate il Sesquiossido di Ferro (Fe_2O_3)?

evidente, per ora, è quello relativo a x=4 e y=7, che per valori di m<10.000.000 si presenta come in figura



Riprendendo invece a parlare più in generale degli A.P.D., va detto che esistono anche quelli che potremmo chiamare A.S.D., e la cosa non vale solo per il doppio, ma anche per i multipli 3, 4,….e 9.

Perciò potremmo chiamarli A.P.X. e A.S.X.

Inoltre, anche se per il doppio questa distinzione non vale, c'è da fare un'ulteriore considerazione: è più corretto usare la forma m anagramma di $mx - 1$ o la forma m anagramma di $mx - (x - 1)$? Infatti nella prima forma non ho trovato nessun valore di m per il fattore 4 con m inferiore a 2.000.000.000 e per il fattore 7 con m inferiore a 100.000.000.000, mentre nella seconda forma i valori ci sono già a partire rispettivamente da 16 e da 13.591.

E adesso basta con questa storia, andiamo avanti (sì, ***Sawdust*** ci ha inviato anche altro, cerchiamo di contenerci…).

4.2 [175]

4.2.1 Guardie e Ladri Teorico

Il mese scorso abbiamo lamentato assenza di soluzioni per il primo problema, il cui testo era il seguente:

I VadLdRM hanno inventato un nuovo gioco: piazzano due Torri (una nera e una bianca) in c4 e f4 e due Pedoni (uno nero e uno bianco) in a4 e h4. Le due Torri rappresentano le Guardie, e sono di un giocatore; i due Pedoni sono i Ladri, e vengono giocati dall'altro. Tutti i pezzi muovono ortogonalmente di un passo, e il gioco finisce quando le due Guardie catturano i due Ladri, finendo sulla stessa casella: ma attenzione! Una Guardia di un colore può catturare solo il Ladro dello stesso colore: se finisce sulla casella del Ladro di colore opposto, non succede niente.

Il Ladro posiziona i suoi pezzi, e poi la Guardia posiziona i suoi, e si parte con l'emozionante gioco: il primo a muovere è la Guardia, e ad ogni mossa ognuno dei due giocatori muove entrambi i suoi pezzi. Una partita dura al più 15 mosse: qualcuno dei due giocatori ha una strategia?

Al Capo era molto dispiaciuto, perché lui stesso lo considerava un bel problema. Apparentemente, invece, ***Valenash*** ci aveva scritto proponendo la sua, che non è mai arrivata a destinazione. L'abbiamo ricevuta e la pubblichiamo ora:

In modo da evitare problemi razziali, diciamo che tutti i pezzi sono blu: ora, il primo giocatore ha una torre blu chiaro e una blu scuro, e il secondo un pedone blu chiaro ed uno blu scuro (ok, è vecchia…).

Affinché il giocatore 1 (la guardia) abbia una chance di vincere, deve posizionare il pezzo in c4 dello stesso colore di quello in h4, e quello in f4 dello stesso colore di quello in a4.

È evidente vedere che altrimenti la torre non arriverà mai a mangiare il pedone: la torre blu chiaro e il pedone blu chiaro sono entrambi, inizialmente, su caselle dello stesso colore, diciamo ad esempio nero: la torre, che muove per prima, muove per forza sul bianco, dunque su una casella di colore diverso, e questo si ripete ad ogni mossa. Se ne deduce quindi che la torre non potrà mai muovere su una casella dello stesso colore di quella su cui si trova in quel momento il pedone blu chiaro, e pertanto le Guardie perderebbero.

Poniamo che in a4 ci sia il pedone blu chiaro, in c4 la torre blu scuro, in f4 la torre blu chiaro e in h4 il pedone blu scuro.

Detto questo, risolviamo un problema alla volta:

Le due Guardie blu chiaro e blu scuro rischiano di "avere bisogno" entrambe di passare sulla stessa casella. Allora definiamo le prime quattro mosse di ciascuna INDIPENDENTEMENTE dalle mosse dei ladri: con queste mosse la torre blu chiaro andrà in d4 e quella blu scuro in e4.

A questo punto, essendo la situazione perfettamente simmetrica, dimentichiamoci dei blu scuri (ebbasta con 'ste polemiche razziste) e analizziamo il gioco tra pedone blu chiaro e torre blu chiara.

Notiamo che il pedone si può trovare nella colonna a, b, c, o nella d. Non si può trovare in e perché senno avrei già potuto mangiarlo, inoltre se si trova in d significa che posso mangiarlo ora (ha impiegato tre mosse per arrivare in d quindi al più si trova a distanza uno in riga).

Dunque è più vicino al bordo di me. Consideriamo ora la distanza tra i due pezzi in riga e colonna. Consideriamo che il pedone blu chiaro muova solo dopo le quattro mosse delle guardie.

Inizialmente abbiamo un (3,0), che può diventare un (3,0), un (3,2), un (3,4), un (2,1), un (2,3), un (1,0), un (1,2).

Lemmino: se la differenza delle due distanze vale 1 (in valore assoluto), allora le guardie vincono.

Dimostrazione: Se ciò accade, con la mia mossa posso portarmi in una posizione in cui tale differenza vale 0. Ciò significa che o ho già vinto, o guardia e ladro si trovano ai due vertici opposti di un quadrato. A questo punto è semplice vedere come abbia la vittoria in tasca: se lui "scappa" dal quadrato, lo "inseguo" facendo la stessa mossa che fa lui fino a che non si trova in a8. Sono possibili quadrati 2x2 (vittoria alla prossima mossa), 3x3 (banalmente vinti), 4x4 (anche qui è semplicissimo vedere che la vittoria sia assicurata, io muovo sempre in modo da avere la differenza tra le distanze pari a zero, ma in modo che i loro valori assoluti diminuiscano, il fatto che questo sia sempre possibile è banale).

L'unica situazione che "rimane fuori" è (3,0), che si risolve muovendo due volte lungo la riga 4 in modo da arrivare in b4 e poi muovendosi solo in colonna nella sua stessa direzione fino a catturarlo.

Ultimo punto rompiscatole, dimostrare che posso vincere sempre in meno di 15 mosse: considerato che, per diminuire i valori delle distanze mantenendo 0 la differenza è necessario che "non torni mai indietro", ciò significa che, diminuendo di 1 il valore di una delle distanze ad ogni mossa, per terminare impiegherò al più la somma delle distanze (meno uno, visto che quando ci troviamo nella situazione (1,1) in cui si trova nell'angolo è costretto lui a venirmi vicino): ciascuna configurazione può quindi essere vinta in al più 4+(3+4)–1=10 mosse. (c.v.d.)

Il linguaggio non è formale, ma sono sicuro che visto che siamo ad agosto ci accontentiamo di un "lo inseguo" invece che di un "eseguo una mossa nella sua stessa direzione se la sua porta ad un aumento della somma delle distanze, mentre la eseguo in direzione perpendicolare (nel verso che mi porta a diminuire la distanza in tale senso) se egli fa una mossa che diminuisce la somma delle distanze", vero?

Va tutto bene, siamo o non siamo rudi? Anche se pubblichiamo ad ottobre. Lo stesso vale per la fulminea soluzione di ***MBG***, che non sentivamo da tanto e ci ha stupito con multiple soluzioni:

> Il problema si risolve con un semplice ragionamento in termini di "parità" che in questo caso è rappresentata dal colore delle caselle. Siccome ad ogni turno i pezzi si possono muovere di un solo passo in direzione ortogonale, cambiano necessariamente ogni volta colore della propria casa (mi pare che gli scacchisti chiamino così le caselle, corretto?). La guardia e il ladro neri si trovano inizialmente sulle caselle bianche c4 e a4. Ne deriva che al termine di ogni turno di mosse, saranno sempre su caselle dello stesso colore, per cui la guardia, che muove per prima, non potrà MAI agguantare il ladro; l'unica possibilità è che il ladro si faccia catturare spontaneamente andando a raggiungere la guardia. Non è nemmeno possibile una situazione in cui questa sia la sola mossa rimasta al ladro; infatti dalle regole pare che sia permesso far sostare più di un pezzo sulla stessa casella e quindi non si possono verificare situazioni in cui si forza il ladro ad andare incontro alla guardia.
>
> Lo stesso vale specularmente per gli altri due pezzi, invertendo i colori iniziali.

Che ne dite? Non abbiamo ancora toccato i problemi del mese, lo sappiamo. Andiamo avanti, va.

4.3 [176]

4.3.1 Pomeriggio nel Luogo del Divano Quantistico

Questo è un altro dei terrificanti giochi che il Capo si inventa per far passare il tempo ai figli, e poi passa tutti per "giocatori ottimali", per fare impazzire voi. Vediamo se riesco a riassumerlo:

> *Consideriamo i numeri naturali da* 1 *a n su un foglio: il primo giocatore cancella metà dei numeri (approssimazione per difetto se sono in numero dispari), e poi il secondo giocatore fa la stessa cosa sui numeri restanti, e avanti così. Finisce quando restano solo due numeri sul foglio. A quel punto si calcola la differenza tra i due numeri. L'obiettivo del primo giocatore (il quale sceglie anche n) è di ottenere alla fine il valore massimo possibile, mentre il secondo giocatore deve ottenere il valore minimo possibile.*
>
> *Alla prima partita, Fred opta per n* = 2013*: con che valore finirà la partita?*
>
> *Alla seconda partita, i due Rudolph scelgono un n tale che permetta loro di ottenere un valore finale una volta e mezzo quello ottenuto al giro precedente da Fred: con che valore hanno iniziato?*

Il Capo sperava in generalizzazioni varie, vediamo se è stato accontentato, cominciamo con ***Camillo***:

> È ovvio che il primo giocatore deve lasciare i numeri più distanti possibili tra loro mentre il secondo giocatore alla minima distanza.
>
> La strategia del primo sarà quella di cancellare i numeri disponibili alternandoli per cui la sua prima mossa sarà quella di cancellare tutti i numeri pari. Potrebbe cancellare anche i dispari ma nel caso di una partita con n dispari dovrebbe lasciare sul campo una coppia di adiacenti che è una situazione fragile, anche se nel prosieguo si può rimediare e concludere comunque col miglior risultato.
>
> La strategia del secondo sarà sempre un rincorrere per cui alla miglior mossa del primo dovrà sempre togliere i suoi numeri in fila non importa se all'inizio o alla fine o mescolati ma mai in mezzo per non fare il gioco del nemico.
>
> La partita prosegue sempre col primo che toglie alternativamente e col secondo che li toglie in fila, però se quando tocca al primo giocatore rimangono 4 numeri deve cambiare strategia.
>
> Fred col suo fantasioso n=2013 ottiene una differenza di 32.
>
> La premiata ditta R.&R. può fare un 48 utilizzando indifferentemente un enne che va da 769 a 1024.

> Però questo due alla decima e questo due all'ottava per tre più uno avranno una certa importanza.

Certo che tutto ha importanza, non per niente ***Alberto R.*** scrive:

> Chiamiamo Max il giocatore che punta alla massima differenza e gioca per primo, e Mini la giocatrice che punta al minimo. L'obiettivo di quest'ultima è quello di avvicinare gli estremi, quindi taglierà sulle ali, indifferentemente i numeri più grandi o quelli più piccoli. Max invece ha interesse a trasformare l'insieme in una groviera con buchi ben distribuiti e più grandi possibili. A tal fine adotta le seguenti regole.
>
> - **Regola del no/sì**: se il numero di numeri presenti sul foglio è diverso da 4, Max cancellerà i numeri uno no e uno si (*uno no e uno sì* e non *uno sì e uno no* perché, se del caso, deve arrotondare in difetto).
> - **Regola del 4**: se il numero totale delle mosse occorrenti per completare il gioco è dispari, Max, che ha fatto la prima mossa, farà anche l'ultima e può succedere che debba operare su 4 numeri restanti. In tal caso, con l'ultima mossa, Max eliminerà i 2 numeri centrali.
>
> Con la regola del no/sì, ad ogni mossa Max raddoppia la distanza tra due numeri adiacenti, con la regola del 4 la triplica.
>
> Quindi se Max ha fatto M mosse il risultato finale sarà 2^M se non ha avuto modo di applicare la regola del 4, sarà invece $3 \cdot 2^{(M-1)}$ se l'ha applicata.
>
> Facciamo un esempio con N=50, caso in cui si applica la regola del 4.
>
> Max cancella uno no e uno sì e restano i dispari:
>
> 1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49
>
> di questi 25 numeri Mini cancella i 12 più grandi e restano:
>
> 1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25
>
> Max cancella uno no e uno sì e restano:
>
> 1 5 9 13 17 21 25
>
> Mini toglie i 3 numeri sulla destra e restano:
>
> 1 5 9 13
>
> Max, con la regola del 4, cancella i numeri centrali e restano:
>
> 1 13 (Differenza 12)
>
> E i conti tornano perché Max muove 3 volte e con $M = 3$ si ha $3 \cdot 2^{(M-1)} = 12$.
>
> Facciamo un esempio con N=40, caso in cui non si applica la regola del 4.
>
> Max cancella uno no e uno sì e restano i dispari:
>
> 1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39
>
> di questi 20 numeri Mini cancella i 10 più grandi e restano:
>
> 1 3 5 7 9 11 13 15 17 19
>
> Max cancella uno no e uno sì e restano:
>
> 1 5 9 13 17
>
> Mini toglie i 2 numeri sulla destra e restano:
>
> 1 5 9
>
> Max cancella no-sì-no e restano:
>
> 1 9 (Differenza 8)
>
> E i conti tornano perché Max muove 3 volte e con $M = 3$ si ha $2^{(M)} = 8$.
>
> Adesso siamo in grado di rispondere alla due domande.
>
> Con $N = 2013$ la successione del numero di numeri non cancellati è:
>
> (2013) 1007 (504) 252 (126) 63 (32) 16 (8) 4 [2]

> Quelli tra parentesi tonda sono i numeri su cui opera Max, su quelli fuori parentesi opera Mini, sul 2 non opera nessuno perché il gioco è già finito.
>
> In questo caso la regola del 4 non trova applicazione (è vero che nella successione figura il 4, ma fuori parentesi perché in quel momento il gioco è in mano a Mini e non a Max). Poiché $M = 5$ (ci sono 5 numeri tra parentesi tonda), il risultato finale è $2\char`^M = 32$.
>
> Ripetendo il calcolo con $N = 769$ otteniamo:
>
> (769) 385 (193) 97 (49) 25 (13) 7 (4) [2]
>
> In questo caso si applica la regola del 4, ed essendo $M = 5$, abbiamo il risultato finale $3\cdot2\char`^(M–1) = 48 = 1{,}5\cdot 32$ come richiesto dalla seconda domanda.
>
> 769 non è l'unica soluzione: qualunque N tra 769 e 1024 dà risultato 48.
>
> Questa volta con pipe, birre e conigliette siete stati un po' tirchi. Non era mica facilissimo!

Può darsi, ma noi non siamo mica come i perfetti logici e completamente onesti… e se siamo buoni è solo perché è Natale o qualche festa comandata… Vediamo la versione di ***Sawdust***:

> Senza stare a ripetere il testo del quesito, mi pare che per il primo giocatore la migliore strategia sia quella di cancellare al primo turno tutti i numeri pari, il secondo giocatore a questo punto dovrebbe cancellare la metà (eventualmente arrotondata per difetto) dei numeri rimanenti, indifferentemente a partire dall'alto o dal basso. Al passo successivo il primo giocatore cancellerà nuovamente, tra i numeri riordinati in fila crescente, tutti i numeri di posto pari, e il secondo ancora una metà (eventualmente scarsa) a scelta dall'alto o dal basso, e così via.
>
> Giocando in questo modo la prima partita potrebbe finire con la coppia 21 e 53 che danno un risultato finale di 32.
>
> Alla partita successiva i due Rudolph per finire con 48 dovrebbero cominciare con uno qualunque dei numeri compresi tra 3073 e 4096, perché?
>
> Per semplificare la spiegazione successiva ci conviene ragionare sul numero di partenza ridotto di un'unità.
>
> Se rappresentiamo il numero risultante come somma di potenze di 2 (per esempio $37=2^5+2^2+2^0$), dobbiamo cominciare a dividere i numeri in 2 gruppi principali, quelli in cui l'esponente maggiore è pari e quelli in cui questo è dispari; nel primo gruppo la differenza finale sarà $2^{n/2}$, nel secondo gruppo invece, per una parte la differenza finale sarà pari a $2^{(n+1)/2}$, ma quando il secondo esponente maggiore sarà uguale al maggiore – 1, allora la differenza finale sarà $3/2 * 2^{(n+1)/2}$, perché il primo giocatore arriva all'ultimo turno trovandosi 4 numeri, per cui può facilmente abbandonare la strategia seguita fino a questo punto e cancellare i 2 centrali, ottenendo così una differenza maggiore.

Max	Max-1	Sviluppo di Max-1	Fin1	Fin2	Delta
32	31	2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0	5	9	4
33	32	2^5	5	13	8
34	33	2^5 + 1	5	13	8
42	41	2^5 + 2^3 + 2^0	1	9	8
48	47	2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0	1	9	8
49	48	2^5 + 2^4	1	13	12
50	49	2^5 + 2^4 + 2^0	1	13	12
63	62	2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1	1	13	12
64	63	2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0	1	13	12
65	64	2^6	1	9	8
66	65	2^6 + 1	1	9	8
80	79	2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0	1	9	8
81	80	2^6 + 2^4	1	9	8
82	81	2^6+2^4+2^0	1	9	8
100	99	2^6 + 2^5 + 2^1 + 2^0	9	17	8
128	127	2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0	9	17	8
129	128	2^7	9	25	16
160	159	2^7 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0	1	17	16
192	191	2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0	1	17	16
193	192	2^7 + 2^6	1	25	24
2013	2012	2^10 + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2	21	53	32
3072	3071	2^11 + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0	1	65	64
3073	3072	2^11 + 2^10	1	97	96
4096	4095	2^11 + 2^10 + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0	1	97	96
4097	4096	2^12	1	65	64

> Provo a spiegare meglio questa cosa un po' contorta con qualche numero di esempio e considerando che il secondo giocatore cancelli sempre la parte alta della lista (qui sopra).

La stessa cosa si può forse rappresentare meglio utilizzando la notazione binaria, e in questo caso la tabella precedente diventa:

Max	Max-1	Max-1 Binario	Finale1	Finale2	Delta
32	31	11111	5	9	4
33	32	10000	5	13	8
34	33	100001	5	13	8
42	41	101001	1	9	8
48	47	101111	1	9	8
49	48	110000	1	13	12
50	49	110001	1	13	12
63	62	111110	1	13	12
64	63	111111	1	13	12
65	64	1000000	1	9	8
66	65	1000001	1	9	8
80	79	1001111	1	9	8
81	80	1010000	1	9	8
82	81	1010001	1	9	8
100	99	1100011	9	17	8
128	127	1111111	9	17	8
129	128	10000000	9	25	16
160	159	10011111	1	17	16
192	191	10111111	1	17	16
193	192	11000000	1	25	24
2013	2012	11111011101	21	53	32
3072	3071	101111111111	1	65	64
3073	3072	110000000000	1	97	96
4096	4095	111111111111	1	97	96
4097	4096	1000000000000	1	65	64

In questa rappresentazione basta che il numero di cifre binarie sia pari e che le 2 più a sinistra siano 1.

Siete convinti? La versione di ***MBG*** ha qualche analogia:

Una buona strategia per il primo giocatore penso che possa essere quella di cancellare in modo alternato i numeri rimasti: in questo modo ad ogni giro m riesce ad aumentare la massima differenza tra due qualsiasi dei numeri ancora in gioco almeno secondo la progressione 2^m ; dico 'almeno' perché qualunque sia la mossa dell'avversario e il numero di partenza n, questo è il risultato minimo garantito dopo m turni di gioco; può essere migliore se il nostro avversario è scarso.

In pratica, al primo giro cancello tutti i numeri pari e in questo modo la differenza tra due qualsiasi dei rimasti è evidentemente 2 o superiore. Al giro successivo, indipendentemente da quello che ha fatto l'avversario, procedo analogamente, lasciando il più piccolo dei rimasti, cancellando il secondo, lasciando il terzo e così via. Visto che prima la minima distanza era 2, ora diventa 4.

Per quanto riguarda la strategia migliore per il secondo giocatore, credo che sia invece quella di cancellare in sequenza i numeri rimasti dal minore al maggiore o viceversa, in modo da tamponare la situazione.

A questo punto osservo due cose:

- chiaramente, se non ci sono limiti a n, quanto più il numero è alto tanto più il primo giocatore riesce ad ottenere un risultato migliore; quindi direi che il gioco è leggermente sbilanciato a favore del primo giocatore a cui spetta la scelta di n.
- il valore n di partenza ottimale è uno di quelli per cui all'ultima mossa del primo giocatore rimangono esattamente 4 numeri; in questo modo all'avversario non rimangono ulteriori mosse e può tranquillamente cancellare i due che gli consentono di massimizzare il risultato. Se invece si ritrova all'ultima mossa con 5, 6, 7 o 8 numeri (che diventano 3 o 4 dopo la mossa), l'avversario è favorito.

Turno	Giocatore	N
1	F	2013
1	RR	1007
2	F	504
2	RR	252
3	F	126
3	RR	63
4	F	32
4	RR	16
5	F	8
5	RR	4
	fine	2

Se consideriamo la scelta di Fred, vediamo che questo non è avvenuto:

I due Rudolph, al 5° giro rimangono con 4 numeri e cancellando i due più distanti e riescono a terminare il gioco con una differenza massima di $2^5 = 32$.

Se fossero rimasti da 5 a 8 numeri, Fred avrebbe avuto una mossa in più e se non sbaglio si riesce ad arrivare a $2^{m+1} + 2^m$ invece che a 2^m, cioè nel caso di Fred, a 96 invece che 32.

Quindi conviene scegliere sempre $n=2^{2k}$ per assicurarsi questa ulteriore posizione dominante.

Essendo ancora più furbi, si sceglie n nella progressione $S_0=4$, $S_{n+1}=4S_n - 2$, ovvero 4, 14, 54, 214, 854, 3414, etc. In questo modo facciamo proprio gli infami e lasciamo all'avversario sempre un n dispari mentre a noi tocca sempre pari e così ad ogni giro ne possiamo cancellare uno più di lui. eh! eh! eh!

In definitiva, i due Rudolph potrebbero avere scelto 1024 oppure anche 854 e ottenere così un risultato di 48 partendo da un numero molto inferiore a quello di Fred!

Bello aver giocato almeno un paio di versioni di questa partita, vero? Andiamo avanti, che è già molto tardi.

4.3.2 Parlando di TAV

Sono già dieci pagine di soluzioni e chiacchierate, e il problema del mese con più successo non lo abbiamo ancora toccato. Le soluzioni che arrivano adesso, ve lo assicuro, sono divertentissime.

Vediamo che dice il problema:

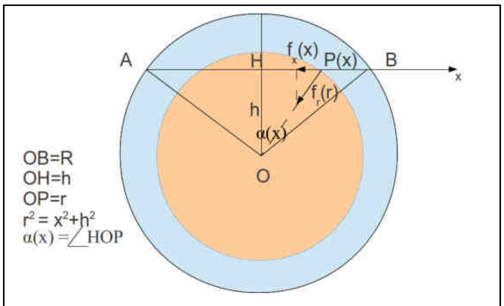
Immaginiamo un tunnel ferroviario tra due città P e T (Paperopoli e Topolinia), sufficientemente distanziate sul globo terracqueo, prendiamo il cerchio massimo passante per le due città e guardiamo l'opportuna sezione del globo; l'idea del tunnel è di farlo coincidente con la corda PT. Supponiamo il nostro treno privo di attriti, partendo da P dovrebbe accelerare per metà percorso, poi rallentare e arrivare a fermarsi in T senza bisogno di frenare.

Nota la distanza d tra P e T sulla superficie del globo, basandosi su un modello a zero consumi e P e T alla stessa altitudine, quanto tempo impiegherà il treno a percorrere il tracciato?

Allacciate le cinture di sicurezza, che saliamo sul treno, e cominciamo con ***Trekker***:

C'è un classico risultato della teoria classica del campo gravitazionale che dice che il campo all'interno di un guscio sferico (con massa distribuita uniformemente sulla superficie della sfera cava) varia, all'esterno, in modo inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro mentre è nullo all'interno.

Immaginando che la Terra sia sferica di raggio R con densità funzione solo della distanza dal centro allora possiamo estendere questo risultato dicendo che il campo in un certo punto interno P della Terra è proporzionale all'inverso del quadrato della distanza r del punto P dal centro e proporzionale alla massa totale della sola sfera "interna" avente come raggio r.



10 *Figura di* ***Trekker***

Ipotizzando che la densità della Terra sia costante, la massa della sfera interna è proporzionale al cubo di r e quindi il campo gravitazionale interno varia linearmente con r: è 0 m/sec² al centro e vale g=9.80665 m/sec² sulla superficie.

Con il significato dei simboli come da figura sopra quindi si ha:

$$f_r(r) = g\frac{r}{R} \quad \text{e} \quad f_x(x) = -f_r(r)\cdot\sin(\alpha(x)) = -g\frac{r}{R}\cdot\frac{x}{r} = -g\frac{x}{R}$$

e l'equazione del moto diventa quella del **moto armonico** ovvero $x''+\frac{g}{R}\cdot x = 0$ di periodo $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$. Posto R=6371005 metri si ottiene T=5064.34 secondi = 84 minuti e 24.34 secondi. <u>Il tempo quindi per andare dalla prima città A alla seconda città B è $T/2$ = 42 minuti e 12.17 secondi.</u>

Per complicarci la vita facciamo l'ipotesi ora che la densità $\delta(r)$ non sia costante ma sia funzione solo della distanza r dal centro della Terra.

Sia $P(x)$ il generico punto interno sulla corda AB. La massa della sfera interna (arancione nella figura) di raggio r vale:

$$M(r)=\int_0^r 4\pi\pi^2\delta(y)dy$$

e quindi il modulo del campo gravitazionale $f_r(r)$ diretto verso il centro vale: $f_r(r)=G\frac{M(r)}{r^2}$, dove G è la costante di gravitazione universale. La componente $f_x(x)$ lungo l'asse x vale:

$$f_x(x)=-f_r(r)\cdot\sin(\alpha(x))=-f_r(r)\frac{x}{r}=-G\frac{M(r)}{r^2}\cdot\frac{x}{r}$$

Cioè in ultima analisi: $f_x(x)=-G\frac{\int_0^r 4\pi\pi^2\delta(y)dy}{r^3}\cdot x=-G\frac{\int_0^{\sqrt{(x^2+h^2)}} 4\pi\pi^2\delta(y)dy}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot x$, quindi l'equazione del moto diventa: $x''+G\frac{\int_0^{\sqrt{(x^2+h^2)}} 4\pi\pi^2\delta(y)dy}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot x=0$, una bella equazione integro-differenziale.

Per verifica ricaviamo l'equazione per densità constante. Otteniamo:

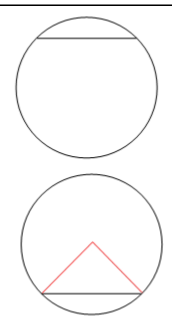
$$x''+G\frac{\int_0^{\sqrt{(x^2+h^2)}} 4\pi\pi^2\delta dy}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot x=x''+G\frac{4\pi\pi}{3}\frac{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot x=x''+G\frac{4\pi\pi}{3}\cdot x$$

L'equazione del moto armonico diventa:

$x''+G\frac{4\pi\pi}{3}\cdot x=0$. Essendo $g=G\frac{\frac{4\pi\pi^3}{3}\delta}{R^2}=G\frac{4\pi\pi}{3}\delta$, ovvero $\delta=\frac{3g}{4\pi\pi R}$, sostituendo δ si ritrova $x''+\frac{g}{R}\cdot x=0$.

Niente male, vero? Che uno senta il bisogno di complicarsi la vita? Secondo in questa sfilata viene ***Sawdust***, ecco la sua soluzione a testa ingiù:

> Non sto a ripetere tutto il testo del problema, e probabilmente non ne darò neanche una soluzione valida, ma mi è subito saltata in testa un'idea balorda che mi ha spinto a fare alcune considerazioni.
>
> Innanzitutto il primo disegno che viene intuitivo fare (almeno a me) è il seguente *[disegno in alto, NdAlice]*: ma perché disegnare il tunnel nella parte alta del cerchio-Terra? Siamo proprio sicuri di essere noi quelli che stanno sopra, e non invece i Maori o i pinguini? Non è che la convenzione sia nata dal fatto che i primi di cui ci sono pervenuti gli studi pensassero più semplice raffigurarsi nella parte superiore piuttosto che raffigurarsi a testa in giù? Spero che qualcuno possa togliermi questo dubbio, comunque da qui è spuntata l'idea di fare il disegno al contrario e quindi eccolo, con una piccola aggiunta: e se considerassimo i 2 raggi rossi come le rappresentazioni estreme del filo di un pendolo, potremmo dire che questo è un treno pendolare?



11 *Figure di **Sawdust***

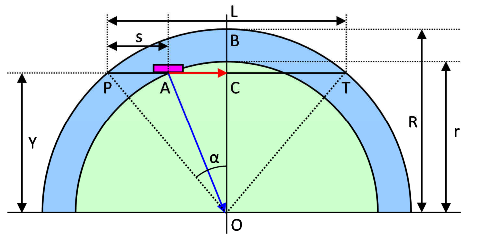
> In fin dei conti quando il treno parte da P è sottoposto ad un'accelerazione che via via si riduce mentre esso si avvicina al punto medio del percorso per poi cambiare di segno e ricrescere (in valore assoluto) durante l'avvicinamento a T.
>
> Se così fosse potremmo anche calcolarne il tempo di viaggio con la formula del periodo del pendolo (formula di Galileo) $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, tenendo presente che questa formula è valida per angoli di oscillazione inferiori ai 4°, che corrispondono ad una distanza tra P e T di circa 444 km, circa Roma-Brescia, che dovrebbe perciò essere percorsa in circa 42 minuti, alla faccia della TAV e del TGV.
>
> Per distanze maggiori andrebbe invece usata la formula più estesa
>
> $$T = 2\pi\sqrt{l/g}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\alpha + \left(\frac{1*3}{2*4}\right)^2 \sin^4\alpha + ...\right]$$
>
> in cui α indica l'elongazione, cioè metà dell'ampiezza di oscillazione.
>
> Però su una distanza di 440 km il punto di massima profondità rispetto alla superficie è a circa 4 km e comporta già una variazione di g pari a circa 12 parti su 10000 e per distanze intorno ai 1300 km (potrebbe essere Roma-Amburgo) la variazione di g è già pari a circa 1/100, quindi non credo di essere in grado di calcolare correttamente quanto richiesto.

Bello vero? Che il numero di minuti sia molto prossimo a 42 in tutte le soluzioni che ci sono pervenute, è senz'altro un buon segno che siamo proprio sulla stessa Terra di cui parlava Douglas Adams. Lo so che dovrei poter scegliere un paio di soluzioni, ma sono tutte talmente belle e colorate! Quella di ***Br1*** è ricca di esperienze personali:

> Visto che è una quindicina d'anni che lavoro per i progetti TAV (cioè sin dagli albori), e che ho sostanzialmente mangiato grazie a questi negli ultimi tre lustri, non ho potuto tirarmi indietro davanti al secondo problema del mese…
>
> Problema che immagino sappiate derivi da una dissertazione di Lewis Carroll, il quale notoriamente si dilettava con pensate di questo tipo; cito dal libro "*Lewis Carroll: enigmi e giochi matematici*", curato da tal John Fisher (brano tratto da "*Silvie e Bruno*"):
>
> […]
>
> Fanno andare i loro treni senza locomotori…, non serve nulla, tranne un macchinario con cui farli *arrestare*. Non è abbastanza stupendo, Milady?
>
> Ma da dove proviene la forza? – osai chiedere.
>
> Mein Herr si girò di scatto per guardare il nuovo interlocutore. Poi si tolse gli occhiali, li pulì, e tornò a guardarmi, evidentemente stupito. Riuscii a capire che stava pensando – come del resto anch'io stavo facendo – che *dovevamo* esserci incontrati prima di allora.
>
> Usano la forza di gravità – disse –. È una forza che conoscete nel *vostro* paese, suppongo.
>
> Ma andrebbe bene per una ferrovia *in discesa* – osservò il conte –. Non è possibile che *tutte* le vostre ferrovie siano in discesa.
>
> Sì, invece, sono *tutte* così – disse Mein Herr.
>
> Da *entrambi* i lati?
>
> Da *entrambi* i lati.
>
> Allora mi arrendo! – Disse il conte.
>
> Può spiegarmene il funzionamento – disse Lady Muriel –, senza usare quel linguaggio che non riesce a parlare correntemente?
>
> Facile – disse Mein Herr –. Ogni ferrovia si trova in un lungo tunnel, perfettamente diritto: così, naturalmente, il suo *centro* è più vicino al centro della Terra delle sue due estremità: ogni treno perciò percorre metà del tragitto *in discesa*, e questo gli dà sufficiente spinta per andare *in salita* per l'*altra* metà.
>
> Grazie. Capisco perfettamente – disse Lady Muriel –. Ma la velocità, al *centro* del tunnel, deve essere qualcosa di *spaventoso*!
>
> […]

E quindi scordatevi di poter brevettare il treno a gravità…

Per analizzare il problema, consideriamo la figura che segue:



12 *Figura* 1 *di* ***Br1**: da Paperopoli a Topolinia*

Il treno fucsia[22] parte da P (dove s=0), e deve raggiungere T, quando si ha s=L. Assumiamo che i dati noti ed i presupposti del problema siano i seguenti:

- d, distanza fra P e T, misurata in Km sull'arco di circonferenza PBT
- R, raggio della Terra, pari a 6.371 Km; la Terra si suppone perfettamente sferica, e non oblatamente sferoidale come in realtà
- ρ, densità media della Terra, pari a 5,515 g/cm^3; ancora, per la Terra adottiamo l'ipotesi semplificativa che la densità sia costante ovunque, a qualsiasi profondità, latitudine e longitudine
- m, massa complessiva del treno fucsia. Il treno, seppur rappresentato in forma rettangolare, si suppone sia puntiforme[23]
- G, costante di gravitazione universale, pari a $6{,}674 \cdot 10^{-11}$ m^3/(kg $\cdot$s^2)

vale la *fisica classica newtoniana*; si trascureranno effetti relativistici e quantistici e si trascurerà infine anche l'effetto *Coriolis*…

Cominciamo col calcolare L, lunghezza del tunnel rettilineo fra P e T. Dalla Figura 1, osservando che la lunghezza del segmento OP è pari ad R si vede facilmente che:

$$1)\quad L = 2\, R \sin \alpha$$

Il valore di α si può ricavare dalla proporzione che segue (*la lunghezza della semicirconferenza terrestre sta all'angolo che la sottende,* $\boldsymbol{\pi}$*, come la distanza curvilinea* **d** *fra* ***P*** e ***T*** *sta all'angolo che la sottende,* 2α):

$$2)\quad \frac{R\pi}{\pi} = \frac{d}{2\alpha}$$

Quindi:

$$3)\quad \alpha = \frac{d}{2R}$$

e allora, dalle 1) e 3):

$$4)\quad L = 2R \sin\left(\frac{d}{2R}\right)$$

Ora, si desidera ricavare r (distanza generica del treno fucsia dal centro O della Terra, cioè la lunghezza del segmento AO) in funzione della distanza generica s percorsa dal treno stesso nel corso del suo viaggio. Valutiamo preliminarmente Y, distanza (costante, per come è costruita la Figura 1) del treno fucsia dalla linea dell'equatore. Osservando il triangolo rettangolo OPC si ricava che:

$$5)\quad Y = R \cos\left(\frac{d}{2R}\right)$$

Adesso, il valore di s è dato dalla differenza fra le lunghezze dei segmenti PC ed AC; l'estensione di quest'ultimo si ottiene dal Teorema di Pitagora, applicato al triangolo OAC. Quindi:

[22] Declino ogni responsabilità circa la colorazione del treno, che è stata scelta all'unanimità da una Commissione interprovinciale formata da Minni, Clarabella, Paperina e Brigitta.

[23] In realtà, questo dato è ininfluente ai fini della risoluzione del problema

$$6)\ s=\frac{L}{2}-\sqrt{r^2-Y^2}=R\sin\left(\frac{d}{2R}\right)-\sqrt{r^2-R^2\cos^2\left(\frac{d}{2R}\right)}$$

Rimescolando un po' la 6) si ricava:

$$7)\ r^2=R^2+s^2-2Rs\sin\left(\frac{d}{2R}\right)$$

Ora, abbandoniamo le considerazioni geometriche e trigonometriche e rivolgiamoci a quelle fisiche; nel corso del suo moto, il treno fucsia è soggetto alla legge di Newton:

$$8)\ F=ma$$

Nella 8), *m* è la massa del treno fucsia, *a* l'accelerazione subita dal treno, cioè:

$$9)\ a=\frac{d^2s}{dt^2}$$

ed *F* è la risultante delle forze alle quali il treno fucsia è sottoposto.

In assenza d'attrito e di motori[24], l'unica forza che agisce sul treno nel corso del suo viaggio è quella presupposta dalla *Legge di Gravitazione Universale*, e cioè:

$$10)\ F=G\frac{M_r m}{r^2}$$

Ma, attenzione! Vi sono due *aspetti notevoli* da tenere in conto nella 10): in primo luogo, la massa della Terra M_r che agisce sul treno fucsia non è l'*intera* massa del nostro globe terracqueo, ma solo la parte contenuta nella sfera di raggio variabile *r* su cui si appoggia il treno fucsia nel suo percorso, cioè la sfera illustrata in verde (in sezione) nella Figura 1. La sfera cava in azzurro nella stessa Figura 1, di spessore *R–r*, fornisce un contributo nullo alla forza complessiva agente sul treno fucsia e quindi alla sua accelerazione[25].

La massa parziale terrestre M_r efficace per il moto del treno fucsia si può ricavare come aliquota della massa complessiva della Terra (sia questa *M*), pesata in funzione del rapporto dei volumi della sfera verde residuale e della sfera terrestre complessiva (si ricorda che si è assunta densità ρ costante per la distribuzione di massa nella Terra); quindi:

$$11)\ M_r=M\frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{\frac{4}{3}R^3\pi}=M\frac{r^3}{R^3}$$

Il secondo *aspetto notevole* è il fatto che il nostro treno fucsia è *vincolato* a percorrere la galleria fra Paperopoli e Topolinia in *orizzontale* (almeno secondo la rappresentazione della Figura 1). Il suolo della galleria è stato progettato da ingegneri civili di prim'ordine, e non cede di un millimetro nemmeno sotto le considerevoli sollecitazioni della massa *m* del treno fucsia. È un perfetto rettilineo, o almeno così si assume.

Ciò vuol dire che la forza complessiva *F* espressa dalla 10) non può esercitarsi secondo la sua naturale tendenza (il vettore blu della solita Figura 1), ma deve ridursi a spingere il treno fucsia lungo la traiettoria prestabilita (il vettore rosso della stessa Figura 1): cioè quel che conta davvero è la sola componente F_X dell'intera forza *F* data dalla 10) lungo la direzione orizzontale. Questa componente

[24] Si assume, come richiede il quesito, che il treno fucsia possa viaggiare *gratis:* non è quindi dotato di motori di alcun tipo, o quantomeno questi sono disattivati. Non ho alcuna intenzione di pedalare come la nota 9 di RM176 minaccia…

[25] Si lascia all'attento lettore la dimostrazione di questo assunto.

è data dalla forza complessiva fornita dalla 10), e poi pesata secondo il rapporto fra le lunghezze dei segmenti *AC* ed *AO* nella solita Figura 1:

$$12)\quad F_x = G\frac{M_r m}{r^2}\frac{\sqrt{r^2 - Y^2}}{r}$$

Utilizzando le 5), 7) e 11), dopo qualche passaggio si arriva alla seguente relazione:

$$13)\quad F_x = G\frac{Mm}{R^3}\left[R\sin\left(\frac{d}{2R}\right) - s\right]$$

Allora, dalle 8), 9) e 13):

$$14)\quad G\frac{Mm}{R^3}\left[R\sin\left(\frac{d}{2R}\right) - s\right] = m\frac{d^2 s}{dt^2}$$

Adesso poniamo:

$$15)\quad \begin{cases} c_1 = G\dfrac{M}{R^3} \\ c_2 = G\dfrac{M}{R^2}\sin\left(\dfrac{d}{2R}\right) \end{cases}$$

Poi, considerando che la densità della Terra è data da:

$$16)\quad \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}R^3\pi}$$

le 15) possono essere così espresse:

$$17)\quad \begin{cases} c_1 = \dfrac{4}{3}G\pi\rho \\ c_2 = \dfrac{4}{3}GR\pi\rho\sin\left(\dfrac{d}{2R}\right) \end{cases}$$

e quindi c_1 e c_2 sono due costanti espresse in funzione dei dati iniziali del problema, indipendenti dal moto del treno fucsia. Sostituendo nella 14), questa diviene:

$$18)\quad \frac{d^2 s}{dt^2} + c_1 s = c_2$$

La 18) è un'equazione differenziale lineare non omogenea, di secondo grado; dagli ormai appannati ricordi universitari, una tale equazione ammette soluzione data dalla somma dell'*IGOA* e dell'*IPED*. Dove *IGOA* sta per *Integrale Generale dell'Omogenea Associata*, ed *IPED* per *Integrale Particolare (qualsiasi) dell'Equazione Differenziale*.

Cominciamo *dall'Omogenea Associata* alla 18), che è la seguente:

$$19)\quad \frac{d^2 s}{dt^2} + c_1 s = 0$$

Per risolverla, si ipotizza che esistano soluzioni del tipo:

$$20)\quad s(t) = e^{pt}$$

dove p è un'arbitraria costante complessa, da determinarsi. Derivando due volte la 20), e sostituendo nella 19) si ha:

$$21)\quad e^{pt}\left(p^2 + c_1\right) = 0$$

Poiché l'esponenziale nella 21) non può mai annullarsi, deve necessariamente essere:

$$22)\quad p = \pm\sqrt{-c_1} = \pm j\sqrt{c_1}$$

e quindi:

$$23)\ \ s(t)=e^{\pm j\sqrt{c_1}t}=\cos\left(\sqrt{c_1}t\right)\pm j\sin\left(\sqrt{c_1}t\right)$$

La 23) fornisce due soluzioni particolari della 19); la soluzione generale è data dalla combinazione lineare di funzioni analoghe alla 23). Ad esempio:

$$24)\ \ s(t)=k_1\cos\left(\sqrt{c_1}t\right)+k_2\sin\left(\sqrt{c_1}t\right)$$

dove k_1 e k_2 sono costanti da determinarsi in funzione di condizioni iniziali o al contorno, dettate da vincoli di tipo fisico.

Passiamo adesso all'*IPED*: si vede facilmente che la 18) è soddisfatta scegliendo *s(t)* pari alla costante c_2/c_1, per cui la soluzione generale della 18) è la seguente:

$$25)\ \ s(t)=k_1\cos\left(\sqrt{c_1}t\right)+k_2\sin\left(\sqrt{c_1}t\right)+\frac{c_2}{c_1}$$

Adesso, la determinazione di k_1 e k_2 dipende dalle scelte che vogliamo fare circa le condizioni iniziali relative al viaggio del treno fucsia; le più semplici possibili di tali condizioni prevedono che il treno all'istante t=0 si trovi esattamente a Paperopoli, e che parta da fermo. Cioè:

$$26)\ \ \begin{cases} s(t)\big|_{t=0}=0 \\ \left.\dfrac{ds(t)}{dt}\right|_{t=0}=0 \end{cases}$$

Derivando la 25) si ha:

$$27)\ \ \frac{ds(t)}{dt}=-\sqrt{c_1}k_1\sin\left(\sqrt{c_1}t\right)+\sqrt{c_1}k_2\cos\left(\sqrt{c_1}t\right)$$

Imponendo la seconda delle 26) nella 27), si ricava facilmente che k_2 è nullo. Tornando alla 25), ed imponendo la prima delle 26) in essa si ha:

$$28)\ \ s(0)=k_1+\frac{c_2}{c_1}\Rightarrow k_1=-\frac{c_2}{c_1}$$

Per cui, finalmente, l'equazione che descrive il moto del treno fucsia da Paperopoli a Topolinia è data da:

$$29)\ \ s(t)=\frac{c_2}{c_1}\left[1-\cos\left(\sqrt{c_1}t\right)\right]$$

e, ricordando le 17):

$$30)\ \ s(t)=R\sin\left(\frac{d}{2R}\right)\left[1-\cos\left(\sqrt{\frac{4}{3}G\pi\rho}t\right)\right]$$

La 30) mostra che il treno fucsia, piazzato da fermo in Paperopoli all'istante t=0, oscillerà indefinitamente avanti e indietro sul percorso Paperopoli-Topolinia, con un periodo dato da:

$$31)\ \ T=\frac{1}{f}=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4}{3}G\pi\rho}}=\sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

Il solo percorso di andata (o di ritorno) di un singolo viaggio sarà allora pari a (convertendo opportunamente le unità di misura):

$$32)\ \ \frac{T}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}=\sqrt{\frac{3\pi}{4\cdot 6{,}674\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}515\frac{0{,}001}{0{,}01^3}}}\approx 2.530''=42'10''$$

La prima cosa sorprendente di questo risultato è che il tempo di viaggio non dipende dalla distanza fra le località di partenza e di arrivo! Cioè, ovunque piazziamo Paperopoli e Topolinia sulla Terra, la durata del viaggio sarà sempre la stessa! Se scaviamo un tunnel perfettamente orizzontale nel nostro giardino, lungo ad esempio un metro, una formica priva di attrito posta ad uno dei due estremi del foro spunterà fuori dall'altro estremo dopo 42 minuti e spiccioli, esattamente come il famoso sasso che attraversasse l'intera Terra passando per il centro!

La seconda cosa interessante è che la durata del viaggio dipende esclusivamente dalla densità del pianeta su cui (o meglio, *in* cui) esso si svolge. Quindi, se prendessimo una sfera di materiale terrestre (di qualsiasi dimensione) dal nostro giardino, e la portassimo nello spazio interstellare, lontana da perturbazioni gravitazionali, la stessa avventurosa formica di cui sopra attraverserebbe ancora in 42'10" un qualsiasi cunicolo rettilineo praticato fra due punti a piacimento della superficie della sfera…

Parrebbe che la Terra sia il corpo celeste (noto) più denso del Sistema Solare; quindi, future colonizzazioni di altri pianeti, satelliti o asteroidi dovranno tenere in conto che i trasporti a gravità extraterrestri saranno necessariamente più lenti che qui da noi…

Mentre, come visto, il tempo di percorrenza è costante in tutte le condizioni, ciò che invece cambia significativamente è la velocità del treno fucsia al variare del tragitto. La velocità di picco viene raggiunta a metà percorso, nel punto C della Figura 1, cioè quando il tempo di viaggio è pari alla metà di quello espresso dalla 32). Ricordando la 27), e sostituendo in essa i valori di k_1, k_2, c_1 e c_2 si ha:

$$33)\quad v(t)=\frac{ds(t)}{dt}=R\sqrt{\frac{4}{3}G\pi\rho}\,\sin\left(\frac{d}{2R}\right)\sin\left(\sqrt{\frac{4}{3}G\pi\rho}\,t\right)$$

Con il suddetto valore di t risulta:

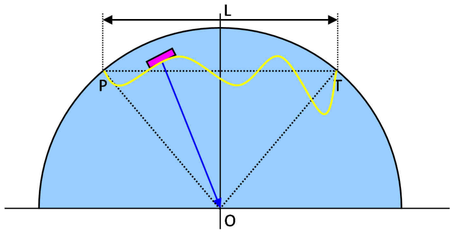
$$34)\quad v\Big|_{Picco}=R\sqrt{\frac{4}{3}G\pi\rho}\,\sin\left(\frac{d}{2R}\right)$$

Come ci si poteva aspettare, la velocità di picco del treno fucsia è massima quando Paperopoli e Topolinia si trovano agli antipodi, cioè quando $d=\pi R$; in tal caso, risulta, all'attraversamento del centro della Terra:

$$35)\quad v\Big|_{PiccoMax}=R\sqrt{\frac{4}{3}G\pi\rho}\,\sin\left(\frac{\pi R}{2R}\right)=6{,}371\cdot 10^{6}\sqrt{\frac{4}{3}6{,}674\cdot 10^{-11}\pi\cdot 5{,}515\,\frac{0{,}001}{0{,}01^{3}}}\approx 7.911\,\frac{m}{s}\approx 28.480\,\frac{\text{Km}}{\text{h}}$$

Ed è questa la *velocità spaventosa* paventata da Lady Muriel nel racconto di Carroll…

Come considerazione finale, direi che il treno a gravità dovrebbe poter funzionare *gratis* anche se il percorso da P a T non fosse rettilineo, ovviamente sempre in assenza di attriti… Ad esempio, un treno che si muovesse lungo il percorso in giallo della Figura 2, perderebbe sì velocità nelle salite, ma ne riguadagnerebbe a sufficienza nelle discese… Unico vincolo dovrebbe essere quello di non riemergere mai in superficie durante il tragitto; naturalmente cambierebbero di caso in caso i tempi di percorrenza, che non sarebbero più costanti. Il treno a gravità potrebbe trovare applicazione pratica ad esempio nel progetto illustrato qui: [http://www.regione.sicilia.it/turismo/trasporti/arcdocumenti/2003/tunnel%20Sicilia Tunisia.pdf](http://www.regione.sicilia.it/turismo/trasporti/arcdocumenti/2003/tunnel%20SiciliaTunisia.pdf)



13 *Figura 2 di* ***Br1****: da Paperopoli a Topolinia, sulle montagne russe…*

Bellissimo, vero? Il Capo è stato soprattutto colpito dalla citazione della sua opera preferita di Carroll e del fatto che ancora una volta qualcuno ha capito al volo che cosa ha letto lui quest'estate. Ed è stato molto deluso che nessuno, nemmeno ***Zar***, abbia capito qual era il nome dello Stato in cui si trovavano Paperopoli e Topolinia: nello scorso millennio (zona primissimi anni '60) era comparso il racconto "Topolino imperatore della Calidornia", dove Tony Toponi (come lo chiamavano all'ospizio: precedentemente noto come Billy the Rat) regalava a Topolino l'atto che lo dichiarava imperatore della Calidornia. Che scadeva dopo poche ore.

Tornando al problema, l'idea di esplorare la possibilità di percorsi alternativi è venuta in mente anche a ***Franco57***:

> La domanda naturale che viene fuori a questo punto, ma che non sono riuscito a risolvere, è quale forma dovrebbe avere il tracciato per minimizzare il tempo di percorrenza, cioè quale è in questo caso la brachistocrona. Si sa che in un campo gravitazionale costante la risposta è la cicloide. Per il campo gravitazionale in una sfera omogenea alla fine ho scovato in rete questo stupendo articolo dell'università del Nevada: http://www.physics.unlv.edu/~maxham/gravitytrain.pdf. Esso mostra che si tratta dell'ipocicloide, seguendo la quale un treno da New York a Los Angeles impiegherebbe assai meno, solo 27.43 minuti.

Ci dobbiamo fermare qui, purtroppo, anche se le soluzioni di ***MBG***, ***Alberto R.***, ***Carlo V*** e ***Luca*** avrebbero altrettanto diritto ad essere pubblicate, siamo già troppo in ritardo, è proprio ora di smetterla. Al mese prossimo, continuate così!

5. Quick & Dirty

Sempre da Doc, con i suoi Veritieri e Mentitori. questa volta, oltre a queste due categorie, ne avete anche una terza, gli Alternati: questi rispondono una volta il vero e la volta successiva il falso. Con il minimo numero di domande, come fate a stabilire a che categoria appartiene una persona?

6. Pagina 46

PROBLEMA 1: Dalla diseguaglianza abbiamo:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{a_i}\right)^2\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{1}{a_i}}\right)^2\right]\leq\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{a_i}\sqrt{\frac{1}{a_i}}\right)^2=n^2,$$

che porta al risultato richiesto, e verifica che si ha l'uguaglianza solo per $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Notiamo che essendo la media aritmetica di n numeri sempre maggiore o uguale alla loro media geometrica e quest'ultima sempre maggiore o uguale alla media armonica, possiamo scrivere:

$$A(a_i) \leq H(a_i)$$

Il che implica:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \leq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}},$$

che porta al risultato richiesto.

Si verifica poi facilmente che $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ porta all'uguaglianza.

PROBLEMA 2: Notiamo che, senza utilizzare la diseguaglianza in oggetto, questo problema può essere risolto per altre vie, come fatto in BJ di RM152.

Dalla diseguaglianza si ha che:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i \cdot 1)\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a^2{}_i\right) \cdot (1+1+\ldots+1)$$

Da cui si ottiene:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a^2{}_i}{n}.$$

e l'uguaglianza segue per $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

7. Paraphernalia Mathematica

Avevamo grossi dubbi su come intitolare questo pezzo, ma alla fine abbiamo optato per la via più tradizionale: i titoli rifiutati li trovate sparsi in questa introduzione.

Si parva licet è espressione che ci è sempre piaciuta molto, in quanto permette di giustificare paragoni apparentemente paradossali. Data questa premessa, non vediamo molte differenze tra noi e Martin Gardner.

Cercare di rendere la matematica comprensibile e interessante, attraverso il gioco o problemi, come ama dire Doc, "de-matematizzati": tutto qui. E sia MG che noi (lui in atto, noi in potenza: tranquilli, non è un commiato) abbiamo tirato avanti per lungo tempo (a costo di ripeterci, tranquilli, abbiamo intenzione di andare avanti il più a lungo possibile): l'obiezione che "lui ha cominciato prima" (ci pare di ricordare che il mitico articolo sugli esaflexagoni sia contemporaneo dei primi vagiti di Rudy: importanti storici della matematica considerano questa coincidenza non casuale) la rifiutiamo a priori, in quanto altrimenti la paternità del tutto andrebbe riconosciuta a Hunk (l'inventore dell'addizione) e Wunk (formalizzatore del concetto di "riporto"), quando stabilirono che con due mammut e cinque orsi c'era da nutrire e vestire il villaggio per tutta la stagione fredda.

Tutt'altro discorso se cerchiamo le differenze tra noi quattro (AR, MG, PRS, RdA, in rigoroso ordine alfabetico per nome) e i matematici "seri": noi (gli stessi quattro di prima) non abbiamo fatto altro che prendere concetti scritti da altri e rielaborarli in modo tale da renderli interessanti. In tutti e quattro manca, a quanto pare, quella parte di "originale contributo alla conoscenza" che rappresenta il *sine qua non* del lavoro del matematico "serio".

Sbagliato.

Attraverso passaggi sui quali preferiamo sorvolare (esiste l'estradizione per il furto da prestito di biblioteca? Il gesto criminoso dovrebbe essere avvenuto nel Kansas verso la fine del 1977. Prescrizione? O dobbiamo chiedere la grazia?) siamo venuti in possesso di un libro nel quale, al capitolo terzo, compare l'*originale contributo alla conoscenza* di uno dei quattro tizi nominati sopra.

È con commozione mista ad orgoglio che pubblichiamo l'articolo inedito in Italia nel quale vengono esaurientemente spiegate le ricerche originali di un nostro *giovane* collaboratore di oltreoceano.

7.1 Un diagramma di rete per il calcolo proposizionale

Cap. 3 di:
M. GARDNER, *Logic Machines and Diagrams,*
McGraw-Hill, N.Y., 1958

I diagrammi di Venn e gli altri metodi di calcolo basati sull'intersezione tra figure possono, come abbiamo visto nel capitolo precedente[26], essere utilizzati per risolvere problemi nell'ambito del calcolo proposizionale. Per molti versi, però, la loro applicazione a questo tipo di logica è goffa e manca di quella che Peirce chiamava "iconicità" – la corrispondenza formale con la struttura logica per la quale intendono essere un aiuto visivo. Questo è comprensibile in quanto questi metodi diagrammatici erano stati inizialmente concepiti per la logica delle classi. Se vogliamo utilizzarli nell'ambito di problemi di calcolo della verità di affermazioni, dobbiamo prima trasformare il problema in termini di logica delle classi prima che il programma assuma un aspetto iconico. È possibile visualizzare le affermazioni del calcolo proposizionale in modo tale che il

[26] M. GARDNER, Logic Machines and Diagrams, McGraw-Hill, NY, 1958, Capitolo 2: Logic Diagrams.

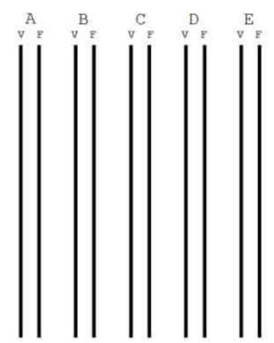
diagramma evidenzi più direttamente la struttura formale delle relazioni secondo valori di verità?

Nel 1951 mi sono imposto il piacevole compito di tentare la definizione di un sistema di questo genere. Dopo aver provato diversi approcci, ho infine trovato il metodo di rete che forma l'argomento del presente capitolo. Esso non ha l'intenzione di competere con l'efficienza dei metodi algebrici o delle tavole di verità ma ciò nonostante possiede, secondo me, alcuni meriti nell'aiutare i principianti come me nel visualizzare la struttura dei valori di verità e nel comprendere meglio il metodo matriciale di analisi. Inoltre, fornisce una via molto semplice per verificare i risultati ottenuti attraverso altri metodi: non ho dubbi che possa essere ampiamente migliorato, e forse catturerà l'attenzione di qualche lettore che, divertendosi, potrà eliminare i suoi difetti principali e renderlo più elegante.

Il più irritante inconveniente dei diagrammi di Venn, quando applicati nell'ambito del calcolo proposizionale, è la difficoltà nel separare tra di loro le premesse l'una dall'altra nel diagramma in modo tale da poterle analizzare separatamente o modificarle come si desidera. Questo può essere fatto utilizzando fogli di carta trasparente (colorando la zona corrispondente ad ogni premessa su un foglio differente) ma in questo modo è facilissimo commettere errori, e la procedura non è evidentemente applicabile in un'aula attraverso gesso e lavagna. Il metodo a rete che spiegheremo in seguito richiede solo carta e matita (o gesso e lavagna) e visualizza la serie delle premesse in modo tale che la struttura di ogni singola premessa è visivamente separata dalle altre. Questo rende possibile esplorare visivamente ogni desiderata porzione della struttura in un modo che è decisamente più complicato se ci limitiamo ai diagrammi di Venn. Essenzialmente, il metodo è l'analogo geometrico delle tavole o matrici di verità per il calcolo della logica proposizionale, e la sua iconicità fornisce un notevole aiuto nel comprendere la natura della logica matriciale.

Come in tutti i metodi analizzati sinora[27], anche questo metodo è topologico, sfruttando le proprietà di connessione di una rete lineare disegnata in modo tale che la rete medesima diventi isomorfa alla struttura logica sotto esame. Che il calcolo proposizionale possa essere tradotto nella teoria delle reti è ampiamente noto da almeno due decenni, in quanto ha giocato un ruolo fondamentale nella progettazione dei grandi calcolatori e, come vedremo in seguito[28], delle macchine logiche elettriche. Ma per quanto mi risulta, questo è il primo tentativo di costruzione di un analogo al calcolo delle reti abbastanza semplice da poter essere efficacemente utilizzato su lavagna o su carta per risolvere problemi a valori di verità.

Il primo passo per la visualizzazione di un problema consiste nel rappresentare ogni termine per mezzo di due linee parallele verticali che rappresentano i due possibili valori di verità del termine: per convenzione la linea sulla sinistra rappresenta il valore "vero", e quella sulla destra "falso". Se ci sono, ad esempio, cinque variabili coinvolte, partiremo da un grafico come quello mostrato nella prima figura: un'asserzione semplice sul valore di verità di una variabile verrà invece indicata da una croce sull'opportuna linea, come indicato nella seconda figura[29].

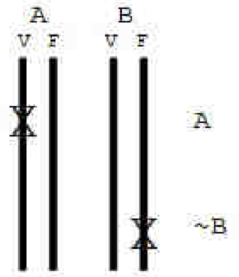


14 *Schema di partenza (5 variabili).*

[27] *Ibidem*, Capitoli 1 e 2: sono analizzati I metodi di calcolo di Lullo, Venn, DeMorgan e Hamilton, assieme ad altri sostanzialmente equivalenti *[NdT]*.

[28] *Ibidem*, Capitolo 8: *Electrical Logic Machines*.

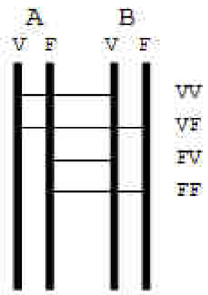
[29] Nella scrittura delle espressioni logiche, manterremo sin dove è possibile la stessa notazione di Gardner *[NdT]*.



1 *Le affermazioni "A è vero" e "B è falso".*

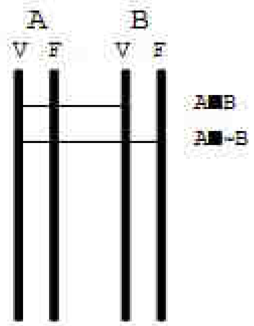
Le dichiarazioni che esprimono una relazione tra due termini sono indicate da una, due o tre linee orizzontali che connettono la linea rappresentante l'opportuno valore logico di una variabile con la linea rappresentante l'opportuno valore logico dell'altra variabile. Queste linee orizzontali verranno indicate con il nome di "navette"[30]. È necessario dare loro un qualche nome e questo sembra particolarmente appropriato in quanto nella risoluzione di un problema, come vedremo, vedremo traghettati avanti e indietro da queste linee nello stesso modo in cui la navetta della Quarantaduesima Strada a Manhattan ci traghetta avanti e indietro tra le fermate della metropolitana della Settima e di Lexington.

Si vede dalla figura che possiamo tracciare solo quattro tipi di navette che connettano due termini, come mostrato in figura a fianco.



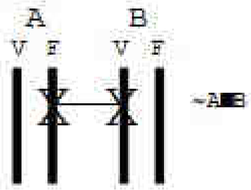
2 *Navette possibili.*

Queste quattro navette corrispondono alle quattro righe di una tavola di verità per due termini: esse connettono "vero" con "vero", "vero" con "falso", "falso" con "vero" e "falso" con "falso". Se ora vogliamo indicare una relazione funzionale tra i due termini, dobbiamo semplicemente eliminare la navetta o le navette che rappresentano combinazioni non valide dei valori di verità. O, posta in un modo equivalente, lasciare solo le navette che indicano le combinazioni ammesse.



3 *La relazione di congiunzione AND.*

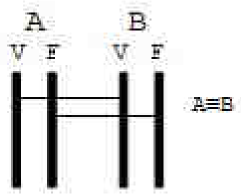
Per illustrare questo, consideriamo la relazione di congiunzione "e" (AND), che indichiamo con"■": solo una linea della tavola di verità assume il valore "vero" per questa relazione e quindi tracceremo una sola navetta, come mostrato nella figura[31].



4 *Premessa completa.*

Se la relazione di congiunzione è isolata come premessa completa (ossia se non è parte di una dichiarazione più complessa), definisce univocamente il valore di verità di ciascuno dei suoi termini: in questi casi, apporremmo immediatamente la croce ai terminali dell'opportuna navetta, come indicato in figura.

Se, invece, la relazione di congiunzione fa parte di una dichiarazione più complessa, non possiamo aggiungere le croci, in quanto non abbiamo modo di sapere se la relazione è di per sé vera o falsa: questo sarà più chiaro in seguito, quando tratteremo i grafici delle dichiarazioni composte.

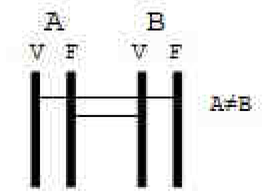


5 *La relazione di equivalenza.*

La dichiarazione biunivoca, o di equivalenza (indicata da "≡"), richiede due navette: nel linguaggio ordinario è espressa dalla frase "se e solo se A è vera, allora B è vera", e la sua tavola di verità ha solo due linee valide, VV e FF; quindi, viene rappresentata come indicato in figura.

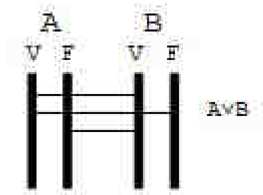
30 *Shuttles* nell'originale.

31 Come si vede, Gardner traccia qui in realtà *due* relazioni: "A e B" e "A e non-B" *[NdT]*



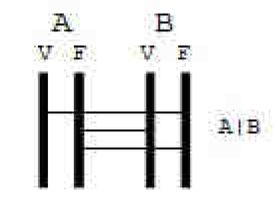
6 *Non equivalenza.*

Le due navette indicano chiaramente che se (per insistere sulla metafora della metropolitana) stiamo percorrendo la linea V di A, abbiamo un'unica navetta in grado di portarci su B, e ci porterà sulla linea V; nello stesso modo, se stiamo percorrendo la linea F di A potremo raggiungere attraverso la navetta solo la linea F di B, e lo stesso schema funziona se da B cerchiamo di raggiungere A. In altre parole, se un termine è vero, l'altro deve essere vero, e se un termine è falso l'altro deve essere falso. Anche la relazione di non equivalenza (o XOR o or esclusivo, indicata da ≠[32]) è espressa da due navette, come indicato nella figura: il diagramma mostra già al primo sguardo che se un termine è vero l'altro deve essere falso, e viceversa. Inoltre, il confronto tra le due ultime figure mostra un fatto interessante: ogni diagramma è costruito attraverso le navette *assenti* nell'altro diagramma, e questo ci indica che una relazione è la negazione dell'altra. Esattamente come la trasformazione di una relazione rappresentata da un diagramma di Venn nella sua complementare avviene scambiando le aree bianche e nere[33], possiamo in questo metodo effettuare la stessa trasformazione cancellando tutte le navette che sono presenti e sostituendole con tutte quelle che sono assenti.



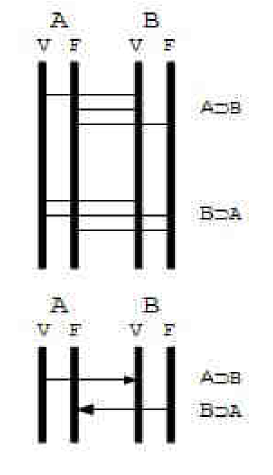
7 *Disgiunzione.*

La relazione di disgiunzione (OR o or inclusivo, indicata da ∨) richiede tre navette, e l'analisi della figura che la rappresenta mostra che si tratta della negazione della relazione ~A■~B.



8 *La relazione di Strokes.*

La relazione "A e B non sono entrambi veri" (più formalmente, anche se grammaticalmente non corretto, "non sia A che B sono veri"), nota anche come relazione (o simbolo) di Sheffer, e indicata con il simbolo A|B, essendo la negazione della relazione A■B richiede anch'essa tre navette, come si vede in figura.



9 *Dichiarazione condizionale.*

La dichiarazione "Se... allora...", o dichiarazione condizionale, indicata dal simbolo ⊃, richiede anch'essa tre navette *[Nota di Gardner: Tutte le funzioni binarie che richiedono tre navette possono essere ridotte a due navette "a senso unico" utilizzando frecce indicanti che funzionano in un'unica direzione, come indicato nella parte bassa della figura. In alcuni casi, questo è un metodo molto efficiente, ma non viene utilizzato nel seguito in quanto causa notevoli complicazioni e riduce l'iconicità del sistema. Ciò nonostante, nella costruzione di circuiti logici elettrici queste navette "a senso unico" (i circuiti vengono resi a senso unico per mezzo di relé o di apparati elettronici) giocano un ruolo molto importante]*. Contrariamente alle relazioni precedenti, non è simmetrica: infatti il diagramma ha due forme, in funzione di quale termine implica l'altro: queste due forme sono indicate nella parte alta della figura a fianco.

Le navette indicano chiaramente che A⊃B è la negazione di A■~B e che B⊃A è la negazione di ~A■B. I diagrammi sono ottimo materiale espositivo per evidenziare i cosiddetti paradossi dell'implicazione materiale: la dichiarazione "A implica B" non ha nessun significato nel calcolo

[32] Non ci risulta disponibile il carattere utilizzato da Gardner (la relazione di equivalenza barrata verticalmente), che sostituiamo con questo simbolo.

[33] Gardner qui si riferisce alla tecnica descritta in *ibidem*, Capitolo 2, di indicare in nero nel diagramma di Venn le zone che soddisfano la relazione, lasciando in bianco le zone che non la soddisfano: scambiare tra di loro i colori evidentemente genera il complemento della relazione di partenza.

proposizionale se non quello indicato dal diagramma, ossia che tutte le combinazioni di valori di verità sono ammesse tranne $A\blacksquare{\sim}B$. Quindi, se A e B sono due proposizioni qualsiasi, vediamo che ogni proposizione vera (A) può solo implicare un'altra proposizione vera (B), in quanto solo una navetta si diparte dalla linea V di A. D'altra parte, sono due le navette che si dipartono dalla linea F di A, mostrando quindi che ogni proposizione falsa (${\sim}A$) può implicare qualsiasi proposizione, sia essa vera (B) o falsa (${\sim}B$). Nello stesso modo, le due navette che si dipartono dalla linea V di B ci mostrano che ogni proposizione vera (B) può essere implicata da ogni proposizione, vera o falsa (A o ${\sim}A$), mentre la singola navetta terminante sulla linea F di B indica che una proposizione falsa (${\sim}B$) può essere implicata solo da un'altra proposizione falsa (${\sim}A$). Il carattere paradossale di affermazioni come "Se l'erba è rossa, allora Shakespeare ha scritto l'Amleto" scompare nel momento stesso in cui ci rendiamo conto che il "se... allora..." dell'implicazione materiale ha un significato diverso nel calcolo proposizionale rispetto al parlare comune: non intende stabilire una relazione causale tra le due proposizioni, ma solo definire quali combinazioni di valori V e F sono permessi dalla relazione.

A questo punto, abbiamo coperto tutte le funzioni binarie per le quali esiste un'espressione nel linguaggio comune e per le quali esiste un simbolo in logica: dovrebbe ora essere chiaro che qualsiasi dichiarazione di relazione di verità tra due termini può facilmente essere rappresentata. Le relazioni sin qui viste compaiono così spesso che il loro uso è enormemente facilitato se sono memorizzate in modo da non doverle rianalizzare ogni volta o cercare il relativo schema di navette ogni volta che la si debba implementare. L'ordine nel quale vengono tracciate le navette di una data relazione non è evidentemente significativo, ma dovendole memorizzare come strutture sarà conveniente adottare uno specifico ordine di navette per ogni relazione: l'ordine adottato qui è coerente con l'ordine più utilizzato nelle righe delle tavole di verità.

Quando uno o entrambi i termini di una relazione sono negativi, come ad esempio in ${\sim}A\vee B$, come si procede al tracciamento delle navette? La procedura è molto semplice: partendo dalla struttura di $A\vee B$, si procede quindi a scambiare i punti terminali sul lato A rispetto alle linee di verità; in altre parole, tutte le navette che terminano sulla linea V di A sono trasferite alla linea F, e tutte quelle terminanti sulla linea F sono trasferite sulla linea V, mentre le terminazioni dal lato di B restano invariate. Effettuata questa operazione, si vede che quello ottenuto non è altro che il diagramma di $A\supset B$, e si ottiene lo stesso schema quando si traccia il diagramma di ${\sim}B\supset{\sim}A$ (in questo caso devono essere però scambiati i punti terminali sulle linee di verità di *entrambi* i termini). Ogni volta che i diagrammi di due asserzioni sono identici, si dice che le asserzioni sono "tautologie", ossia si tratta di due modi per dire la stessa cosa: possiamo esprimere l'identità di ${\sim}A\vee B$ e di $A\supset B$ collegandole con il simbolo di equivalenza ${\sim}A\vee B\equiv A\supset B$, e questa dichiarazione è nota come "formula di equivalenza"; dal punto di vista dei diagrammi, l'equivalenza tra due relazioni binarie è evidenziata dal fatto che la struttura delle navette è identica.

Qualche esempio aggiuntivo renderà più chiaro il concetto: DeMorgan ha richiamato l'attenzione su due interessanti tautologie note come "leggi di DeMorgan": una di queste sostiene che la negazione di una congiunzione può essere espressa negando separatamente ogni termine in una relazione disgiuntiva o, in simboli, $A\mid B\equiv{\sim}A\vee{\sim}B$; la seconda sostiene che la negazione di una disgiunzione può essere espressa negando entrambi i termini di una relazione congiuntiva o, in simboli, ${\sim}(A\vee B)\equiv{\sim}A\blacksquare{\sim}B$; possiamo stabilire entrambe le leggi semplicemente tracciando i due membri di ogni formula: se i due diagrammi sono identici, allora le due dichiarazioni sono tautologiche.

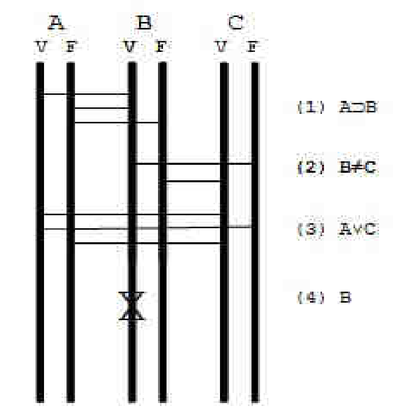
Prima di passare al tracciamento dei diagrammi concatenanti termini collegati dalla stessa relazione o dichiarazioni composte che coinvolgano delle parentesi, affrontiamo dal punto di vista diagrammatico due semplici problemi.

Come primo problema, ci sono fornite quattro premesse:

1. Se A è vero, allora B è vero ($A\supset B$).
2. B è vero o C è vero, ma non entrambi ($B\neq C$).

3. A è vero, o C è vero, o entrambi ($A \vee C$).
4. B è vero (B)

Cosa possiamo inferire rispetto a A e a C?



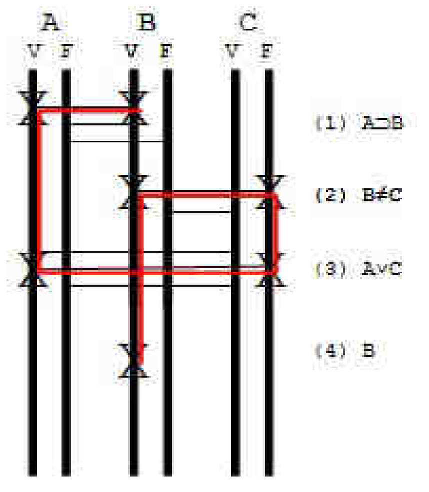
10 *La ricostruzione delle premesse.*

Il nostro primo passo è quello di ricostruire le premesse nel diagramma: il risultato dovrebbe essere equivalente a quanto compare in figura.

Il prossimo passo consiste nell'esaminare il diagramma e vedere se è possibile determinare inequivocabilmente il valore di A e C: siccome conosciamo il valore di verità di B, partiamo dalla croce sulla retta a valore vero di B: a questo punto, scorriamo verso l'alto lo sguardo sin quando non incontriamo una premessa che abbia una *singola* navetta agganciata alla linea "vera" di B, e la troviamo nella seconda premessa: siccome questa navetta indica una via possibile, e siccome a partire dalla premessa "B è vera" non abbiamo altre opzioni praticabili, prendiamo questa navetta e scendiamo sulla linea falsa di C: indicheremo questo fatto ponendo due croci agli estremi della navetta che abbiamo appena utilizzato.

Il passaggio appena eseguito ci indica che in base alla premessa (2), partendo dall'assunto della premessa (4), C deve essere falso.

Ispezionando quindi la linea falsa di C, vediamo che esiste una singola navetta che, nella premessa (3), ci porta sulla linea vera di A: marchiamo con una croce entrambi i punti terminali di questa navetta.



11 *Il problema risolto.*

In questo modo abbiamo determinato che C è falsa e A è vera, ma dobbiamo esplorare ulteriormente il diagramma per verificare che non contenga contraddizioni: il controllo della linea vera di A mostra che esiste una navetta singola che porta alla linea vera di B: identifichiamo anche in questo caso il nostro passaggio con una croce agli estremi della navetta, e notiamo che l'aver marcato il terminale con la linea vera di B è coerente con la premessa (4) che indicava B come vero. Siccome non ci sono altre navette singole che terminino su delle linee di verità che portino delle croci, concludiamo che le premesse sono consistenti e implicano la verità di A e B e la falsità di C: se le premesse avessero contenuto una contraddizione saremmo stati obbligati, nella nostra esplorazione del grafico, ad affermare contemporaneamente la verità e la falsità di uno o più termini: nella figura[34] si vede l'aspetto del grafico una volta che il problema sia risolto.

Consideriamo ora un problema leggermente più difficile, nel quale non ci sono forniti i valori di verità dei termini:

1. In agosto, o metto un cappello o vado a capo scoperto
2. Non vado mai a capo scoperto in agosto quando indosso un farfallino
3. In agosto o metto un cappello, o un farfallino e, talvolta, entrambi.

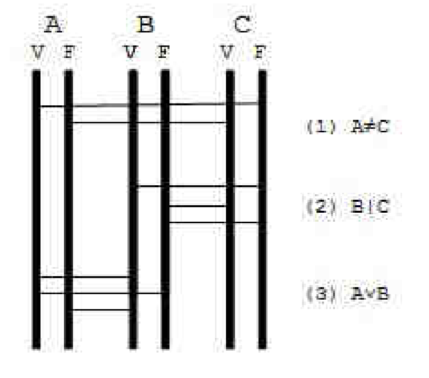
Per portare queste dichiarazioni in forma simbolica, assegniamo a A, B e C i valori:

A) Porto un cappello in agosto

[34] Per chiarezza, abbiamo introdotto in rosso il percorso seguito nella risoluzione, non presente in Gardner.

B) Porto un farfallino in agosto

C) Sono a capo scoperto in agosto



12 *La ricostruzione delle premesse.*

Possiamo statuire le premesse simbolicamente come:

1. `A≠C`
2. `B|C`
3. `A∨B`

In figura si vede il diagramma di rete delle premesse: dobbiamo ora controllare questa struttura per verificare cosa sia possibile scoprire relativamente ai valori di verità dei termini.

Possiamo partire da un punto qualsiasi: ad esempio, supponiamo di partire da una croce sulla linea V di A. L'unica navetta singola (dalla prima premessa) ci permette di passare alla linea F di C (che crociamo agli estremi), ma questa rappresenta la fine della nostra esplorazione: nulla si può dire su B.

Come prossimo passo, cancelliamo tutte le croci e proviamo a posizionarne una sulla linea F di A; questo ci porta velocemente ad una serie di contraddizioni, e siamo in grado, partendo da questo punto, di dimostrare la verità e contemporaneamente la falsità di ogni termine. Da questi due calcoli, concludiamo che A è vera e C è falsa.

Resta un ultimo passo, consistente nel verificare entrambe le linee di verità di B: l'esplorazione ci mostra che non incontriamo nessuna contraddizione, quindi possiamo dire che in agosto porto sempre il cappello, non vado mai a capo scoperto, ma posso avere o no un farfallino.

In alcuni casi, la verifica di un solo termine è sufficiente per stabilire il valore di verità di tutti gli altri termini; in altri problemi, come quelli che vedremo in seguito, la verifica su un termine fornisce valori solo per una parte dei restanti termini coinvolti: devono, in questo caso, essere svolti ulteriori test per verificare se i termini indeterminati sono in grado di influenzare la parte restante della struttura o se la struttura medesima lascia un certo numero di termini indecidibili; evidentemente, può capitare che la struttura lasci indecidibili *tutti* i termini, o che certe premesse siano tra di loro contraddittorie: in ogni caso, comunque, il grafico fornisce un'immagine visivamente chiara della struttura, aperta all'esplorazione e al controllo in un modo che, utilizzando le tavole di verità, si presenta spesso confuso e difficile. Ad esempio, se partiamo da una struttura che non permette di determinare il grado di verità di nessun termine, e se stiamo cercando la risposta ad una domanda del tipo "la struttura permette a A e F di essere vere, nel momento in cui D e G siano false?", con questo modello non dobbiamo fare altro che porre queste quattro asserzioni nel grafico ed esplorare la struttura per verificare se porta a delle contraddizioni: dovrebbe essere ormai evidente che, indipendentemente dal numero di termini coinvolti o da quante relazioni binarie sono date, possiamo comunque tracciarne la struttura ed effettuare su di essa tutte le possibili operazioni.

Le dichiarazioni composte che utilizzano le parentesi possono essere tracciate attraverso semplici estensioni del grafico; illustreremo questo attraverso l'espressione `(A∨B)⊃(C∨D)`.

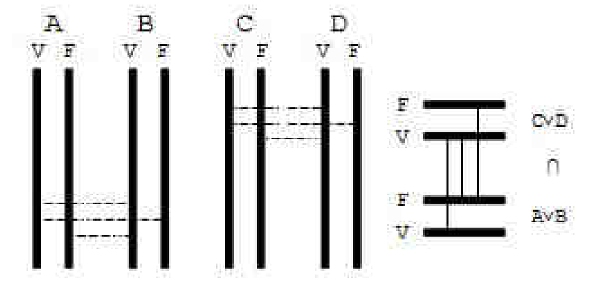
Le due affermazioni disgiuntive vengono riportate sul grafico come visto sopra, come se fossero due premesse, con la notazione che sono utilizzate delle linee tratteggiate in luogo delle linee piene (questo è equivalente alla campitura grigia anziché nera nella formulazione delle dichiarazioni composte nei diagrammi di Venn[35]). Le linee tratteggiate indicano che la navetta è in realtà un *tentativo*, e che non sappiamo se la relazione che portano è vera o falsa; se in seguito scopriremo che la relazione è vera, trasformeremo la

[35] Gardner ha trattato questo argomento in *Ibidem*, Capitolo 2.

linea tratteggiata in continua; se falsa, lasceremo la linea tratteggiata o la cancelleremo, aggiungendo come linee continue la *negazione* del cammino originale; come spiegato precedentemente, questo si realizza tracciando in linea piena tutte le relazioni *mancanti* dalla relazione tratteggiata. In questo caso, se il risultato finale è una *singola navetta*, ci affretteremo a mettere delle croci alle sue estremità per affermare immediatamente la verità delle linee coinvolte.

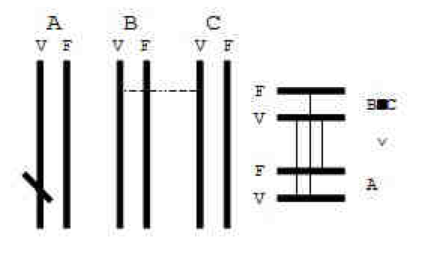
I due grafici parentetici devono ora essere connessi tra di loro: per fare questo, utilizziamo la seguente procedura.

Sulla destra del grafico, tracciamo due coppie di linee di verità *orizzontali*, ognuna in corrispondenza di una delle dichiarazioni precedentemente tracciate: per convenzione, assumeremo che la linea inferiore di ogni relazione sia vera, e la superiore falsa[36]; se ruotiamo il foglio di un quarto di giro in senso orario, il grafico apparirà come un normale grafico di due termini, con la notazione che ognuna delle variabili rappresenta, in realtà, una relazione binaria: su questo grafico tracceremo le nostre navette di relazione nel modo usuale, ad indicare che una relazione implica l'altra: queste navette saranno in linea piena in quanto non esistono dubbi sulla loro validità: l'intero grafico è rappresentato nella figura.



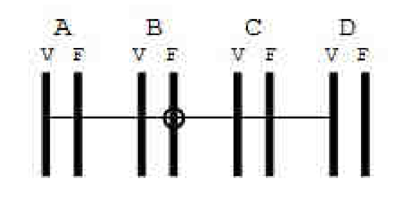
13 *Dichiarazioni parentetiche.*

Se in una dichiarazione composta è coinvolto un termine singolo, ad esempio A∨B■C), si utilizza la stessa procedura: indicheremo il carattere *tentativo* delle affermazioni relative ad A utilizzando un solo tratto diagonale sulla linea V di A; se questa ipotesi verrà verificata sarà facile trasformare la mezza croce in croce intera, in caso contrario potremo apporre una croce sulla linea F di A: in figura si vede il grafico della relazione[37].



14 *Termini singoli.*

Una serie di termini connessi dalla stessa relazione può spesso essere tracciata attraverso una o più navette con dei piccoli cerchi nei punti richiesti lungo il percorso della navetta in corrispondenza delle linee coinvolte; a titolo di esempio, in figura abbiamo rappresentato A■~B■D.



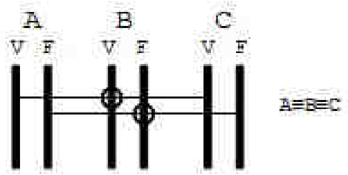
15 *Serie di termini.*

Se la catena è l'unica premessa completa, possiamo evidentemente inserire le opportune croci sulle linee di verità di ognuna delle variabili coinvolte nella catena: se fosse invece parte di una dichiarazione composta, tutte le linee dovrebbero essere tratteggiate e non possiamo aggiungere croci sin quando non sia appurato che l'intera catena è una relazione valida. Il punto di intersezione circondato dal cerchio viene trattato esattamente nello stesso modo

36 Gardner è costretto a costruire queste convenzioni in quanto, con l'eccezione del primo disegno, le indicazioni "V" e "F" non compaiono nella testa di linea: noi le abbiamo inserite, e continueremo in questa convenzione *[NdT]*

37 Per confronto con l'immagine precedente, notiamo che Gardner nella scrittura della dichiarazione raffigurata dalle barre orizzontali della prima figura ha ruotato di 90° il simbolo "⊃", mentre non ha ritenuto opportuno ruotare il simbolo "∨": secondo noi, il motivo è da ricercarsi nel fatto che in questo modo nella prima immagine si "forza" la lettura dal basso in alto (cosa necessaria, in quanto "⊃" non è commutativa); nella seconda figura questa forzatura non è necessaria (per la commutatività di "∨"). *[NdT]*

di un punto terminale; il fatto che nessuna delle linee di verità di C abbia un cerchio indica quindi che C non è coinvolta in questa relazione.

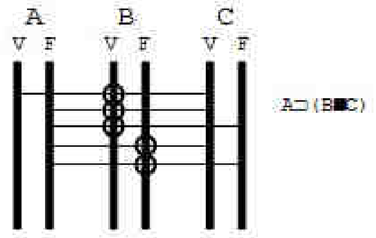


16 *Relazioni di equivalenza.*

Una catena di relazioni di equivalenza del tipo `A≡B≡C` può essere tabulata come in figura, con due navette e gli opportuni cerchi che evidenziano la relazione.

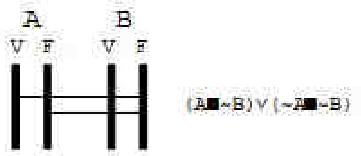
Procedure simili possono essere costruite per dichiarazioni che affermino che solo un termine della relazione è vero, o che non tutti i termini possono essere falsi, o che ogni combinazione di valori di verità è permessa tranne tutti veri o tutti falsi, e avanti così: in questi casi, evidentemente, stiamo semplicemente mostrando la tavola di verità per l'intera catena di termini. Nella figura qui sopra, ad esempio, mostriamo solo le due righe valide di una tavola della verità che contiene otto termini: di conseguenza, se avessimo necessità di negare l'intera catena dovremmo sostituire le due navette con le sei che non abbiamo utilizzato.

Quando ci sono più di tre termini in una catena, il numero delle navette coinvolte può diventare eccessivo e può essere più facile ridurre la catena a frasi parentetiche ed espandere il diagramma sulla destra come mostrato precedentemente; ad esempio, se interpretiamo la catena `A∨B∨C∨D` come il fatto che non tutti gli elementi possono essere falsi, possiamo esprimere l'espressione come `(A∨B)∨(C∨D)`.



17 *Parentetica senza laterale.*

Inversamente, in certi casi può risultare conveniente non utilizzare i diagrammi laterali per esprimere le espressioni parentetiche, ma ricavare la tavola di verità e implementare le opportune navette, come mostrato nella figura a fianco per la dichiarazione `A⊃(B■C)`: in questo modo abbiamo espanso l'espressione parentetica in quella che i logici chiamano la forma "normale disgiuntiva": ogni navetta del diagramma rappresenta una riga valida della tavola di verità composta da otto righe, e l'intero schema equivale all'espressione `(A■B■C)∨(~A■B■C)∨(~A■B■~C)∨(~A■~B■C)∨(~A■~B■~C)`.



18 *Relazione disgiuntiva semplificata.*

Quando lo stesso termine appare più di una volta in una dichiarazione, è spesso possibile ridurlo ad una forma più semplice prima di tracciarlo: ad esempio, la dichiarazione `(A■~B)∨(~A■~B)` può, come d'uso, essere tracciata come dichiarazione parentetica connessa dalla relazione di "or" inclusivo, ma visto che stiamo lavorando con soli due termini e che le navette appartenenti alla relazione sono legate da relazione disgiuntiva, è molto più semplice tracciare la dichiarazione come mostrato in figura. Non solo, ma questo non è ancora il diagramma più semplice: esaminando il diagramma, si vede che indipendentemente dal valore di A, B deve essere falso, e il sapere che B è falsa non ci dice nulla sul valore di A: di conseguenza, l'intero diagramma può essere ulteriormente semplificato riducendolo ad una croce sulla linea F di B: in altre parole, `(A■~B)∨(~A■~B)≡~B` è una tautologia.

Abbiamo visto come il grafico di rete può essere utilizzato come supporto visivo per semplificare dichiarazioni riducendole alla forma più economica o "logicamente potente": esistono una serie di regole che possono essere utilizzate per l'eliminazione delle navette inutili e per effettuare la “minimizzazione” di una dichiarazione, ma l’argomento è troppo complicato per trattarlo in questa sede[38].

Per grafici che richiedono livelli parentetici multipli, il grafico può essere esteso aggiungendo il numero di linee di verità richiesto, alternando i blocchi tra verticale e orizzontale in una serie di gradini: questo sistema “a gradini” può evidentemente andare avanti quanto necessario: tutti gli schemi devono essere evidentemente indicati come *tentativi* (utilizzando navette tratteggiate e mezze croci), tranne per quanto riguarda la relazione finale nell’angolo in basso a destra: questa relazione, isolata, non è un tentativo e quindi deve essere indicata attraverso linee continue.

Non andremo nel dettaglio per quanto riguarda la risoluzione di problemi espressi attraverso dichiarazioni composte, ma il lettore interessato non dovrebbe avere problemi nel ricavare le regole necessarie, quanto segue dovrebbe rendere sufficientemente chiara la natura della procedura generale:

1. Se i valori di verità di tutti i termini all’interno di una dichiarazione parentetica sono noti e sono conformi rispetto ad una navetta tratteggiata all’interno dello schema della medesima dichiarazione, allora l’intera dichiarazione è vera. In alcuni casi, conoscere il valore di verità di un solo termine permette di stabilire il valore di verità dell’intera funzione; nella relazione di implicazione, ad esempio, la falsità di A è l’unica informazione che ci serve per determinare che $A \supset B$ è una funzione vera in quanto ci sono due navette che partono dalla linea F di A: in altre parole, esiste una navetta FV e una navetta FF e quindi, indipendentemente dalla verità o meno di B, ci sarà una navetta che rappresenta la combinazione. In un modo simile la verità di B è tutto quanto ci serve per dire che la relazione $A \supset B$ è vera: abbiamo incontrato una situazione simile parlando di $A|B$ e di $A \vee B$, e quindi possiamo riformulare la procedura in questo modo: quando conosciamo il valore di verità di un unico termine, e ci sono due navette che partono da questo valore di verità, possiamo affermare la verità dell’intera funzione binaria; se invece abbiamo una sola netta, manchiamo di informazioni per fare un’affermazione sul valore.
2. Se sappiamo che i termini hanno una combinazione di valori di verità che *non* è indicata da nessuna navetta, allora l’intera relazione è falsa.
3. Ogni volta che una dichiarazione parentetica è nota essere vera, o per conoscenza dei termini o perché la si è individuata tale durante l’esplorazione della struttura, le sue navette sono passate in linea continua o le sue mezze croci sono trasformate in croci: la verità dell’intera dichiarazione è indicata da una croce sulla linea V nella copia di linee che la rappresentano.
4. Ogni volta che una dichiarazione parentetica è riconosciuta come falsa in uno dei due modi indicati sopra, aggiungeremo la navetta (o le navette) mancanti in linee continue, e indicheremo la falsità dell’intera relazione marcando una croce sulla linea F relativa.

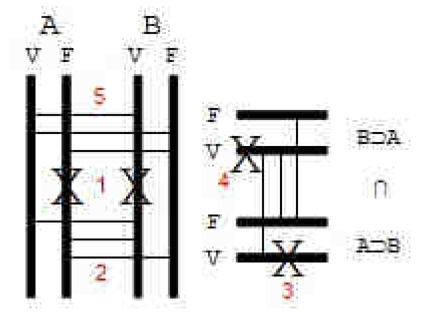
Per mostrare la procedura, affrontiamo un semplice problema sin qui non esaminato: vogliamo verificare se $(A \supset B) \supset (B \supset A)$ è un teorema valido: per esserlo, deve essere valido per tutte le possibili combinazioni di valori di A e B, e per determinare questo per prima cosa riportiamo la dichiarazione nel grafico in figura.

19 *Esame di una relazione.*

Dobbiamo ora effettuare la verifica di questa struttura per i quattro possibili valori di A e B, corrispondente al metodo usuale di verifica della tavola di verità; se nessuna di queste combinazioni produce una

[38] Per una strada più formale (che però non prende in considerazione questo metodo), consigliamo P.FREGUGLIA: L’algebra della logica, Editori Riuniti, 1987, Roma. Per acquisire una certa qual manualità nel calcolo, S.CAVAGNETTO: Esercizi di logica, Carocci, 2008, Roma. *[NdT]*

contradizione, allora il nostro teorema è verificato. La nostra procedura di verifica mostra che non ci sono problemi per quanto riguarda VV, VF e FF, ma la verifica per quanto riguarda FV mostra una contraddizione: vediamo come si verifica questo ultimo evento.



20 *La sequenza di calcoli.*

Il primo passo per verificare FV consiste nel mettere una croce sulla linea F di A e una sulla linea V di B (1): siccome questa combinazione è rappresentata da una navetta nella dichiarazione più in basso, sappiamo che la dichiarazione in basso è vera; di conseguenza, cambiamo le navette punteggiate in navette piene (2) e indichiamo la verità dell'affermazione per mezzo di una croce sulla linea (orizzontale) V che la rappresenta (3). Avendo poi una sola navetta in partenza da questa linea, dobbiamo seguirlo e arriviamo alla line V della relazione superiore, che marchiamo anch'essa con una croce(4): quindi, essendo la relazione verificata, possiamo trasformare le linee tratteggiate superiori sul grafico a sinistra in linee continue (5), e a questo punto il grafico dovrebbe comparire come indicato in figura[39].

Emerge, a questo punto, la contraddizione: se seguiamo la linea F di A (marcata con una croce), incontriamo una sola navetta che ci conduce alla linea F di B: ma questo è contradditorio, in quanto abbiamo marcato B sulla linea V; nello stesso modo, l'unica navetta originata dalla linea V di B ci porta sulla linea V di A[40], ed è una contraddizione in quanto abbiamo assunto che A sia falsa.

L'esame della struttura si sarebbe potuto portare avanti in altri modi, ma il risultato sarebbe stato lo stesso: ad esempio, avremmo potuto iniziare trovando falsa la prima relazione, nel qual caso le navette verticali ci avrebbero permesso di definire come falsa la relazione inferiore, che quindi sarebbe stata sostituita dalla navetta mancante; questo ci avrebbe permesso di definire A come Vera e B come falsa, in contraddizione rispetto agli assunti originali. In conclusione, non importa in che direzione procediamo per l'esplorazione della struttura: nel momento stesso nel quale incontriamo una contraddizione, sappiamo che quella che stiamo esaminando non è una legge: se non ne trovassimo, come capita esaminando ad esempio (A⊃B)∨(B⊃A), allora saremmo di fronte ad un teorema valido.

I sillogismi possono essere verificati in questo modo per determinare se sono leggi, ma il processo è molto scomodo, in particolare se sono coinvolte proposizioni particolari: ad esempio, se volessimo testare la validità del sillogismo:

Tutti gli A sono B

Nessun B è C

Quindi, nessun A è C[41]

Questo può essere definito nel calcolo proposizionale nella forma: [A⊃B)■B|C]⊃A|C: quando verifichiamo le otto combinazioni possibili sui valori dei tre termini si vede che sono tutte relazioni valide e non si hanno mai contraddizioni, e quindi è un teorema: la dichiarazione particolare del tipo "Qualche A è B" deve in questi casi essere trattata come disgiunzione: in questo caso, (A■B■C)∨(A■B■~C).

Non dovrebbe essere necessario far notare che tutte le regole fornite in questo capitolo per la manipolazione dei diagrammi si applicano unicamente all'interpretazione materiale dell'applicazione, e non si possono applicare a un sistema di "implicazione stretta" come quello proposto da Clarence L. Lewis, in cui il conseguente di un'implicazione deve essere

[39] La sequenza (numerica) delle operazioni indicata in rosso in figura non è presente in Gardner *[NdT]*.

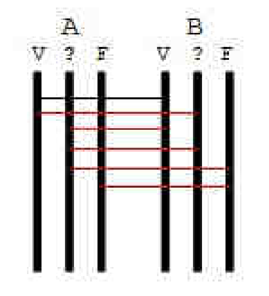
[40] Ricordiamo che la navetta deve essere *unica*, ed è quella della relazione superiore: la doppia navetta della relazione inferiore va ignorata *[NdT]*.

[41] Seconda forma della quarta figura: *Camenes [NdT]*.

formalmente deducibile dall'antecedente: nell'implicazione stretta, il conoscere i valori di verità dei singoli termini in una relazione condizionale non è sufficiente per definire il valore di verità dell'intera dichiarazione tranne nel caso in cui l'antecedente è noto come vero e il conseguente come falso (nel qual caso, la relazione è falsa); ritengo che adottando le corrette convenzioni il metodo delle reti possa essere applicato ad una logica di implicazione stretta, ma questo è un uso del metodo al di là delle mie capacità di esplorazione. Penso anche sia possibile combinare questo sistema con i diagrammi di Venn, il che permetterebbe di gestire contemporaneamente problemi che coinvolgano sia dichiarazioni di inclusioni in classi sia dichiarazioni a valori di verità.

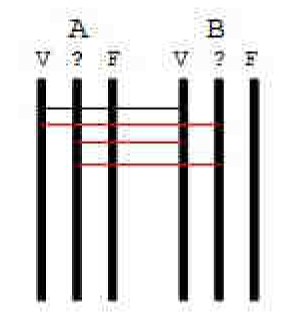
Un'altra interessante possibilità è quella di estendere il metodo delle reti alle logiche a molti valori che possano essere analizzate attraverso matrici di verità *[Nota di Gardner: Relativamente alle logiche a molti valori, l'unico testo comprensibile che mi sia noto è J.BARKLEY ROSSER, "On the Many-Valued Logics", American Journal of Physics, Vol. 9, Agosto 1941, p. 207. Per delle discussioni più avanzate, si veda il classico articolo di Emil POST, "Introduction to a General Theory of Elementary Propositions", American Journal of Mathematics, Vol. 43, 1921, p. 163; C.I.LEWIS e C.H.LANGFORD, "Symbolic Logic", 1932; J.BARKLEY ROSSER e A.R.TURQUETTE, "Many-Valued Logics", 1952. L'ultimo contiene un'eccellente bibliografia.]*; ad esempio, una logica a tre valori può essere implementata aumentando il numero di linee dei valori di verità per ogni termine da due a tre: siccome in questo caso le navette rappresentano due tipi diversi di relazione, vera e "indeterminata" (o comunque si preferisca chiamare il terzo valore), occorre differenziare i due tipi di navetta, e questo si può fare utilizzando per il nuovo valore dei segmenti a dente di sega[42].

Quale schema di navette si debba utilizzare per una data funzione dipende dal tipo di logica a tre valori che stiamo considerando; qui entriamo nel regno dell'Humpty-Dumpty di Lewis Carroll, per il quale ogni parola significa esattamente quello che lui intende, né più né meno; nella logica a molti valori, connettori come "AND" e "implica" cessano di avere il loro significato intuitivo e diventano semplicemente l'espressione di un dato schema di valori. Per rendere un po' più chiaro il concetto, pensiamo alla proposizione "A e B sono veri": nella logica a due valori questa definizione è rappresentata da una singola navetta che congiunge le linee V di A e B, questa navetta ci dice che le altre tre possibili navette non sono ammesse e rappresentano delle combinazioni "false" di A e B, e quindi vengono eliminate dal diagramma. Nella logica a tre valori la situazione non è così semplice, visto che abbiamo nove possibili navette. Infatti, sappiamo che la dichiarazione "A e B" richiede una linea piena tra le due linee V delle variabili, ma come dobbiamo interpretare le altre otto combinazioni?



21 *"AND" secondo Bochvar.*

La risposta è che possiamo interpretarle come preferiamo, basando la nostra decisione su fattori come l'analogia con la logica a due valori, su una simmetria piacevole o sulla ricchezza dello schema, su interpretazioni particolari che possiamo dare al terzo valore, e avanti di questo passo: ad esempio, Jan Lucasievicz, Emil Post e Barkley Rosser optano per l'interpretazione data nella figura qui a fianco (L-P-R), mentre il logico russo L.A. Bochvar opta per una logica a tre valori basata sullo schema successivo.

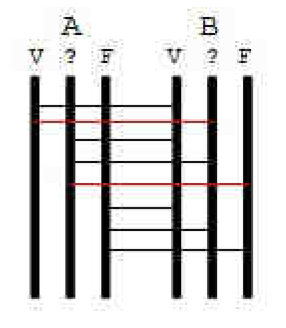


22 *"AND" secondo L-P-R.*

Esattamente come i paradossi dell'implicazione materiale, molte delle stranezze della logica a tre valori scompaiono quando realizziamo che parole come "AND", "NOT" e "implica" hanno un'analogia quasi se non del tutto inesistente con i significati che portano

[42] Per ragioni tipografiche, indicheremo queste navette con linee piene rosse *[NdT]*.

nel parlare comune; una funzione della logica a tre valori non significa altro che un particolare schema matriciale (o, nel nostro caso, un particolare schema di navette) che è permesso dalla relazione in oggetto; se anziché dire "A implica B" in un sistema a tre valori diciamo "A galumfa B", probabilmente diventa tutto più chiaro.

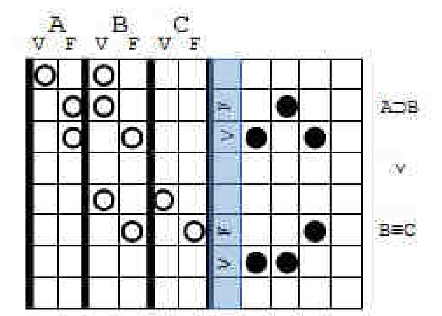


23 *"A galumfa B" (L-T).*

Ad esempio, è una pura perdita di tempo cercare di capire cosa significhi "A implica B" nella logica di Lucasievicz e Tarski rappresentata in figura, quasi come cercare di visualizzare un cubo quadridimensionale: la relazione non significa altro che quel determinato schema di navette. Notiamo comunque che, se eliminiamo tutte le navette (di qualsiasi colore) che originano o terminano sul terzo valore logico, otteniamo il ben noto schema di "A implica B": c'è quindi un senso in tutto ciò, e la relazione di implicazione è un sottoinsieme di questa matrice più estesa.

Logiche con più di tre valori logici (come ad esempio la logica probabilistica di Hans Reichenbach) dovrebbero richiedere altre linee di verità e le diverse navette potrebbero essere gestite utilizzando colori diversi: le difficoltà non sono insuperabili, ma probabilmente la complessità delle regole necessarie per manipolare questi tipi di grafici renderebbero il metodo troppo complicato per essere di una qualche utilità.

Anche nel tedioso mondo della logica a due valori è talvolta utile tracciare dei grafici in cui le linee di verità abbiano dei significati diversi da "vero" e "falso"; supponiamo ci sia detto che Smith, Jones e Robinson sono professori di fisica, matematica e filosofia, anche se non necessariamente in quest'ordine: un gruppo di premesse ci dice che se John insegna fisica, allora Robinson insegna matematica, eccetera. Un approccio a questo familiare tipo di problema può essere quello di generare un grafico per le nove possibili proposizioni (Smith insegna filosofia, Smith insegna fisica, eccetera), ciascuna delle quali potrà essere vera o falsa; ma poiché le tre cattedre sono mutuamente esclusive, un approccio più semplice è quello di utilizzare solo tre termini (per i tre docenti) ciascuno dei quali possa assumere un valore tra tre (le tre materie). In un certo senso, questo è un problema di logica a tre valori, anche se non si tratta di un sistema a molti valori in senso stretto, in quanto le relazioni possono essere solo vere o false.



24 *Carroll & Gardner.*

Anche il sistema di risoluzione dei problemi logici con scacchiera e gettoni utilizzato da Lewis Carroll[43] può essere adattato al sistema a rete, se consideriamo le "colonne a valore di verità" su cui possiamo posizionare dei gettoni per indicare le combinazioni permesse di vero e falso: un foglio di carta può essere utilizzato come tavoliere e dei bottoni o dei fagioli possono essere usati come gettoni. A titolo di esempio, nella figura a fianco[44] compare la dichiarazione $(A \supset B) \vee (B \equiv C)$: per indicare il fatto che le relazioni all'interno delle parentesi sono dei tentativi, possiamo usare delle pedine di colore diverso rispetto a quelle utilizzate nella parte destra del grafico (che *non* sono tentativi, ma certezze); pedine di colore diverso sulle due facce si rivelano molto utili in quanto, nel momento stesso nel quale vogliamo trasformare una relazione da "tentativo" a "vera", non dobbiamo fare altro che girare le pedine: ovviamente, tutte le regole che si applicano al metodo della rete si applicano anche a questa versione con le

[43] Gardner tratta diffusamente questo sistema in *Ibidem*, Capitolo 2: noi lo abbiamo accennato nel PM di RM042 (luglio 2002), "Da Aristotele a Lewis Carroll [002]: Da Lewis Carroll a Lewis Carroll".

[44] Per motivi di chiarezza abbiamo modificato la figura dal punto di vista grafico: notiamo che qui Gardner, contrariamente alle figure precedenti di relazioni parentetiche, mette per prima la prima relazione: la cosa è comunque insignificante, se non nel momento in cui si utilizzino relazioni non commutative e si ruoti fisicamente il foglio. *[NdT]*

pedine; anche se questa procedura è in un certo senso meno iconica per la logica proposizionale rispetto a quella vista, da un altro punto di vista ricorda molto più da vicino il metodo matriciale delle tavole di verità.

Ha inoltre il vantaggio di semplificare molto la modifica della struttura; se si vogliono eliminare le navette non necessarie, anziché cancellarle è sufficiente togliere le pedine dalla scacchiera; in realtà, il metodo dei gettoni è veramente una forma primitiva di abaco per effettuare operazioni logiche: ha molte più caratteristiche della "macchina logica" che del "diagramma".

Come vedremo[45] in seguito, la maggior parte delle macchine logiche che sono state costruite, dalla macchina per i sillogismi di Lord Stanhope sino alle moderne macchine logiche elettriche per il calcolo proposizionale, operano su principi che sono intimamente legati alle procedure che sono state delineate in questo capitolo.

Anche se il modo di presentare i concetti ci pare piuttosto farraginoso, il ragazzo ha della stoffa. Ci aspettiamo grandi cose, da lui [NdT].

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[45] Gardner qui si riferisce ai capitoli successivi del libro: in essi, più che "metodi" di calcolo, vengono trattate le "macchine" che li eseguono. *[NdT]*