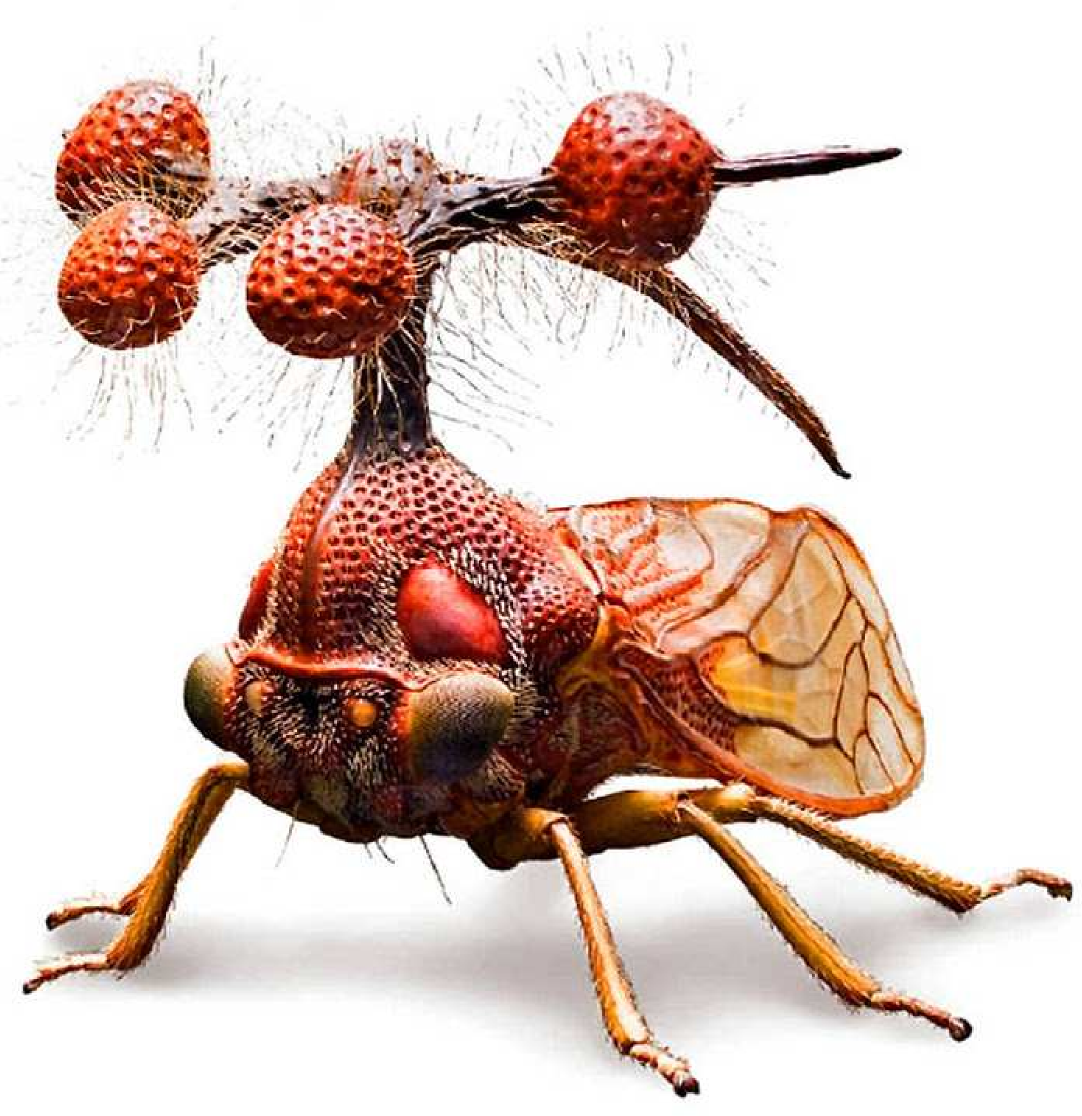
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 170 – Marzo 2013 – Anno Quindicesimo



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM169 ha diffuso 2989 copie e il 04/03/2013 per Google eravamo in 15'800 pagine.

Se pensate che si stia per magnificare lo psichedelico algoritmo che ha permesso di disegnare questo aggeggio, scrivete "***Bocydium globulare***" e accendete un cero a San Google. Secondo noi, a carnevale Darwin si è vestito così.

1. Saecula saeculorum

Torino, piazza Carignano, 26 ottobre 1849, ore 4 del pomeriggio: un giovane capitano sale sulla vettura di posta per Lione: la sua meta è Parigi...

Un inizio degno del peggior *feuilleton*: non fosse che il seguito è "..dove intende *perfezionarsi negli alti studii di matematiche*."

Questo, forse, potrebbe migliorare la struttura del racconto, anche se la cosa continuerebbe ad essere decisamente noiosa: forse, un po' di *infodump* sulla situazione storica potrebbe rendere la cosa più interessante.

Il periodo tra il 1848 e i primi anni Sessanta[1] rappresentano un grande periodo di sviluppo per l'Università torinese: la trasformazione dello stato sabaudo in stato liberale, alimentata dalla vivacità della vita intellettuale dell'epoca, non poteva non influire sulla struttura stessa del massimo istituto di insegnamento: per prima cosa, la scissione della Facoltà di *Scienze e Lettere* (sic!) con la nascita della Facoltà di *Belle Lettere e Filosofia*[2].

1 *Piazza Carignano e il Palazzo, sede della Camera. Incisione all'acquatinta su acciaio di Frédéric Salathé su disegno di Carlo Bossoli, in Torino, Maggi, 1853.*

Comunque, almeno in questa fase, la *coloritura* dell'Ateneo torinese era decisamente dalla parte delle facoltà umanistiche.

Completamente diverso il *secondo* periodo di crescita nel medesimo secolo.

Eufemisticamente palando si andava, in quel di Torino, verso un certo qual *appannamento* culturale, successivamente all'Unificazione d'Italia, anche per il trasferimento della capitale a Firenze: sino ad allora, sul modello francese, l'Università era stata un ente avente come principale referente lo *Stato*, sul modello delle varie *Écoles* francesi, miranti soprattutto a creare dei burocrati (nel senso buono del termine) per l'amministrazione statale: da quel momento, si andava verso una visione più proiettata verso la ricerca scientifica e le trasformazioni sociali, insomma, un passaggio del *primato* (sia istituzionale che funzionale) dalle facoltà umanistiche a quelle scientifiche, una riforma sotto il segno della prevalenza delle scienze *positive*, in un clima poi genericamente ma più esattamente definito *positivismo*.

Ma un settore, dal 1864 in avanti, non conosce battute d'arresto: quello matematico.

Angelo Genocchi, Francesco Siacci e altri, grazie al loro lavoro, tengono aperte le porte portando innovazioni in tutti i campi, tra cui la meccanica, l'idraulica e la geodesia; sono i matematici dell'Università di Torino che preparano, con l'aiuto di docenti di altre aree disciplinari, quella conversione al primato dell'indagine scientifica che diventerà la nota dominante degli anni successivi: e il principale artefice di questo primato delle scienze è il capitano che partiva per Lione all'inizio di questo pezzo.

[1] MILLEOTTOCENTO Sessanta: insomma, poco più di un decennio.

[2] Dall'altra parte, Scienze acquisisce Chimica e Scienze Naturali: Medicina "pende" da questa parte, ma... beh, per il momento Croce con le sue "menti minute" sta ancora alla scuola materna.

2 *Francesco Faà di Bruno*

Nato ad Alessandria il 29 marzo 1825, Francesco Faà di Bruno è l'ultimo dei dodici figli del marchese Luigi e di Carolina Sappa de' Milanesi: e se dei fratelli Alessandro dovrà abbandonare la carriera diplomatica per dedicarsi all'azienda agricola di famiglia e Emilio incontrerà un'eroica morte il 20 luglio 1866 alla battaglia di Lissa, Carlo Maria e Giuseppe Maria vengono avviati alla carriera ecclesiastica. Come d'uso per l'epoca, le notizie relative alla parte femminile della famiglia sono molto scarse: viene ricordata infatti solo quella alla quale era più affezionato, Maria Luigia.

Compiuti gli studi secondari a Novi Ligure presso il collegio dei Padri Somaschi, entra alla Regia Accademia Militare di Torino per passare, dopo i primi due anni, alla Scuola di Applicazione per le Armi Dotte, dove il direttore degli studi scientifici è Giovanni Plana[3] e tra i suoi insegnanti troviamo Luigi Federico Menabrea[4].

Ancora oggi, l'espressione "un quarantotto" è segno di decisa ebollizione di eventi, e la radice di questa metafora è, almeno per l'Italia, il Piemonte di quell'anno del XIX secolo: il 4 marzo viene promulgato lo Statuto Albertino e il 23 dello stesso mese viene dichiarata guerra all'Austria, Francesco partecipa attivamente non solo per il suo ruolo militare[5] ma per precisa passione politica, come esplica lui stesso:

> [Il mio ideale] *è quello di un regno costituzionale che seduto sulle Alpi stenderebbe le braccia all'adriatico, per Venezia, al Tirreno per Genova. Regno cui innaffierebbe il Po in tutta la sua lunghezza dal Monviso alle foci verso Ferrara*[6].

Pur ricevendo menzioni onorevoli per il comportamento in battaglia, Faà di Bruno non lesina le critiche alla conduzione della guerra, il che gli vale, alla conclusione della medesima[7], la semplice promozione a capitano. Critiche, ci sentiamo di dire, molto probabilmente giustificate, visto che Vittorio Emanuele II, salito al trono dopo l'abdicazione di Carlo Alberto, lo nomina precettore di matematica dei principi Umberto Amedeo e il Ministero della Guerra, non sappiamo quanto sollevato da questa conclusione, lo pone a disposizione del re con esonero dal servizio.

E Francesco, se ritornate all'incipit, per prima cosa va a Parigi, e ci resterà più di due anni, frequentando le lezioni alla Sorbona, il che significa Cauchy[8], Duhamel, Sturm, Chasles; e al Collège de France, dove la cattedra lasciata vacante da Guglielmo Libri[9] è tenuta da un certo Charles Hermite[10], presto sostituito da Joseph Liouville; e, per non farsi mancare niente, studia *dagherrotipia* con Niepce e assiste all'esperimento del pendolo di Focault divulgandolo in Italia[11].

---

[3] Ne abbiamo parlato in RM154 (novembre 2011), "Genius loci".

[4] Che ha fatto da coprotagonista del capodanno collettivo di RM150, luglio 2011, "Risorgimento!", e da comparsa in "La farina di Ofelia", RM059, dicembre 2003.

[5] Luogotenente del Real Corpo di Stato Maggiore.

[6] Lettera al cugino Ludovico Trotti-Bentivoglio. Lasciamo in nota il fatto che (presumiamo per ragioni di simmetria) intendesse spostare la capitale a Milano.

[7] 23 marzo 1849, sconfitta di Novara.

[8] RM127, agosto 2009, "L'antipatico".

[9] Il *come* e il *perché* la cattedra sia stata lasciata vacante ve l'abbiamo raccontato in RM132, gennaio 2010, "Tout se tient".

[10] RM095, gennaio 2006, "Vite parallele"

[11] *Se la cosa non è ancora conosciuta costì, potrai comunicare all'Avvenire le seguenti linee: [...]* Lettera di Francesco al fratello Alessandro, 12 febbraio 1851. "L'Avvenire" è la *Gazzetta Ufficiale della Divisione di Alessandria.*

Alla fine del 1849 si trasferisce da Rue du Petit Bourbon al 38 di Rue Saint Sulpice, di fronte alla chiesa omonima: l'intensa attività parrocchiale lo sensibilizza verso le problematiche religioso-sociali e Cauchy, rappresentante di spicco del movimento cattolico conservatore, diventerà il suo modello per "[...] *la capacità di coniugare ricerca matematica e fede"*[12].

Richiamato in Italia dal ministro La Marmora, Francesco riprende servizio nel Corpo dello Stato Maggiore, ma perde l'incarico di precettore dei principi reali: gli viene infatti preferito Giorgio Foscolo, esule da Venezia e amico di Daniele Manin; le ragioni non sono, però, unicamente di rappresentanza: le tensioni tra stato sabaudo e la Chiesa sono in quel momento molto forti, ed è logico pensare che un cattolico militante come Faà di Bruno parta svantaggiato per la nomina a precettore.

Deluso dalla mancata nomina e punzecchiato dai colleghi sul fatto che il Diploma della Sorbona era una Licenza e non una Laurea[13], Faà di Bruno presenta le dimissioni, accolte da Vittorio Emanuele il 23 marzo del 1853.

E si mette a scrivere almanacchi: "Il Galantuomo", dato alle stampe nel novembre dello stesso anno, incontra un notevole successo. Francesco si era reso conto in Francia di quanto potesse essere utile la pubblicazione degli almanacchi, in grado di raggiungere un gran numero di persone e di associare al calendario nozioni di economia, agricoltura e sviluppare un discorso morale e religioso. Se i primi punti erano già ragionevolmente svolti dagli almanacchi correnti, di sicuro l'ultimo aveva forti carenze: gli almanacchi all'epoca in commercio erano fortemente anticlericali.

Nonostante la relativa vicinanza temporale, è difficile definire quale fosse realmente lo stato religioso della Torino tra il 1860 e il 1880, e una volta tanto non è la mancanza, ma l'abbondanza delle fonti a porre problemi.

Tanto per cominciare, sono poco di dettaglio: infatti, riferendosi alla dimensione diocesana, non considerano il dettaglio metropolitano, che contiene la metà della popolazione, ma solo un decimo delle parrocchie della diocesi. Infine, sono contraddittorie anche al loro interno, visto che nelle *relationes ad limina* presentate anche dal medesimo vescovo (Lorenzo Gastaldi, dal 1871 al 1882):

1874: "...tra gli immensi mali da cui siamo circondati, c'è ancora molto di bene..."

1877: "...ci troviamo quasi *in partibus infidelis*, si fattamente moltiplicaronsi coloro che non hanno più fede..."

1878: "...non potersi negare che le cose volgano al peggio e che il senso morale e religioso non sia in fase calante..."

1879: "...in tutta la diocesi […] appare grande e vivo a sufficienza il senso della fede cattolica..."

Questa apparente contraddizione viene di solito spiegata con una maggior vicinanza alla chiesa da parte dei nobili e dei contadini[14] mentre per quanto riguarda il ceto colto, pur notando una persistenza del senso religioso, si constatava che questo non si identificava più con la fede cattolica, vuoi per una sua forma di indifferenza o di rifiuto verso una parte del patrimonio dogmatico. Per quanto riguardava poi la borghesia degli affari, i commercianti e i lavoratori manuali, "...una scarsa cura della religione […] una ridotta pratica religiosa […] una corruzione e una fuoriuscita dal senso religioso...": a supporto di questa analisi sempre il Gastaldi stimava il fatto che a Torino non più di un quinto della popolazione rispettasse il precetto pasquale: anche se prendiamo questi dati come

[12] F.Faà di Bruno, *Cenni biografici sul barone Agostino Cauchy membro dell'Istituto di Francia*, Torino, DeAgostini, 1857.

[13] [Per ricevere una Laurea dalla Sorbona] *"...ci voleva ben altro che quattro chiacchere e né il Faà né alcun altro di tanti cattoliconi piemontesi erasi sentito in lena di tentarne la prova"*. Riferito su "Riscossa", da Jacopo Scotton.

[14] Definiti da Gastaldi "...la parte maggiore e migliore di fedeli degni di questo nome"

un'esagerazione e accettiamo quelli invece riportati da un calendario liturgico diocesano di quegli anni[15], la situazione risulta tutt'altro che rosea.

Ad aumentare la confusione, "La Buona Settimana" scriveva, nel 1876, che "...la città di Torino […] non è seconda a verun'altra nella fede e nella pietà..." e per quanto riguarda le chiese "...nei giorni festivi son sempre affollatissime e nei giorni feriali non poco frequentate da ogni ceto di persone..."

Molto probabilmente la verità sta nel mezzo: era quello, per la Chiesa in generale e per quella torinese in particolare, un momento piuttosto difficile segnato sia da un "mondo esterno" visto sempre più in allontanamento e sempre più ostile sia da una vivace dialettica interna relativamente alla presenza cristiana in una società nella quale cambiavano i sistemi di valori e la stessa struttura.

Sono gli anni nei quali si afferma, all'Università di Torino, una forte corrente positivista e se da un lato ci si cautela con un principio di divisione di campi e di fini tra la scienza e la religione, dall'altro diventa spesso difficile separare questo da una linea di tendenza di propagazione di idee dichiaratamente antireligiose.

Francesco Faà di Bruno, oltre a contrastare questo anticlericalismo diffuso con la pubblicazione dell'almanacco, vuole inserirsi a pieno titolo nella comunità matematica nazionale, collaborando agli "Annali di Scienze matematiche e fisiche", curando la sezione di fisica e matematica di "Il Cimento: Rivista di Scienze, Lettere ed Arti" e cercando di impiantare un osservatorio meteorologico nel palazzo dell'Accademia delle Scienze: qui (in tempi di inquinamento luminoso minore di quello attuale, siamo nel pieno centro di Torino) aveva sede un osservatorio, ma la sua sezione metereologica, diretta da Antonio Maria Vassalli Eandi era stata, dall'anno della sua morte (1825), piuttosto trascurata. La proposta viene rifiutata dall'Accademia per mancanza di fondi e Faà, amareggiato, scrive al fratello Alessandro:

> *Ti dirò in confidenza che io son quasi deciso di andar all'Osservatorio di Parigi per impratichirmi nell'Astronomia e poi succedere a Plana. Tutto è pronto. Il Governo mi darà una raccomandazione ufficiale, e Leverrier una stanza nell'Osservatorio.*

Il 22 maggio del 1854 Francesco è a Parigi, alloggiato in Rue Impasse des Feuillantines di fronte all'École Normale e nei pressi della chiesa di Saint Jacques: vi resterà sino alla fine del 1856.

Il lavoro all'osservatorio è pesantissimo: LeVerrier, infatti, impone a Faà dei turni di osservazione pesantissimi; non solo, ma Francesco riceve anche l'incarico di rivedere tutti i suoi articoli prima della pubblicazione: non c'è da stupirsi che Faà decida, molto presto, di andarsene e inizi i due anni di corso alla Sorbona che lo porteranno a discutere le due tesi (una in matematica e l'altra in astronomia) di fronte alla Facoltà di Scienze, ottenendo infine il titolo di *Docteur ès-Sciences Mathèmatiques* il 20 ottobre del 1856.

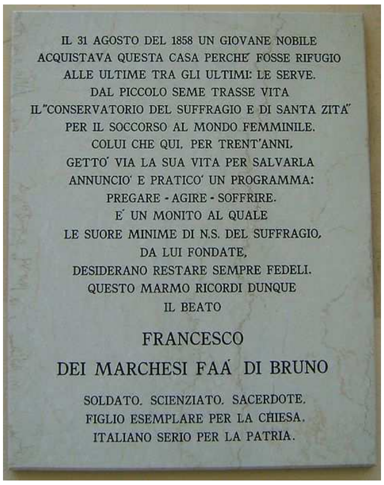
Il 16 dicembre dello stesso anno consegna sei casse e un pianoforte alla *Gare de Lyon*, e il 30, nuovamente residente a Torino, scrive al ministro della pubblica istruzione Giovanni Lanza chiedendo l'istituzione di una cattedra di analisi superiore ed offrendosi di tenerne l'insegnamento, sottolineandone la novità per l'ateneo torinese: nelle parole di Angelo Genocchi, docente di Algebra e Geometria Complementare, [era] "*invalso l'andazzo di gettare il discredito sugli studi teorici […] non doversi dimenticare che lo scopo dell'insegnamento della matematica astratta nella nostra Università è quello di abilitare la massima parte degli allievi alle applicazioni dell'arte dell'Ingegnere, ed un tenue numero a quello della fisica".*

Nonostante l'ambiente non sia dei più favorevoli, Faà riesce a portare avanti le lezioni di analisi e di astronomia e finalmente, il 21 novembre del 1860, può pronunciare il discorso *Vantaggi delle scienze. Discorso del Cavaliere Francesco Faà di Bruno Capitano onorario di Stato Maggiore, dottore in Iscienze dell'Università di Parigi in occasione di sua solenne*

[15] Che porta i rispettosi del precetto pasquale ai tre quinti della popolazione adulta e una abbondante metà della medesima popolazione presente regolarmente alla messa festiva.

aggregazione alla Facoltà di Scienze Fisiche e Matematiche nella Regia Università di Torino.

Gli anni dal 1859 al 1875 sono, dal punto di vista accademico, fonti di grosse delusioni per Faà di Bruno: nonostante i ripetuti tentativi gli vengono rifiutate tutte le domande di insegnamento. Secondo l'opinione comune, tutti questi rifiuti nascono dall'opposizione di Francesco Brioschi: non solo i loro campi di interesse in matematica si sovrapponevano quasi perfettamente, ma Brioschi, partendo come mazziniano intransigente, era approdato ad un radicale anticlericalismo[16].



3 *Targa sull'abitazione di Francesco, Torino, via San Donato.*

La stasi intellettuale nella quale viene mantenuto Francesco lo porta ad esprimersi nelle iniziative a scopo caritativo e sociale: si deve a lui la creazione dell'Opera di Santa Zita, nata per l'accoglienza temporanea delle domestiche disoccupate, espanderà la sua attività negli anni successivi verso le portatrici di handicap, le anziane, le neoinurbate e le malate; non solo, ma crea una scuola di canto femminile, bagni, lavatoi pubblici, biblioteche circolanti e una tipografia.

Il 13 dicembre 1875, quando viene finalmente indetto un concorso per titoli per la cattedra di Analisi Superiore, Faà presenta il curriculum ("tripartito in libri, articoli ed invenzioni"), e non resiste a lanciare qualche frecciata:

> "[...] *scritti che sarebbero stati seguiti da altri, ove lo sprone dell'insegnamento non avesse mancato ad eccitarne la redazione".*

La nomina ritarda, e Faà è ormai deciso a diventare sacerdote:

> *"Finirò con giugno il mio Corso; e poi comunque vada , mi ritirerò, più disgustato di prima del mondo, che aderge i tumultuanti ignoranti ed abbatte i tranquilli scienziati"* .

Nella seduta del Consiglio Superiore di Pubblica Istruzione, Brioschi presenta una relazione sulle decisioni della commissione: la commissione in realtà non si è mai riunita, ma il risultato ufficiale è che sui cinque membri tre (Beltrami, Casorati e Brioschi) sono favorevoli alla nomina a professore straordinario, uno (Trudi) lo propone ordinario e Dini, con il suo approccio rigorista all'Analisi (esattamente l'opposto di quello di Faà di Bruno) contrario a qualunque nomina; nonostante sia favorevole alla nomina, Brioschi mostra la sua ostilità riferendo voci su una presunta mancanza delle capacità didattiche ed espositive di Faà, ma finalmente si vota: quindici su sedici, e il 3 ottobre del 1876 arriva il decreto di nomina. E siccome le buone notizie, come le cattive, arrivano tutte assieme, il 22 dello stesso mese è prevista l'ordinazione sacerdotale.

Quale strada seguire? L'unico ad avere dei dubbi sembra essere Francesco.

Angelo Secchi, gesuita e astrofisico:

> *"Ella mi domanda se in questo nuovo stato ha da rinunziare alla Università ed abbandonare la cattedra o continuare nella scuola? Il mio sentimento non è punto esitante su questo punto. Ella deve continuare come prima.* […] *Potremmo così aggiungere uno alla scarsa lista delle notabilità scientifiche le quali onorano la Chiesa".*

Charles Hermite:

[16] In una lettera a Genocchi, Brioschi scrive: "*Ho ricevuto dal* Santo *Faà di Bruno una biografia di Cauchy veramente edificante...*"

> *"Mi raccomando signore, con tutta la mia volontà, affinché la Sua bontà vi conservi almeno in parte alla scienza, che voi avete sempre servito e amato, e vi risparmi le prove con le quali il nostro triste tempo minaccia i cattolici e i preti"*[17].

Negli anni successivi, quando insegna alla Scuola di Magistero[18] di Torino, si ritrova allievi del calibro di Corrado Segre e Giuseppe Peano[19], e inizia a lavorare ad un trattato in tre volumi sulle funzioni ellittiche. La morte lo coglierà il 27 marzo 1888, mentre lavora all'opera:

4 *Francesco Faà di Bruno beatificato, dichiarato poi Santo da Giovanni Paolo II nel 1988.*

> *"Lascio i miei libri matematici alla Facoltà di Scienze Fisiche e Matematiche della Regia Università, con che si apra e siavi una sala di studio speciale per soli Professori i laureati o studenti in matematiche, e si stampi il catalogo analitico ed alfabetico dei medesimi ed altri libri, lasciandone sempre copia visibile ai richiedenti. Se dopo tre anni la Facoltà non accettasse tali condizioni, l'erede venderà la collezione a suo profitto".*

Una scelta coerente con una vita dedicata alla diffusione della scienza, ma anche una mancanza di rassegnazione di fronte ai problemi:

> *È ben deplorabile che in un paese, che per un sentimento lodevole di amor proprio nazionale aspira a porsi al livello d'ogni altro, in qualsiasi cosa, voglia poi dimenticare di proteggere le scienze, le sole veramente che possano procacciargli solida e imperitura gloria, le sole che possano guidare con mano sicura e intelligente le varie industrie sorde e cieche per natura ed interesse alla voce ed alla luce del progresso.*
>
> *E qui occorre un riflesso a noi Italiani. Come mai si potrà sperare in Italia un qualche gran lavoro, o una qualche gran scoperta, quando i professori sono trattati con meschinissimo stipendio, insufficiente alla tranquillità cotanto necessaria nelle ricerche scientifiche, si fanno grette economie dov'è la fecondità del sapere, si gittano i milioni dov'è la nullità dell'ignoranza?*

Tra queste due frasi di Francesco passano ventiquattro anni: un secolo e mezzo dopo, su questi temi, non ci resta che sperare di avere la medesima caparbietà.

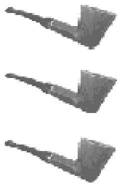
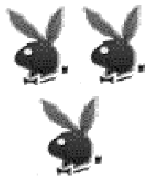
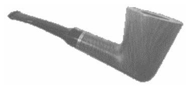
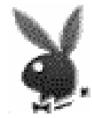
---

[17] "*J'y joins aussi, Monsieur, tous mes voeux, pour que Sa bonté vous conserve, au moins en partie à la science que vous avez aussi servie et affectionée, et vous epargne les épreuves dont notre triste temps menace les catholiques et sourtout les prêtres.*"

[18] Queste scuole, istituite dal ministro Ruggero Bonghi, avevano il duplice scopo di avviare gli studenti alla ricerca e prepararli all'insegnamento secondario.

[19] RM067, agosto 2004, "Sineddochi".

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Palesemente non è il giardino di Doc			
Festeggiamo!			

2.1 Palesemente non è il giardino di Doc

Forse il titolo ha rovinato il *pathos* dell'*incipit*, ma volevamo chiarire subito il concetto prima che pensaste al nostro Piotr come ad un latifondista con SUV evasore di tasse e investitore di ricci (attività a nostro parere riprovevol*i* quant'altre mai).

Rudy quest'anno non è ancora andato al MAO[20] ma, prima della chiusura invernale[21], ha fatto un salto alla Reggia della Venaria, e si è fatto un giro per i giardini: sono enormi, e il paragone con Versailles ormai regge tranquillamente, non perdeteveli.

Va detto che manca, diciamo così, un "blocco" alla visuale: lo sguardo spazia fino alle Alpi, con il dovuto e inopportuno contorno di condominii, inceneritori e *boite*[22] in odore di evasione fiscale.

Il chiedervi di progettare una alberatura (o "collinatura": a Schoenbrunn hanno fatto così) adatta sarebbe stato troppo facile, ma Rudy, da bravo Bastian Contrario[23], ha provato a girare attorno al problema.

Prendiamo un parco enorme, circolare e perfettamente pianeggiante, per il momento di raggio 9801 (decimetri, probabilmente... preferite usare R? Fate pure, anzi, meglio): piantiamo, all'interno del nostro parco, in tutti i punti a coordinate intere tranne nell'origine, delle *betulle*, che hanno le interessanti caratteristiche di crescere tutte alla stessa velocità (...molto alta, tra l'altro...) e di avere il tronco perfettamente cilindrico[24].

Quando crescono, crescono anche in orizzontale, anche se più lentamente che in verticale: crescendo, inibiscono la visione del centro del parco ad un sempre maggior numero di punti situati all'esterno del parco: e qui sorge la domanda.

Ma in funzione del raggio del parco, quale deve essere il raggio dei tronchi di betulla per impedire la visione del centro a *tutti* i punti *al di fuori* del cerchio?

Prendetevela pure comoda, tanto a Venaria non lo faranno mai: vogliono che il giardino *si veda*, e hanno perfettamente ragione.

2.2 Festeggiamo!

No, dico, è dal *febbraio 1999* che scriviamo 'ste robe!

[20] Museo di Arte Orientale. Neanche voi? Ciò è ***MALE***.

[21] Si sta scatenando un grande dibattito in merito, visto che qualcuno la considera un'emerita asinata: comunque a primavera promette di essere una meraviglia, nel periodo della fioritura.

[22] Quelle che i milanesi chiamano *fabrichete*.

[23] Abbonamento vitalizio a RM a chi riesce a trovare l'origine di questa espressione tipicamente torinese. Rudy la conosce, quindi non barate.

[24] Terza caratteristica: legno assolutamente inutile. Almeno siamo sicuri che nessuno viene a tagliarcele.

"Rudy, guarda che hai già fatto festa il mese scorso. Se proprio vuoi far festa questo mese, prova con il tuo compleanno". Nah. Sapete tutti che sono un pessimista nato, e non mi sognerei mai di mettere per certo a fine gennaio una cosa che succede a metà marzo. Comunque, il pensarci verso fine gennaio permette di avere anche la felice coincidenza di un altro genetliaco: quello del VadLdRM più giovane, Fred *[e se volevate fargli gli auguri ormai è tardi:* sapevatelo *per l'anno prossimo]*.

"OK, festeggiamo. In che modo? Porti da bere?" Ma neanche per sogno. *In primis*, prendiamo un problema comparso su uno dei *primerrimi* numeri di RM, il che ci permette anche di ricordare il Grande Nume Ispiratore del tutto *[ciao, Martin!]*. I*n secundis*, vi ci cacciamo dentro e vi facciamo fare qualcosa.

Ricordate sicuramente tutti il problema di Martin Gardner "I cadetti in marcia e il cane che trotterella"[25]: bene, l'idea è che, per festeggiare RM, voialtri organizziate una corposa sfilata.

Nel momento stesso nel quale la prima riga *de' voantri* parte, quattro loschi figuri sono presenti sulla linea di partenza:

1. ***Paola***, moglie di Rudy: essendo biellese[26], partecipa alla sfilata per festeggiare che in tutti questi anni non si è speso neanche un soldo. Per risparmiare, la fa a piedi con calma.
2. ***Rudy***, che, essendo il meno comunicativo della banda *[timidezza, ma non stiamo a discuterne]*, preferisce lasciare l'interazione nel corteo ai suoi due colleghi,
3. ***Fred***, che giusto per esser sicuro di farsi notare intende farsi la sfilata in pattini a rotelle;
4. ***Alberto***, che essendo il più pigro della banda, eseguirà il compito in bicicletta.

I nostri quattro eroi partono dalla linea di partenza della sfilata, contemporaneamente a voi, ciascuno a velocità costante: prima risalgono il vostro schieramento controcorrente, poi girano in tempo zero di centottanta gradi, e ripartono verso la testa. Raggiuntala, prendono appunti.

Coscienziosamente (...vuoi non mettere in conto l'usura pneumatici?) misurano la distanza percorsa, che risulta un numeri intero di metri diverso per ognuno di loro (e anche il corteo ha percorso una distanza diversa); altrettanto coscienziosamente (vuoi non mettere in conto l'usura di ben altro?) misurano il tempo impiegato, che è un numero intero di minuti.

Intervistando il mitico *Primo Abbonato,* scoprono che il corteo è lungo 600 metri e che si muove alla velocità di 3 chilometri l'ora (...ve la siete presa calma, eh?).

A questo punto, i Nostri Eroi vorrebbero sapere a che velocità si muovevano e quale distanza hanno percorso: ma conoscete le notorie incapacità matematiche dei tre, vero?

Rudy ha intenzione di ottenere, in cambio dei calcoli, la garanzia di poter spendere *ben dieci euro* in una chiavetta USB nuova. Ora, se volete che il prossimo numero sia scritto in tempi ragionevoli, vi conviene dargli una mano...

3. Bungee Jumpers

Tre problemi non troppo difficili, questa volta. Almeno, per gli standard della sezione.

3.1 Un numero da generare

Il numero 0,1234567891011121314...,ottenuto scrivendo di seguito tutti gli interi, è razionale?

[25] "Enigmi e Giochi Matematici", Vol. 3, Cap. 3, Probl. 4. Stesse coordinate su "New Mathematical Diversions". Non abbiamo le pubblicazioni su SciAm e LeSci ma, *si parva licet*, RM012P2: "La parata di Natale".

[26] Vi ricordiamo che il *genus* biellese nasce dal *Lost Clan* scozzese e dalla progenie di tale *Giobatta Parodi*, palesemente genovese. Deducete la componente di tirchieria.

3.2 "Trilancia" in equilibrio

Sono forniti i 27 pesi 1^2, 2^2, 3^2, …, 27^2. Raggrupparli in tre insiemi di ugual peso.

3.3 Non semplice come sembra

Un poligono regolare dai vertici e lati indistinguibili tra loro ha uno spillo nel centro che lo trasforma in una trottola. Una rotazione di 25°30' porta il nostro oggetto in una posizione indistinguibile da quella iniziale. Quanti lati ha il poligono?

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Marzo!

A marzo festeggiamo il Capo, che è l'unico di noi che prepara tutte le sue cose in tempo, che è sempre pronto in anticipo e che agli appuntamenti (virtuali e non) aspetta sempre tutti gli altri perché arriva presto, molto presto: è forse l'unica persona che conosco che arriva alla stazione così presto da poter prendere a volte il treno precedente a quello che aveva previsto. Lo festeggiamo uscendo come al solito in ritardo, perché noi altri due fannulloni non possiamo fare diversamente. Però lo sappiamo che voi lo festeggerete meglio di noi con le vostre soluzioni e commenti.

5 *Tanti auguri, Rudy!*

In realtà, come forse vi abbiamo già detto, c'è un altro RMer che condivide il genetliaco con il Capo, trattasi di ***Sawdust***, che ogni anno ci copre di regali in forma – tra le altre – di soluzioni inaspettate. Ne vedrete qualcuna più avanti. Qui gli facciamo gli auguri, per cominciare.

Vi devo poi delle scuse, perché non ho avuto tempo e modo di fare pulizia nelle varie soluzioni che mi avete mandato per il Summer Contest. Spero di poterlo fare a primavera, con le pulizie di primavera del sito e altre novità che – se tutto va a buon fine – vi racconterò il mese prossimo.

Vi devo invece passare una gustosa *errata corrige* del compleanno del mese scorso: noi ci premuriamo sempre di prendere in giro le cattive traduzioni di lingue straniere, e al nostro grande compleannista è scappato un errore classico per un "falso amico". In RM169 compariva la traduzione di questa frase: "*My Lord, I have undertaken this long journey purposely to see your person, and to know by what engine of wit or ingenuity you came first to think of this most excellent help unto astronomy…*". Ci ha scritto ***Gian Paolo***:

> Nell'articolo "Canali di comunicazione" del numero 169, poco dopo la nota 5 che cita i 'falsi amici', a pag 11, nella traduzione delle parole di Briggs a Napier, si legge "... quale anelito di saggezza o di INGENUITÀ...". Ricordo che la parola *ingenuity* (accento sulla u) significa *ingegnosità* e non, ahime!, ingenuità, che in inglese fa *ingenuousness*.

L'errore – che certo è un errore – è amplificato ironicamente dall'accenno ai falsi amici, e alla nota precedente. Siamo orgogliosi dei nostri lettori.

Per questo mese taglio di nuovo corto e passo subito alle soluzioni.

4.1 [Calendari]

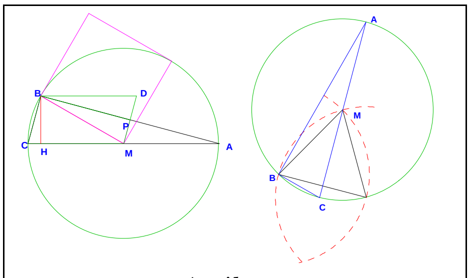
Tutte le soluzioni che vedrete qui sono di ***Sawdust***, e sono tutte belle, soprattutto la prima, che è in realtà la sua seconda versione. Godetevele senza i miei commenti, per una volta, con tanti auguri a tutti quelli che sono nati a marzo come ***Rudy*** e ***Sawdust***.

Tra l'altro: per il calendario in corso ho istituito la regola di non pubblicare le soluzioni dei mesi futuri, e per questo ne ho ancora un bel po', da pubblicare. Spero che chi me le ha mandate sappia mandarmi anche un bel *reminder* a tempo debito…

4.1.1 Aprile 2006 – IMO 1959 – 4

Data la lunghezza $|AC|$, costruire un triangolo ABC rettangolo in B e con la mediana BM soddisfacente $BM^2 = AB \cdot BC$.

La situazione è rappresentata qui a lato, dato che, essendo rettangolo, il triangolo è inscritto in una semicirconferenza.



6 *Aprile 2006*

Inoltre dall'enunciato risulta che il doppio dell'area del triangolo *ABC* è pari all'area del quadrato costruito sulla mediana *BM*, ossia sul raggio del cerchio circoscritto al triangolo in questione.

Però il triangolo *ABC* ha la stessa area del parallelogramma di lati *BC* e *CM* e di conseguenza la sua altezza *BH* deve essere metà del lato del quadrato.

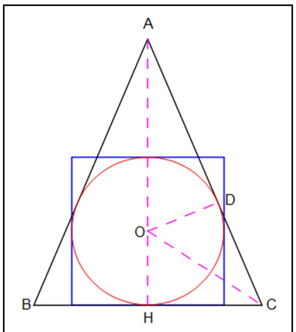
Ma un triangolo rettangolo il cui cateto minore sia metà dell'ipotenusa è la metà di un triangolo equilatero.

Perciò basta prendere un punto a caso *B* sulla circonferenza di raggio *MB* e disegnare la semplice costruzione presentata qui a lato (e che non ritengo abbia bisogno di spiegazioni) per ottenere il triangolo *ABC* richiesto.

4.1.2 Dicembre 2006 – IMO 1960 – 6

Un cono di rivoluzione ha una sfera inscritta tangente alla base del cono e alla superficie laterale del cono. Un cilindro è circoscritto alla sfera in modo tale che la sua base giace sulla base del cono. Il volume del cono vale V_1 e il volume del cilindro vale V_2. Provare che $V_1 <> V_2$. Trovare il valore minimo di V_1 / V_2. Per questo caso, costruire il semiangolo del cono.

Posto uguale a *r* il raggio della sfera, abbiamo



7 Dicembre 2006

$$V_3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V_2 = 2\pi r^3$$

$$V_1 = ????$$

Il volume di un cono retto è $V_c = \dfrac{\pi {r_b}^2 h}{3}$.

Detto α l'angolo CAH risulta

$$\overline{OA} = \frac{r}{\sin\alpha}$$

$$\overline{HC} = \left(\overline{OA} + r\right)\tan\alpha = \left(\frac{r}{\sin\alpha} + r\right)\tan\alpha$$

$$\overline{HC} = \left(\frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}\right)\tan\alpha = \frac{(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha} r$$

da cui il volume del cono è

$$V_1 = \frac{\pi}{3}\left[r\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha}\right] r^2 \left(\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = \frac{\pi r^3 (1+\sin\alpha)^3}{3\sin\alpha\cos^2\alpha}$$

perciò possiamo dire che

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi r^3(1+\sin\alpha)^3}{3\sin\alpha\cos^2\alpha}\cdot\frac{1}{2\pi r^3}=\frac{(1+\sin\alpha)^3}{6\sin\alpha\cos^2\alpha}$$

e la derivata di questa funzione

$$\partial\left(\frac{V_1}{V_2}\right)=\frac{3\cos\alpha(1+\sin\alpha)^2\cdot 6\sin\alpha\cos^2\alpha-(1+\sin\alpha)^3\cdot\left(-12\sin^2\alpha\cos\alpha+6\cos^3\alpha\right)}{\left(6\sin\alpha\cos^2\alpha\right)^2}=$$

$$=\frac{18\sin\alpha\cos^3\alpha(1+\sin\alpha)^2-\left(6\cos^3\alpha-12\sin^2\alpha\cos\alpha\right)(1+\sin\alpha)^3}{36\sin^2\alpha\cos^4\alpha}=$$

$$=\frac{6\cos\alpha(1+\sin\alpha)^2\left[3\sin\alpha\cos^2\alpha-(1+\sin\alpha)\left(\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha\right)\right]}{36\sin^2\alpha\cos^4\alpha}=$$

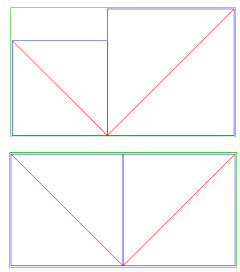
$$=\frac{(1+\sin\alpha)^2\left[3\sin\alpha\cos^2\alpha-(1+\sin\alpha)\left(\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha\right)\right]}{6\sin^2\alpha\cos^3\alpha}$$

si azzera per α = 0,3398 rad = 19,47122° = 19° 28' 16,4" (e così AH = 4*r*) con V_1 / V_2 pari a 4/3, mentre invece il rapporto minimo tra le aree del triangolo e del rettangolo generatori del cono e del cilindro si ha con α = 30° e AH = 3*r*. Chiaramente, visto che il rapporto minimo è 4/3 è anche vero che V_1 è diverso da V_2. Q.E.D.

4.1.3 Gennaio 2011 – Putnam 1996 – A1

> *Trovare il minimo numero A tale che per qualsiasi due quadrati di area totale 1, esiste un rettangolo di area A tale che i due quadrati siano completamente contenuti nel rettangolo senza sovrapposizioni tra di loro. Assumete che i lati dei quadrati siano paralleli ai lati del rettangolo.*

Quelli a lato sono 2 disegni molto approssimativi delle condizioni del problema, in cui i lati del rettangolo sono stati lasciati abbondanti per evidenziarli.



8 *Gennaio 2011*

Detti *b* e *c* i lati dei 2 quadrati, le loro aree sono

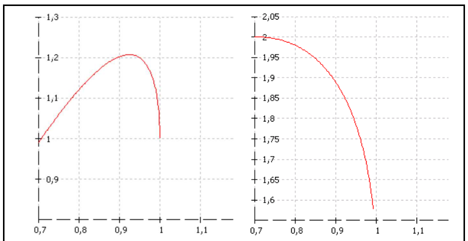
$$A_{Q1}=b^2$$

$$A_{Q2}=c^2$$

e deve valere $b^2 + c^2 = 1$; i lati del rettangolo sono *b* e *b* + *c*, per cui si deve trovare il minimo di $A=b(b+c)$.

Posto *b* = *x*, si ha $c=\sqrt{1-x^2}$, da cui $A=x^2+x\sqrt{1-x^2}$, che per $\sqrt{0.5}\le x<1$ ha il minimo pari a 1 nel caso di 2 quadrati uguali.

I 2 grafici che seguono mostrano l'andamento di *A* (massima [*A* = 1.207] per *b* = 0.924) e della somma delle diagonali dei quadrati (massima per *b* = $\sqrt{0.5}$) al crescere di *b*.



9 *Grafici di* ***Sawdust***

4.1.4 Febbraio 2011 – Putnam 1996 – A2

> *Siano C1 e C2 cerchi i cui centri distino 10 unità l'uno dall'altro, e i cui raggi valgano 1 e 3. Trovate il luogo di tutti i punti M per cui esistono dei punti X su C1 e Y su C2 tali che M sia il punto medio del segmento XY.*

Posto il centro di *C*1 (che chiameremo *A*) nell'origine di un sistema di assi cartesiani e il centro di *C*2 (che indicheremo con *B*) nel punto di coordinate (10, 0), le equazioni dei due cerchi saranno

$$C1 \;\; x^2 + y^2 = 1$$
$$C2 \;\; (x-10)^2 + y^2 = 9$$

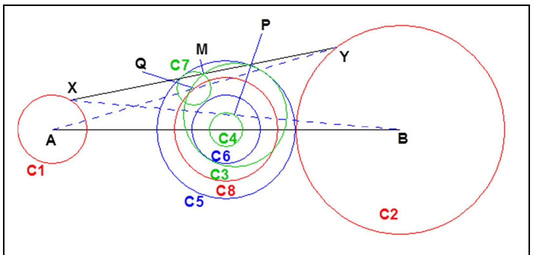
Se da un punto $X\,(x_1,y_1)$ di $C1$ si portano n segmenti in n punti $Y\,(x_2, y_2)$ di $C2$, i loro punti medi tracciano un cerchio $C3$ con centro nel punto P, medio del segmento XB, e di raggio R pari alla metà del raggio di $C2$.

Al variare di X su $C1$ il centro di $C3$ si muove su di una circonferenza $C4$ che ha per centro il punto medio di AB e ha raggio pari alla metà del raggio di $C1$.

Di conseguenza i punti M si trovano tutti su di un cerchio $C5$ di centro (5,0) e raggio 2 (dato dalla metà della somma dei raggi di $C1$ e $C2$) e la cui equazione è

$$x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0$$

Se invece i punti X e Y si muovono solo sulle rispettive circonferenze i punti M giacciono all'interno di una corona circolare ($C5$ e $C6$) centrata sempre nel punto medio di AB e i cui raggi sono la metà della somma e la metà della differenza dei raggi di $C1$ e $C2$, quindi, in questo caso, 2 e 1.



10 *Febbraio 2011*

Più precisamente i punti M sono in una delle intersezioni tra due circonferenze, una delle quali è la $C3$, che è tangente internamente a $C5$ ed ha come tangente interna $C6$, e l'altra è $C7$ che rotola tra $C5$ e $C6$ col centro Q su $C8$ (anch'essa centrata nel punto medio di AB, e di raggio pari alla metà del raggio di $C2$).

Quindi il luogo dei punti M è la parte di piano compresa tra le circonferenze

$$x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0 \qquad \text{e} \qquad x^2 + y^2 - 10x + 24 = 0\ .$$

4.2 [169]

4.2.1 ...ma quanto ci costate?

Ah, il Capo sta finendo i problemi? No, non ci crede nessuno. Vi ha fornito persino parecchi mesi di tre per due – spesso ignorati dai più… quindi non fatevi spaventare dai suoi peana. Questo mese, i problemi erano due in uno, direi, il primo:

> *Rudy e Doc invitano per il tè due prof, a cui non vogliono chiedere l'età, ma vorrebbero servire per prima la meno giovane; quello che vi chiediamo è di trovare un modo per stabilire giustappunto quale sia la meno stagionata, ma senza che nessuno sappia le loro età.*

E non finisce qui, ecco il secondo:

> *Avete tre persone che vogliono sapere, con il minimo numero di domande, quale sia la media dei loro salari senza che nessuno conosca, se possibile, l'ammontare esatto degli altri due. Rispetto alle prof di Mate, abbiamo portato da due a tre i giocatori... si può generalizzare?*

A cui seguivano estensioni varie ed eventuali. L'idea delle signorine attempate ci ha divertito molto, e così sembra anche ***Alberto R.*** e ***Tartaruga***, che si sono dati parecchio da fare. Cominciamo da ***Alberto R.***:

> Diamo una busta a ciascuna signora perché ci metta tanti fagioli quanti sono i suoi anni. Poi, con una bilancia a due piatti, confrontiamo i pesi.
>
> In caso di difficoltà a reperire la bilancia a due piatti (ormai si trovano solo nei musei) diamo loro un gomitolo di spago e una fettuccia metrica chiedendo a ciascuna signora di tagliare un pezzo di spago lungo tanti centimetri quanti sono i suoi anni. Poi vediamo quale spago è più lungo.

Questi metodi "fisici" hanno l'inconveniente di fornire inevitabilmente una sia pur grossolana informazione circa le quantità che dovrebbero restare segrete, poiché si può stimare a occhio la lunghezza di uno spago o quanti fagioli ci sono in una busta. Nel caso specifico l'inconveniente è irrilevante perché l'età approssimativa delle due insegnanti è già nota. Basta guardarle.

Ma supponiamo, invece, di voler sapere, conservando la privacy, quale delle due ha più denaro in conto corrente o in titoli. In tal caso deve restare segreto non solo l'importo esatto del capitale ma anche il suo ordine di grandezza.

Ecco come si fa:

Con un cerotto nascondiamo il display di una calcolatrice. Chiediamo alla prima signora di inserire la sua ricchezza e alla seconda di sottrarre la sua. Poi chiediamo alla prima di moltiplicare il risultato per un numero positivo ottenuto premendo tasti a casaccio. L'altra signora farà la stessa cosa. Diamo il comando di radice quadrata e togliamo il cerotto. Se compare un messaggio di errore (radice di un numero negativo) la seconda è più ricca; se invece compare un risultato numerico è più ricca la prima, e non è possibile per l'una risalire al capitale dell'altra poiché ognuna ignora il moltiplicatore random inserito dall'altra.

La calcolatrice col cerotto risolve banalmente anche il problema di trovare, sotto vincolo di reciproca riservatezza, il reddito medio di tre (o più) persone: ognuno inserisce il suo reddito come addendo, poi si toglie il cerotto e si legge la somma.

Vi sento borbottare: ...soluzione è fraudolenta... sta scritto "...*con il minimo numero di domande*..." quindi... Ebbene sì. Soluzione con *zero* domande. Che volete di meglio come *numero minimo*?

A me sembra bellissima, veramente. Vediamo che dice ***Tartaruga***:

Dapprima affronto il secondo quesito, quello relativo allo stipendio medio dei 3 politici.

Ognuno dei 3 divide il suo stipendio in 3 addendi in modo casuale.

Per il politico 1 il suo stipendio è quindi pari a $X_{11}+X_{12}+X_{13}$, per il 2 è pari a $X_{21}+X_{22}+X_{23}$, per il 3 è pari a $X_{31}+X_{32}+X_{33}$.

Ognuno fornisce al politico i la parte che ha secondo indice pari a i; quindi alla fine il politico 1 ha X_{11} (ovviamente), X_{21} e X_{31} , analogamente il politico 2 ha X_{12} , X_{22} , X_{32} e il politico 3 ha X_{13} , X_{23} , X_{33}.

Il politico 1 calcola la somma $X_{11}+ X_{21}+ X_{31}$ e la rende pubblica, analogamente fanno gli altri.

Sommando le somme rese pubbliche si ottiene $X_{11}+ X_{21}+ X_{31} + X_{12}+ X_{22}+ X_{32} + X_{13}+ X_{23}+ X_{33}$, che è esattamente la somma dei 3 stipendi. Dividendo per 3 si ottiene lo stipendio medio.

Si vede facilmente che un singolo può facilmente calcolare la somma degli stipendi degli altri due, ma non ha abbastanza informazioni per sapere i singoli stipendi (ovviamente, tranne il suo).

L'algoritmo è facilmente generalizzabile a N politici dividendo gli stipendi in 3 parti, indicizzandole in modo analogo a quanto fatto per 3, distribuendo le parti secondo i secondi indici e pubblicando le somme, dividendo poi per N la somma totale.

Se uno solo bara, può calcolare comunque lo stipendio medio detraendo la quantità di cui ha barato prima di dividere per N.

Purtroppo l'algoritmo non può essere adattato al caso delle due prof di Mate, in quanto conoscendo la somma delle loro età è facile per ciascuna calcolare l'età dell'altra.

Ho immaginato quindi il seguente algoritmo:

- Sia X1 l'età della prof 1 e X2 quella della prof 2;

- La prof 1 sceglie un numero K1, la prof 2 sceglie un numero K2
- La prof 1 calcola Y1=K1*X1, e passa il risultato alla prof 2;
- La prof 2 calcola Y2=K2*X2, e passa il risultato alla prof 1;
- La prof 1 calcola Z1=K1*Y2=K1*K2*X2;
- La prof 2 calcola Z2=K2*Y1=K1*K2*X1;
- È evidente che se Z1>Z2 allora X2>X1, quindi la prof 1 è la più giovane, se Z1<Z2 allora X2<X1, quindi la prof 2 è la più giovane, se Z1=Z2 allora X1=X2 e le due prof hanno la stessa età;
- Tramite sorteggio si sceglie quale prof deve iniziare, supponiamo sia la prof 1;
- La prof 1 comunica alla prof 2 qual è la prima cifra di Z1, se la prof 2 vede che la prima cifra di Z2 è superiore può annunciare di essere la più giovane, se vede che è inferiore può annunciare di essere la meno giovane, altrimenti si passa al caso successivo;
- La prof 2 comunica alla prof 1 qual è la seconda cifra di Z2, se la prof 1 vede che la seconda cifra di Z1 è superiore può annunciare di essere la più giovane, se vede che è inferiore può annunciare di essere la meno giovane, altrimenti si passa al caso successivo;
- Si va avanti così finché non si trova una cifra differente, a quel punto si sa chi è la più giovane.

Un esempio, con numeri piccoli per semplicità: la prof 1 ha 77 anni, la prof 2 76; la prof 1 sceglie K1=39, la prof 2 sceglie K2=47; risulta Y1=39*77=3003, Y2=47*76=3572, Z1=39*3572=139308, Z2=47*3003=141141.

Al primo turno la cifra è 1 sia per Z1 che per Z2, al secondo turno la cifra è 3 per Z1 e 4 per Z2, quindi si determina che 1 è la meno giovane.

Ovviamente, trattandosi di prof di Mate, potrebbe essere facile per loro fattorizzare Y1 e Y2 per sapere l'età; per complicare si potrebbero utilizzare come X1 e X2 numeri ottenuti giustapponendo anno, mese e giorno di nascita inserendo gli zeri opportuni su mesi e giorni di una cifra per mantenere l'ordinamento numerico, e addirittura aggiungendo un numero fisso di cifre casuali in fondo per aumentare la grandezza del numero, e usare K1 e K2 con molte cifre, così si potrebbe sfruttare appieno la difficoltà di fattorizzare grandi numeri.

Oltretutto l'utilizzo della data di nascita (con ora e minuto di nascita se disponibile) renderebbe meno probabile il caso di età identica, caso in cui ovviamente ognuna delle due prof saprebbe l'età dell'altra.

L'immagine delle prof che fattorizzano come pazze per cercare di scoprire l'età della rivale è favolosa. In realtà lo stesso ***Tartaruga*** ci ha ripensato e ci ha mandato un *addendum*:

Effettuando alcune verifiche, ho visto che la prima soluzione per determinare quale delle due prof di Mate è la più giovane non è molto robusta. Almeno una delle due ha abbastanza informazioni dai dati a sua disposizione per determinare l'età dell'altra. Ho studiato varie possibilità alternative, da cui mi sembra che per evitare il problema occorre l'intervento di una terza persona, che potrebbe essere Rudy o Piotr.

Ho ipotizzato quindi il seguente algoritmo (ipotizzo che Rudy sia la terza persona):

- Ognuna delle due prof costruisce un numero costituito da anno, mese e giorno di nascita, inserendo zeri su mese e giorno se necessario (per esempio il 2 gennaio 1940 sarebbe 19400102) in modo da avere un numero di 8 cifre. I numeri ottenuti siano X1 e X2 per le prof 1 e 2 rispettivamente; ovviamente se X1 > X2 la prof 1 è la più giovane, se X1<X2 la prof 2 è la più giovane, se per uno strano caso X1=X2 le due prof hanno la stessa età.

- Ognuna sceglie un moltiplicatore di 7 cifre (di cui la prima maggiore di 1) che mantiene segreto; siano K1 e K2 per le prof 1 e 2 rispettivamente.
- La prof 1 moltiplica X1 per K1, elimina le 6 cifre meno significative e passa il risultato (Y1) alla prof 2;
- La prof 2 moltiplica X2 per K2, elimina le 6 cifre meno significative e passa il risultato (Y2) alla prof 1;
- La prof 1 moltiplica Y2 per K1, elimina le 6 cifre meno significative e passa il risultato (Z1) a Rudy;
- La prof 2 moltiplica Y1 per K2, elimina le 6 cifre meno significative e passa il risultato (Z2) a Rudy;
- Rudy confronta i due numeri e dice quale è il maggiore. Se il maggiore è Z1 la prof 1 è la meno giovane, se il maggiore è Z2 la prof 2 è la meno giovane.

Vediamo in dettaglio come funziona l'algoritmo.

Se ignoriamo l'eliminazione delle 6 cifre meno significative, il numero passato dalla prof 1 a Rudy è Z1=K1*K2*X2, il numero passato dalla prof 2 a Rudy è Z2=K1*K2*X1. È quindi evidente che Z1>Z2 implica che X2>X1, quindi la prof 1 ha una data di nascita precedente quella della prof 2 e quindi è meno giovane. Se Z1<Z2, l'argomentazione si inverte e quindi la prof 1 è la meno giovane. In caso di Z1=Z2 le due prof sono coetanee.

Ora si dimostra che eliminare le 6 cifre meno significative nei passaggi intermedi non influenza l'ordinamento, cioè se X1>X2 allora Z1<Z2 e se X1<X2 allora Z1>Z2.

Ipotizziamo che sia X1<X2. Nel peggiore dei casi in entrambe le operazioni relative a X1 le 6 cifre meno significative sono tutte 0, e in entrambe le operazioni relative a X2 sono tutte 9. Allora si ha che Z2=K1*K2*X1/1000000000000, mentre Z1=(K1*(K2*X2–999999)–999999)/1000000000000. Vogliamo dimostrare che comunque Z1>Z2.

Siccome X1<X2, X2=X1+1+a, con a>=0, ipotizziamo il caso peggiore a=0, sostituendo nel valore di Z1 si ha:

Z1 = (K1*(K2*X1+K2–999999)–999999)/1000000000000, cioè

Z1 = (K1*K2*X1+K1*K2–K1*999999–999999)/1000000000000, cioè

Z1 = K1*K2*X1/1000000000000 + (K1*K2–K1*999999–999999)/1000000000000

Il primo addendo della somma è semplicemente Z2, per quanto riguarda il secondo si ha per definizione che K2 > 1999999, quindi (K1*K2–K1*999999) > (K1*1000000); essendo anche per definizione K1 > 1999999, si ha (K1*K2–K1*999999–999999) > K1*999999, ed essendo K1 > 1999999 si ha anche (K1*999999) > 1000000000000, quindi anche (K1*K2–K1*999999–999999) > 1000000000000, quindi il secondo addendo è almeno 1. Quindi Z1>Z2 come volevamo dimostrare.

L'argomentazione è ovviamente invertibile se X2<X2, si ha Z2>Z1.

L'argomentazione non vale nel caso in cui X1=X2, nel qual caso a seguito dell'eliminazione delle 6 cifre significative nei vari passaggi potrebbe ottenersi Z1<Z2 oppure Z1>Z2 oppure Z1=Z2. Comunque questo non viola la condizione di servire per prima la meno giovane, in quanto non c'è una meno giovane.

Veniamo ora alla inviolabilità dell'algoritmo.

Rudy ha due numeri cui mancano però le 6 cifre meno significative, oltre all'effetto collaterale delle 6 cifre meno significative omesse nei passaggi intermedi. Supponendo che possa ipotizzare la vera data di nascita delle due prof in un range di 5 anni, dovrebbe provare circa 5*365=1825 combinazioni per la prof 1 e probabilmente una decina per la prof 2 per vedere se riesce a ricostruire i casi intermedi, con buone probabilità che sia possibile più di una soluzione. Un lavoro complicato anche programmando un computer per farlo.

Per quanto riguarda le due prof, supponendo che ognuna possa ipotizzare la vera data di nascita dell'altra in un range di 5 anni, potrebbero provare a fattorizzare ognuno del milione di numeri che otterrebbero provando tutte le possibilità delle 6 cifre meno significative omesse, e vedere se in ognuna delle fattorizzazioni ottenute è possibile costruire un numero che rientri nel range, anche qui con elevata possibilità che ci sia più di una soluzione.

Per rendere ancora più complesso l'algoritmo, basterebbe comunque utilizzare dei K1 e K2 per esempio di 30 cifre, omettendo per esempio le 25 cifre meno significative ad ogni passaggio.

Ci comunicano che le due prof hanno lasciato il tè e anche i biscotti e si stanno accapigliando con la calcolatrice. Ci restava comunque il dubbio che il Capo avesse altro in mente, e – quando glielo abbiamo chiesto – ci ha risposto:

L'ha inventato il tizio che è sulla prima copertina di RM (Frank Morgan). La soluzione proposta da lui era di preparare, in una stanza, più di 100 post-it numerati: la prima prof metteva delle "x" sotto tutti i post-it sino alla sua età e li rimetteva a posto, poi la seconda entrava e guardava sotto il post-it corrispondente alla sua età. Se era siglato, lei era la più giovane. Devo dire che il metodo della radice quadrata è una meraviglia.

Vero. Passiamo al secondo problema.

4.2.2 Cosa resta dopo il niente

Ecco il Capo e le sue probabilità. Insopportabile. Davvero. Il problema si riassume in un secondo:

Rudy ha due scatole di "svedesi", ognuna delle quali contiene 40 fiammiferi, e sono alcuni giorni che li tiene in tasca, pescando indifferentemente dall'una o dall'altra per accendere il monumento che si tiene in bocca. Stamattina ha preso una scatola (sempre casualmente) e si è accorto che era vuota: probabilmente, l'altra volta che l'aveva usata l'aveva rimessa in tasca senza pensarci. La domanda è: quanti fiammiferi vi aspettate di trovare, nella scatola restante?

La cosa che più mi ha divertito è che i nostri valenti solutori (che questa volta sono inaspettatamente tutti arrivati alla stessa conclusione) hanno trovato nell'altra scatola frazioni anche piccolissime di fiammifero. Ma dopo aver calcolato quelle orrende probabilità, mi immagino 0.203… fiammiferi siano importanti, eccome.

Comunque, bando alle ciance. Le soluzioni sono di ***Actarus***, ***Alberto R.***, ***Mirhonf*** e ***trentatré***. Cominciamo da ***Actarus***:

Per risolvere questo problema conviene generalizzarlo al caso in cui ci siano inizialmente due scatole di fiammiferi, una contenente N fiammiferi e l'altra contenente K fiammiferi. Considero la matrice $S(N, K)$ che sarà la matrice delle soluzioni del problema al variare di N e di K.

Chiaramente $S(0, 0)=0$ in quanto se non ho fiammiferi inizialmente, la scatola restante avrà 0 fiammiferi. Allo stesso modo risulta chiaro che $S(N, K)=S(K, N)$ per evidenti ragioni di simmetria.

In generale abbiamo che per $N>0$ e $K>0$ $S(N,K)=\frac{S(N-1,K)+S(N,K-1)}{2}$ (per l'equiprobabilità di pescare il fiammifero da una delle due scatole).

Per $K=0$ sarà: $S(N,0)=\frac{S(N-1,0)+N}{2}$ perché se pesco dalla scatola vuota, l'altra scatola avrà N fiammiferi, ed analogamente per $N=0$ sarà: $S(0,K)=\frac{S(0,K-1)+K}{2}$ perché se pesco dalla scatola vuota, l'altra scatola avrà K fiammiferi.

Infine si può notare che: $S(N, K)=S(N–1, K)=S(N, K–1)$, in quanto $S(N, K)$ è uguale alla media tra $S(N–1, K)$ e $S(N, K–1)$ che sono uguali tra loro. Con queste informazioni, risulta facile calcolare in modo ricorsivo il valore di $S(40, 40)$.

Esiste comunque una maniera più semplice, considerata la simmetria della matrice e la sua somiglianza con il triangolo di Tartaglia (con la differenza importante che qui l'operazione da fare in modo ricorsivo è la media mentre nel triangolo di Tartaglia è la somma); infatti con qualche semplice passaggio si trova facilmente che:

$$S(N,N)=\frac{(2*N+1)!!}{2^N*N!}-1$$

Per cui con $N = 40$ abbiamo: $\frac{(81)!!}{2^{40}*40!}-1=$ 6.20315818068648521892296966942825016833734652621501481917221099138259 8876953125.

Lo vedete subito che ***Actarus*** è un nostro lettore da parecchio tempo, perché si è ricordato di menzionare sia le *evidenti ragioni di simmetria*, sia i *semplici passaggi*, il Doc è deliziato. La soluzione di ***Alberto R.*** è velocissima:

Rudy apre una scatola e la trova vuota. Vuol dire che ha già usato 80–N fiammiferi di cui 40 prelevati dalla scatola ora vuota e 40–N dall'altra. La funzione di distribuzione della variabile aleatoria N è la nota bernoulliana

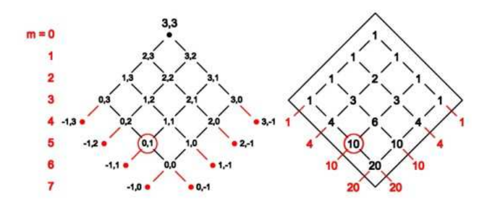
$$P(N)\ =\ \binom{80-N}{40}\left(\frac{1}{2}\right)^{80-N}$$

Quindi il valor medio di N è $\sum_{N=0}^{40}[N\cdot P(N)]=6.20316$.

Risultato identico, come si vede. Anche ***trentatré*** è giunto alla stessa conclusione, dopo aver dichiarato la sua antipatia per i problemi probabilistici:

Ogni scatola contiene all'inizio $N = 40$ fiammiferi, ma si può assumere N generico.

Mi aiuto nel calcolo con uno schema geometrico; il grafo riporta tutti gli stati possibili, per il semplice caso $N = 3$.


11 *Grafo di* ***trentatre***

In ogni nodo lo stato (a,b) delle due scatole A e B; (N, N) è lo stato iniziale. Da ogni stato si può scegliere la scatola A oppure la B: (a,b) genera $(a-1, b)$ opp. $(a, b-1)$.

In $(0, b)$ e $(a, 0)$ una delle scatole è vuota, ma il nostro distratto fumatore la rimette in tasca, e si accorge che lo è quando la sceglie di nuovo, cioè negli stati "virtuali" $(-1, b)$ opp. $(a, -1)$, indicati con un pallino rosso.

Tutti i nodi della riga m hanno in totale $a+b=2N-m$ fiammiferi.

A destra è indicato il n° di percorsi possibili da (N, N) ai nodi; p.es. a $(0,1)$ si può arrivare solo da $(0,2)$ o da $(1,1)$, quindi 10 è la somma dei soprastanti 4 e 6. I numeri sono (entro il perimetro nero) i coefficienti binomiali. Il n° K di percorsi è $K(a,b)=\binom{m}{N-b}=\binom{2N-a-b}{N-b}$.

Ai nodi rossi – gli unici che interessano – si arriva in un solo modo dai nodi adiacenti, e i percorsi sono

[1] $$K(n,-1)=K(-1,n)=K(n,0)=\binom{2N-n}{N}.$$

La probabilità $p(a, b)$ di un nodo è il prodotto del n° di percorsi per la probabilità di ognuno di essi. Ogni ramo del grafo – inclusi quelli rossi – indica la scelta di una scatola, con probabilità 1/2. Ogni percorso da (N, N) ad (a,b) ha lunghezza m e probabilità $(1/2)^m$. Quindi per $(n, -1)$, con $m=2N+1-n$, si ha

[2] $$p(n,-1)=K(n,-1)/2^m=\frac{1}{2^{2N+1-n}}\binom{2N-n}{N}\ .$$

In $(n, -1)$ restano n fiammiferi in A, mentre B è vuota. La probabilità $P(n)$ di trovare n fiammiferi in una qualsiasi scatola è quindi il doppio di [2]

[3] $$\boxed{P(n)=\frac{1}{2^{2N-n}}\binom{2N-n}{N},\ n=0\ldots N}\ .$$

Continuando a fumare prima o poi una scatola vuota si trova, ed infatti, per ogni N $\sum_{n=0}^{N} P(n)=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^{2N-n}}\binom{2N-n}{N}=1$ [27].

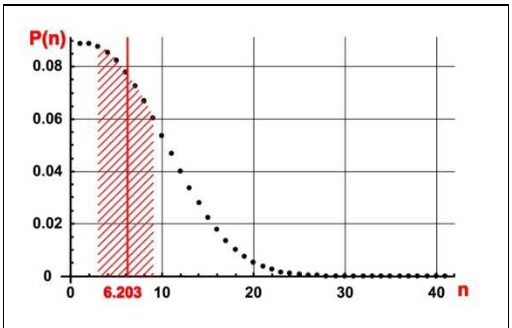
Dato N, il valore atteso di n è $Q_N=\sum_{n=1}^{N} n\,P(n)=\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{2^{2N-n}}\binom{2N-n}{N}$, che ammette la forma finita

[4] $$\boxed{Q_N=\frac{N+1}{4^N}\binom{2N+1}{N}-1}$$ [28].

Per $N = 40$ il valore atteso è $Q_{40}=6.203$.

Occorre quindi usare (in media) circa 80 – 6 = 74 fiammiferi per trovare una scatola vuota. Il diagramma riporta per $N = 40$ la distribuzione $P(n)$. La probabilità che n sia compreso fra 3 e 9 è circa del 50%.

Ultima osservazione – se il fumatore, come qualsiasi persona ragionevole, buttasse una scatola appena vuota e si chiedesse quanti svedesi gli restano, starebbe più tranquillo; infatti il valore atteso sarebbe $2Q_{40}=12.406$.



12 *Grafico di* ***trentatre***

Persona ragionevole e il Capo sono due cose che non vanno d'accordo. Vediamo, infine, una considerazione di ***Mirhonf***:

> Sviluppando la mia soluzione circa l'argomento, ad un certo punto, ragionando sulla probabilità di arrivare nello stato $(x,0)$ (x fiammiferi nella scatola A e nessuno nella scatola B), poiché allo stato $(x,0)$ si giunge soltanto dallo stato $(x,1)$ con probabilità ½, ho calcolato che $P(x,0)=\frac{1}{2^{2N-x}}\binom{2N-x-1}{N-x}=\frac{1}{2^{2N-x}}\binom{2N-x-1}{N-1}$.
>
> Di conseguenza, la somma su tutti gli x, da 1 a N di $P(x,0)$ deve necessariamente essere ½ perché la probabilità che rimanga senza fiammiferi la scatola B è esattamente ½. (…)
>
> Rielaborando la formula si ottiene: $\sum_{i=1}^{N} 2^i\binom{2N-i-1}{N-1}=2^{2N-1}$.
>
> Dopo averla verificata per qualche valore di N mi sono proposto di dimostrarla direttamente, ma, aimé, non ci riesco. Mi sembra roba da *Bungee Jumpers*...

---

[27] Con $n=N-k$ la somma diventa $c_N=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^{N+k}}\binom{N+k}{k}$, e con $\binom{N+k}{k}=\binom{N+k-1}{k}+\binom{N+k-1}{k-1}$ si ottiene $c_N=c_{N-1}=\ldots=c_0=1$.

[28] La sequenza intera $a_N=2^{2N-1}\cdot Q_N=(1,7,38,187,874\ldots)$, è in presente in *OEIS* http://oeis.org/search?q=A000531, da cui ho ricavato la [4] e la ricorrenza $2N\cdot Q_N-(4N-1)\cdot Q_{N-1}+(2N-1)\cdot Q_{N-2}=0$.

Ho notato soltanto che:

$$2\binom{2N-2}{N-1}=4\binom{2N-3}{N-1}\Rightarrow\binom{2N-2}{N-1}=2\binom{2N-3}{N-1}$$

i primi due termini della sommatoria sono sempre uguali tra di loro; infatti per la proprietà dei coefficienti binomiali $\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n-1}{k-1}$.

Si ottiene:

$$\binom{2N-2}{N-1}=\binom{2N-3}{N-1}+\binom{2N-3}{N-2}=\binom{2N-3}{N-1}+\binom{2N-3}{2N-3-N+2}=\binom{2N-3}{N-1}+\binom{2N-3}{N-1}=2\binom{2N-3}{N-1}$$

l'ultimo termine della sommatoria è 2^N.

Posso proporre il problema ai Rudi per avere qualche spunto per la dimostrazione?

Certo, è una buona idea, noi passiamo avanti la domanda e pubblicheremo quello che arriva. Però adesso mi fermo e vi do appuntamento al mese prossimo. A presto!

5. Quick & Dirty

Recentemente abbiamo comprato un libro di un matematico ricreativo italiano (per motivi che saranno chiari entro la fine del periodo, non vi diciamo chi sia) e siamo piuttosto seccati: pur avendo ***otto*** possibilità di citarci, il nostro nome non compare in nessun punto! Evidentemente, abbiamo letto il libro e abbiamo cercato di "fargli le pulci"...

Problema: Qual è la probabilità che gettando quattro volte un dado, si presenti sempre la stessa faccia?

Soluzione: $\left(\frac{1}{6}\right)^4$.

La probabilità di avere un dato numero al primo tiro è 1/6, ed è 1/6 di 1/6, cioè 1/6x1/6 la probabilità che al secondo tiro si presenti ancora lo stesso numero, 1/6x1/6x1/6 al terzo tiro e 1/6x1/6x1/6x1/6 al quarto tiro.

Perché è una "pulce"?

> *Per il semplice motivo che, non avendo definito* quale numero volete ottenere*, al primo tiro potete ottenere un numero qualunque. Quindi, avete sei volte la probabilità indicata di vincere...*

6. Pagina 46

Il motivo per cui questa volta i problemi sono "facili" è che stiamo finendo, dalla nostra Prima Fons[29]*, quelli complicati. E anni fa ci siamo posti come obiettivo di proporveli **tutti**. (e poi di dirvi qual era la fonte). Quindi, per spirito di completezza e a insindacabile giudizio della Redazione, in futuro potrebbe capitarvi di trovarne più di uno per volta.*

6.1 Un numero da generare

Per essere un razionale, il numero dato deve essere periodico.

Supponiamo lo sia: sia n la sua periodicità e k sia il numero di cifre prima della partenza della periodicità.

Consideriamo il numero 10^m, dove $m \geq n+k$.

Costruendo il decimale dato, scriviamo in sequenza tutti gli interi; quindi, qualsiasi numero N apparirà da qualche parte (di sicuro quando scriveremo l'N-esimo numero, ma potrebbe comparire prima). Siccome nella sequenza generata prima o poi incontreremo

[29] Termine appositamente scelto per non preoccuparvi: abbiamo altre sorgenti, solo che non le stiamo usando. La buona notizia è che *uno di voi* ci ha reso in grado di proporvi anche quelli con i disegni complicati (che presi singolarmente non sono un gran che, quindi li teniamo per il gran finale).

$m \geq n+k$ zeri, l'unica sequenza che può generare il numero dato ha un periodo formato da un solo zero, e questo non genera il nostro decimale.

Quindi, il numero dato non è generabile come frazione e quindi non è razionale.

6.2 "Trilancia" in equilibrio

Suddividiamo i nove pesi $n^2, (n+1)^2, (n+2)^2, \ldots, (n+8)^2$ in tre insiemi come segue:

$$n^2, (n+5)^2, (n+7)^2 \Rightarrow n^2 + (n+5)^2 + (n+7)^2 = 3 \cdot n^2 + 24 \cdot n + 74$$

$$(n+1)^2, (n+3)^2, (n+8)^2 \Rightarrow (n+1)^2 + (n+3)^2 + (n+8)^2 = 3 \cdot n^2 + 24 \cdot n + 74$$

$$(n+2)^2, (n+4)^2, (n+6) \Rightarrow (n+2)^2 + (n+4)^2 + (n+6) = 3 \cdot n^2 + 24 \cdot n + 56.$$

Per n=1 (ossia, per i primi nove pesi del gruppo da 27 dato) abbiamo che i primi due insiemi sono uguali, mentre il terzo differisce di 18 unità.

Per n=10 (ossia, per i secondi nove pesi del gruppo da 27 dato), se scambiamo il secondo e il terzo insieme abbiamo che il secondo differisce dagli altri due di 18 unità.

Per n=19 (ossia, per gli ultimi nove pesi del gruppo da 27 dato), se scambiamo il primo e il terzo insieme abbiamo che il primo differisce dagli altri due di 18 unità.

A questo punto è evidente come possano essere costruiti i gruppi.

6.3 Non semplice come sembra

Consideriamo il raggio dal centro a un vertice del poligono: se il raggio ruota di 25°30', si sovrapporrà ad un altro vertice del poligono originale. Poiché 25°30' rappresenta i 17/240 della circonferenza, e notato che 17 e 240 sono primi tra loro, se effettuiamo la rotazione indicata un numero di volte compreso tra 1 e 239, otterremo una posizione per cui il raggio non si sovrappone alla sua posizione originale.

Se il raggio viene ruotato m volte della misura indicata, allora effettuerà una rotazione pari a $(17 \cdot m)/240$ circonferenze. Per fare in modo che la k-esima e la l-esima rotazione cadano nella posizione di partenza, $(17 \cdot k)/240$ e $(17 \cdot l)/240$ devono differire di un numero intero di circonferenze, ossia $17(k-l)/240$ deve essere un intero, ossia $k-l$ deve essere divisibile per 240, e quindi o $k=l$ o $k \geq 240$.

Considerando anche la posizione iniziale, abbiamo 240 posizioni possibili per i raggi: un vertice giace su ognuno di questi raggi, quindi non possono esserci meno di 240 raggi; d'altra parte, il 240-agono (considerando tutti i suoi vertici confondibili), sotto una rotazione di 17/240 di circonferenza coincide con la propria posizione iniziale.

Quindi, il minimo numero di lati che il nostro poligono può avere è 240.

7. Paraphernalia Mathematica

Questa serie (*Uno è solitudine, due è compagnia, tre è folla*: tranquilli, per chi li ha scritti questo era il quinto..) è un contributo (in minima parte nostro) al 2013 come *anno della Matematica per il pianeta Terra.*

7.1 Chi tira e chi spinge

Dentro ogni soluzione, c'è un problema che si affanna per uscire
Opus, *Bloom County*

Ma sin qui, ci arriva qualcuno a leggere? Abbiamo provato a tagliare la matematica, abbiamo usato parole palesemente inesistenti in italiano, e nessuno che ci ha detto niente. Quasiquasi, vi sbaglio la soluzione di un paio di equazioni differenziali e vi dimostro che i procarioti si sono evoluti da voialtri.

Dal titolo probabilmente si capisce che questa volta partiamo dai ***feedback:*** l'altra volta abbiamo guardato cosa succedeva come assorbimento/emissione se partivamo da degli oggetti "statici" (la mucca sferica, in pratica). Questa volta, proviamo a considerare cosa succede un po' più nella realtà: chiunque abbia fatto gli spaghetti, sa che da quando comincia a bollire a quando se ne è evaporata tutta, l'acqua resta a 100 gradi, anche se continuiamo a somministrargli calore, il che fa pensare che si debbano fare delle considerazioni più attente, per quanto riguarda la Terra reale.

Cominciamo dalle cattive notizie (o buone, se siete come mia moglie che con trentacinque gradi mette il maglioncino che sente uno spiffero): quali sono i feedback *positivi*?

5. **Vapore acqueo**: se fa più caldo, evapora più acqua, e l'atmosfera diventa più umida, ma abbiamo visto l'altra volta che il vapore acqueo genera effetto serra, e quindi l'atmosfera si scalda. Con il freddo, l'atmosfera diventa meno umida e quindi si raffredda.
6. **Albedo dei ghiacciai**: neve e ghiaccio riflettono più luce dell'acqua liquida o del suolo, se fa più caldo si sciolgono, la terra diventa più scura e quindi più calda.
7. **Anidride carbonica disciolta**: mai aperto una birra calda? L'acqua fredda ammette in soluzione più anidride carbonica rispetto a quella calda: se la Terra si scalda, emette CO_2 che genera effetto serra e scalda ulteriormente.

Se ci limitassimo a questi è evidente che saremmo bolliti da tempo, fortunatamente, ci sono anche dei feedback *negativi*:

1. **Feedback di Planck**: un pianeta caldo irraggia maggior calore, diventando più freddo. Questa è la retroazione più forte che impedisce di diventare un bollito.
2. **Nuvole**: le nuvole riflettono la luce solare incidente, diminuendo l'irraggiamento. Qui l'effetto è molto piccolo, visto che essendo vapore acqueo comunque favoriscono l'effetto serra.
3. **Distribuzione del calore con l'altezza**: l'aumento della temperatura dato dall'effetto serra varia la distribuzione della temperatura nei diversi strati dell'atmosfera, tendendo a riscaldare quelli più freddi e viceversa. Questo oltre che poco significativo è anche complicato, in quanto ha un effetto diverso ai poli e all'equatore.

Tra i vari modelli, il più semplice è il cosiddetto ***Modello a bilancio di energia zero-dimensionale***: supponendo la Terra ad una temperatura (*media*, qui sta uno dei busillis) T, assumiamo che irradii energia al metro quadro secondo la legge $A+BT$, dove (da misure) A=218 W/m^2 e B=1.90 W/(m^2·°C). L'approssimazione è piuttosto rozza in quanto l'emissione non è lineare rispetto alla temperatura, ma per il momento ci accontentiamo.

Assumiamo inoltre che la Terra assorba energia per metro quadro secondo la legge $Q{\cdot}c(T)$, dove $Q\approx 341.5$ W/m^2 e questo è un quarto[30] della *costante solare*. Il termine $c(T)$ invece è il ***coalbedo***, ossia la frazione di energia che risulta assorbita e purtroppo questo dipende

[30] "Un quarto" per la nota differenza tra l'area del cerchio e della semisfera, calcolata a gennaio (PM168).

fortemente dalla temperatura (i ghiacci che riflettono, ricordate?). Dobbiamo anche tenere conto della ***capacità termica*** della Terra, e anche qui facciamo una grossa approssimazione: le capacità termiche di acqua, aria e terra sono molto diverse tra di loro. Approssimando ad aria e pianeta secchi, comunque, risulta $C \approx 5 \cdot 10^6$ J/(°C·m²) e il nostro modello diventa:

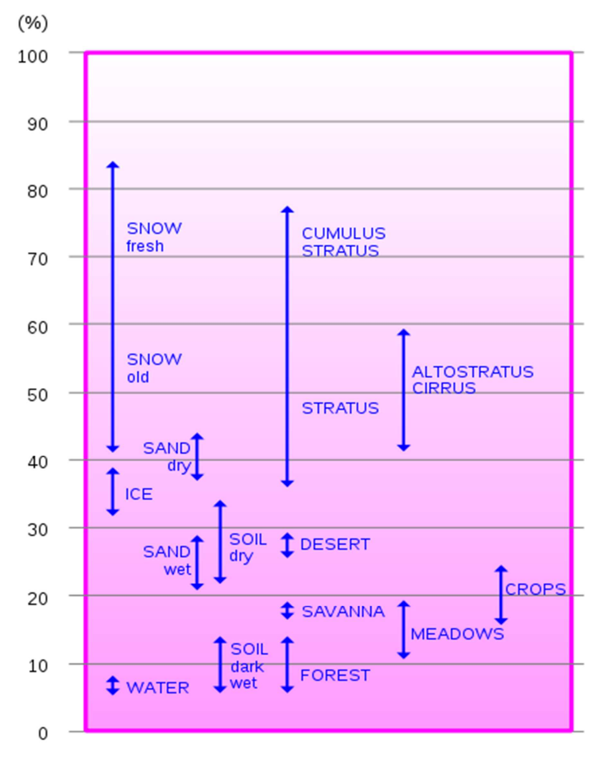
$$C \cdot \frac{dT}{dt} = -A - B \cdot T + Q \cdot c(T(t)).$$

Che non ci pensiamo neanche a risolverla in questa forma: cerchiamo le soluzioni di equilibrio, ossia quelle per cui la derivata della temperatura vale zero. Si ottiene:

$$A + BT = Qc(T) \Rightarrow Q = \frac{A + BT}{c(T)}.$$

...e abbiamo eliminato C, che era una brutta bestia.

La prossima cosa da semplificare è il ***coalbedo***, e anche qui rischiano di essere guai: infatti, essendo pari a (1 – *albedo*) capite facilmente che tra una strada asfaltata (nera) e un ghiacciaio (bianco) ne abbiamo di tutti i colori. Siccome cercheremo una approssimazione, per farvi vedere di quanto possiamo sbagliare mettiamo un'immagine esplicitante, come dice Baez, *the coalbedo in all its glorious complexity*.



13 *Il coalbedo, in tutta la sua gloria.*

Bene, adesso cerchiamo di approssimare questo comportamento a dir poco caotico.

À la mode de Doc, guardiamo quali sono gli estremi, e poi cerchiamo un ragionevole compromesso tra i due. Se prendiamo del ghiaccio bello lucido o un manto nevoso appena creato, abbiamo un albedo molto vicino allo zero; moderando leggermente la nostra richiesta, possiamo considerare un "ragionevole estremo" una riflessione del 65%, ossia c_{min}=1–0.65=0.35; d'altro canto, se prendiamo un terreno scuro e bagnato (o dell'acqua, non sembra, ma è molto "scura") abbiamo dei valori di albedo verso il 30%, ossia c_{MAX}=1–0.3=0.7.

Tutto chiaro sin qui? Speriamo di sì, perché adesso arriva il colpo di genio.

Dobbiamo *interpolare* tra questi due valori, ma non basta prendere il valor medio: l'interpolazione deve essere, in un qualche modo, una funzione della temperatura!

Il punto esclamativo nella frase precedente nasce dal fatto che il motivo, una volta che lo si veda, è piuttosto evidente: se il massimo coalbedo lo avete con il *ghiaccio* e il minimo con terra *bagnata*, siete d'accordo che dipende dalla *temperatura*? Non solo, ma tenete conto dei vari feedback (quelli positivi) che abbiamo visto all'inizio, e la cosa diventa molto più chiara.

Quindi, più che la semplice media tra i due (co)albedo, ci serve una funzione che sia in grado di portarci *gentilmente* dal valore 0 al valore 1, in funzione della temperatura, fermo restando che vogliamo i massimi e i minimi come indicato sopra. Qualcuno ha delle idee?

Solo un genio può pensare a una cosa del genere, e John lo è:

$$c(T) = c_i + \frac{1}{2}\left(c_f - c_i\right)\cdot\left(1 + \tanh(\gamma T)\right)$$

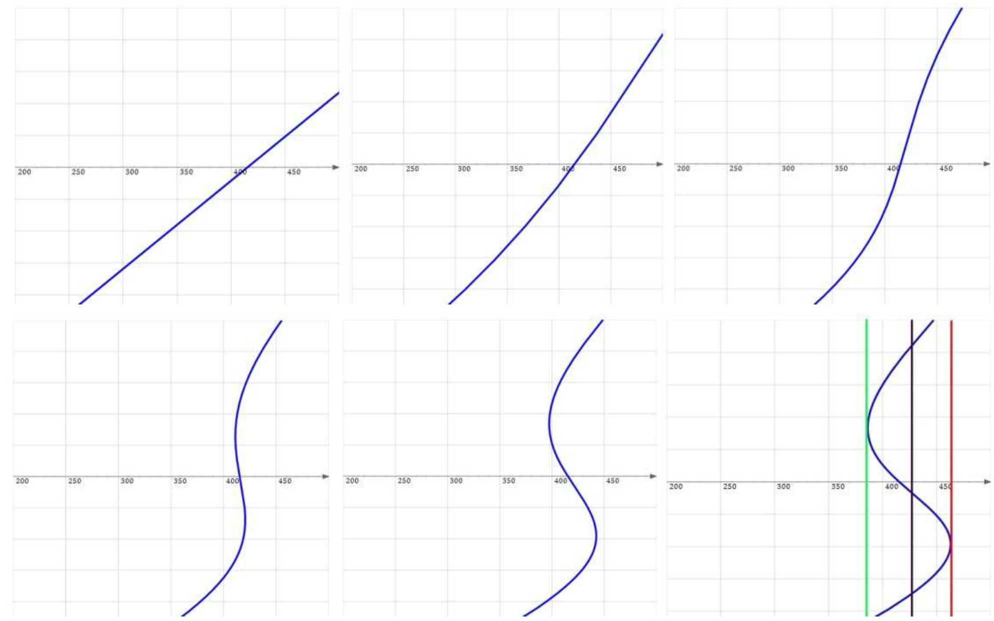
La *tangente iperbolica*! 'Sta roba ha tutte le caratteristiche che ci servono; non solo, ma possiamo mettere dentro un ulteriore parametro (il *gamma*[31]), che ci permette di decidere "quanto alla svelta" debba salire la nostra funzione.

In fin della fiera, risulta:

$$Q = \frac{A + BT}{c_i + \frac{1}{2}\cdot\left(c_f - c_i\right)\cdot\left(1 + \tanh(\gamma T)\right)}$$

E adesso dovrebbe esservi chiaro il motivo per cui abbiamo risolto in Q e non in T...

Forti di potenti mezzi informatici, cerchiamo di capire cosa succeda al variare di gamma: teniamoci su valori abbastanza piccoli, ad esempio tra 0 e 0.05. Per evitare salti pagina e quant'altro, li mettiamo tutti di seguito qui sotto:



14 *Il gamma, da 0.00 a 0.05*

...e adesso cerchiamo di capire cosa sta succedendo, in particolare nell'ultimo caso.

Muoviamoci lungo le ordinate (che sono la nostra insolazione): partendo dalla sinistra, fino al valore di 385 W/m² non succede niente di speciale, la temperatura si stabilizza su un unico stato, e fa *frreeeeddddo*. Quando superiamo questo valore (linea verde) abbiamo *due* punti di incrocio, a due temperature diverse, una fredda e una calda: quindi, per la stessa insolazione sono ammessi due diversi stati di equilibrio.

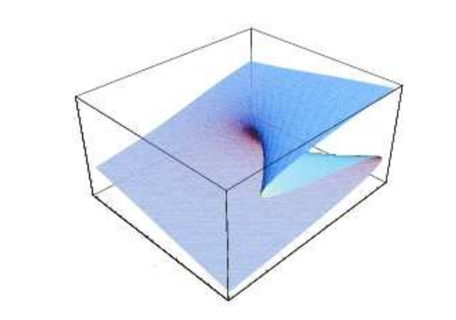
Curioser and curioser.

Quando arriviamo alla linea nera, gli stati di equilibrio diventano tre: uno caldo, uno freddo e uno, come diceva Giorgio Gaber, *giusssto*: peccato che quest'ultimo sia *instabile*.

[31] *Food for Though* per i fotografi anziani in bianco e nero: qualcuno si ricorda il "gamma" della sensibilità? Praticamente la stessa cosa. Meditateci sopra e vedrete la genialità dell'idea.

Se poi andiamo oltre i 465 W/m² abbiamo di nuovo un unico stato di equilibrio: caldo, questa volta.

Adesso, non guardate il prossimo disegno.



15 *Una catastrofe attesa*

Mettete tutti i grafici del gamma in fila, in modo da avere un grafico tridimensionale: non vi ricorda niente?

Nessun premio a chi ci è arrivato (di sicuro avete sbirciato il disegno): trattasi della ***catastrofe a cuspide***, che abbiamo trattato tempo fa[32], e, a questo punto, non dovreste avere problemi a capire cosa succede.

Insomma, la situazione è, per riprendere l'esempio utilizzato l'altra volta, *da cani*: andate a rivedervi i casi del cane quando si arrabbia...

Questa volta, la battuta di chiusura la lasciamo a quel Grande che è Thaves: dovreste riconoscere il suo tratto, visto che è sempre in calendario...

La prossima volta, proviamo a ricavare una morale, da tutto questo.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[32] "'Guaio' è dire poco", PM161, giugno 2012