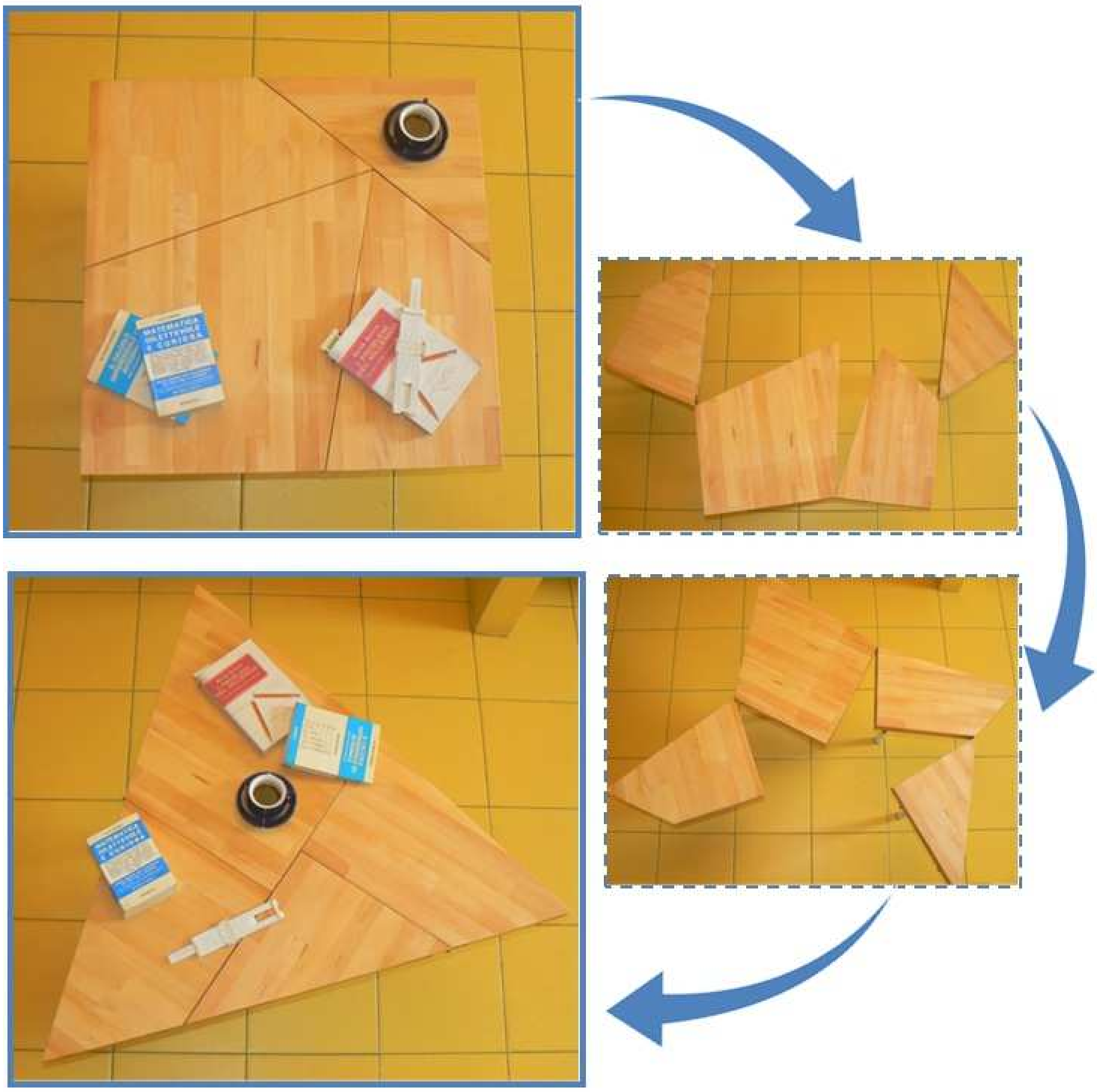
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 166 – Novembre 2012 – Anno Quattordicesimo



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM165 ha diffuso 2'958 copie e il 04/11/2012 per Google eravamo in 30'500 pagine.

Sono passati quasi quarant'anni da quando i due terzi più anziani della Redazione di RM hanno cominciato a desiderare ardentemente un tavolino ambivalente, che potesse che potesse assumere sia la forma quadrata che quella di un triangolo equilatero: più precisamente, da quando videro lo schema approssimato della sezione in un vecchio articolo di Martin Gardner. Consci del fatto che la loro incompetenza manuale era inferiore solo alla loro incompetenza teorica, rinunciarono al sogno e fondarono RM. Ma il dio della matematica ha vie infinite, misteriose e misericordiose: grazie a RM hanno conosciuto ***Sawdust***, e la sua stupefacente capacità di dare vita agli oggetti matematici. Quello che vedete in copertina è opera sua, oltre che un sogno della Redazione finalmente realizzato.

1. La luna di Venere

"O Romeo, Romeo! wherefore art thou Romeo?
Deny thy father and refuse thy name!
Or, if thou wilt not, be but sworn my love,
And I'll no longer be a Capulet. (…)
'Tis but thy name that is my enemy.
Thou art thyself, though not a Montague.
What's Montague? it is nor hand, nor foot,
Nor arm, nor face, nor any other part
Belonging to a man. O, be some other name!
What's in a name? That which we call a rose
By any other name would smell as sweet."

(William Shakespeare,
"Romeo and Juliet",
atto II, scena II)[1]

Non tutte le dee sono belle, ma quando lo sono, sono bellissime.

Neith è bellissima, perché vergine, e la purezza è elemento di bellezza. Neith è bellissima perché è madre[2], eterna generatrice, e per ogni figlio non c'è immagine più cara e dolce della mamma. Neith è bellissima perché è una tessitrice, e col suo telaio dà ogni giorno il respiro al Nilo, e il Nilo è il centro del mondo, l'arteria pulsante della civiltà. Neith è velata e intangibile, ma è attraverso il suo volto e il suo tocco che tutto prende vita. Neith è bellissima perché è la madre di Ra, e Ra è il Sole, e senza il Sole non esisterebbe il concetto di bellezza né nessun altro concetto, e non può esserci nulla di più bello del sole; a parte, forse, chi il sole riesce a generare.

Come tutte le dee, Neith ha molti compiti e molti ruoli, spesso contraddittori agli occhi di noi moderni sempre protesi alla ricerca di una sorta di coerenza, quasi non fosse evidente a ogni respiro del pianeta che una Dea della Coerenza non può certo abitare nel nostro mondo. Così Neith riesce a essere una dea guerriera pur essendo patrona della pace: a porsi come dea della caccia, al pari dell'altra vergine greca, Artemide, e avere nella propria simbologia elementi strettamente legati all'agricoltura. Ad essere una dea delle acque e contemporaneamente madre del Sole: ma anche madre di Apep, il maligno serpente generatore del caos, e di Sobek, il dio coccodrillo, anima del Nilo e forse creatore della Terra stessa. E naturalmente, come tutte le dee di successo, ha anche molti nomi.

Neith si fa conoscere anche come Nit, Net, Neit, a seconda dei luoghi e delle lingue in cui viene venerata. Secondo una teoria molto accreditata, Neith è la stessa divinità che le tribù berbere chiamavano Tanit, dea che gioca un ruolo cruciale nella religione di Cartagine, specialmente durante la prima guerra punica. Secondo alcuni studiosi, i punici

[1] Testo originale dello Scuotilancia. Ai giorni nostri, è più facile trovarlo in forma moderna: "*O Romeo, Romeo! Why are you "Romeo?" Deny your father and refuse to be called by your name; or, if you won't, swear you are my love, and I'll no longer be called a Capulet (…). It's only your name that is my enemy; you are yourself, not even a Montague. What's "Montague?" It is not a hand, or a foot, or an arm, or a face, or any other part belonging to a man. O, be some other name! What's in a name? That which we call a rose would smell as sweet if it had any other name*". Che poi, nella nostra amata lingua, suona più o meno così: "*O Romeo, Romeo! Perché sei tu "Romeo"? Rinnega tuo padre e rifiuta il tuo nome; o, se non vuoi, giura d'essere il mio amore, e io non sarò più una Capuleti (…). È solo il tuo nome ad essermi nemico: tu sei tu, non un Montecchi. Cos'è "Montecchi"? Non è una mano, non un piede, né un braccio, un volto, né qualsiasi altra parte di un uomo. Oh, sii qualche altro nome! Che cosa c'è in un nome? Ciò che chiamiamo rosa non profumerebbe meno dolcemente se la chiamassimo con un altro nome*". È molto facile trovare delle traduzioni migliori di questa, che è fatta in casa.

[2] Le femministe potrebbero forse rilevare una sorta di maschilismo nella deificazione femminile, che frequentemente sembra voler salvaguardare nelle divinità femmine sia la castità sia la maternità, nonostante le indiscutibili difficoltà biologiche dell'assunto.

vedevano in lei anche la mitica fondatrice Didone, saldando così in una sola mitologia le teosofie egiziana, punica, greca e romana.

L'abbondanza dei nomi è quindi sia inevitabile, sia indicativa. Se un nome serve non tanto a chiamare quanto a rappresentare, è del tutto naturale che possa variare in funzione dell'evolversi del soggetto che deve richiamare, della cultura che lo utilizza, e perfino con il variare dei simboli stessi a cui si riferisce.

1 *Neith*

È quello che succede sempre, in ogni epoca. Nella nostra, che più delle altre è connotata dall'esigenza costante di comunicazione e specializzazione, per alcune categorie di persone la mutazione del nome è quasi obbligatoria. Le pornostar, quasi senza eccezione, usano nomi di scena, conservando gelosamente quelli anagrafici; e spesso di nomi fittizi ne usano più d'uno, forse per simulare un rinnovamento, o spacciare un nuovo inizio di carriera. Ovviamente, questo è un caso il cui la molteplicità dei nomi non discende dal propagarsi della fama attraverso diverse culture e società, ma solo una forma di protezione dell'identità reale. Per quanto la morale comune si evolva con ragionevole velocità, anche ai giorni nostri il non palesare eccessivamente la corrispondenza tra una persona reale e un personaggio che vive di trasgressioni al comune senso del pudore resta una cautela quasi indispensabile. Le sole eccezioni sono infatti quelle che seguono un percorso di notorietà opposto a quello canonico; normalmente chi fa del sesso il proprio mestiere e diventa relativamente famoso cura con attenzione la salvaguardia del proprio nome reale. Viceversa, se si diventa famosi per ragioni non legate alle proprie esibizioni amatorie pubbliche e poi si decide di dedicarsi ad attività del genere per migliorare il proprio conto in banca, allora diventa tassativo conservare il vecchio nome anche nella nuova professione, perché in questo caso il talento di intrattenitore erotico è del tutto trascurabile rispetto al richiamo reale, che è quello di mostrare una persona famosa per altri versi mentre fa sesso sullo schermo.

Più rigorosi delle pornostar nell'utilizzare nomi di comodo celando quelli reali, sono probabilmente solo gli agenti dei servizi segreti: il punto meno credibile di tutta la saga dell'Agente 007 non sono né i futuristici gadget che "Q"[3] gli regala ad ogni avventura, né la sua mirabolante capacità di passare indenne attraverso la gragnuola di pallottole che i peraltro addestratissimi tiratori nemici gli scaricano contro, quanto il fatto che si presenti orgogliosamente con il proprio nome vero, persino ripetendolo enfaticamente ad ogni presentazione formale per essere certo che l'interlocutore non lo dimentichi. Peraltro, altri romanzi e film di spionaggio mostrano, probabilmente con un maggior grado di veridicità, che i nomi anagrafici delle spie sono talmente segreti che spesso vengono praticamente buttati definitivamente nel dimenticatoio al momento dell'arruolamento[4].

[3] Ovvero, come gli estimatori di Ian Fleming certo sapranno, il maggiore Geoffrey Boothroyd. Curiosamente, mentre il superiore di Bond è noto come "M" dall'iniziale del capo storico del MI6 che si chiamava Mansfield Smith-Cumming, "Q" non è l'iniziale di un nome proprio, ma di una carica: sta per "Quartermaster".

[4] Un esempio più direttamente storico, e verosimilmente più nobile, è quello dei "nomi di battaglia" che i partigiani si diedero durante la Resistenza. Del resto, anche la semplice espressione "nome di battaglia" mostra come l'azione protettrice di nascondere il proprio nome sia del tutto naturale in caso di necessità. Meno serio, meno nobile e certamente meno storico, ma in fondo legato alle medesime motivazioni, è il tormentone delle identità segrete dei supereroi dei fumetti, anche se resta misteriosissimo capire come possa Clark Kent, indossando solo un paio d'occhiali, non essere riconosciuto dai suoi amici più stretti, che peraltro si ritrovano a volare in braccio a Superman almeno una volta per avventura. [PRS] *Altro esempio è* l'Agente Senza Nome *di Len Deighton (Michael Caine nei film, solo in un film si chiama Harry Palmer, nei libri è sempre ignoto): e se non lo conoscete, leggetevi la bellissima caricatura "Fentasi-Scientifica" che ne fa Charles Stross nei libri sulla "Lavanderia" (riesce a citare i pentacoli, Kaluza e Klein nella stessa riga! E Turing è stato avvelenato dall'MI6 perché aveva dimostrato che attraverso un PC si può invocare Cthulhu! :-) [RdA]*

Il rapporto con i nomi è in ogni caso così profondo che la decisione di cambiarli è sempre estremamente significativa e pregnante. In fondo, se il nome è il primo reale possesso di un individuo, è inevitabile che debba sussistere un buon grado di coerenza tra il nome e il proprietario dello stesso. I soprannomi, i nomignoli, in alcuni casi perfino i titoli possono essere visti come tentativi della comunità di allineare i vocativi alla persona: e proprio perché provenienti dall'esterno, veicolano la caratteristica primaria di relazione tra la società e l'individuo. Possono quindi essere usati per lodare o per denigrare, e non solo per distinguere e chiarificare. I cognomi stessi, in fondo, nascono prevalentemente da criteri di distinzione, per qualificare la famiglia d'origine, o il genitore, o direttamente la regione di provenienza nel caso di stranieri che si accasano in una comunità di piccole dimensioni.

Se il nome attribuito da terzi ha una funzione principalmente distintiva, il cambio di nome deciso dall'individuo stesso ha verosimilmente cause diverse. Senza giungere agli estremi protezionistici degli agenti segreti e degli interpreti di film a luci rosse, è frequentissimo l'uso di nomi d'arte proprio nel mondo dello spettacolo. La professione dell'attore e dell'intrattenitore è stata a lungo considerata poco onorevole, anche quando non implicava necessariamente la rappresentazione di gesti contrari alla morale corrente; e forse è per questa antica ragione che nella comunità della gente di spettacolo la scelta di un allonimo è ancora frequentissima. Inoltre, esiste anche una chiara "estetica" dei nomi, oltre che una evidente predisposizione del pubblico a ricordare più facilmente alcuni nomi piuttosto di altri.

Le ragioni che hanno motivato Sofia Villani Scicolone a mutarsi in Sophia Loren sono probabilmente di questa natura: "Villani" è un nome del tutto legittimo, ma connotato da un significato non positivo, specie se ci si vuole ammantare di una sorta di atmosfera di nobiltà. "Scicolone" non è il massimo dell'eufonia, e decisamente poco internazionale, visto che è facilmente assimilabile ad una ben precisa zona d'origine.

2 *Sofia Villani Scicolone*

Per contro, "Loren" ha il pregio di essere breve, eufonico, esotico e ragionevolmente misterioso[5], oltre al pregio (o difetto, a seconda della chiave di lettura) di non avere nessuna connessione con i cognomi anagrafici. Il passaggio (peraltro puramente grafico, e non fonetico) da Sofia a Sophia ribadisce invece la volontà di internazionalizzazione, o quantomeno uno snobistico tentativo di nascondimento delle origini, che poi è in fondo la stessa cosa.

Spesso il nome d'arte (o di penna, o di battaglia) viene scelto per emulazione, o quanto meno per ammirazione di un precedente possessore. In fondo, questa è una delle ragioni principali anche nella scelta del nome anagrafico dei neonati, che quasi sempre si vedono arrivare addosso dei nomi in onore o ricordo di qualcun altro. Però è curioso notare come possano evolversi e tramutare i significati stessi dei nomi, durante la propria storia, a causa dei nuovi possessori.

Tutti coloro che si chiamano Cesare devono qualcosa a Caio Giulio Cesare che, peraltro, si chiamava così per colpa dei suoi capelli o per essere nato tramite parto cesareo[6]. Ma questo è uno dei casi in cui un nome derivato diventa tanto famoso per proprio conto da oscurare del tutto il significato originario; "cesare", a causa di Giulio Cesare, diventa

[5] In realtà, quello proposto come esempio di nome scelto dall'individuo è un po' improprio, visto che la Loren si fece consigliare nella scelta da un amico. Il cognome le fu proposto dal produttore Goffredo Lombardo, che giocò in assonanza col nome dell'attrice svedese Märta Torén.

[6] Senza tener conto che, ancora con maggiore probabilità, anche Giulio poteva chiamarsi Cesare in onore a qualche suo antenato. Le ipotesi più accreditate sull'origine del nome chiamano in causa la zazzera (*caesaries*) il parto tramite taglio (*caesus)*: stessa radice di "cesoie", ad esempio.

addirittura nome comune e non più soltanto nome proprio, e la lingua si permette di fare un grosso sberleffo alla storia, visto che "cesare" diventa sinonimo di imperatore (come mostrano anche i derivati in lingue non neolatine, come Kaiser e Zar) nonostante Giulio Cesare, almeno formalmente, imperatore non fu mai.

3 *Dylan Thomas e Bob Dylan*

C'è qualcosa di sottilmente paradossale, quando un nome che viene scelto per celebrare qualcuno cresce al punto di scippare la fama al portatore originale destinatario dell'omaggio. Il poeta gallese Dylan Thomas è una figura di primo piano nella poesia di lingua inglese del ventesimo secolo, ma è possibile che i posteri ricordino più facilmente il suo ammiratore Robert Allen Zimmerman, che ad inizio carriera decise di chiamarsi Bob Dylan in suo onore. E questo è anche uno dei non troppo frequenti casi in cui il nome d'arte finisce per cannibalizzare anche formalmente il nome anagrafico: l'autore di *Blowing in the Wind* ha infatti deciso, ad un certo punto della sua vita, di cambiare legalmente nome, e sul suo passaporto da ormai mezzo secolo può figurare orgogliosamente l'insolito appellativo "Robert Dylan".

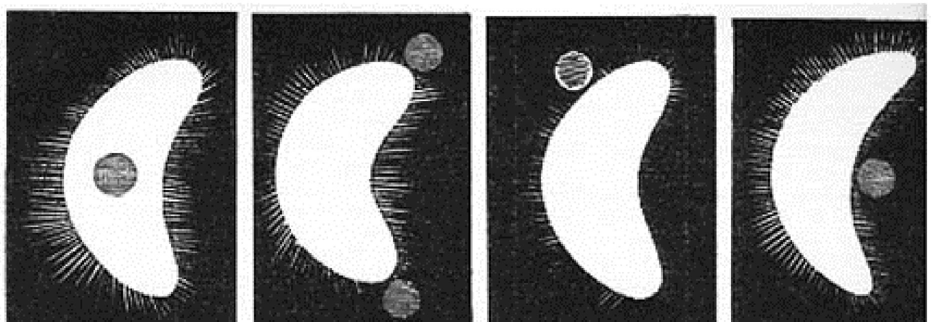
Ma il tema è davvero troppo grande per essere anche solo sfiorato in tutti i suoi aspetti: spesso si cambia nome quando si cambia religione, talvolta se ne assume uno di comodo anche solo per iscriversi ad una società particolare; si può decidere di darsi un nome maschile, come fece Aurore Lupin mutandosi in George Sand, per rivendicare una forma di parità di genere; si può rinunciare a chiamarsi Aron Hector Schmitz e diventare Italo Svevo, con un nome programmatico nel rivendicare due diverse origini geografiche; si può scegliere di cambiare la grafia del nome per mantenerne il suono, o cambiare la pronuncia per salvaguardare la firma. Le ragioni dei cambiamenti, come succede quasi sempre, sono numerose quasi quanto le persone stesse che vi si avventurano.

Raramente è capitato, però, nei tempi passati, che un numero davvero grande di persone dovesse scegliersi un nuovo nome quasi nello stesso tempo: era implicito che il cambio di nome fosse un evento, per quanto frequente, comunque eccezionale, e sostanzialmente mai un evento collettivo, di massa. L'arrivo del web ha cambiato le cose: come il palcoscenico e il campo di battaglia, anche la rete è un universo parallelo, ma non coincidente, con la vita quotidiana, e per avventurarvisi, specialmente prima dell'arrivo dei social network, era quasi obbligatorio scegliersi un nome apposito. Il "nom de plume", lo pseudonimo, il "nom de guerre", l'alias, vengono tutti canalizzati nel "nickname"[7], l'identità di rete. E sono milioni i nomi d'arte che vengono inventati e gettati nel calderone della tripla vu doppia. È semplicemente impossibile – se non tramite una gigantesca, costosa e certamente inutile indagine statistica – tentare di ricostruire tutte le ragioni che motivano la scelta di un nickname piuttosto che un altro. Altrettanto inutile, ma forse più stupefacente, è scoprire storie che possano in qualche modo riunire i temi principali accennati in quest'articolo in un unico aneddoto storico.

Anche se di solito non ci si pensa, la nostra cara Luna possiede un record nel nostro sistema solare: è il satellite più interno, quello più vicino al Sole. Né Mercurio né Venere posseggono satelliti naturali, e a dire il vero la Luna vince questa speciale classifica con un bel distacco: Marte di satelliti ne ha due, Deimos e Fobos, ma oggettivamente non

[7] Come capita a molti termini anglosassoni (cfr. hardware, software, e centinaia di altri) "nickname" significa solo "nomignolo, soprannome", ma citato in lingua inglese, per coloro che non sono madrelingua, assurge al significato specifico "nome per la navigazione in rete". Come facciano gli anglosassoni a distinguere l'hardware dalla ferramenta e i nomignoli dai nickname è una cosa che non abbiamo mai capito. Del resto, anche in Italia ci sono delle prestigiose riviste governate da fanatici puristi che usano termini desueti come "allonimo" pur di evitare l'inglesismo.

reggono il confronto. Troppo piccoli perfino per riuscire ad essere sferici, sono oggetti la cui dimensione maggiore non supera i 15 (per Deimos) e 27 (per Fobos) chilometri: la Luna ha un diametro di quasi 730 chilometri, e una massa che è quasi dieci milioni di volte quella di Fobos. Bisogna superare la fascia degli asteroidi e chiamare in gara i maggiori satelliti di Giove, per trovarne qualcuno in grado di reggere il confronto con la guardiana delle nostre notti. A ben pensarci, gli astronomi antichi della Terra potrebbero forse anche chiamarsi sfortunati: per loro era possibile riconoscere il moto peculiare dei pianeti rispetto a quello delle stelle fisse, ma non avevano altri elementi cruciali per abbandonare l'ipotesi delle sfere cristalline, i satelliti di Marte sono del tutto invisibili senza un telescopio potente e anche quelli di Giove hanno dovuto attendere il cannocchiale di Galileo per debuttare in società. Ipotetici astronomi di Venere o Marte avrebbero invece certo potuto osservare la strana danza congiunta della Luna e della Terra, e anticipare delle ipotesi cosmogoniche più dirette e immediate, perché le sfere di cristallo mal si adattano a spiegare il percorso nel cielo di quello che Isaac Asimov chiamava, in un suo libro, "il pianeta doppio". C'è stato però un periodo in cui la Luna sembrava stesse per perdere il primato di satellite più vicino al Sole: nel 1672 Giovanni Cassini nota un corpo celeste nei pressi di Venere, e quando quattordici anni dopo torna ad osservarlo decide di pubblicare i risultati delle sue osservazioni della sua probabile "luna di Venere". Il cielo è davvero grande, gli astronomi e gli osservatori non sono molti, quindi le osservazioni proseguono, ma certo non a ritmo serrato. In ogni caso, la luna misteriosa continua a venire occasionalmente registrata: Cassini aveva stimato il suo diametro apparente pari a circa un quarto di quello di Venere, e sono molte le osservazioni che confermano l'esistenza del satellite. Viene visto da James Short nel 1740, da Andreas Mayer nel 1759, e nel 1761 addirittura da Lagrange. Il 1761 sembra l'anno decisivo per la luna venusiana, perché viene vista altre diciotto volte, e in una di queste addirittura mentre segue il pianeta madre durante un transito sul disco solare. Poi ancora otto volte nel 1764, e Christian Horrebow la registra anche in osservazioni del 1768, quasi un secolo dopo la prima di Cassini. E a ben vedere ancora prima di Cassini, nel 1645, anche Francesco Fontana aveva annunciato la scoperta di satelliti di Venere: ma poiché aveva la fama di essere un personaggio poco affidabile, la sua dichiarazione non ebbe molto seguito.



4 *Disegno di Francesco Fontana di ipotetici satelliti di Venere*

Nonostante i molti avvistamenti, il dubbio permane, per la buona ragione che molti altri osservatori di vaglia non riescono in nessun modo a scovare il misterioso satellite: e tra questi si annovera anche il principe degli astronomi dell'epoca, William Herschel[8], che si era messo in caccia della compagna di Venere nel 1768. Si cominciano pertanto a fare ipotesi alternative, in grado di spiegare in qualche modo quel che astronomi di fama hanno visto con i loro strumenti.

Una delle ipotesi più spietate fu avanzata dal direttore dell'Osservatorio di Vienna, che nel 1766 speculò che le osservazioni della luna di Venere altro non fossero che illusioni

[8] Di lui e di sua sorella si parla in "La signora delle comete", RM146.

ottiche. Venere è infatti così brillante[9], sosteneva, che una sua immagine residua poteva venir riflessa dall'occhio dell'osservatore di nuovo verso lo strumento, creando un'immagine più piccola dello stesso pianeta.

5 *Johann Heinrich Lambert*

In ogni caso, le ricerche continuano, e con molta dedizione. Nel 1777 Lambert[10] arrivò a pubblicare negli annali dell'Osservatorio di Berlino i dati orbitali della luna: distanza media 66,5 raggi di Venere, periodo orbitale 11 giorni e 3 ore, inclinazione sull'eclittica 64 gradi. Nonostante ciò, la "Luna di Lambert" continua ad essere sfuggente.

Passa più di un secolo, e a tornare a parlare dell'oggetto misterioso stavolta è un astronomo belga: Jean-Charles Hozeau, già direttore del Reale Osservatorio del Belgio, pubblica nel 1884 un'ipotesi radicalmente nuova. La "luna di Venere" non è in realtà una luna, ma un vero e proprio pianeta di difficilissima osservazione: le sue saltuarie registrazioni altro non erano, secondo il nostro, che passaggi del pianeta misterioso quando era in congiunzione con Venere: cosa che, secondo i suoi calcoli e in accordo con le osservazioni precedenti, accadeva circa una volta ogni 1080 giorni.

Un pianeta! Nettuno era stato scoperto appena trentotto anni prima, ma quantomeno era un pianeta esterno, più lontano di Urano. Un pianeta interno, che gioca a nascondino con Venere, è davvero una scoperta clamorosa. Hozeau non perde tempo e lo battezza: forse per non farla sfigurare di fronte alla dea della bellezza greca, Venere, e certamente per ricordare la sua capacità di restare inviolato, l'astronomo belga sceglie per il suo pianeta il nome di una dea bellissima, di cui si diceva che il velo che la proteggeva non potesse mai essere sollevato da mani umane, Neith. La prima divinità non greca a prendere il posto nel cielo.

Il bello della scienza, nonostante quello che si crede comunemente, è la sua provvisorietà. Ogni scoperta brillante lancia il suo autore nel firmamento della fama, ma soprattutto muove altri scienziati, che con certosina pazienza si mettono a verificare dati, ipotesi e conclusioni. Questo non accade per sfiducia, ma proprio per la natura stessa del processo scientifico: una scoperta, mille verifiche, anche a distanza di anni; e nel frattempo altri si lanciano a cercare nuovi sviluppi della nuova via appena aperta. Nel caso del pianeta Neith, la verifica e la smentita è piuttosto rapida, e arriva sempre dal Belgio. Forse proprio per assicurarsi che la scoperta del connazionale potesse essere confermata, la Reale Accademia delle Scienze belga pubblica uno studio accurato su tutte le osservazioni storiche di Neith, o della Luna di Venere, insomma del misterioso oggetto celeste. Il risultato è sconfortante, per Hozeau e per tutti coloro che speravano di vedere una dea

[9] Brillante lo è di certo: è il terzo oggetto più luminoso del cielo, e i primi due si chiamano Sole e Luna. C'è chi sostiene che, al massimo della brillantezza (perché, in qualità di pianeta interno, Venere si mostra a noi con fasi simili a quelle lunari) sia in grado perfino di generare delle piccole ombre.

[10] Visto che chi legge sa benissimo che Venere non ha satelliti e di conseguenza si rende perfettamente conto che i dati riportati non possono che essere sbagliati (detto per inciso: un'orbita di 66 raggi venusiani da percorrere in 11 giorni è davvero un bel record di velocità), vorremmo evitare che si giungesse a conclusioni troppo affrettate in merito al povero Lambert. Si tratta infatti di Johann Heinrich Lambert, una delle maggiori menti del suo tempo: per intenderci, è quello che ha dimostrato per primo l'irrazionalità di π, e già che c'era il primo a congetturare che sia e sia π fossero trascendenti. Fu uno dei pionieri delle geometrie non euclidee, il primo ad ipotizzare l'esistenza delle galassie, nonché un insuperabile costruttore di mappe, visto che la *proiezione di Lambert* è ancora oggi molto usata. Fece scoperte importanti in fisica, in quasi tutte le branche della matematica, e ha un posto di rilievo anche nella storia della filosofia. Non è il protagonista di questo compleanno, ma potrebbe certo meritarsene uno.

egizia celebrata nel cielo: lo studio dell'Accademia mostra con metodica tristezza che praticamente tutte le osservazioni dell'ipotetico pianeta o satellite sono riconducibili a stelle fisse che entravano nel campo dell'osservazione. Un elenco di stelline[11] demolisce il lavoro di Cassini, di Lambert, di Hozeau, e di tutti gli astronomi che credevano di aver intercettato la luna di Venere.

Neith torna sulla terra, con la delusione di Hozeau; il nome era bello e ben scelto, ma non ha avuto la forza scientifica necessaria per ascendere al cielo. Quantomeno, però, nei libri di storia dell'astronomia è pur sempre il nome della dea egizia a venir associato all'ipotetica luna venusiana; cosa abbastanza curiosa, in fondo, visto che Neith era stato pensato da Hozeau come nome di pianeta, e non di satellite. Molta meno fortuna ebbe il nome che Lambert propose per la luna quando fece i complessi calcoli orbitali che la caratterizzavano.

Si narra che, nel 1930, quando Clyde William Tombaugh osservò finalmente un pianeta[12] oltre l'orbita di Nettuno, il nome di Plutone venisse assegnato al nuovo corpo celeste anche e soprattutto per celebrare Percival Lowell, che lo aveva preconizzato e cercato per un decennio. Il simbolo grafico scelto per indicarlo fu una specie di crasi delle lettere PL, che certo indicavano le prime lettere di "Pluto", ma che altrettanto indubbiamente stavano a rappresentare le iniziali di Lowell. Quando Lambert propose il nome per la luna di Venere, fu quasi certamente guidato da un artificio onomastico analogo: non propose il nome di una divinità, e in questo fu certo innovativo, ma suggerì di dedicare il satellite venusiano ad un grande scienziato. Non osò proporre sé stesso, ma la sua modestia non arrivò al punto di impedirgli un vezzo che avrebbe legato per sempre il suo nome a quello del corpo celeste tramite una definitiva assonanza: voleva infatti che "la luna di Lambert" fosse chiamata "luna D'Alembert".

È questo uno dei casi in cui la "scelta del nome" ha ragioni abbastanza palesi: il mistero però torna a farsi fitto non appena si cerca di risalire di un solo passo indietro, perché, a ben vedere, anche il nome D'Alembert è un nome inventato, e nel caso originale e primitivo, le ragioni della scelta restano abbastanza misteriose.

Madame Clarine Guerin de Tencin è una celebre scrittrice, e il suo salotto è uno dei più rinomati di Parigi. Era stata una suora, ma ottenne una dispensa papale per iniziare la sua vita secolare abbandonando il velo. Vita abbastanza ricca e borghese, densa d'azione, di intrighi politici, e naturalmente di relazioni amorose. Una di queste è con Louis-Camus Destouches, brillante ufficiale di artiglieria, cavaliere dell'ordine di San Lazzaro e di San Luigi, soldato bravo abbastanza da meritarsi l'appellativo di "cannone". Le relazioni d'amore, legittime o meno che siano, spesso si concludono con la nascita di un bambino, e questa storia non fa eccezione. Il cavalier Destouches era in missione all'estero, al momento in cui Madame Tencin dà alla luce il pargolo, e forse anche per questo la giovane mamma decide, in poche ore, che è meglio affidare il bambino a cure meno distratte delle proprie. Infagotta il figlio, gira un po' per le strade di Parigi, e infine abbandona il bambino sulle scale della chiesa di Saint Jean-le-Rond[13].

Il piccolo viene recuperato dai clerici, e come si faceva sempre in casi del genere, battezzato con il nome del santo cui era dedicata la chiesa: Jean Le Rond. E, sempre come da tradizione, messo in un orfanatrofio per trovatelli. Nella sfortuna, comunque, ha qualche sprazzo di buona sorte: suo padre, il cavaliere "Cannone" Destouches si mette

[11] Chi Orionis, M Tauri, 71 Orionis, Nu Geminorum, Theta Librae e altre stelline senza nome erano le inconsapevoli autrici del tiro mancino agli astronomi speranzosi.

[12] Si potrebbe disquisire a lungo, a questo punto, che Plutone, come "pianeta", ha avuto una vita anche più breve della luna di Venere, se non proprio di Neith, essendo stato declassato a "pianeta nano" nel 2006. Ma probabilmente non ne vale la pena.

[13] Non consigliamo pellegrinaggi specifici. Di fatto, la chiesa di Saint-Jean-le-Rond era attaccata a Notre Dame, e il "rond" indica che aveva prevalentemente funzioni di battistero. In pratica è stata inglobata nella cattedrale, anche perché più che una vera e propria chiesa era sostanzialmente una cappella situata presso la torre nord della cattedrale. Ciò non di meno, è indubbio che quel "le Rond", a prendersi la libertà di leggerlo come "il Cerchio", assume un carattere quasi divinatorio, ancorché divino.

subito alla sua ricerca, riesce a ritrovarlo in breve tempo, e gli trova anche una famiglia d'adozione, presso la moglie di un vetraio[14]. Garantisce al piccolo di che vivere, e alla sua morte, peraltro avvenuta quando Jean ha solo nove anni, gli lascerà anche una rendita, che la famiglia Destouches sempre rispetterà e farà avere a madame Rousseau. È grazie a questo che il piccolo Jean riesce a studiare presso il Collège des Quatre-Nations, quello fondato grazie al lascito del Cardinale Mazarino: coglie risultati brillanti, e si diploma in "Arti". Uscito dal collège, si iscrive alla facoltà di Diritto. Ed al momento dell'iscrizione che inizia il mistero.

Bisogna provare a mettersi nei suoi panni, forse. Figlio illegittimo e abbandonato sui gradini d'una chiesa, si ritrova cucito addosso il nome di un santo. Conosce certo il padre, ma è altrettanto evidente che non potrà avere (e non è poi detto che lo desideri) portare il cognome Destouches, meno che mai quello materno Tencin. La sua madre d'adozione gli è carissima, una mamma davvero a tutti gli effetti, ma non sappiamo se abbia mai davvero desiderato chiamarsi Rousseau o Ponthieux. Di certo, Jean vede nei nomi e nei cognomi qualcosa che non gli appartiene pienamente, il simbolo di una continuità genetica e familiare dalla quale si sente probabilmente escluso. Esclusione che però, a maggior ragione, gli consente una piena libertà nello scegliere il nome che più gli aggrada, per qualsivoglia ragione. Alla Scuola di Diritto si iscrive pertanto con il cognome Daremberg, chissà mai per quale motivo. Poco tempo dopo, per ragioni altrettanto misteriose[15], muta Daremberg in D'Alembert. E come D'Alembert diventerà famoso abbastanza da passare alla storia.

6 *Jean le Rond D'Alembert*

Jean le Rond D'Alembert nasce quindi a Parigi il 17 Novembre 1717, una data che utilizza solo due cifre distinte, senza un nome definitivo. Ma di definitivo ci sarà certo il suo contributo alla scienza e al progresso dell'uomo.

Nel cercare i suoi ritratti, la cosa che più colpisce che è sempre sorridente, in tutte le immagini che lo tramandano: e a quei tempi non era ancora diventato di moda sorridere di fronte all'obiettivo. Doveva essere un uomo davvero piacevole da conoscere, lo si capisce anche dai suoi interessi. Al Quatre-Nations studia di tutto, ma il collegio tende a formare soprattutto teologi, e nonostante i suoi brillanti risultati Jean capisce che non è il suo sogno diventare un religioso. All'università non ha difficoltà a laurearsi avvocato, ma anche il diritto non lo affascina troppo: passa allora ad interessarsi di medicina, e scopre in fretta che gli interessa ancor meno della teologia.

Alla fine, capisce che il suo vero interesse è la matematica. Nel 1739 scrive la sua prima memoria di analisi, e la presenta all'Accademia delle Scienze di Parigi. È l'inizio della sua carriera di matematico.

Abbastanza curiosamente, per un inizio di vita così drammatico e avventuroso, il resto della vita di Jean D'Alembert scorre in modo tutto sommato placido e tranquillo. Entra molto presto all'Accademia delle Scienze, e in buona sintesi continuerà a lavorarci per tutta la vita, senza particolari eventi, e quasi senza viaggi all'infuori di Parigi. In

14 La "vitriére" con cui Jean vivrà per mezzo secolo: si tratta di madame Rousseau, nata Etiennette Gabrielle Ponthieux. Certo più "madre" lei della signora Tencin.

15 Beninteso, "misteriose" per chi scrive. Magari qualche biografo la ragione la conosce benissimo…

compenso, la sua voglia di conoscenza e di rinnovamento si ritrova intatta e vigorosa proprio nel suo lavoro, e i risultati sono entusiasmanti: prima ancora che per le sue innumerevoli scoperte, per il metodo e l'approccio verso la scienza e la filosofia della scienza.

Il suo approccio stesso alla fisica era più filosofico che altro: riteneva la meccanica una conseguenza della matematica, e la matematica una legge fondamentale dell'universo, retta puramente dalla logica. In un certo senso, non riteneva quasi necessaria la conferma sperimentale ai principi della meccanica analitica.

Studiò ogni parte della matematica conosciuta al suo tempo: si dedicò alla meccanica, alla cinematica, alla dinamica dei fluidi; poi, nel 1746, cominciò l'avventura che più lo ha reso famoso, la stesura della *Encyclopédie*, in collaborazione con Denis Diderot. Fu uomo di lettere, fu filosofo, perché è impossibile capire l'Illuminismo senza immaginare le ragioni degli uomini che decisero di scrivere l'enciclopedia, l'opera che doveva racchiudere tutto lo scibile e metterlo a disposizione di tutti gli uomini.

Una delle sue frasi più celebri recita "*L'algebra è generosa: spesso restituisce molto di più di quello che le viene chiesto*", e forse è un buon epitaffio anche per lo stesso D'Alembert. Venuto al mondo senza nome e quasi per sbaglio, prima di andarsene, il 20 Ottobre del 1783, ha lasciato il mondo certo più ricco di come lo aveva trovato. Se proprio bisogna trovargli un difetto, forse sta proprio nel pericoloso precedente che ha istituito nello scegliersi il nome che più gli aggrada: questo ha lasciato mano libera a loschi figuri che, svariati anni dopo di lui, si sono sentiti autorizzati a chiamarsi anche loro "D'Alembert".

Ma ce ne vorrà, prima che riescano a guadagnarsi l'onore di un "compleanno".

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Più che pace, tregua armata			
Arriva un altro gioco!			

1.1 Più che pace, tregua armata

È chiaro il riferimento a "Facciamo la pace", pubblicato a settembre?

Più che l'ambientazione, come insegna Russell, qui è il caso di spiegare la *meta-ambientazione*: se vi state chiedendo come mai in due numeri di seguito mi (Rudy speaking) ritrovo nel giardino di Doc, la cosa è presto detta: io e mia madre siamo riusciti a vendere *Il Luogo da Cui*, con soddisfazione sia del venditore sia dell'acquirente[16]: capite quindi che per ambientare i problemi in un luogo bucolico, considerato che il Luogo del Divano Quantistico è in una fervente metropoli di 1500 abitanti e la Succursale Svizzera viaggia su numeri ancora maggiori, non ci resta che Casa di Doc: con le sue arcate platoniche, il Contributo Vischese alla Conquista dello Spazio[17] e (soprattutto) con il suo Giardino, diventa chiaramente il luogo principe per l'ambientazione di problemi che richiedano aree estese.

L'altra volta il problema riguardava aiuole (o meglio, angoli di aiuole poligonali) sulle quali andava individuata "al volo" la tangente trigonometrica; siamo i primi ad ammettere che la cosa non sia esattamente "ovvia" a prima vista, e anche Alice non si è propriamente entusiasmata a calcolare a occhio le tangenti agli angoli; abbiamo quindi deciso, sempre dal punto di vista teorico (oeu, ragazzi, fuori tra un po' gela! Col cavolo, che ci mettiamo a scavare in giardino!), di progettare aiuole diverse: l'ultima idea che ci è venuta ci pare decisamente migliore, anche perché ci permette di riciclare il vecchio busto di Diofanto che stava prendendo polvere nella ~~cantina~~ gipsoteca sotterranea di Doc.

Definiamo come *Poligono Diofanteo* un poligono *convesso* avente i lati *interi positivi* e *inscrivibile* in un cerchio avente diametro *intero*; a margine, diciamo che un poligono diofanteo è *incentrato* se il centro del cerchio è all'*interno* del poligono, *excentrato* nel caso contrario; se poi un diametro del cerchio è un lato del poligono, lo definiremo *diametrale*.

Doc ha deciso di fare delle aiuole tali che siano tutte dei poligoni diofantei; per *evidenti ragioni di simmetria*, intende inserire un solo poligono per ogni permutazione dei lati, ma si sta chiedendo, lavorando in metri e volendo, tra le altre cose, limitare il diametro massimo del cerchio a 10 metri, quante aiuole potrà costruire. Volete dargli una mano prima della primavera? E secondo voi, lo troverà, con questa limitazione, un poligono diofanteo excentrato?

Vi proponiamo ora un problema che noi non ci sogniamo nemmeno di risolvere, e del quale non abbiamo soluzione (e non siamo neanche sicuri sia risolubile, vedete voi, nel caso...). Se evitiamo ogni sovrapposizione tra le aiuole, ammettendo però che siano in contatto per un angolo o per un lato, quale dovrà essere la dimensione minima del

16 O meglio, *degli acquirenti*: se prima passando da quelle parti dovevate usare cautela per evitare i miei problemi, adesso dovrete usarla per altri motivi: sono *apicultori*, e il loro miele di castagno è/sarà buonissimo. Conosco personalmente il castagno. Esiste, a parte come gioco di parole, il *mieledimelo*? I due castagni (stortignaccoli: sembravano un bonkei gigantesco particolarmente tormentato *[nota alla nota: si chiama bonkei un insieme (anche vuoto) di alberi bonsai con ambizioni paesaggistiche]*) da quelle parti conservano ancora il ricordo delle mie arrampicate.

17 Delle prime abbiamo parlato in RM005, la seconda non ce lo ricordiamo (e non abbiamo il tempo di cercare: siamo in ritardo!).

giardino di Doc per contenere tutte le possibili aiuole diofantee con diametro minore o uguale a 10? A noi, l'unico modo che viene in mente è quello di fare tante belle forme di legno, metterle in una scatola e agitare per un po'... Ma ci interesserebbe sapere se esistono dei metodi basati un po' meno sulla forza bruta.

1.2 Arriva un altro gioco!

Nel senso che, anche se non vi abbiamo aggiornato, i VAdLdRM hanno ricominciato ad avere il tempo[18] per seguire le stranezze genitoriali: consci che, nei mesi precedenti, avevamo dovuto arrampicarci sugli specchi per costruire qualcosa che non richiedesse il loro aiuto, si sono prestati a fare da tester per un gioco che, siamo sicuri, non raggiungerà mai la diffusione degli scacchi, ma mostra secondo noi un certo interesse.

L'idea è di avere un quadrato di lato n (noi abbiamo usato n=12, ma non sentitevi in obbligo...) sul quale sono scritti tutti i numeri da 1 a 144 (nel nostro caso). Il primo giocatore barra un numero pari a suo piacere: nei turni successivi, il giocatore di turno barra un numero non ancora barrato che sia un multiplo o un divisore del numero barrato dall'altro giocatore al turno precedente. Il primo giocatore che non può giocare causa numeri barrati perde. Secondo voi, se gioca sempre per primo Alberto, chi dei due ha una strategia vincente?

Se risolvete quanto sopra nella prima metà di novembre (è novembre, giusto? Giusto) e non sapete cosa fare nella seconda metà del mese, potreste applicarvi ad una piccola complicazione, della quale abbiamo solo trovato le soluzioni per forza bruta (non solo, ma "aggiustate a mano"; chiara ammissione di impotenza, vedete voi cosa riuscite a fare): uno dei due (voi sapete chi), stanco di perdere continuamente, decide di mettersi a giocare da solo, con le stesse regole; il suo scopo è di barrare il massimo numero possibile di caselle: secondo voi, quante caselle riuscirà a barrare, al massimo?

3. Bungee Jumpers

Trovare il minimo intero la cui prima cifra è 7 e che viene ridotto ad un terzo del suo valore originale quando la prima cifra viene trasferita all'ultimo posto.

Trovare tutti i numeri di questo tipo.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Novembre.

Un mese in cui il nostro ritardo è mitigato da ponti vari, beati voi che li fate. La sottoscritta (Alice, infaticabile redattrice condannata all'impaginazione delle vostre soluzioni) il primo novembre non solo lavora, ma entra per la prima volta dopo anni in un nuovo posto di lavoro. Inutile dire che tutta questa premessa non è altro che una scusa in anticipo, perché sono sicura di aver meno tempo nei prossimi mesi… ma in tempi in cui di lavoro ce n'è poco e brutto, non posso certo lamentarmi.

Tra gli annunci da fare c'è quello di un *errore* nel PM del mese scorso: ce l'hanno indicato alcuni lettori e il Capo ha fatto ammenda (non pubblica ammenda, quella la sto facendo io adesso – lui non si sente affatto colpevole, soprattutto avendo trovato lo stesso errore nella sua fonte). Trattasi in realtà di un errore di battitura, a pagina 18 del mese scorso, dove una cotangente (*cot*) è diventata un coseno (*cos*). Il risultato è comunque corretto, visto che successivamente è proprio il valore trovato per la cotangente ad essere sostituito al posto della cotangente, per cui l'errore non inficia il resto del PM ed il Grande Capo è salvo ancora una volta.

18 Fred è passato in "prima liceo", come dicono dalle parti del Classico; Alberto resta nel triennio ma ha scoperto che nella "città più brutta del mondo" esiste un 3+2 interessante, secondo lui: al momento, questo sta generando una serie di monologhi relativi ad indesiderati ospiti dell'animale invitato (suo malgrado) a cena; trattasi, infatti, di una specializzazione in parassitologia animale. Capite che ogni scusa è buona per deviare il discorso.

Il mese di ottobre è stato veramente ricco di eventi, ed uno estremamente importante è stata la visita dei rappresentanti maschili della Redazione al laboratorio di ***Sawdust***: uno dei risultati della visita lo vedete già in copertina, altri probabilmente verranno presentati il prossimo numero, se riusciamo a mettere insieme qualcosa di decente. Altro ci sarà certamente da dire, ma restiamo sull'essenziale, che c'è ancora molto da dire: preparatevi a viaggiare in direzione di Porto Sant'Elpidio, entro l'undici novembre, se volete vedere i Rudi (sempre i soliti due) presentare la loro nuovissima conferenza "L'arte dei giochi (matematici)", nell'ambito di Math&CO: trovate tutti i dettagli alla loro pagina facebook[19], a cui potete facilmente arrivare dal nostro memento[20].

La novità di questo numero è che sono qui pubblicate le soluzioni (quelle che ci sono arrivate) del Summer Contest. Una delusione: abbiamo ricevuto poche risposte, e rimandato la pubblicazione sperando in altre, così non vedrete in questo numero la soluzione a tutti i quesiti, peccato. In ogni caso la sezione di soluzioni è venuta piuttosto corposa e quindi – come sempre – non mi dilungo in pettegolezzi: andiamo a cominciare.

4.1 [161] – Summer Contest

Riportiamo prima tutti i quesiti con i commenti originali del Capo, non si sa mai che qualcuno sia ispirato ad una tardiva soluzione.

3	Le facce di una piramide triangolare hanno tutte la stessa area; mostrate che sono tra di loro congruenti.
4	La scomposizione in fattori primi di m e n coinvolge gli stessi fattori; anche i numeri $m+1$ e $n+1$ hanno questa proprietà. Il numero di coppie (m,n) di questo tipo è finito o infinito?
7	Scegliete un punto su ogni spigolo di un tetraedro; mostrate che il volume di almeno uno dei tetraedri risultanti dall'unione dei punti è $\leq 1/8$ del volume del tetraedro iniziale. *[Secondo i nostri esperti, questo è il più difficile di tutti]*
8	Mostrate che, se: $$\begin{aligned} a^2+4b^2 &= 4, \\ cd &= 4, \end{aligned}$$ allora $$(a-d)^2+(b-c)^2 > 1.6$$
9	È dato un punto *K* sul lato *AB* di un trapezio *ABCD*. Trovate un punto *M* su *CD* tale che sia massima l'area del quadrangolo dato dall'incrocio dei triangoli *AMB* e *CDK*.
11	Siano H_1,H_2,H_3,H_4 le altezze di una piramide triangolare, sia *O* un punto interno alla piramide e siano h_1,h_2,h_3,h_4 le perpendicolari per *O* alle facce della piramide. Mostrate che è $H_1^4+H_2^4+H_3^4+H_4^4 \geq 1024\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3\cdot h_4$
13	Mostrate che, se *a*, *b* e *c* sono i lati di un triangolo e *A*, *B* e *C* sono gli angoli, allora è: $$\frac{a+b-2c}{\sin(C/2)}+\frac{b+c-2a}{\sin(A/2)}+\frac{c+a-2c}{\sin(B/2)} \geq 0.$$
14	In quanti modi possiamo rappresentare un quadrangolo come unione di due triangoli? *[Sempre i nostri esperti, dicono che la formulazione originale avrebbe dovuto considerare solo triangoli non sovrapponentesi: provate a risolvere entrambi i casi]*

[19] https://www.facebook.com/mathandco

[20] http://www.rudimathematici.com/memento/mementodb.php

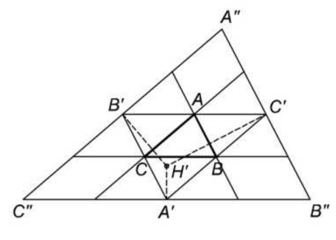
18	Le bisettrici degli angoli esterni in A e in C si incontrano in un punto del cerchio circoscritto. Dati i lati AB e BC del triangolo, trovate il raggio del cerchio. *[Qui c'è un tranello decisamente brutto]*
20	Confrontate i numeri $\log_3 4 \cdot \log_3 6 \cdot \ldots \cdot \log_3 80$ e $2 \cdot \log_3 3 \cdot \log_3 5 \cdot \ldots \cdot \log_3 89$.
22	Dati k segmenti sul piano, mostrate che il numero dei triangoli per cui tutti i lati appartengono all'insieme dato di segmenti è minore di $C \cdot k^{\frac{3}{2}}$, per una qualche costante $C > 0$
23	Data la parabola $y = x^2$ costruire, con riga e compasso, gli assi coordinati.
25	Siano A, B e C gli angoli e a, b e c i lati di un triangolo. Mostrate che è: $$60^\circ \leq \frac{aA + bB + cC}{a + b + c} \leq 90^\circ.$$

Il Capo l'aveva detto "ci vediamo ad autunno inoltrato", ma qui è già inverno: la prima neve è già arrivata e i termosifoni sono già a regime. Eppure poche, poche soluzioni. Vediamo di mettere in ordine quello che ci è arrivato.

4.1.1 Summer Contest – Problema 3

Visto che il testi sono citati all'inizio, passiamo direttamente alla soluzione di ***trentatre***, che è poi uno dei due temerari che ha effettivamente contribuito alle soluzioni.

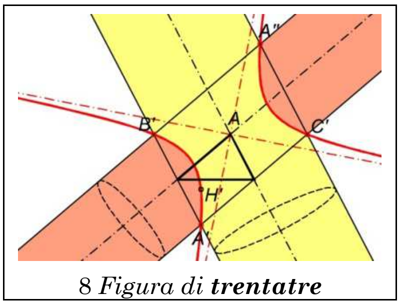
Suppongo che fra le facce sia inclusa la base. Altrimenti basta congiungere il baricentro della base con i vertici e si ha una "piramide" (di volume nullo) con le tre facce di eguale area, ma non congruenti – comunque si intenda la parola. E il quesito non avrebbe senso.



7 *Figura di* ***trentatre***

In figura, data la base T = ABC, tracciando le parallele ai lati per i vertici opposti si ottiene il triangolo T' = $A'B'C'$, e ripetendo il processo il triangolo T'' = $A''B''C''$. I triangoli CBA', ACB', e BAC' sono uguali alla base, ed essendo AB' = AC' ecc., possono essere ruotati lungo i lati di T, con i punti A', B',C' che si spostano nel vertice D; si ottiene una piramide con le caratteristiche richieste. In pianta i vertici si spostano ortogonalmente alle cerniere − cioè ai lati della base − e la proiezione sul piano del vertice D è H' : ortocentro di T'.

Il triangolo costruito sul lato AB ha la stessa area di T se ha la stessa altezza, cioè se il terzo vertice, nel piano, sta sulla retta $A''B''$; pertanto, nello spazio, il vertice della piramide sta sul cilindro con asse AB che interseca il piano di base in $A''B''$ e $A'B'$. Questo vale per tutti i lati, e il vertice D della piramide è un punto comune ai tre cilindri.

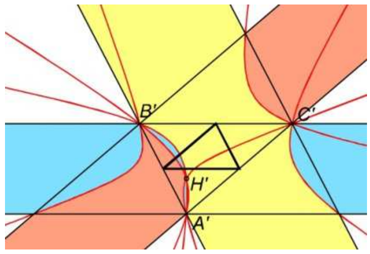


8 *Figura di* ***trentatre***

Nella seconda figura è riportata la intersezione dei due cilindri con assi concorrenti in A. La intersezione, proiettata sul piano, ha le proprietà

- è una iperbole (per la natura quadratica del problema)
- passa per H' (che è una soluzione), per i vertici di T' e per A''
- gli asintoti sono le bisettrici, ortogonali fra loro, degli assi dei due cilindri
- l'iperbole è equilatera e, noti gli asintoti, si può tracciare conoscendo un solo punto.

Nella figura successiva sono riportate tutte e tre le iperboli che si incontrano fra di loro a due a due nei vertici di *T"*, e a tre a tre nei vertici di *T'* (che sono sul piano e vanno scartati) e in *H'*. La soluzione iniziale è unica.



9 *Figura di* ***trentatre***

Due osservazioni.

a) *H'* (proiezione del vertice) deve essere interno a *T'*: il triangolo *T'*, e per similitudine *T*, hanno l'ortocentro interno e quindi sono acutangoli. Se *T* ha un angolo ottuso non esistono soluzioni, se *T* è rettangolo il vertice della piramide è sul piano di base e il volume è nullo.

b) La piramide ha solo tre spigoli indipendenti (i lati di *T*) anziché sei come un tetraedro generico. Il volume si può mettere, con le consuete notazioni per *T*, nella forma

$V = 1/3 \text{abc} \sqrt{\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}$: i coseni devono essere non negativi e questo conferma la a).

E bravo ***trentatre***. Andiamo avanti.

4.1.2 Summer Contest – Problema 8

È ancora di ***trentatre*** la prossima dimostrazione:

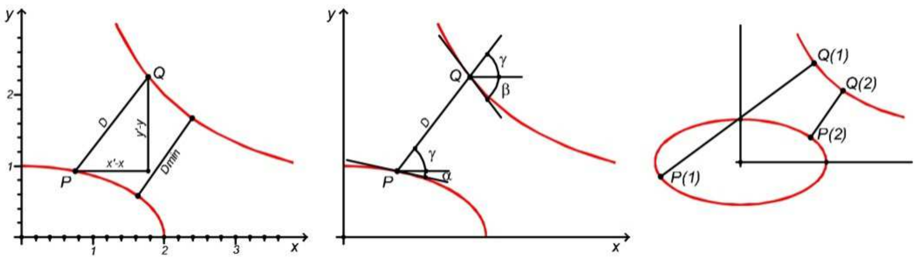
Sostituisco le variabili con $a \to x,\ b \to y,\ c \to y',\ d \to x'$.

In un diagramma cartesiano i due punti $P(x, y), Q(x', y')$ descrivono le curve

$P(x, y)$ $\boxed{x^2 + 4y^2 = 4}$ – una ellisse che taglia gli assi in (0, 1) e (2, 0)

$Q(x', y')$ $\boxed{x'y' = 4}$ – un'iperbole equilatera con asintoti sugli assi che passa per (2, 2).

Allora $D^2 = (x' - x)^2 + (y' - y_1)^2$ è il quadrato della distanza fra *P* e *Q*. Se $D_{\min}$ è la minima distanza fra le due curve, è sempre $D^2 \geq D_{\min}{}^2$.



Il valore $D_{\min}{}^2 > 1.6$ si può ricavare da una prima stima grafica, ma si può cercare il valore esatto. La distanza *D* è minima se la retta *PQ* è ortogonale alle tangenti alle curve in *P* e *Q*. Derivando le due espressioni si ha

$$\frac{dy}{dx} = -\tan\alpha = -\frac{x}{4y}, \quad \frac{dy'}{dx'} = -\tan\beta = -\frac{y'}{x'}$$

e la pendenza della retta *PQ* è $\tan\gamma = \dfrac{y' - y}{x' - x}$.

Deve essere $\alpha + \gamma = \beta + \gamma = \pi / 2$ da cui

$\alpha = \beta \to \dfrac{x}{4y} = \dfrac{y'}{x'} \to \boxed{xx' = 4yy'}$ (condizione perché le tangenti siano parallele)

$\tan\alpha\tan\gamma = 1 \rightarrow \frac{x}{4y}\frac{y'-y}{x'-x} = 1 \rightarrow \boxed{y(4x'-3x) = xy'}$ (condizione di ortogonalità).

Le 4 equazioni evidenziate definiscono le 4 coordinate richieste di *P* e *Q*.

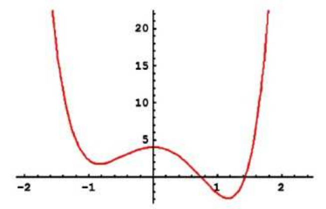
Eliminando successivamente y', x, y si ottiene una unica equazione in *x'* e cioè

$(x'^4+64)(x'^4-16)^2 = 144x'^6$.

Il problema è simmetrico rispetto al cambio di segno di *x*, *y* e infatti l'equazione contiene solo (x'^2). Con la variabile $X = x'^2/4$ si ha

$\boxed{(X^2+4)(X^2-1)^2 - 9/4X^3 = 0}$

che ha (v. diagramma) solo due radici reali *X*(1) = 0.742001 e *X*(2) = 1.429119. I valori corrispondenti delle variabili e di *D* si ricavano dalle precedenti



10 *Figura di* ***trentatre***

(1) $x' = 1.722790,\ y' = 2.321815,\ x = -1.875112,\ y = -0.347834,\ D^2 = 20.071928$

(2) $x' = 2.390978,\ y' = 1.672955,\ x = 1.627227,\ y = 0.581406,\ \boxed{D^2 = 1.774796}$.

La (1) dà la distanza dell'iperbole rispetto all'altro lato dell'ellisse, e la (2) la distanza minima cercata (v. figura). Il valore 1.6 del problema può quindi essere migliorato.

Benissimo.

4.1.3 Summer Contest – Problema 20

Qui abbiamo la versione di ***Mirhonf***:

La funzione $\log_3 x$ è strettamente crescente; quindi $\log_3(x+1) > \log_3 x$.

Di conseguenza, tutti i fattori che compaiono in A, cioè $\log_3 i$, per $i \in \{4, 6, \ldots, 80\}$ sono maggiorati da fattori che compaiono in B, cioè $\log_3 i$, per $i \in \{5, 7, \ldots, 81\}$.

In più, oltre ai fattori maggioranti tutti i fattori di A, il cui prodotto chiamo B' (B'= $\log_3 5 \cdot \log_3 7 \cdot \ldots \cdot \log_3 81$), in B compaiono altri fattori sicuramente positivi, infatti B=2 ·B' $\cdot \log_3 83 \cdot \ldots \cdot \log_3 89$.

Quindi si può concludere che B>A.

A riprova di quanto detto, ho calcolato:

A=1,72942E+19

B'=3,21989E+19

B=1,73968E+22

Che conferma quanto detto sopra: A<B'<B.

Ecco. Procediamo.

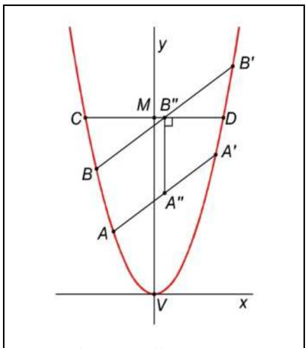
4.1.4 Summer Contest – Problema 23

Ritorna ***trentatre*** per questa dimostrazione:

Adottiamo lo schema di calcolo della figura. Date due corde parallele della parabola in *A*, *A'* e in *B*, *B'*, siano *A"*, *B"* i punti di mezzo dei segmenti *AA'* e *BB'*. La retta *A"B"* è parallela all'asse della parabola[21]. Se da un punto qualsiasi (in figura *B"*) si traccia la ortogonale alla precedente fino ad intersecare la parabola in *C* e *D*, la

[21] Una retta di pendenza *t* e passante per *y* = *b* ha equazione $y = b + xt$ e interseca la parabola in due punti *A*, *A'* di ascissa $x^2 = b + xt$ da cui $x, x' = (t \pm \sqrt{t^2+4b})/2$. L'ascissa del punto medio è $x'' = (x+x')/2 = t/2$, che non dipende dalla posizione ma solo dalla pendenza della retta, e quindi è uguale per rette parallele. E' un proprietà generale delle coniche: la retta per i punti di mezzo di due corde parallele passa per il centro della conica, che in una parabola è il punto all'infinito lungo l'asse.

retta parallela ad A"B" per il punto di mezzo M di CD è l'asse y. Questo taglia la parabola nel vertice V e la parallela a CD per V è l'asse x.



11 *Figura di* ***trentatre***

Per attuare la costruzione occorrono le seguenti operazioni, tutte facilmente eseguibili con riga e compasso, secondo gli schemi di figura (tracciando successivamente i cerchi $c1$, $c2$ …)

a) − dato un segmento PQ costruire il punto di mezzo M

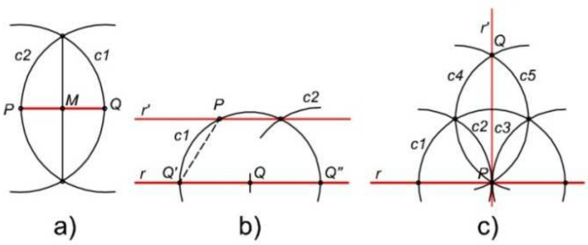
(2 cerchi $c1$, $c2$)

b) − data una retta r e un punto P costruire r ' parallela a r per P

(2 cerchi − Q arbitrario su r, $c1$ da Q per P, $c2$ con raggio PQ' da Q")

c) − data una retta r e un punto P su di essa costruire r ' ortogonale a r per P

(5 cerchi $c1$, $c2$, $c3$, $c4$, $c5$ con lo stesso raggio arbitrario).



Con queste operazioni il problema si risolve tracciando 17 cerchi. Forse il numero si può ridurre.

Andiamo avanti.

4.1.5 Summer Contest – Problema 25

Addirittura *due* soluzioni per questo quesito. Cominciamo con ***Mirhonf***:

Siano α, β e γ gli angoli e a, b e c i lati di un triangolo. Mostrate che è: $\frac{\pi}{3} \le \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} \le \frac{\pi}{2}$.

Sappiamo che $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Poiché $a < b + c$ si ha che $2a < a + b + c$, da cui $\frac{a}{a+b+c} < \frac{1}{2}$. Analogamente si ha che $\frac{b}{a+b+c} < \frac{1}{2}$ e $\frac{c}{a+b+c} < \frac{1}{2}$.

$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} = \frac{a}{a+b+c}\alpha + \frac{b}{a+b+c}\beta + \frac{c}{a+b+c}\gamma \le \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} \le \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \le \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Resta così dimostrata la seconda disuguaglianza. Supponiamo ora che $a \ge b \ge c$; di conseguenza sarà $\alpha \ge \beta \ge \gamma$.

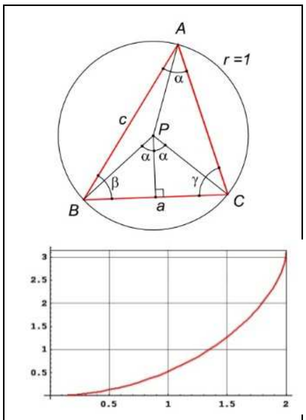
$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} \ge \frac{a}{a+b+c}\alpha \qquad (2)$$

Il valore più piccolo di α, tale che sia $\alpha \ge \beta \ge \gamma$, è $\alpha = \pi/3$, valore per cui $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$, $a = b = c$, $\frac{a}{a+b+c} = \frac{1}{3}$ e $\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} = \frac{\pi}{3}$.

Poiché all'aumentare di α, aumenta anche a, in corrispondenza dei valori appena visti si ha il minimo valore per il secondo membro della (2). Per qualsiasi altro valore di $\alpha > \pi/3$, il secondo membro della (2) non può che aumentare. Di conseguenza resta dimostrato che $\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} \ge \frac{\pi}{3}$.

La versione di ***trentatre*** (pensavate arrivasse qualcun altro? No, sono solo loro due):

Con la notazione consueta per gli angoli e i vertici (e con gli angoli in radianti) occorre trovare i limiti di $m = \dfrac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c}$.



12 *Figure di trentatre*

L'espressione non dipende dalla scala del triangolo, che si può supporre inscritto in un cerchio di raggio unitario e centro P (v. figura). L'angolo BPC è il doppio di α, da cui (per $r = 1$)

$a = 2\sin\alpha \rightarrow a\alpha = a\arcsin(a/2)$ e così per gli altri lati, e quindi

$$m = \frac{f(a) + f(b) + f(c)}{a+b+c} \quad \text{con} \quad f(x) = x\arcsin(x/2).$$

La funzione f è convessa e crescente (v. diagramma), e quindi la media di n valori è minima se i valori sono tutti uguali ed è massima se i valori sono il più possibile diversi e spostati verso gli estremi della curva. Ne segue

- m è minimo se $a = b = c = \sqrt{3}$ (triangolo equilatero)

$$m_{\min} = \frac{3f(\sqrt{3})}{3\sqrt{3}} = \arcsin(\sqrt{3}/2) = \frac{\pi}{3} \; (\equiv 60°)$$

- m è massimo se $a = b = 2,\ c = 0$ (triangolo di area nulla)

$$m_{\max} = \frac{2f(2)}{2\cdot 2} = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \; (\equiv 90°).$$

NB. per il triangolo rettangolo isoscele si ha $a = 2,\ b = c = \sqrt{2}$ da cui

$$m = \frac{f(2) + 2f(\sqrt{2})}{2 + 2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \; (\equiv 63°.64).$$

E con questo è tutto. Onestamente spero di essermi persa qualche mail. Ne mancano parecchi, come vedete, ma se vi fare vivi sono sempre pronta a pubblicarli come quesiti invernali…

4.2 [164]

4.2.1 Vendetta, tremenda vendetta!

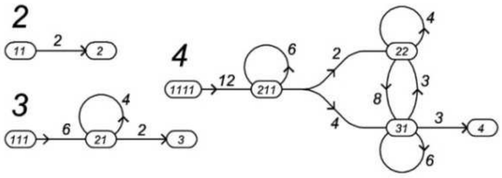
Questo problema dal titolo preoccupante aveva avuto ben poco successo il mese scorso, stimolando solo una non-soluzione di ***Franco57*** – che comunque continua ad essere nella lista dei preferiti del Capo, e non solo per il finale dell'allonimo – eppure è riuscito ad attirare le tardive attenzioni dei nostri lettori. Riportiamo qui il testo:

> *Abbiamo due giochi: Mati ne gioca uno, mentre Davide ne gioca un altro.*
>
> *Mati ha a disposizione un certo numero N di palline in un sacchetto, originariamente colorate di N colori diversi: il suo gioco consiste nel tirare fuori due palline a caso e colorare la seconda del colore della prima, per poi rimetterle entrambe nel sacchetto; il suo gioco finisce quando tutte le palline del sacchetto sono dello stesso colore.*
>
> *Davide ha a disposizione M palline in un (altro) sacchetto, originariamente non colorate: il suo gioco consiste nel tirar fuori una pallina a caso e colorarla di un dato colore; il suo gioco finisce quando tutte le palline del sacchetto sono colorate.*
>
> *M&D vanno avanti a fare una "mossa" l'uno e una "mossa" l'altro, sin quando uno dei due termina il proprio gioco. Rudy ha deciso che (in media) Davide deve perdere se N=80, e vincere se N=81: quale valore di M, per i due N dati sopra, garantisce (in media) la vittoria o la sconfitta di Davide?*

Come detto, sono arrivati altri contributi, che ho intenzione di pubblicare tutti, quindi se non avete (come me) pazienza per questo genere di problemi, cercate nell'indice dove comincia la soluzione successiva… anche se non ve lo consiglio: i contributi sono molto interessanti, a partire da ***trentatre***:

Ho provato a seguire i risultati di ***Franco57*** e verificare la sua congettura.

In figura riporto i grafi di transizione per N = 2, 3, 4 (per N = 5 ho ritrovato esattamente quello pubblicato).



Il numero atteso di mosse si può determinare anche nel seguente modo. Nel grafo, per ogni possibile percorso completo (dal primo nodo all'ultimo), si calcolano

a) il numero di rami M (n° di mosse)

b) la prob. del percorso = prodotto delle prob. dei rami percorsi − che sono i coefficienti moltiplicati per $p = 1/\left(N(N-1)\right)$.

P. es. per N = 3 (p = 1/6) tutti i percorsi sono dati da (6)(ciclo 4 ripetuto n volte)(2), perciò se P_M è la prob. del percorso di lunghezza M si ha

$$P_{M+2} = (6p)\cdot(4p)^M \cdot(2p) = 1/3\cdot(2/3)^M\ ,\ M = 0,1,2\ldots$$

cioè $P_M = 3/4\cdot(2/3)^M$ da cui la prob. totale e il valore atteso di M sono

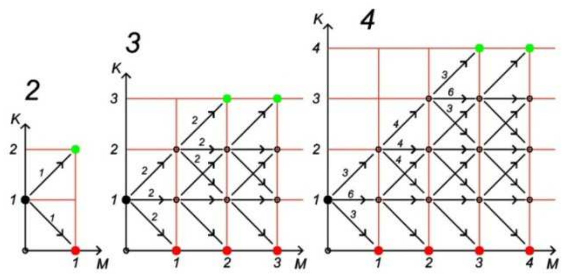
$$P_{tot} = \sum_{M=2}^{\infty} P_M = 1 \text{ come deve essere}$$

$$\overline{M}_3 = \sum_{M=2}^{\infty} M\cdot P_M = 4 \text{ (cioè } L_{111}) .$$

A parte la difficoltà di costruire il grafo, la presenza di più cicli (v. N = 4) complica le cose, e il sistema di equazioni lineari può convenire.

Il metodo seguito da ***Franco57*** (applicare le probabilità direttamente al numero atteso di mosse) è sintetico, efficace e finito, ma porta rapidamente a complicazioni, perché il problema è trattato nel suo complesso (tutti i K_r). In alternativa ho cercato di costruire la sequenza $[P_M]$ in un altro modo.

Prendiamo un particolare colore (diciamo r) e osserviamo la evoluzione di $K \equiv K_r$. Questo significa costruire un grafo (un *albero*) di tutti gli stati possibili.



In figura gli alberi per N = 2, 3, 4 con

- in ordinate K (n° di palline di colore r) e in ascisse M (n° di mosse)
- la *radice* (nero) è (0,1)
- le *foglie* sono di due tipi

(M, 0) (rosso): il colore (r) sparisce

(M, N) (verde): tutte le N palline sono di colore (r): il processo termina

- ad ogni incremento di M (1 mossa) K può variare di (+1, −1) : il colore (r) è scelto per primo o per secondo, (0) : sono scelti 2 (r) o nessuno ; queste sono tutte le possibilità
- le prob. di transizione sono $(+1,-1)$: $q_K = \dfrac{K(N-K)}{N(N-1)} = p\,K(N-K)$, (0): $t_k = 1 - 2q_K$

(in figura i valori q, t sono indicati a meno del fattore p)

- questi valori non dipendono da M : basta calcolarli per i rami uscenti dai nodi della diagonale che parte dalla radice, ed applicarli a tutti gli elementi a destra, cioè bastano i q_K , $K = 1\ldots(N-1)$
- per $N > 2$ l'albero prosegue all' infinito.

Le prob. di un percorso si ottengono moltiplicando le prob. dei rami. Se $Q_{M,K}$ è la somma delle prob. di <u>tutti i percorsi</u> che dalla radice arrivano al nodo (M, K), poiché in ogni nodo arrivano al più tre rami, si ha la ricorrenza

$$Q_{M+1,K} = Q_{M,K-1}\,q_{K-1} + Q_{M,K}\;t_K + Q_{M,K+1}\;q_{K+1}$$

che si applica per colonne successive a partire dai valori iniziali

$Q_{1,1} = t_1$, $Q_{1,2} = q_1$ e $Q_{M,M+2} = 0,\; M = 0\ldots(N-2)$.

Poiché le foglie non influenzano gli altri nodi, il calcolo si può ridurre alla fascia $1 \le K \le (N-1)$, e le foglie verdi si ottengono con $Q_{M,N} = Q_{M-1,N-1}\,q_{N-1} = Q_{M-1,N-1}/N$.

Ma $Q_{M,N}$ è la prob. che in M mosse il gioco termini a causa di un <u>colore generico</u>; con N colori la prob. che <u>un qualsiasi colore</u> termini il gioco è $P_M = N \cdot Q_{M,N} = Q_{M-1,N-1}$. La sequenza $[P_M]$ è la stessa che si ottiene con il grafo di transizione, e si ha ancora

$$\sum_{M=N-1}^{\infty} P_M = 1,\; \overline{M_N} = \sum_{M=N-1}^{\infty} M \cdot P_M\ .$$

Il processo è più lungo da spiegare che da eseguire, e si può impostare un semplice programma con il quale, con 10.000 termini della sequenza, per ogni N inferiore a 36 ho ottenuto $\overline{M_N} = (N-1)^2 - 1.10^{-4}$, e con 100.000 termini la stessa precisione per N inferiore a 100. Pertanto la congettura è <u>sostanzialmente confermata</u>.

Ho proseguito cercando una <u>dimostrazione esatta</u>, che riporto in modo sintetico, saltando i dettagli. Le formule segnate (*) sono scritte per brevità solo per $N = 4$.

I parametri sono $q_K = K(N-K)/N(N-1),\; t_K = 1 - 2q_K$, $g = q_1 q_2 \ldots q_{N-1}$.

Da quanto sopra, con $Q_{0,1} = 1,\; Q_{0,2} = Q_{1,3} = \ldots = Q_{N-2,N-1} = 0$, per ogni $M > 1$

$$\begin{aligned} Q_{M,1} &= Q_{M-1,1}\,t_1 + Q_{M-1,2}\,q_2 \\ Q_{M,2} &= Q_{M-1,1}\,q_1 + Q_{M-1,2}\,t_2 + Q_{M-1,3}\,q_3 \quad (*) \\ Q_{M,3} &= \qquad\qquad\;\; Q_{M-1,2}\,q_2 + Q_{M-1,3}\,t_3 \end{aligned}$$

in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} Q_{M,1} \\ Q_{M,2} \\ Q_{M,3} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \cdot \begin{bmatrix} Q_{M-1,1} \\ Q_{M-1,2} \\ Q_{M-1,3} \end{bmatrix} (*) \text{ con } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} t_1 & q_2 & 0 \\ q_1 & t_2 & q_3 \\ 0 & q_2 & t_3 \end{bmatrix} (*) \text{ da cui per iterazione}$$

[1] $$\begin{bmatrix} Q_{M,1} \\ Q_{M,2} \\ Q_{M,3} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^M \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (*)\ .$$

Dalla matrice $\boldsymbol{A}$

- $\mathrm{Det}(\boldsymbol{A})=0$ (per la simmetria dei q, t)
- il polinomio caratteristico è

[2] $$C(X)=\mathrm{Det}(X\cdot\boldsymbol{1}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} X-t_1 & -q_2 & 0 \\ -q_1 & X-t_2 & -q_3 \\ 0 & -q_2 & X-t_3 \end{vmatrix}=X\,(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\ (*)$$

con $\alpha_0=0,\alpha_1,\ldots\alpha_{N-2}$: autovalori di $\boldsymbol{A}$, e sviluppando il polinomio

[3] $C(X)=\sum_{S=1}^{N}\beta_S\, X^S$ con i β funzioni degli α

- $\boldsymbol{A}$ soddisfa alla $C(\boldsymbol{A})=\sum_{S=1}^{N}\beta_S\,\boldsymbol{A}^S=0$.

Sostituendo $C(\boldsymbol{A})$ nella [1] si ha $\sum_{S=1}^{N}\beta_S\, Q_{M+S,K}=0$, per ogni M e <u>valida per ogni riga</u> K e quindi anche per $P_M=Q_{M-1,N-1}$, da cui la ricorrenza (per $\beta_N=1$)

[4] $$P_M=-\sum_{S=1}^{N-1}\beta_S\, P_{M-N+S}\ ,\ M\geq N\ \text{ con }\ P_2=\ldots=P_{N-2}=0,\ P_{N-1}=Q_{N-2,N-1}=N\,g\ .$$

e la sequenza $[P_M]$ si calcola direttamente, conoscendo i β.

Dalla [4] si può costruire la funzione generatrice

$$F(X)=\sum_{M=N-1}^{\infty}P_M X^M=\frac{N\,g}{C(1/X)}\ \text{ da cui}$$

$$\overline{M_N}=\sum_{M=N-1}^{\infty}M\,P_M=F'(1)=dF(X)/dX\,\Big|_{X=1}=N\,g\,C'(1)/C(1)^2$$

Ma valgono le

[5] $C(1)=q_1q_2\ldots q_{N-2}=N\,g$, cioè $F(X)=C(1)/C(1/X)$

[6] $C'(1)=(N-1)^2\,N\,g$

e quindi $\boxed{\sum_{M=N-1}^{\infty}P_M=F(1)=1\ ,\ \overline{M_N}=(N-1)^2}$.

<u>dimostrazioni di [5] e [6]</u>

- nel problema compaiono determinanti con sole tre diagonali diverse da 0

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{1,1}\end{vmatrix}\to D_2=\begin{vmatrix}a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{vmatrix}\to D_3=\begin{vmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & 0\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}\to D_4=\begin{vmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0\\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4}\\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4}\end{vmatrix}\to\ldots$$

che si calcolano con lo schema iterativo

$$D_1=a_{1,1}\,,\ D_2=a_{2,2}D_1-a_{1,2}a_{2,1}\,,\ D_3=a_{3,3}\,D_2-a_{2,3}a_{3,2}\,D_1\,,\ D_4=a_{4,4}\,D_3-a_{3,4}a_{4,3}\,D_2\ \ldots$$

da cui, con $t_K=1-2q_K$, per N qualsiasi

$$C_N(1)=\mathrm{Det}(1\cdot\boldsymbol{1}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}2q_1 & -q_2 & \ldots & 0 & 0\\ -q_1 & 2q_2 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 2q_{N-2} & -q_{N-1}\\ 0 & 0 & \ldots & -q_{N-2} & 2q_{N-1}\end{vmatrix}=N\,q_1q_2\ldots q_{N-1}=N\,g$$

- con $C_N(X)=\mathrm{Det}(X\cdot\boldsymbol{1}-\boldsymbol{A})$, $C_N\,'(X)$ è la somma dei minori principali di ordine (N - 2) dello stesso $C_N(X)$, e quindi $C_N\,'(1)=\Sigma$minori princ. di $C_N(1)$

- questi minori, in n° di ($N - 1$), hanno tutti uguale valore (non riporto la dimostrazione), e uno di essi si ricava da C_N (1) togliendo l'ultima riga e l'ultima colonna

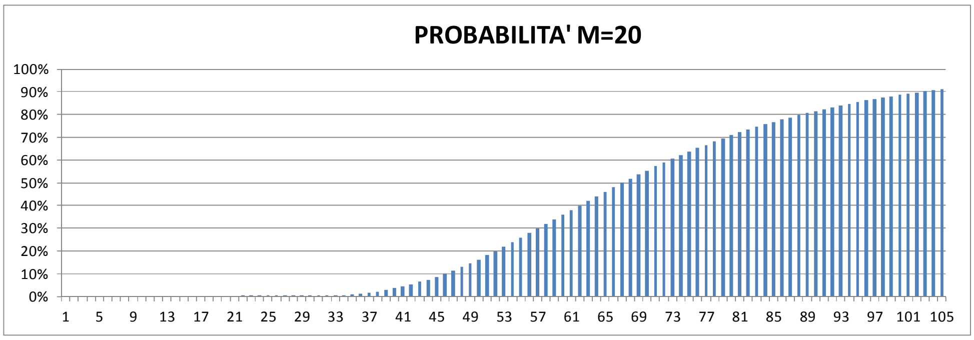
$$C_N\,'(1) = (N-1)\cdot C_{N-1}(1) = (N-1)^2 q_1 q_2 \ldots q_{N-2} = (N-1)^2 N\, g\ .$$

<u>Osservazione sul problema di Davide.</u>

- nella soluzione, sempre di ***Franco57***, al problema 163.2.2 (Il trucco ecc.) pubblicata in RM164, applicando la ricorrenza trovata, nel caso di probabilità tutte uguali e che esauriscano tutti casi, si ha che il numero L_k medio di lanci necessario per ottenere almeno una volta tutti i valori, in un "dado" simmetrico a k facce è $L_k = k\,(1+1/2+1/3+\ldots+1/k)$; per esempio occorrono in media 14.7 lanci per ottenere tutti i valori di un normale dado a sei facce;

- questa formula è <u>la stessa trovata per il problema di Davide</u>; i due problemi sono equivalenti: se spuntiamo da una lista i valori dei successivi lanci del dado, e terminiamo quando li abbiamo spuntati tutti, questo equivale ad estrarre le palline dal sacchetto finché le abbiamo colorate tutte.

Pensiamo che ***Franco57*** sarà contento dei commenti e delle estensioni, anche ***Rub*** parte da quanto ha letto nel numero passato:

> Non sono riuscito a trovare il bandolo della matassa per la prima parte delle maledette N palline di Mati, multicolori. Ma mi sembra eccellente l'idea della "Congettura di ***Franco57***", che ipotizza un numero medio di estrazioni per la vittoria pari ad $(N-1)^2$. Difficile fare meglio!
>
> Invece ho la soluzione completa per il problema di Davide, con le M palline che passano lentamente ma inesorabilmente dallo stato monocromatico bianco a quello uniformemente colorato (Rosso?).
>
> Costruiamo una matrice con M righe e J colonne, essendo J il numero progressivo di estrazione delle palline. Per J=1 abbiamo facilmente il 100% di probabilità di avere 1 pallina colorata (P_{11}); a J=2 abbiamo due casi: (M−1)/M con 2 palline colorate (P_{22}), ed 1/M con 1 sola, che è appena stata ripescata (P_{21}); per J=3 abbiamo tre casi, $(1/M)^2$ in cui pervicacemente riestraggo l'unica pallina colorata (P_{31}), (M−2)/M*P_{22} casi un cui ho tre palline (P_{33}); posso avere due palline colorate (P_{32}) sia dallo stadio P_{21} con estrazione di una pallina bianca, che dallo stadio P_{22} con estrazione di una delle due palline precedentemente colorate: P_{32}=(M−2)/M*P_{21}+2/M*P_{22}. Costruendo ricorsivamente la matrice completa, è possibile, fissato M, avere la distribuzione di probabilità di vittoria in funzione del numero J di estrazioni. Evidentemente per J<M la probabilità vale zero, e lentamente cresce al crescere di J, come mostrato nella figura per M=20, in cui raggiungiamo il 90% con 103 estrazioni.
>
> 
>
>
> Quale è però il significato della soluzione di ***Franco57*** per il caso in oggetto? Lui ha ricavato che l'attesa media per ogni M vale M*(1+1/2+1/3+..1/M) che nel nostro caso ammonta a circa 72, corrispondente ad una probabilità del 58,96%, mentre io mi sarei atteso un valore del 50% (ovvero 67 estrazioni).
>
> Avete una idea del perché questa piccola discrepanza?

Giriamo la domanda di ***Rub*** ai lettori, tanto ormai si è capito che questo problema è stato preso sul serio. Del resto adesso arriva la trattazione completa di ***Bobbin Threadbare***, intitolata da lui "Destino manifesto", perché *"per trovare vie di scampo alla crescita esponenziale dei calcoli richiesti per trovarsi le probabilità di vittoria dei contendenti, ho dato fondo a tutto il repertorio di trucchetti matematici che conosco, e anche così ho dovuto prima schivare una simpatica trappola concettuale circa il risultato da trovare, e poi implementare due algoritmi in altrettanti linguaggi per trovare una risposta entro questo secolo"* . No, non è breve. Buon divertimento.

I. Intro

Innanzitutto faccio i complimenti al Capo per la perfidia dell'enigma: non fosse già abbastanza difficile calcolare il valore atteso di estrazioni necessarie a Mati e Davide, si scopre a una lettura più sospettosa che, per come è formulato il problema, questo risultato è insufficiente! Faccio un esempio pratico: supponiamo che i due ragazzi facciano un gioco più semplice, per completare il quale

- a Mati servano 2 estrazioni nel 50% dei casi, e 3 nell'altro 50%
- a Davide serva 1 estrazione nel 60% dei casi, e 10 nel rimanente 40%

In questo caso, in media Mati farà meno estrazioni, ma è chiaro che Davide vincerà più spesso. Con mio (e ora anche vostro) sommo orrore, si scopre quindi che per avere la risposta al problema toccherà sciropparsi il calcolo di *tutta* la distribuzione di probabilità delle estrazioni(!)

Definiamo quindi

- $f_N(i)$ come la probabilità che Mati finisca il gioco in *esattamente i* estrazioni, se la sua urna contiene N palline
- $G_M(i)$ come la probabilità che Davide finisca il gioco in *al massimo i* estrazioni, se la sua urna contiene M palline (la cosiddetta "distribuzione cumulata")

La probabilità che Davide batta Mati si può essere espressa come

$$\sum_{i=1}^{+\infty} f_N(i)G_M(i-1).\ (*)$$

II. Palline e freccette

Per calcolare f e G, occorre innanzitutto costruire un modello delle urne in forma di diagramma di stato, come nello schema di ***Franco57*** pubblicato in RM165.

Per Daniele il discorso è abbastanza facile, visto che possiamo identificare lo stato con il numero m di palline che ha già dipinto con il colore dato. Le uniche due transizioni possibili sono quella nulla (se Daniele pesca una pallina già pitturata) e quella che porta lo stato da m a $m+1$ (se ne pesca una ancora incolore e può dipingerla). Perciò il diagramma non è altro che una catena di stati, ciascuno collegato solo a se stesso o al successivo, e le probabilità di avanzare sono abbastanza elementari. Definita $q_{m,M}(+)$ la probabilità di passare, in seguito a un'estrazione, dallo stato m a $m+1$ in un'urna a M palline, e $q_{m,M}(=)$ quella di restare invece allo stato attuale, abbiamo $q_{m,M}(+) = \frac{M-m}{M}$; $q_{m,M}(=) = 1 - \frac{m}{M}$.

Ma ovviamente la Vera Sfida del problema è quella di trovare un diagramma di stato trattabile in tempi umani per l'urna di Mati. Se nello stato introduciamo tutte le possibili varianti di colorazione delle N palline, ci ritroviamo con un numero di stati mostruoso (una voce da qualche parte sussurra l'espressione "numeri di Catalan", ma ho imparato a non fidarmi di queste intuizioni). E questi stati saranno collegati da un diagramma di transizione contenente un numero di frecce dell'ordine del *quadrato* del mostruoso numero.

Ma non disperiamo! Infatti esiste un modo che taglia alla radice lo spaventoso groviglio, riducendo il diagramma a una catena altrettanto semplice della precedente.

Bene, se ora fossi uno dei Rudi, comincerei qui una dottissima digressione, sul modello dei Compleanni, narrando l'interessante quanto deplorevole dottrina del

Destino Manifesto, per cui i pionieri del Far West credevano che le loro vittorie contro gli indiani fossero la prova provata che Dio li aveva predestinati a strappare l'intera America Settentrionale agli abitanti del luogo, e metterei qui a destra un'opportuna foto di John L. O'Sullivan, presa da Wikipedia.

Ma visto che i lettori si saranno già presi la loro quota mensile di Compleanno, forse è meglio lasciare le biografie per un'altra occasione. Limitiamoci ad applicare la dottrina del Destino Manifesto, magari in modo meno sanguinario: semplicemente, anziché seguire le fortune di tutti i vari colori che adornano le palline di Mati, ci limiteremo a seguirne uno. Quale? Quello vincente, è ovvio! Ovvero quello di cui alla fine sono state pitturate tutte le palline dell'urna.

Prima di chiamare il manicomio, lasciatemi provare a spiegare. Se noi consideriamo l'evoluzione di un'unica popolazione di palline dell'urna di Mati sapendo in anticipo che essa è quella che alla fine ha vinto, ma senza sapere qual è stata la sua evoluzione dalla misera pallina iniziale fino alla conquista dell'urna, possiamo di nuovo rappresentare lo stato della partita di Mati con il singolo numero n, che rappresenta il numero di palline che in un dato momento sono dipinte con il colore vincente. E possiamo anche trovare le probabilità di transizione in modo quasi altrettanto elementare di come abbiamo fatto per il gioco di Daniele, tenendo solo a mente due importanti novità rispetto a quello:

- innanzitutto, in questo caso lo stato può anche diminuire di 1 (oltre che rimanere invariato o aumentare di 1)

- in secondo luogo, dobbiamo considerare il Destino Manifesto del colore: sapere che esso ha vinto altera le probabilità di transizione da uno stato all'altro in base alla nota legge di Bayes.

Per calcolare le probabilità di transizione, cominciamo a ricavare quelle di un colore qualunque, non predestinato. Supponiamo di essere nello stato n: definiamo $p_{n,N}(+)$ la probabilità di passare, in seguito a un'estrazione, allo stato $n+1$, $p_{n,N}(-)$ quella di passare a $n-1$ e $p_{n,N}(=)$ quella di rimanere nello stato n. In base alle regole del gioco, si vede facilmente che

$$p_{n,N}(+) = p_{n,N}(-) = \frac{n}{N}\cdot\frac{N-n}{N-1};\; p_{n,N}(=) = 1 - 2\left(\frac{n}{N}\cdot\frac{N-n}{N-1}\right).$$

Passiamo ora alle probabilità alterate di un colore "predestinato". Chiamiamo V l'evento "il colore in esame vince". Per la legge di Bayes, la probabilità di passare dallo stato n a $n+1$ sotto questa condizione vale

$$p_{n,N}(+|V) = p_{n,N}(+)\cdot\frac{p_{n,N}(V|+)}{p_{n,N}(V)}$$

È da notare che con $p_{n,N}(V)$ intendiamo non la probabilità iniziale di vittoria ($1/N$), ma quella di vincere partendo dallo stato n. Questa probabilità vale[22] n/N. Analogamente, $p_{n,N}(V|+)$ non è altro che la probabilità di vincere partendo dallo stato $n+1$, ovvero $(n+1)/N$. Semplificando, abbiamo quindi:

$$\frac{p_{n,N}(V|+)}{p_{n,N}(V)} = \frac{n+1}{n}$$

e, allo stesso modo, $\frac{p_{n,N}(V|=)}{p_{n,N}(V)} = 1;\; \frac{p_{n,N}(V|-)}{p_{n,N}(V)} = \frac{n-1}{n}$.

Le probabilità di transizione risultano quindi essere:

$$p_{n,N}(+|V) = \frac{(n+1)(N-n)}{N(N-1)}$$

$$p_{n,N}(-|V) = \frac{(n-1)(N-n)}{N(N-1)}$$

[22] La dimostrazione di questo risultato è stata data in un antico numero di RM, che ho cercato ma non sono riuscito a trovare. Visto che qui c'è già abbastanza bailamme, mi concedo la tipica battuta degli autori dei testi universitari: "la verifica di questo punto è lasciata come esercizio al lettore" (è facile, comunque).

$$p_{n,N}(=|V) = p_{n,N}(=) = 1 - 2\left(\frac{n}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}\right)$$

III. Si passa ai calcoletti...

Una volta calcolate le probabilità di transizione, ricavarne le distribuzioni di probabilità per il numero di estrazioni necessarie a concludere il gioco è abbastanza semplice, anche se richiede di fare parecchi calcoli ripetitivi: usare un PC mi sembra qui abbastanza inevitabile. Visto che l'obiettivo richiesto dal problema è solo quello di trovare un valore corretto per M, gli arrotondamenti alla sedicesima cifra decimale fatti da Excel o dal C non dovrebbero influire. I solutori più esigenti potrebbero, volendo, dotarsi di qualche software più potente, che permetta di lavorare di frazioni con numeratore e denominatore di grandezza arbitraria, e risolvere così il problema con la massima certezza.

Veniamo alla pratica: definiamo $x_{n,N,j}$ la probabilità che, se Mati ha un'urna con N palline totali, di cui n del colore vincente, concluda il gioco in *esattamente* j estrazioni. Questo coefficiente si può ricavare ricorsivamente, notando che, come già detto, dopo un'estrazione possono accadere solo tre cose (ovvero ritrovarsi con $n-1$, n o $n+1$ palline del colore vincente) e resterà un'estrazione in meno da effettuare. Perciò, se $n<N$, si ha:

$$x_{n,N,j} = p_{n,N}(+|V)x_{n+1,N,j-1} + p_{n,N}(=|V)x_{n,N,j-1} + p_{n,N}(-|V)x_{n-1,N,j-1}$$

Inserendo i valori delle p calcolati al punto II, si ottiene:

$$x_{n,N,j} = \frac{(n+1)(N-n)}{N(N-1)}x_{n+1,N,j-1} + \left[1 - 2\left(\frac{n}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}\right)\right]x_{n,N,j-1} + \frac{(n-1)(N-n)}{N(N-1)}x_{n-1,N,j-1}$$

Se invece $n = N$, in base alla definizione di x si ha: $X_{N,N,0} = 1$; $X_{N,N,j\neq 0} = 0$.

Con questo abbiamo un insieme completo di equazioni. Per N fissato, possiamo calcolare tutti i coefficienti x cominciando da quelli per cui $j = 0$ (banali), passando poi a quelli con $j = 1$ (usando la penultima formula presentata) e proseguendo verso l'infinito, finché i numeri divengono trascurabili: di seguito mostro la figura con una parte del foglio elettronico che ho usato per i conti.

	A	B	C	D	BK	BL	BM	BN	BO	BP	BQ	BR	BS	BT	BU	BV	BW	BX	BY	BZ	CA	CB	CC	CD	CE
1			N	80																					
2			residuo	0.52%																					
3																									
4			n	f(j) ↓																					N
5			0	1	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
6	j	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000
7		1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0127	0.0000
8		2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0123	0.0000
9		3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0006	0.0120	0.0000
10		4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0009	0.0117	0.0000
11		5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0011	0.0115	0.0000
12		6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0014	0.0112	0.0000
13		7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0016	0.0109	0.0000
14		8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0018	0.0107	0.0000
15		9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0020	0.0104	0.0000
16		10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0021	0.0102	0.0000
17		11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0023	0.0100	0.0000
18		12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0024	0.0097	0.0000
19		13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0026	0.0095	0.0000
20		14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0027	0.0093	0.0000
21		15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0091	0.0000
22		16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0029	0.0089	0.0000
23		17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0030	0.0087	0.0000
24		18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0031	0.0086	0.0000
25		19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0032	0.0084	0.0000

Calcolati gli x, si ottiene finalmente la distribuzione di probabilità delle estrazioni necessarie a Mati per concludere il gioco, osservando che $f_N(i) = X_{1,N,i}$.

Per Daniele la situazione è simile, con la sola differenza che qui vorremmo calcolare la cumulata $G_M(i)$. Definiamo dunque $y_{m,M,j}$ la probabilità che, se Daniele ha un'urna con M palline totali, di cui m del colore vincente, concluda il gioco in *al massimo* j estrazioni.

Valgono formule analoghe alle precedenti, con le differenze dovute alle diverse regole per le urne…

$$\begin{aligned} y_{m,M,j} &= q_{n,N}(+)y_{m+1,M,j-1} \ + \ q_{m,M}(=)y_{m,M,j-1} \\ &= \frac{M-m}{M}y_{m+1,M,j-1} \ + \ \frac{m}{M}y_{m,M,j-1} \end{aligned}$$

…e al fatto che qui la j indica le estrazioni massime da impiegare: $y_{M,M,j} = 1 \ \forall j \geq 0$.

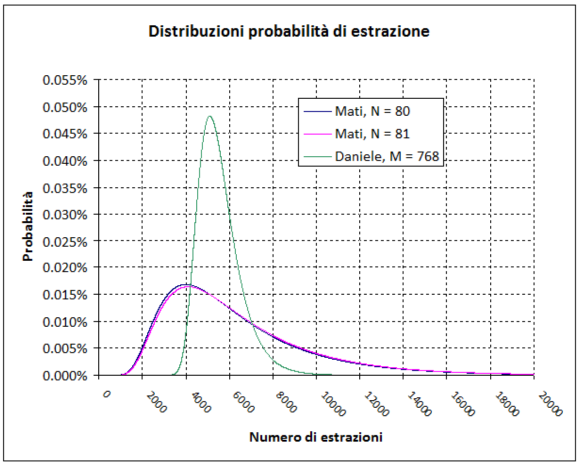
Da questi coefficienti si passa alla cumulata G secondo la relazione $G_M(i) = y_{0,M,i}$.

Infine, usando la (1), si ottiene la risposta al problema.

E qual è questa risposta? Bene, dopo un po' di macinatura di numeri in Excel (per calcolare f) e C++ (per G), ho scoperto che vi è un'ampia gamma di valori di M che garantiscono le condizioni del problema. In particolare, $\boldsymbol{M = 768}$ è una soluzione valida: con essa, Daniele vince circa il 49,5% delle partite quando $N = 80$, e circa il 51,4% quando $N = 81$ (avrei voluto mostrare percentuali più bilanciate, ma per avere una soluzione garantita corretta mi è toccato prendere margini di errore asimmetrici, poiché ho troncato il calcolo delle distribuzioni una volta raggiunto $j = 20000$).

È anche interessante notare che, limitandoci a calcolare il numero medio di estrazioni, avremmo sbagliato i conti: il valore atteso di estrazioni per Mati è superiore a 6000 (passare da 80 a 81 palline aumenta di circa 140 le estrazioni medie; non ho i dati esatti sempre per il problema di troncamento), mentre Daniele se la caverà in media facendone appena 5546.

Per chiudere in bellezza, vi mostro il grafico delle distribuzioni tanto faticosamente calcolate: notate la differenza fra le varianze delle due variabili casuali.



Complimenti a ***Bobbin Threadbare***. E con questo è finalmente tutto. Certo, se ci mandate altro, si può senz'altro vedere il Capo in brodo di giuggiole e me pronta a pubblicare. Del resto, il problema successivo (quello con cui facevamo pace) ha generato tante soluzioni belle ed interessanti, e anche un post particolarmente apprezzato dal Capo sul blog di ***Zar***: http://proooof.blogspot.it/2012/10/connessioni.html. Voi andate a leggerlo, noi dobbiamo andare ora all'ultimo numero.

4.3 [165]

4.3.1 Meglio partire per tempo

Qui il Capo e il Doc mi stanno preparando una trappola, molto mal congegnata, ovviamente, visto che sono io a raccogliere tutte le soluzioni ed a mettere insieme tutti i pezzi che mi mandano… in ogni caso, trappole a parte, il problema è il seguente:

> *Per che valori di n si possono costruire degli n-agoni convessi per cui le tangenti trigonometriche di tutti gli angoli interni siano degli interi relativi finiti? Esistono delle relazioni possibili tra i lati?*

Bene, chiarito il problema, veniamo alle vostre soluzioni, cominciando da ***Tartaruga***, che è stato il primo a scriverci.

> Triangoli
>
> Detti A, B, C i tre angoli del triangolo, la formula di addizione per le tangenti ci dà:
>
> tan(A+B) = (tan(A) + tan(B)) / (1 – tan(A)tan(B))
>
> siccome C è supplementare di (A+B), tan(C) = −tan(A+B), quindi:
>
> tan(C) = (tan(A) + tan(B)) / (tan(A)tan(B) – 1)
>
> Vogliamo che tan(A), tan(B), tan(C) siano interi relativi.

Siccome arctan(1) = 45° e arctan(2) è circa 63°26'5.8", uno dei tre angoli deve essere di 45°, supponiamo sia A. La formula diventa allora:

tan(C) = (tan(B) + 1) / (tan(B) – 1) = 1 + 2/(tan(B) – 1)

che può essere un intero solo se tan(B) = 2, da cui tan(C) = 3, oppure tan(B) = 3, da cui tan(C) = 2.

I due valori danno ovviamente luogo allo stesso triangolo, quindi assumiamo tan(A)=1, tan(B)=2, tan(C)=3.

Calcolando le arcotangenti, si ottiene A = 45°, B = 63°26'5.816", C = 71°33'54.184".

Per il calcolo dei lati si può utilizzare il teorema dei seni, denominando i lati con la minuscola corrispondente al lato opposto, posto a=100, si ha b=126.491, c=134.164.

Con questo i triangoli sono risolti.

<u>Quadrilateri</u>

Qui le soluzioni sono infinite.

Una soluzione banale è la seguente: denominati i 4 angoli A,B,C,D, basta porre tan(A) = N, tan(B) = −N, tan(C) = M, tan(D) = −M con N e M interi qualsiasi. Siccome per queste scelte A e B sono supplementari come pure C e D, la somma dei 4 angoli è 360°, come richiesto per un quadrilatero.

Ovviamente si può anche porre tan(A) = −tan(C) = N, tan(B) = −tan(D) = M o qualsiasi altra combinazione.

Non so se imponendo che le quattro tangenti siano numeri con valore assoluto diverso il numero di soluzioni è invece finito.

<u>Pentagoni, esagoni, …</u>

Non indagati. Ipotizzo che anche in questo caso il numero di soluzioni sia infinito.

Dopo qualche tempo lo stesso ***Tartaruga*** ci ha passato altri risultati:

…se ce li manda ce li metto…

L'altro contributo a noi giunto è quello di ***Alberto R.***, che andiamo subito a passarvi:

Si chiede per quali valori di N esiste almeno un N-agono convesso tale che la tangente trigonometrica di un qualunque suo angolo interno sia un intero.

Premessa: la funzione *arcotangente* determina un angolo a meno di multipli arbitrari di π. Poiché gli angoli interni di un poligono sono compresi tra 0 e π, dobbiamo scegliere, di volta in volta, l'angolo opportuno. Ad esempio

$$\operatorname{atan}(-1) = (3/4)\,\pi \text{ e non } \operatorname{atan}(-1) = -(1/4)\,\pi.$$

$$\operatorname{atan}(x) + \operatorname{atan}(-x) = \pi \text{ e non } \operatorname{atan}(x) + \operatorname{atan}(-x) = 0$$

Osserviamo, poi, che, essendo $(N-2)\,\pi$ la somma degli angoli interni di un N-agono, il problema può essere enunciato in questa forma:

Trovare N numeri interi $a_1, a_2, \dots, a_N$ tali che :

$$\operatorname{atan}(a_1) + \operatorname{atan}(a_2) + \dots + \operatorname{atan}(a_N) = (N-2)\,\pi \quad [1]$$

Dimostriamo che non esistono soluzioni per $N > 8$. Infatti il più grande angolo la cui tangente è un intero è $(3/4)\,\pi = \operatorname{atan}(-1)$. Quindi il massimo valore che può raggiungere il primo membro della [1] è $N\cdot(3/4)\,\pi$, minore del secondo membro $(N-2)\,\pi$ per qualunque $N > 8$.

Esistono invece soluzioni per tutti i poligoni fino a 8 lati. ecco una lista di esempi:

Triangolo. atan(1) + atan(2) + atan(3) = π

È un triangolo i cui lati sono proporzionali a 1, rad(1.6), rad(1.8). Non ci vedo nulla di interessante.

L'altra soluzione, il triangolo rettangolo isoscele, è accettabile solo se si ha il coraggio di assimilare ∞ (la tangente dell'angolo retto) a un numero intero.

Quadrilatero. $\operatorname{atan}(k) + \operatorname{atan}(-k) + \operatorname{atan}(h) + \operatorname{atan}(-h) = 2\,\pi$, con k, h interi arbitrari.

Se $k = h$, secondo l'ordine con cui i quattro angoli si susseguono, si ottiene un rombo o un trapezio isoscele.

Pentagono. atan(−1) + atan(−2) + atan(−3) + atan(k) + atan(−k) = 3 π con k intero arbitrario.

Esagono. 4 atan(−1) + atan(k) + atan(−k) = 4 π con k intero arbitrario.

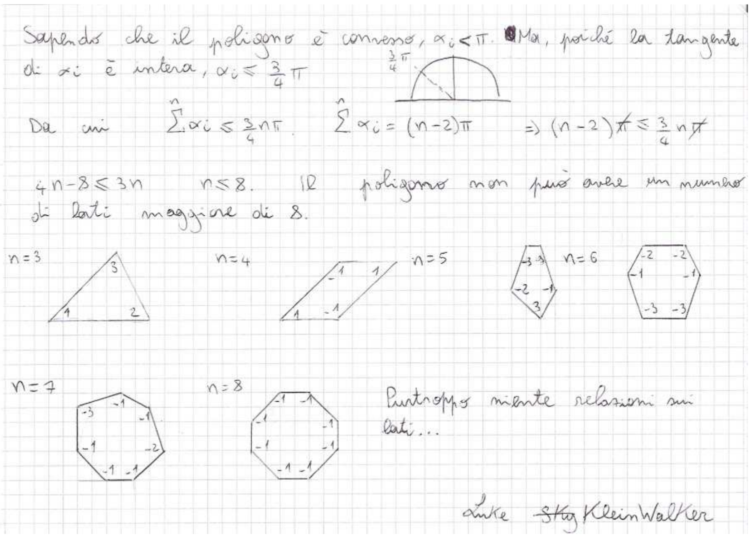
Eptagono. 5 atan(−1) + atan(−2) + atan(−3) = 5 π

Ottagono. 8 atan(−1) = 6 π

In questo caso (unico caso?) possiamo ottenere un poligono regolare.

Presumibilmente esistono altre soluzioni oltre a quelle innanzi elencate, ma mi sembra difficile trovarle *tutte*.

Complimenti anche a lui, e anche a ***Luca***, o meglio ***Luke KleinWalker***, che però ci ha mandato una soluzione di difficile impaginazione. Siccome io divento sempre meno paziente, ve la faccio vedere nel formato originale, ma opportunamente rimpicciolita per stare in rivista:



Niente male, eh? E con questo passiamo al problema successivo.

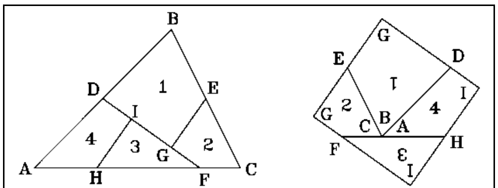
4.3.2 Questo (non) è un problema

Problema complicato? Sto ricattando il Capo per ottenere dei problemi geometrici carini e voi non rispondete? Volete dire che vi piacciono i problemi di probabilità? Non mi deludete per favore… Uh, ma non ho ancora detto di che problema si tratta. Eccolo qui:

Trovare un sezionamento di un triangolo qualsiasi che permetta di risistemare i pezzi in modo tale da formare un quadrato. C'è un metodo generale di sezione? E si può incernierare come la nostra copertina?

Dal mio incipit avrete senz'altro compreso che abbiamo ricevuto una sola soluzione, da parte di ***Tartaruga***, che andiamo subito a mostrarvi:

Analizzando la costruzione di Dudeney per il triangolo equilatero, ho visto che si può applicare anche ad altri tipi di triangolo con alcune variazioni. Si veda il disegno:



13 *Figura di* ***Tartaruga***

Il metodo è il seguente:

- ABC è il triangolo in questione. Si individua D come punto medio di AB ed E come punto medio di BC;
- Si calcola il lato del quadrato equivalente al triangolo (si può fare in modo geometrico, individuando il medio proporzionale tra metà di un lato scelto come base e la corrispondente altezza, anch'essa individuabile

geometricamente; dato che sono costruzioni standard, non le metto per non complicare il disegno);

- Con centro in D e raggio pari al lato del quadrato, si interseca il lato AC nel punto F (potrebbe non esistere tale intersezione, lo analizziamo in seguito);
- Dal punto E si manda la perpendicolare a DF, sia G il piede della perpendicolare;
- Da F si riporta verso A un segmento pari a metà del lato AC, sia H il punto risultante (potrebbe non essere possibile, lo analizziamo in seguito);
- Da H si manda la perpendicolare a DF, sia I il piede della perpendicolare;
- Abbiamo suddiviso il triangolo in 4 parti che possiamo assemblare come nella figura a destra (1 e 3 vanno ruotati di 180 gradi come indicato dal numero ruotato) ottenendo un quadrato.

Per rendere evidenti le corrispondenze tra i punti ho usato le stesse lettere del triangolo; ovviamente alcuni punti risultano raddoppiati.

Per dimostrare che la costruzione funziona e per determinare per quali triangoli si può applicare bisogna dimostrare che la figura a destra è veramente un quadrato. Mi ripropongo di farlo utilizzando le coordinate cartesiane.

Per le radici utilizzerò il simbolo √ seguito dalla quantità sotto radice chiusa tra parentesi

Riferendo il triangolo a un sistema di assi cartesiani con il punto A nell'origine, il punto C in $(2b,0)$ e il punto B in (a,h), l'area del triangolo è bh e quindi il lato del quadrato equivalente q è tale per cui $q^2 = bh$.

Il punto D ha coordinate $(a/2, h/2)$, il punto E ha coordinate $(a/2+b,h/2)$.

Il cerchio di centro D e raggio q ha equazione $(x-a/2)^2+(y-h/2)^2=q^2=bh$, le sue intersezioni con il lato AC (che fa parte della retta $y=0$), devono soddisfare $(x-a/2)^2+(h/2)^2=bh$, cioè $x^2-ax+(a/2)^2+(h/2)^2-bh=0$, risolvendo l'equazione di secondo grado si ottiene

$x = ½(a \pm \surd(a^2-4((a/2)^2+(h/2)^2-bh))$, ovvero

$x = ½(a \pm \surd(a^2-a^2-h^2+4bh))$, ovvero

$x = ½(a \pm \surd(4bh-h^2))$.

Innanzitutto, perché la quantità sotto radice sia positiva, deve essere $4b \geq h$, il che ci dà una condizione sul triangolo da analizzare in seguito; prendendo la soluzione con il segno più, il punto F risulta avere coordinate $(f, 0)$, dove $f=½(a+\surd(4bh-h^2))$, perché sia sul segmento AC deve essere $f \geq 0$ e $f \leq 2b$, condizioni anche queste da analizzare in seguito.

L'equazione della retta per D ed F, partendo dalla equazione della retta per due punti, con alcuni passaggi, ha equazione canonica:

$2hx+2\surd(4bh-h^2)y-h(a+\surd(4bh-h^2))=0$

La distanza del punto E, che come visto ha coordinate $(a/2+b,h/2)$, da questa retta è:

$(2h(a/2+b)+2\surd(4bh-h^2)(h/2)-h(a+\surd(4bh-h^2)))/\surd(4h^2+4(4bh-h^2))$, ovvero

$(ah\ 2bh+h\surd(4bh-h^2)-ha-h\surd(4bh-h^2))/\surd(4h^2+16bh-4h^2))$, ovvero

$(2bh)/\surd(16bh)$, ovvero

$½\surd(bh) = q/2$

Quindi tracciando la perpendicolare da E a DF nel punto G, il segmento EG è metà del lato del quadrato calcolato.

La distanza dalla retta DF del punto H, che è ottenuto da F sottraendo metà del segmento AC, quindi b, e che ha quindi coordinate $(½(a+\surd(4bh-h^2))-b,0)$, è:

$(2h(½(a+\surd(4bh-h^2))-b)-h(a+\surd(4bh-h^2)))/\surd(4h^2+4(4bh-h^2))$, ovvero

$(ha+h\surd(4bh-h^2)-2bh-ha-h\surd(4bh-h^2))/\surd(4h^2+16bh-4h^2))$, ovvero

$(-2bh)/\sqrt{(16bh)}$, ovvero

$-½\sqrt{(bh)} = -q/2$

Ma dato che è una distanza possiamo ignorare il segno meno, quindi tracciando la perpendicolare da H a DF nel punto I, il segmento HI è metà del lato del quadrato calcolato.

Ci serve ancora un risultato per poter procedere. Notiamo quindi che i triangoli ABC e DBE sono simili in quanto l'angolo in B è comune, DB = AB/2 e BE = BC/2. Da questo deduciamo che DE=AC/2, ma anche HF=AC/2 per costruzione, quindi DE = HF. Inoltre l'angolo BAC è uguale all'angolo BED, quindi DE è parallelo a HF. Quindi DEFH è un parallelogramma, quindi DH = EF, per cui i triangoli rettangoli DIH e FGE hanno due lati uguali e quindi anche il terzo è uguale, da cui DI = GF.

A questo punto, nella figura a destra:

- I quattro angoli sono retti per costruzione;
- Gli angoli che si sommano nei punti E, D, H e F hanno somma 180°, quindi i punti GEG sono allineati, come anche GDI, IHI e IFG; quindi l'oggetto è un quadrilatero;
- Gli angoli in A,B,C sono quelli del triangolo originale, quindi la loro somma è 180° e quindi FCBAH sono allineati;
- EB è uguale a EC perché E è il punto medio di BC; lo stesso vale per DA e DB;
- FH è metà di AC, quindi la somma di FC ed AH è pari ad AC – FH, quindi anch'essa metà di AC;
- GEG è il doppio di GE, che è metà del lato del quadrato calcolato come abbiamo appena dimostrato, quindi GEG è pari al lato del quadrato calcolato;
- IHI è il doppio di HI, che è metà del lato del quadrato calcolato come abbiamo appena dimostrato, quindi IHI è pari al lato del quadrato calcolato;
- GF+FI è uguale a DI+IF, in quanto abbiamo dimostrato che DI = GF, ma DI+IF è pari al lato del quadrato calcolato per costruzione, quindi GFI è pari al lato del quadrato calcolato. Analogamente si dimostra che GDI è pari al lato del quadrato calcolato.

In sintesi, l'oggetto in figura a destra ha quattro angoli retti, quattro lati uguali al lato del quadrato calcolato e tutti i pezzi combaciano, quindi abbiamo un quadrato con la stessa area del triangolo di partenza, e mettendo le cerniere in D,E e F (oppure H) possiamo ottenere il risultato desiderato.

Restano ancora da analizzare se i punti F e H sono sempre ottenibili.

Le condizioni per ottenere F sono le seguenti:

$½(a + \sqrt{(4bh - h^2)}) \geq 0$ (1)

$½(a + \sqrt{(4bh - h^2)}) \leq 2b$ (2)

Tuttavia siccome deve esserci anche posto per H e H si trova ad ascissa relativa –b rispetto ad F, l'ascissa di H deve essere maggiore o uguale a 0, quindi possiamo sostituire la prima condizione con

$½(a + \sqrt{(4bh - h^2)}) \geq b$ (3)

Consideriamo prima la (2):

$½(a + \sqrt{(4bh - h^2)}) \leq 2b$ ovvero

$a + \sqrt{(4bh - h^2)} \leq 4b$ ovvero

$\sqrt{(4bh - h^2)} \leq 4b - a$ ovvero prendendo i quadrati

$4bh - h^2 \leq (4b - a)^2$ (4)

Considerando ora la (3):

$\frac{1}{2}(a + \sqrt{(4bh - h^2)}) \geq b$ ovvero

$a + \sqrt{(4bh - h^2)} \geq 2b$ ovvero

$\sqrt{(4bh - h^2)} \geq 2b - a$ ovvero prendendo i quadrati

$4bh - h^2 \geq (2b - a)^2$ (5)

Si ricava ancora una condizione, ovvero che deve essere $b \geq a/4$.

I triangoli che soddisfano queste due condizioni sono sezionabili; si potrebbe comunque ottenere una soluzione ruotando il triangolo in modo che le condizioni siano soddisfatte. Non vedo come tradurre queste condizioni in qualcosa di più semplice.

Per finire, aggiungo due soluzioni particolarmente eleganti per due particolari triangoli:

- Il triangolo rettangolo isoscele è facilmente trasformabile in quadrato inserendo una cerniera nel vertice dell'angolo retto; come triangolo avrebbe i lati in proporzione 1:1:√2, come quadrato il lato sarebbe metà dell'ipotenusa del triangolo;
- Il triangolo rettangolo con un cateto doppio dell'altro è facilmente trasformabile in un quadrato inserendo una cerniera nel punto medio dell'ipotenusa; come triangolo avrebbe i lati in proporzione 1:2:√5, come quadrato avrebbe lato pari al cateto minore del triangolo.

La prima soluzione ha due vantaggi:

- Il GC avrebbe un lato maggiore degli altri di più del 40%, mentre l'altra soluzione gli lascerebbe un misero 22% circa in più rispetto al secondo;
- Alice e Piotr non dovrebbero litigare su chi deve scegliere il lato più corto.

Purtroppo questo è stato l'unico intervento *triangoloso* che è giunto in Redazione, ma non si può dire che non sia corposo ed interessante. E NESSUNO ha tentato di fare la dimostrazione proposta nel terzo problema. Ugh.

Mi fermo qui, allora. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Un problema filosofico.

Si racconta che Emmanuel Kant fosse un tipo talmente metodico che la gente di Königsberg regolasse il proprio orologio sui suoi passaggi da determinati punti della città durante le sue passeggiate pomeridiane.

Una mattina, Kant si accorse con terrore che l'orologio a pendolo si era fermato; siccome il suo fido orologio da taschino era in riparazione e questi erano gli unici due orologi che possedeva, non poteva sapere che ora fosse.

Dovendo andare a trovare il suo amico Schmidt (che lo aveva invitato a vedere la sua nuova casa), si recò da lui con il suo solito passo tranquillo e, entrando, lanciò una veloce occhiata all'orologio presente nell'ingresso.

Dopo alcune ore di "interessante" conversazione (il buon Emmanuel era un tipo piuttosto prolisso), tornò a casa con l'abituale calma e, entrando, riuscì a regolare l'orologio.

Come aveva fatto? Attenzione, che ci sono due risposte!

Un metodo usato da Kant può essere stato quello di caricare l'orologio a pendolo prima di partire, guardare l'orologio di Schmidt sia all'ingresso in casa sua che all'uscita e, sapendo che aveva impiegato lo stesso tempo sia ad andare che a tornare, regolare di conseguenza l'orologio di casa.

La seconda soluzione, molto più simpatica, è che Schmidt di professione fosse orologiaio e che mentre Kant parlava gli aggiustasse l'orologio da taschino; ogni orologiaio, dopo averlo aggiustato, vi regola l'orologio sull'ora esatta.

6. Pagina 46

Esistono svariati modi per risolvere questo problema.

6.1 Prima soluzione

Esprimiamo le cifre del numero cercato come *x, y, …, z, t* e utilizziamo la sovralineatura per intendere che stiamo esprimendo il tutto in modo posizionale. Il problema consiste nel trovare le cifre:

$$\overline{7xy\ldots zt}\cdot\frac{1}{3}=\overline{xy\ldots zt7}.$$

O, equivalentemente,

$$\overline{xy\ldots zt7}\cdot 3=\overline{7xy\ldots zt}.$$

È evidente che t=1; considerato che 17·3=51, possiamo determinare anche che z=5. Procedendo in questo modo da destra verso sinistra possiamo calcolare tutte le cifre dell'intero cercato, sospendendo il nostro calcolo alla prima comparsa del numero 7. Questo ci porta al risultato:

$$2.413.793.103.448.275.862.068.965.517\cdot 3=7.241.379.310.344.827.586.206.896.551.$$

Se non arrestiamo il calcolo alla prima ricorrenza del 7 ma procediamo sino alle successive, otterremo gli altri numeri soddisfacenti il problema; essendo i calcoli sempre uguali, si tratterà di ripetizioni dello stesso blocco:

$$\underbrace{\underbrace{7241379310344827586206896551}\ldots\underbrace{7241379310344827586206896551}}_{k\ volte}$$

6.2 Seconda soluzione

Sia, sempre nella notazione di cui sopra, l'intero cercato è $\overline{7xyz\ldots t}$, la divisione per 3 deve dare come risultato $\overline{xyz\ldots t7}$. In forma di operazione, si ha:

$$\overline{7xyz\ldots t}\ \big|\ \underline{3\qquad}$$
$$\qquad\qquad\overline{xyz\ldots t7}$$

È immediato che deve essere x=2, che possiamo sostituire, eseguendo la divisione tradizionale sulle cifre note e ricavando quindi, che possiamo sostituire, eseguendo la divisione tradizionale sulle cifre note e ricavando quindi y, che sostituiremo. Procedendo in questo modo sino alla ricorrenza del primo 7, otterremo il numero cercato.

6.3 Terza soluzione

È possibile costruire l'equazione:

$$\left(7\cdot 10^m+X\right)\cdot\frac{1}{3}=10X+7.$$

Da cui si ricava:

$$X=\frac{7\cdot 10^m-21}{29}.$$

Il problema si riduce quindi a trovare il più piccolo numero della forma $7\cdot 10^m$ che dia un resto di 21 una volta che sia diviso per 29.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Power Rangers

I problemi più difficili sono nella matematica "elementare"
Manfred R. SCHRÖDER, *La Teoria dei Numeri*

Ve lo diciamo subito e vi sveliamo il gioco di parole del titolo, in quanto dobbiamo introdurre una notazione (sul parlato): parleremo di potenze a spasso per la retta dei numeri.

La notazione che abbiamo intenzione di introdurre è dettata unicamente dalla pigrizia dello scrivente (Rudy): quando diremo "quadrato", "cubo", o genericamente "potenza", intenderemo sempre una potenza *perfetta*, ossia un quadrato perfetto, un cubo perfetto, e avanti in questo modo: insomma, quei numeri per i quali riuscite a calcolare l'n-esima opportuna radice anche senza aver letto due ben precisi PM[23]: se agli altri due redattori la cosa non piace (o se il numero di RM viene troppo smilzo) sono autorizzati a inserire gli opportuni "perfetti" dove serve.

Le potenze degli interi hanno attratto l'attenzione dei matematici sin dall'antichità: a partire da Pitagora, che considerava particolarmente importanti i triangoli rettangoli i cui lati avessero tutti misure intere, per procedere (sempre relativamente ai quadrati) alla scoperta di Fibonacci:

> *Studiando l'origine dei quadrati mi sono accorto che nascono da una sequenza crescente di numeri dispari: [...] aggiungendo* 3 *all'unità otteniamo* 4*, che è un quadrato; se alla somma giungiamo il terzo dispari,* 5...

E non c'è limite a problemi estremamente semplici da esporre:

Fermat: Per qualsiasi n>2, la somma di due potenze n-esime non è mai una potenza n-esima.

Waring: In quanti modi un intero può essere scritto come somma di k potenze n-esime?

Catalan: 8 e 9 sono le uniche due potenze consecutive.

Mordell: trovare per $k \in N$ le soluzioni intere prime tra loro dell'equazione $y^2 - x^3 = k$

Il primo sappiamo che l'ha dimostrato Wiles, e la dimostrazione non è proprio semplicissima, ma almeno esiste; quello di Waring in realtà è una classe di problemi: un esempio può essere la congettura (ancora tutta da dimostrare) che i numeri non congrui a 4 o a 5 in modulo 9 siano esprimibili come somma di tre cubi, verificabile con un qualsiasi foglio elettronico per i primi valori, ma la dimostrazione generale è ancora tutta di là da venire.

L'ipotesi di Catalan è seccante nella sua semplicità: ***Tijdeman***, nel 1976 (praticamente ieri...) è riuscito a dimostrare che il numero di queste coppie deve essere *finito*; e la coppia più grande è sicuramente minore[24] di:

$$e^{e^{e^{e^{730}}}}$$

E tra lui e il numero di Carmichael è una bella gara, per il numero più grosso utilizzato in una dimostrazione matematica.

[23] RM056: "Come far impazzire la maestra" e RM057: "To three, and BEYOND!". Sono comunque interessanti, e un metodo per calcolare le radici n-esime quando la calcolatrice è scarica fa sempre comodo.

[24] Per mostrare che è un "grosso" numero, lo scriviamo in grosso: sono quattro "e" e poi 730: vi ricordiamo che, per convenzione, prima si eleva e alla settecentotrentesima potenza, poi si eleva e al risultato, eccetera. Insomma, si va "in discesa".

L'equazione di Mordell, con la sua aria da santarellina, si sta rivelando decisamente dura da trattare: ***Siegel***, negli anni '30, è riuscito a rendere la cosa ancora più snervante dimostrando che per un fissato $k \neq 0$ esistono solo un numero *finito* di soluzioni intere: stato dell'arte sinora, a quanto ci risulta, l'aver individuato "a manina" tutte le soluzioni per $k < 10^5$, che sarà stato un lavoro enorme, ma dal punto di vista dimostrativo vale poco.

Ma quali sono gli strumenti per lavorare in questi campi? Abbastanza stranamente[25] sembra che le cose si semplifichino spostandosi dagli interi ai reali. Infatti, ispirandosi ad analoghi concetti dell'algebra degli anelli, per prima cosa si definisce il ***radicale*** di un numero come il *prodotto di tutti i suoi divisori primi*: questo collega qualsiasi numero all'insieme dei numeri cosiddetti *privi di potenze* che, anche a livello intuitivo, rende più semplice il lavoro, visto che tutti i fattori del radicale hanno, a questo punto, molteplicità 1 (ossia sono tutti diversi tra loro).

Ma dove entrano i reali? Per qualsiasi intero diverso da zero (e con un paio di casi particolari) si definisce la ***funzione potenza*** di un intero N come:

$$P(N) = \frac{\log|N|}{\log[\mathrm{rad}(N)]};$$
$$P(\pm 1) := \infty.$$

Dove con $\mathrm{rad}(N)$ abbiamo indicato il radicale.

Quali sono le caratteristiche interessanti di questo obbrobrio?

Per iniziare, $P(N) \geq 1$, e $P(N) = 1$ per $N > 1$ *se e solo se* N è *libero da quadrati*, ossia non è divisibile per nessun quadrato; non solo, ma se N è una potenza n-esima, allora si ha $P(N) \geq n$.

Da queste deduzioni nasce la definizione di ***numero a-potente***[26], ossia quei numeri per cui $P(N) \geq a$: studiare il comportamento del caso più semplice, ossia come siano distribuiti i numeri per cui $P(N) = 1$ porta ad un risultato piuttosto inatteso; più formalmente, la domanda alla quale si cercava risposta era: per un dato reale X, se $LdQ(X)$ rappresenta il numero degli interi N liberi da quadrati nell'intervallo $1 < N < X$, quanto velocemente $LdQ(X)$ tende ad infinito al tendere ad infinito di X?

La dimostrazione utilizza quella che secondo noi è una delle più belle formule scoperte da Eulero, ossia che:

$$\prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

e si arriva a dimostrare che (a meno di un termine di errore dell'ordine di $\sqrt{X}$),

$$LdQ(X) = \frac{6}{\pi^2} X + O\left(\sqrt{X}\right).$$

Ossia, se scommettete che un numero sia libero da quadrati, ci azzeccate sei volte su dieci.

A quanto pare, studiare il comportamento delle funzioni è una delle attività principali dei matematici: in questo campo la cosa è particolarmente complessa soprattutto a causa del

[25] Opinione personale dello scrivente: l'hanno fatto per disperazione...

[26] Traduzione nostra, non abbiamo reperito testi in italiano che parlino di questo concetto: l'originale è, evidentemente, *a-powered number*.

comportamento piuttosto disordinato delle suddette. Anche per questo motivo, delle approssimazioni piuttosto rozze sono sempre ben accette: ad esempio, è stata salutata come un grande passo avanti la generalizzazione di quanto abbiamo visto poco sopra: se $a \geq 1$ e se $S(a,X)$ è il numero degli interi $N \in [1;x)$[27] per cui $P(N) \geq a$, allora, al tendere di X a infinito:

$$S(a;X) \approx X^{\frac{1}{a}}$$

Non è difficile capire il motivo per cui questa relazione sia importante: le a-esime potenze crescono con la stessa legge, e questo significa che asintoticamente le potenze a-esime dei numeri e i numeri a-potenti si comportano nello stesso modo.

Le *Congetture*, in matematica, prendono usualmente il nome dai rompiscatole che le hanno avanzate, come quelle che abbiamo visto all'inizio, ne esiste almeno una, però, che si sta mostrando così tosta da prendere il nome dalle *variabili* impiegate, e quanto abbiamo visto sin qui ci permette quantomeno di capire di cosa si sta parlando. Prima di presentarla nella sua forma "classica", cerchiamone una versione più "morbida", ci si chiede, detto semplicemente: se (a, b, c) sono una terna di numeri reali non minori di 1 e X è un altro numero reale, sia $S(a, b, c; X)$ l'insieme delle terne (A, B, C) formate da interi primi tra loro, diversi da zero, ciascuno in valore assoluto minore di X, tali che la loro somma sia zero e per cui valgano $P(A) \geq a$, $P(B) \geq b$, $P(C) \geq c$: come ci si aspetta cresca la cardinalità di $S(a,b,c;X)$ per a,b,c fissati e $X \to \infty$?

Per confronto, vi anticipiamo la versione "formale":

Congettura (ABC): si definisca ***soluzione(ABC)*** una terna (A, B, C) di numeri interi diversi da zero primi tra loro la cui somma sia zero. Sia definita la ***potenza*** della soluzione (ABC) come:

$$P(A,B,C) = \frac{\log(\max\{|A|,|B|,|C|\})}{\log(\text{rad}(ABC))}.$$

Allora, per qualsiasi numero reale $\eta > 0$ esiste solo un numero finito di soluzioni (ABC) con potenza $P(ABC) \geq \eta$.

La cosa interessante è che, nonostante la sua intrattabilità, la Congettura (ABC) sembra una forma piuttosto "morbida" di quello che è la realtà: ***Elkies***, ***Kanapka*** ed altri con pazienza hanno tabulato tutte le triple con $\log(\max\{|A|,|B|,|C|\}) < 2^{32}$ e con $P(A,B\,C) > 1.2$: a quanto pare, al di sopra di $\eta = 1.629912\ldots$, *non ci sono proprio soluzioni*, almeno nel range indicato[28]: al momento, le ricerche di punta in questo settore si focalizzano sul fatto che *forse* è più semplice generalizzare dalle terne genericamente alle n-uple, per arrivare a dimostrazioni delle congetture.

Torniamo alla versione "morbida", dalla quale si possono estrarre interessanti indizi su quale sia il metodo per tagliare per i campi in questa matematica.

Ignoriamo, per il momento, la richiesta che A, B, C debbano essere primi tra loro e che la loro somma debba essere pari a zero; i nostri tre numeri sono scelti da tre insiemi diversi ciascuno dei quali ha, in prima approssimazione, rispettivamente circa[29] $X^{\frac{1}{a}}, X^{\frac{1}{b}}, X^{\frac{1}{c}}$ elementi; quindi il numero (approssimato) delle triple possibili è circa $X^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$.

[27] Si noti che l'intervallo è aperto verso destra.

[28] Caso mai vi interessasse, la terna che genera il massimo η è: $2 + 3^{10} \cdot 109 + (-23^5) = 0$, e l'ha trovata ***Reyssat***.

[29] Ricordiamo che A è *a-potente*, B è *b-potente*, C è *c-potente*.

La richiesta che i tre numeri siano primi tra loro non cambia il comportamento asintotico, mentre quello che potrebbe causare guai è la richiesta che la loro somma sia zero; se consideriamo l'espressione $\left|A+B+C\right|$, questa sarà limitata dal valore $3X$ e quindi, se non ci siamo persi per strada qualche altro effetto[30], le triplette a somma zero dovrebbero essere in numero proporzionale all'inverso di X: mettendo tutto assieme,

$$S(a,b,c,X)\approx X^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1}:=X^{d}.$$

Come si vede dai calcoli sin qui eseguiti, quel simbolo di "suppergiù uguale" è *molto* ottimista, ma quel "-1" ad esponente dà una certa sicurezza, almeno dal punto di vista di chi scrive.

Se avete notato, abbiamo approfittato della stesura dell'equazione finale per introdurre una notazione comoda: d è noto come l'***esponente di base*** e si hanno comportamenti completamente diversi se è positivo o negativo. Come succede spesso, uno dei due casi è più interessante (o più facile da analizzare) dell'altro:

La ***Congettura Uniforme per*** $d<0$ statuisce:

sia d_0 *un qualsiasi numero reale negativo: ci sono, in totale, solo un numero finito di triplette A, B, C di interi diversi da zero a somma zero tali che P(A)≥a, P(B)≥b, P(C)≥c per cui sia*:

$$d=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1\leq d_0<0.$$

E questo porta ad interessanti deduzioni, supponendo che la congettura sia vera:

Se prendete a=2, b=3, c>6, potete tranquillamente dimostrare la congettura di ***Catalan***.

Se prendete una qualsiasi tripletta, la congettura vi dice che esistono un numero finito di n per cui $X^n+Y^n=Z^n$, il che ha tutta l'aria di essere una dimostrazione decisamente più semplice del teorema di ***Fermat***, senza fare tutta la fatica che ha fatto Wiles[31].

Insomma, per dirla con Murphy, "Schröder era un ottimista".

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[30] Questo è uno dei motivi per cui continua ad essere una "Congettura": sicuri, di aver preso in considerazione tutto?

[31] Prima che pensiate che vogliamo buttare Wiles con l'acqua sporca: qui dimostreremmo la cosa per *un numero finito di"n"*; Wiles ha dimostrato che *funziona solo per n*=2, quindi un risultato più preciso.