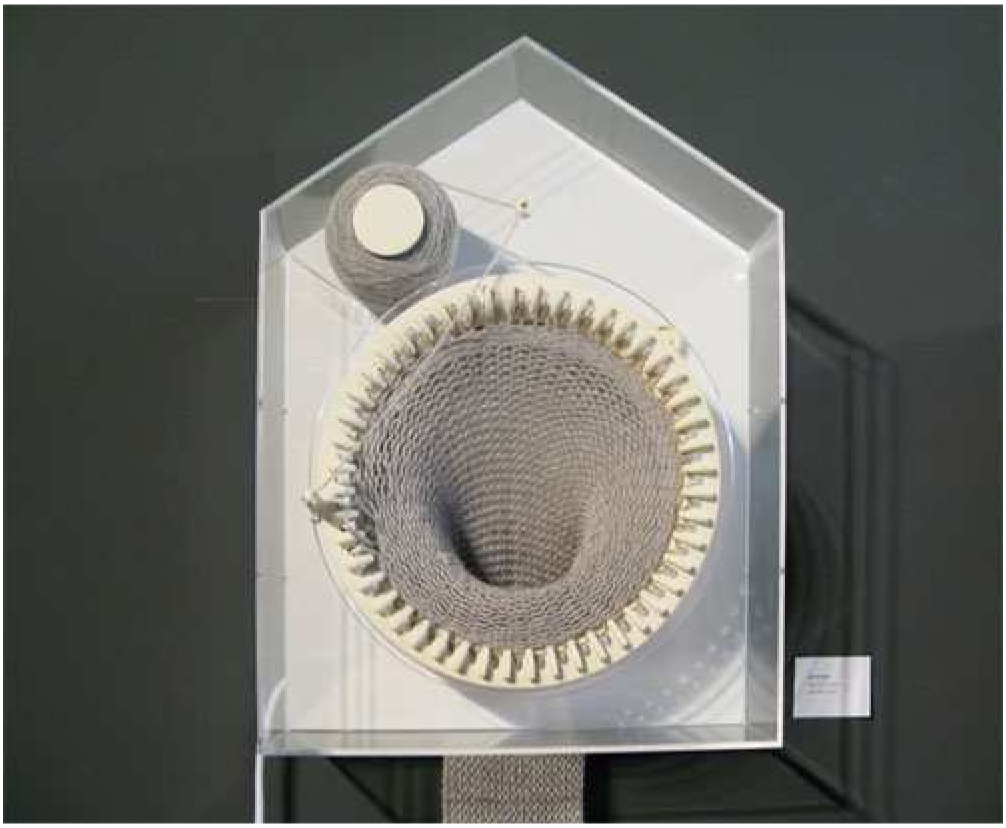
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 165 – Ottobre 2012 – Anno Quattordicesimo



1. La mia vita è un romanzo **3**

1.1 Fèntasi 3
1.2 Fare nulla 6

2. Problemi **9**

2.1 Meglio partire per tempo 9
2.2 Questo (non) è un problema 10
2.3 Solito TrePerDue 10

3. Bungee Jumpers **11**

4. Soluzioni e Note **11**

4.1 [164] 11
4.1.1 Vendetta, tremenda vendetta! 11
4.1.2 Facciamo pace... 13

5. Quick & Dirty **16**

6. Pagina 46 .... **16**

7. Paraphernalia Mathematica **17**

7.1 Roba da ingegneri 17

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM164 ha diffuso 2'947 copie e il 02/10/2012 per Google eravamo in 23'900 pagine.

Siren Helise Wilhemsen ha costruito l'Orologio a Maglia, che ci mette un anno per costruirvi una sciarpa di due metri di lunghezza, al ritmo di un giro di maglia (42 punti, che si sia ispirata a H2G2?) al giorno: nelle parole dell'autrice, serve a *"...dare una manifestazione fisica al passare del tempo..."*. Qui, "sincronizzare gli orologi", significa avere la sciarpa pronta per la brutta stagione.

1. La mia vita è un romanzo

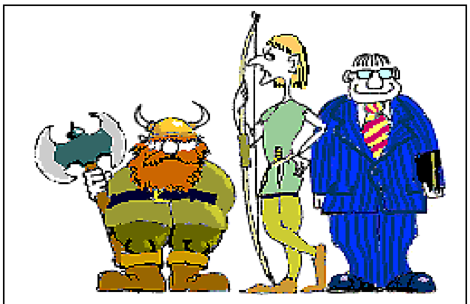
1.1 Fèntasi

Una carrozza è attaccata dai Troll della Notte.
La Regina delle Fate ha un figlio illegittimo.
Un maniscalco e un suonatore di flauto sono coinvolti nella trama.
Automatic Fantasy Plot Generator,
Accesso 2012-09-01 21:30

Ci rifiutiamo di dare l'URL che ha generato la citazione: la situazione della fantasy italiana è, al momento, talmente disperata da spingerci ad evitare ulteriori istigazioni a delinquere. Il genere specifico, ad oggi, viene indicato con il termine spregiativo utilizzato nel titolo di questa parte[1], e secondo la nostra modesta opinione in questo campo un qualsiasi generatore automatico di trame, relativamente a quanto prodotto sino ad oggi, è in grado di fornire elementi per autentici capolavori.

Il bello è che nell'ambito della fantasy, è perfettamente noto cosa debba essere evitato: al punto che Ian McFayden ha definito rigorosamente quali debbano essere le regole per costruire un best-seller orribile[2]. Risulta abbastanza evidente che il Nostro ha scritto queste regole nello iato tra due *grandi opere fèntasi* che lasceremo da identificare per vostro diletto; se volete aggiornare l'elenco alla seconda opera, posto che lo riteniate necessario, comunicheremo nelle sedi opportune.

1. **Costruite l'eroe**: perdente, debole, codardo, malato... una o più di queste caratteristiche, ma non tutte, tenetene qualcuna per il secondo volume della Trilogia
2. **Create la sfida**: per salvare il Mondo (v. dopo) il nostro dovrà imparare qualche abilità misteriosa e confrontarsi con un qualche Oscuro Nemico Senza Nome
3. **Definite i compagni**: solitamente avversi l'uno all'altro, ma ciascuno dotato di capacità specifiche che si riveleranno utilissime in qualche momento, ad esempio, un Nano, un Elfo e un Commercialista.
4. **Trovate una guida saggia e totalmente inutile**: sa tutto sulla Sfida ma non lo dice, e ha dei poteri enormi che non usa mai.
5. **Costruite il Mondo**: qualsiasi Mondo fantasy è approssimativamente *quadrato*, così si può disegnare la mappa su una doppia pagina del libro



1 *La Compagnia dell'Orpello*

6. **Create il Nemico**: ogni Mondo ha un Nemico Oscuro Sostanzialmente Onnipotente E ArciCattivo Intenzionato A Distruggere Tutto, anche se non è mai molto chiaro cosa venga a guadagnare quando ha distrutto tutto. Va messo a sua disposizione anche un enorme esercito che non richiede approvvigionamenti o salari ed è totalmente dipendente da un qualche oggetto magico assolutamente insignificante.
7. **Tiratela lunga**: alla fine del libro il lettore deve essere stanco almeno quanto l'Eroe che ha terminato l'improba prova. Esistono alcuni strumenti standard per garantire questo:
    a. **Andate nei dettagli**: del lungo cammino devono essere presentati al lettore tutti i particolari. Cosa i Nostri mangiano, quanto camminano,

[1] O con termini peggiori: *fantatrash*, al momento, è il più gentile.

[2] Traduzione libera: se siete interessati all'originale (che non ci risulta più reperibile in rete), basta chiedere.

dove dormono e quando si fermano, in particolare per le giornate nelle quali non succede assolutamente nulla.

b. **Introspezione**: nel momento stesso nel quale l'Eroe viene attaccato da una torma di nemici, si ferma a pensare quali siano i suoi sentimenti verso l'universo, quale sia la sua vera identità e se abbia o no lasciato aperto il gas a casa.

c. **Esiste sempre una via più difficile**: se il mago buono è in grado di trasformare l'Armata del Male in una cucciolata di cocker pronunciando la parola "Zazzaparrora!", la cosa non potrà essere fatta in quanto questo aumenterebbe in qualche sottile modo il potere dell'Oscuro Signore.

8. **Sorvolate sulle parti difficili**: è relativamente semplice raccontare un lungo viaggio, specialmente se durante il viaggio non succede nulla, ben altra cosa è, ad esempio, raccontare la battaglia decisiva, durante la quale ci si aspetta succedano un mucchio di cose. Una nebbia che avvolge la mente dell'eroe, il suono della battaglia che diventa un'eco lontana e tutto che si fa più chiaro solo quando le forze del male sono sconfitte da qualcun altro rappresentano un ottimo metodo per aggirare situazioni imbarazzanti.
9. **La magia va evitata** (anche dal Cattivo): nonostante sia perfettamente in grado di distruggere tutto e tutti con un magico battito di ciglio, continuerà a mandare in giro i suoi scagnozzi con inefficienti spadoni a due mani.
10. **Uccidere quasi tutti**: l'Eroe raggiungerà il suo obiettivo solo all'ultimo momento e quando tutto sembrerà ormai perduto: intanto buona parte dei suoi compagni dovranno morire in modo molto doloroso e non necessariamente eroico. Questo dovrebbe renderci sempre più odioso il Nemico, anche se in realtà nasce tutto dal fatto che l'Eroe è un enorme incapace, un perdente nato e un incompetente
11. **Cattivi Spendibili**: orchi, goblin, troll, draghi, streghe che il lettore sia felice di ammazzare a migliaia, pelosi, sudati e con l'alito cattivo o in genere socialmente inaccettabili per quello che è il vostro lettore di riferimento; deformità e handicap vari sono perfetti, e ricordatevi che la riabilitazione morale è impossibile: se sei cattivo muori, se sei buono vinci. Anche se eri tra i cattivi per trovare il pane alla tua famiglia che moriva di fame.
12. **Vecchi Coriacei Guerrieri**: deve esistere da qualche parte una confraternita di idioti leali a livello patologico che hanno un'unica arma ciascuno, stranamente, più botte hanno preso e più cicatrici hanno accumulato, più sono indomiti ed eroici.
13. **Pure Vergini Combattenti**: talmente pure ed eroiche da far sembrare Giovanna d'Arco Paris Hilton. Fortunatamente vengono uccise (v. sopra) verso la fine, visto che con loro una tranquilla convivenza matrimoniale è assolutamente improponibile.
14. **Fisiognomica**: quelli magri e alla soglia della morte per fame sono intelligenti ma infidi, i culturisti pompati a steroidi sono affidabili ma non hanno neanche il cervello di un criceto.
15. **Tecnologia e Governo**: Il Consiglio dei Venerabili Saggi che governa il Mondo con la saggezza di migliaia di anni non è ancora riuscito a trovare un modo efficiente per ammazzare un misero troll. Tra l'altro, qualcuno ha mai visto una *ruota*, da quelle parti?
16. **Abitazioni**: sono di tre tipi.

a. **Caverne**: sono le migliori amiche del narratore, contengono armi, antichi saggi, draghi e quant'altro possa servirvi. Ricordatevi che, anche se buie e tenebrose, hanno il pavimento perfettamente liscio, asciutto e privo di qualunque asperità che possa ferire i nostri eroi vagolanti nelle tenebre.

b. **Capanne**: sono sempre in luoghi remoti, solitarie e abitate da grandi saggi (che ci si chiede dove abbiano studiato).

   c. **Castelli**: "scavati nella roccia viva", qualsiasi cosa questo possa significare. In venti stanze, ci saranno due-tre mobili in tutto contando anche le sedie.
17. **Magia**: Quando il buono lancia una magia fa una luce blu, il cattivo verde o rossa.
18. **Fortezza del Cattivo**: ha sempre un ingresso laterale non sorvegliato, per permettere l'ingresso dell'Eroe.

Escludendo o modificando opportunamente quelle di più stretta attinenza all'ambiente della fantasy, dovrebbe essere piuttosto semplice il decidere se un racconto in qualsiasi ambito sia impossibile, mal supportato da eventi, costruito senza pensare alle correlazioni o comunque raffazzonato per giustificare qualcosa.

Quello che ci lascia stupiti, è che eventi di questo genere accadono tranquillamente nella vita reale, e anche campi considerati seri e austeri come la storia della matematica abbondano di casi di questo genere.

Evangelista Torricelli nasce il 15 ottobre del 1608 a Faenza, in quella che all'epoca nessuno ancora pensava sarebbe diventata l'Italia.


2 *L'Eroe*

Alcune bibliografie attribuiscono al padre Gaspare il mestiere di sarto; la cosa è piuttosto improbabile, visto che i sarti all'epoca rappresentavano comunque una corporazione (una forma di classe media, quindi), mentre nel caso in oggetto la famiglia è talmente povera che affida Evangelista alle cure di uno zio[3], monaco camaldolese: l'iconografia successiva trasformerà questo affidamento in una libera scelta dettata dalla scoperta delle eccezionali capacità del piccolo. Ci sentiamo di dubitare del fatto che un operaio tessile e una massaia dei primi del Seicento siano in grado di valutare le capacità di un bambino sino a questo punto: molto probabilmente, l'affidamento allo zio significava una bocca in meno da sfamare in famiglia, seguita in futuro da un possibile posto fisso all'interno della struttura ecclesiastica; ben difficilmente comunque la si sarebbe potuta chiamare "carriera"[4].

Chi si accorge delle capacità di Evangelista è però lo zio e, successivamente ad una solida educazione di base, il Nostro si ritrova nel 1624 a seguire (anche se non si sa bene dove[5]) i corsi di matematica e filosofia dei gesuiti per due anni: le incertezze su questo periodo della sua vita sono notevoli, e gli unici punti fermi che si hanno sono:

1. Successivamente alla morte del padre (avvenuta nel 1626 o poco prima) il Nostro è a Roma.

---

[3] La Storia, come vedremo dopo parca di informazioni matematicamente corrette sul Nostro, riesce a trasmetterci il fatto che lo zio si chiamava Jacopo.

[4] All'epoca, per affrontare una "carriera ecclesiastica" erano necessari ben altri parenti: pur facendo il tessitore, Gaspare non avrebbe probabilmente potuto pagare al figlio neanche i paramenti necessari.

[5] Chi sostiene la stessa Faenza, chi sostiene Roma: ulteriori dettagli in seguito.

2. La madre[6], dalla morte del marito sino alla sua morte (1641) è a Roma con i due fratelli minori di Evangelista.
3. Nel 1647 i fratelli minori del Nostro vivono sicuramente a Roma

Insomma, la ricerca di ulteriori dati su quello che era un dubbio di due anni riesce ad estendere lo iato a ben ventuno.

Sempre secondo l'iconografia trasmessa, del genio di Evangelista non si accorgono gli insegnanti gesuiti del collegio, ma il suddetto zio monaco camaldolese Jacopo, il quale riesce a convincere un altro monaco dello stesso ordine (Benedetto Castelli) a prendere il Nostro come studente.

E qui, la Storia si è persa di nuovo qualcosa. Infatti, Castelli insegnava alla Sapienza di Roma, il che potrebbe essere una pezza d'appoggio al fatto che il Nostro abbia studiato presso i gesuiti di Roma, ma Evangelista non viene ammesso alla Sapienza: diventa semplicemente (dal 1626) segretario[7] di Castelli, e mantiene questo lavoro (se così si può chiamare) sino al 1632.

Il 1632 porta, contemporaneamente, una certezza e un dubbio.

Per quanto riguarda la certezza, sappiamo che Evangelista scrive una lettera che parte da Roma, quindi doveva trovarsi a Roma.

La lettera era indirizzata a Galileo Galilei, e come sempre la Storia se la cava con la giustificazione più facile: Castelli era in corrispondenza con Galileo, in quel momento Castelli non era a Roma e quindi Evangelista (in qualità di segretario) scrive la risposta alla lettera.

Riepilogando: Galileo scrive a Castelli e il segretario di Castelli risponde parlando non dei lavori di Castelli, ma dei suoi: non solo, ma si dichiara entusiasta del *Dialoghi sui due massimi sistemi*, che Galileo aveva pubblicato sei mesi prima.

La cosa a questo punto ricorda un (brutto) plot di fantasy: un segretario che si intromette nella corrispondenza tra due studiosi e mostra di conoscere un testo decisamente specialistico pubblicato sei mesi prima in un'altra città.

Il *conflitto* (necessario nella trama di qualsiasi romanzo, anche dei peggiori) arriva grazie a Galileo: i *Dialoghi* vengono messi all'Indice, e Torricelli realizza che occuparsi di materie quali l'astronomia è estremamente pericoloso.

Cambia, quindi, il proprio obiettivo.

1.2 Fare nulla

LUDOVICO: Complimenti, signore.
GALILEO: L'ho perfezionato.
LUDOVICO: Sì, signore, ho visto. Gli avete fatto un fodero rosso. In Olanda era verde.
Bertolt BRECHT: Vita di Galileo, Atto I, Scena II

Nonostante il collegamento tra il titolo e la citazione possa sembrare abbastanza immediato, per quanto andremo a dire si tratta di due argomenti completamente diversi.

Il titolo si riferisce ad alcune ambiguità della lingua italiana: lo scrivente[8], appena tornato da una visita dentistica, affrontava con la moglie (Paola, la moglie di Rudy: volendo, questa è un'altra anomalia) il seguente dialogo

Paola: "E di cosa avete parlato?"

Rudy: "Dei nostri figli"

---

[6] Caterina Angetti: una volta tanto, la suddetta Storia si è ricordata il cognome da nubile della madre. Il che non è poco, per l'epoca.

[7] Che, all'epoca, era suppergiù l'equivalente del praticante di uno studio dei giorni nostri: vitto, alloggio, e poco altro, che tanto tutto quello che ti passa davanti è cultura.

[8] Rudy: incredibile come passa il tempo. Il prossimo Compleanno sarà in carico a lui nel settembre 2013, quindi sapete già quando eventualmente perdervi un numero di RM.

Paola: "Oh, come stanno i suoi?"

In realtà non si era assolutamente discusso dei figli del dentista, ma dei nostri (nel senso di quelli di Rudy e di Paola). Insomma, esistono dei casi in cui il significato *preciso* di una frase non si evince dal contesto.

Sin da piccoli, comunque, quello che ci ha sempre lasciato perplessi è quello non presente nel titolo. Non siamo sicuri che in italiano la frase sia completamente corretta: infatti, è abitudine utilizzare l'espressione "*Non* fare nulla". Ma cosa ci fa, da quelle parti, una negazione? A cosa serve? Da dove nasce? Rivangando nelle nostre conoscenze linguistiche, l'unico altro caso che abbiamo trovato è collegato al francese. Esiste un caso, comunque, nel quale l'uso della negazione ha un significato, e l'ometterla permette di spiegare bene cosa è successo: ma prima, una divagazione.

Quante persone sono diventate famose *per il motivo sbagliato*? A noi ne vengono in mente alcune:

Galileo Galilei: non ha mai buttato gravi dalla Torre di Pisa e, nonostante Ludovico sia un personaggio antipatico quant'altri mai, il cannocchiale lo avevano inventato gli olandesi. I motivi per cui andrebbe ricordato sono la relatività galileiana e l'idea di girare il cannocchiale verso il cielo.

Albert Einstein: tutto il lavoro sulla relatività[9] lo ha fatto in realtà Mileva Maric, e il Premio Nobel era riferito alle ricerche sul moto browniano (dove comunque Mileva aveva messo un notevole contributo).

Pierre de Fermat: tutti ricordano "Il Teorema", dimostrato da Wiles; più correttamente, si dovrebbe parlare de "l'Ultimo Teorema", visto che nel campo della teoria dei numeri ne ha enunciati (e dimostrati) svariati altri.

Per tornare alla persona di cui stiamo narrando, Torricelli è famoso anche lui per il motivo sbagliato, in particolare, per aver "fatto nulla", o meglio fatto "il" nulla: l'esperimento della colonna di mercurio è, a oggi indissolubilmente associato al suo nome.

Ed è sbagliato.

Infatti, Torricelli si è limitato a suggerire l'esperimento, e la dimostrazione del fatto che effettivamente si creasse il vuoto (e che il tutto potesse servire a misurare la pressione atmosferica) va in realtà attribuito a Vincenzo Viviani: come Galileo aveva demolito uno degli *ipse dixit* della tradizione aristotelica, Viviani ne demolisce un altro, relativo alla logica contraddizione del vuoto. Arduo capire quale dei due sia più significativo per la scienza successiva.

Non vorremmo questa affermazione venga presa per una nostra ipotesi dell'insignificanza di Evangelista Torricelli nella storia della scienza: la tesi che vogliamo presentare è, semplicemente, che andrebbe ricordato per altri motivi. Ma questi motivi, dal punto di vista della conoscenza comune, sono decisamente complicati.

Infatti, Torricelli resta a Roma, mentre Castelli è occupato in viaggi ovunque, al punto da tenere lui stesso le lezioni del maestro. Finalmente, il 10 ottobre del 1641 il Nostro riesce ad arrivare alla casa di Galileo ad Arcetri: la cosa, comunque, resta poco significativa dal punto di vista della produzione culturale, visto che Galileo muore nel gennaio immediatamente successivo. Evangelista riesce, ritardando opportunamente il suo ritorno a Roma e allettato dall'offerta del Granduca di Toscana[10] di diventare il suo matematico di corte. Per qualche motivo non gli viene offerto l'altro titolo (quello di filosofo di corte) che Galileo portava, e su questo potrebbero svolgersi svariate ipotesi. Evangelista mantiene il titolo sino alla morte, quindi comunque anche solo fare il matematico all'epoca doveva rendere qualcosa.

[9] Si veda, in merito, RM075 (marzo 2005), il Compleanno (Varianti ed invarianti), che ovviamente si guarda bene dal fare un'affermazione così categorica, ma questo Compleanno è scritto da Rudy, ormai si sa...

[10] Ferdinando II.

Ma perché "matematico"? Cosa aveva sviluppato Torricelli in questo ambito, visto che il ricordo che tutti ne hanno è legato principalmente alla fisica o, come si chiamava all'epoca, alla "filosofia naturale"?

Un mucchio di cose. E tutte legate a un modo poco rigoroso, almeno per l'epoca, di affrontare i problemi.

Infatti, un altro protetto di Castelli, Bonaventura Cavalieri, aveva sviluppato un nuovo metodo dimostrativo nel *Geometria indivisibilis continuorum nova*, del 1635: qui, Cavalieri sviluppava il metodo esaustivo di Archimede, unendovi la teoria Kepleriana delle quantità geometriche infinitamente piccole: questi metodi permettevano di trovare molto velocemente le aree e i volumi di svariate figure geometriche particolarmente ostiche; Evangelista all'inizio è dubbioso sulla coerenza del metodo, ma rapidamente si convince che, quantomeno dal punto di vista esplorativo, i nuovi metodi siano validi, ritiene però necessario, nelle sue pubblicazioni, trovare una dimostrazione "*in accordo con i metodi usuali della geometria*". Secondo gli esegeti della storia della scienza, tutto questo serve a portare le dimostrazioni ad un livello di chiarezza comprensibile anche per chi non aveva la capacità di capire gli infinitesimi.

Torricelli usa, almeno nel *backstage*, tutti gli strumenti forniti da questa nuova matematica non formalizzata: nell'ottobre del 1643, in una lettera a Roberval, discute di "*centro di gravità della parabola, superficie della cicloide, volume dei solidi di rivoluzione generati da coniche e solidi iperbolici...*". Il tutto con scarso supporto di consistenza, visto che per questo dovremo aspettare Newton[11].

Come nei peggiori romanzi di fantasy, Torricelli non esplicita i suoi lavori, convinto che non siano provati secondo il metodo classico: lascia da pubblicare i lavori sulla spirale equiangolare e sulla strofoide retta: Roberval (e Barrows) pubblicheranno i risultati, dimostrando le ipotesi con metodi più formali. Personalmente, riteniamo che lo studio della strofoide retta anticipi non solo il lavoro di Newton, ma mostri i suoi difetti rispetto all'approccio Leibnitziano, brillantemente anticipato senza però la base formale a sostegno.

Insomma, un Ramingo. Nella matematica più fantastica.

[11] O meglio, Leibnitz. E le critiche alla *dot-age*, di cui abbiamo già parlato.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Meglio partire per tempo			
Questo (non) è un problema			
Solito TrePerDue			

2.1 Meglio partire per tempo

Forse corriamo il rischio di incorrere nell'usuale problema coinvolgente carro, buoi e relazione di ordinamento, ma ci sono notevoli probabilità che si riesca ad avere Alice e Dejan (il VAdLdRM distaccato presso la sezione svizzera) in Italia per una memorabile mangiata di *bagna caôda*.

Capite che, una volta che si sia riusciti a convincerli ad una discesa autunnale, vista la poliedricità gastronomica della regione che ci ospita non dovrebbero esserci grossi problemi ad avere discese *invernali, estive e primaverili*: e Doc, che sembra un buono ma quando si mette d'impegno (e assume un consulente, certo, Rudy, chi altro?) raggiunge vere vette di perfidia, sta pensando ad uno scherzo mica male. Segue dialogo.

– Pensavo di fare un'aiuola in giardino

– Non ti pare un po' fuori stagione? Siamo ad ottobre, sapevo che questi lavori si fanno in primavera.

– Infatti non sto scavando, sto pensando. Volevo nasconderci dentro qualche proprietà matematica balorda e proporlo come quesito ad Alice, quando verrà nella stagione opportuna ad aiuola fiorita. Il guaio è che non so che quesito usare!

– "Il quesito è l'assenza di quesito" non funziona, vero? Più seriamente, vuoi una qualche regolarità o ci si può sbizzarrire?

– Diciamo che vorrei restare nelle due dimensioni e limitato: un'aiuola quadridimensionale o di lato infinito non mi convince.

– Ogni aiuola è quadridimensionale, non fosse altro per il fatto che si muove nel tempo. E sull'infinito, basta che qualcuno ti sposti sapientemente il riferimento su un cerchio, e…

– Rudy, sii serio. Diciamo che mi limito ai poligoni convessi, non necessariamente regolari?

– Beh, forse qualcosa si può fare. Per esempio, un'aiuola così… O così… O…[12]

– Uh, forme sensate. E posso sapere cos'hanno in comune?

– A parte i miei abituali errori di disegno, hanno l'interessante caratteristica di essere tutti poligoni convessi per cui la tangente di ogni angolo è un numero intero (relativo) finito.

– Uh! Potrei fare un po' di aiuole con questa caratteristica, tutte diverse. E quanto valgono gli angoli e i vari lati?

– Questo te lo calcoli tu. O lo chiedi ai nostri lettori.

– Già, così Alice legge il problema e sa la risposta sulle aiuole!

– Potremmo mettere un controllo: ad esempio, se Alice non corregge il typo in questa riga, siamo sicuri che non ha letto il problema.

– E se l'ha corretto?

[12] No, non ve lo facciamo vedere, il disegno. Sennò non c'è problema!

– Sarà talmente occupata a risolverlo che per almeno cinque numeri possiamo andare avanti a parlare solo di probabilità.

– Riepilogando: cosa dovrei chiedere, ai lettori?

– Beh, se abbiamo fatto e, possiamo fare π… potresti chiedere per che valori di n si possono costruire degli n-agoni convessi per cui le tangenti trigonometriche di tutti gli angoli interni siano degli interi relativi finiti. E, secondo me, qualcuno mosso a pietà potrebbe anche provare se esistono delle relazioni possibili tra i lati.

2.2 Questo (non) è un problema

Il non è tra parentesi in quanto in realtà è un problema, ma mentre stiamo scrivendo per voi non lo è ancora mentre lo è per noi, o meglio, potrebbe esserlo perché non sappiamo se diventerà un problema... Mi sono incagliato, meglio ricominciare. Visto che non funziona alla Magritte, proviamo con Melville.

Non chiedeteglielo.

È un buono, ma avrebbe sicuramente il coraggio di rispondervi di no.

Funziona ancora peggio. Meglio se ve la raccontiamo nel solito modo raffazzonato.

Tempo fa, in copertina, abbiamo pubblicato il bellissimo lavoro di un nostro lettore: un tavolo in cui le gambe si incrociavano in modo tale da far venire un corposo mal di testa ad Euclide.

L'autore[13] abita non lontano da casa di Doc, e spesso si incontrano. Durante uno degli ultimi incontri si è parlato di un problema abbastanza famoso che dovreste conoscere: dato un triangolo equilatero, tagliarlo nel numero minimo di pezzi in modo tale che questi possano essere riaggiustati a formare un quadrato. *[Se non lo conoscete, provate a risolverlo: quanto vale il lato del quadrato? Logicamente, si richiede la costruzione dei punti topici dei tagli].*

Quello che ha sempre colpito Doc è il fatto che esiste una costruzione in cui i pezzi, incernierati tra di loro in modo da formare una specie di catena, se vengono "chiusi" in un senso formano il quadrato, se vengono chiusi nell'altro formano il triangolo.

Il Nostro, dopo averci pensato, si è immediatamente messo all'opera *[No, non è in vendita]*, e la cosa ha, come sempre, fatto pensare Rudy.

D'accordo, con il triangolo equilatero si può fare, e qualsiasi lettore *[Vero???]* è in grado di calcolare come va tagliato. Ma Rudy è convinto che il lavoro (almeno in parte) si possa fare per *qualsiasi* triangolo: in pratica, trovare un sezionamento che permetta di risistemare i pezzi in modo tale da formare un quadrato. Forti dubbi in merito al fatto che il tutto sia praticamente incernierabile come nel caso dell'equilatero, ma comunque un metodo generale di sezione dovrebbe esistere.

Riuscite a trovarlo?

Per quest'ultima parte vale il solito *caveat*, visto che non ci abbiamo provato (no, neanche il lettore di cui sopra): esiste una costruzione "incernierabile"?

Svelti, che ci serve un tavolo per le riunioni. E Doc, data la sua invadenza, necessita del lato maggiore, quindi equilatero non va bene.

2.3 Solito TrePerDue

Questa volta è tutta colpa di Rudy.

Ha finito tutto in ritardo, quindi ha recuperato un PM di secoli fa scopiazzato dal Ghersi: piccolo guaio, una formula interessante non era dimostrata, ed essendo le 22:01 del 30 settembre il suddetto non si sogna neanche di cercarne la dimostrazione.

E quindi ve la rifila come tre per due.

Dimostrate la formula [2] del PM, così almeno una volta tanto siete costretti a leggerlo.

---

[13] Si tratta di ***Sawdust***, avete già trovato il suo lavoro in copertina.

3. Bungee Jumpers

Trovare tutte le soluzioni intere dell'equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Ottobre.

Siamo in ritardo, tanto per cambiare, ma questa volta è proprio tutta colpa mia: il Capo (che ha scritto praticamente tutto il resto) ha inviato tutti i suoi pezzi in perfetto tempo, ed io mi trovo in pieno secondo giorno lavorativo a scrivere ancora queste righe. Che vergogna. Facciamo così: chiedo scusa a tutti, compreso ***Franco57***, che aveva mandato una correzione a una sua soluzione del mese scorso, e taglio corto qui, che qualche news ve la mette senz'altro il Doc nella Newsletter. Andiamo subito a vedere i problemi del mese scorso.

4.1 [164]

4.1.1 Vendetta, tremenda vendetta!

Non vorrei dirlo troppo forte, ma il Capo si è vendicato con Alice (che sarei io, quella a cui tocca la preparazione di questa sezione della rivista) fornendo un difficilissimo problema di probabilità, che come è ormai ben noto, io non sopporto. Secondo me lo scherzo non gli è riuscito, non solo perché quando lui comincia così io metto insieme le soluzioni in modo svogliato e i poveri lettori e solutori ne vengono a risentire ben più di me (ma non mi scuso, dopotutto la colpa fondamentale è del Capo che vi passa molti più problemi di probabilità che di qualsiasi altro tipo, e mi lamento solo io, quindi a voi deve andare bene…), ma anche perché non abbiamo avuto quasi nessun solutore… Andiamo per ordine, a cominciare dal perfidissimo problema:

> *Abbiamo due giochi: Mati ne gioca uno, mentre Davide ne gioca un altro.*
>
> *Mati ha a disposizione un certo numero N di palline in un sacchetto, originariamente colorate di N colori diversi: il suo gioco consiste nel tirare fuori due palline a caso e colorare la seconda del colore della prima, per poi rimetterle entrambe nel sacchetto; il suo gioco finisce quando tutte le palline del sacchetto sono dello stesso colore.*
>
> *Davide ha a disposizione M palline in un (altro) sacchetto, originariamente non colorate: il suo gioco consiste nel tirar fuori una pallina a caso e colorarla di un dato colore; il suo gioco finisce quando tutte le palline del sacchetto sono colorate.*
>
> *M&D vanno avanti a fare una "mossa" l'uno e una "mossa" l'altro, sin quando uno dei due termina il proprio gioco. Rudy ha deciso che (in media) Davide deve perdere se N=80, e vincere se N=81: quale valore di M, per i due N dati sopra, garantisce (in media) la vittoria o la sconfitta di Davide?*

L'unica soluzione che abbiamo ricevuto è di ***Franco57***, che in ogni caso non è né convinto né contento della sua soluzione, ma eccovela qui:

> Se Davide ha già colorato K delle sue M palline, per colorare anche tutte le altre gli serviranno in media altre $D_{M,K}$ estrazioni.
>
> Se $K = M$, ha terminato.
>
> Se $K < M$, con probabilità $\frac{K}{M}$ alla prossima ne ripescherà una già colorata e dovrà attendere in media ancora $D_{M,K}$, altrimenti ne colorerà una nuova e l'attesa media scenderà a $D_{M,K+1}$.
>
> Quindi: $\begin{cases} D_{M,M} = 0 \\ D_{M,K} = 1 + \frac{K}{M} D_{M,K} + \left(1 - \frac{K}{M}\right) D_{M,K+1} \end{cases}$, cioè $\begin{cases} D_{M,M} = 0 \\ D_{M,K} = \frac{M}{M-K} + D_{M,K+1} \end{cases}$.

Possiamo usare la formula ricorsiva per calcolare quanto dovrà attendere dall'inizio del gioco, quando nessuna pallina è colorata:

$$D_{M,0} = \frac{M}{M-0} + D_{M,1} = \frac{M}{M-0} + \frac{M}{M-1} + D_{M,2} = \dots = \frac{M}{M-0} + \frac{M}{M-1} + \dots + \frac{M}{M-(M-1)} + D_{M,M} =$$
$$= M\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\dots + \frac{1}{M}\right)$$

L'analogo per Mati è una formula ricorsiva per calcolare il numero medio $L_{K_1,K_2,\dots,K_r}$ di estrazioni in una situazione generica di gioco, quando abbia nel sacchetto palline di r colori diversi e di quantitativi rispettivamente $K_1, K_2, \dots, K_r$. Se N è il numero di palline abbiamo $K_1 + K_2 + \dots + K_r = N$. L'attesa media all'inizio del gioco è quindi $L_{1,1,\dots,1}$ dove gli "1" sono N.

Di tutte le $N(N-1)$ possibili coppie ordinate che possono essere estratte, K_iK_j sono quelle per cui Mati, alla prossima estrazione, debba colorare di j una pallina di colore i. Perciò se tutti i K_i sono positivi:

$$L_{K_1,K_2,\dots,K_r} = 1 + \left(1 - \sum_{i \neq j} \frac{K_iK_j}{N(N-1)}\right) L_{K_1,K_2,\dots,K_r} + \sum_{i \neq j} \frac{K_iK_j}{N(N-1)} L_{H_1,H_2,\dots,H_r}$$

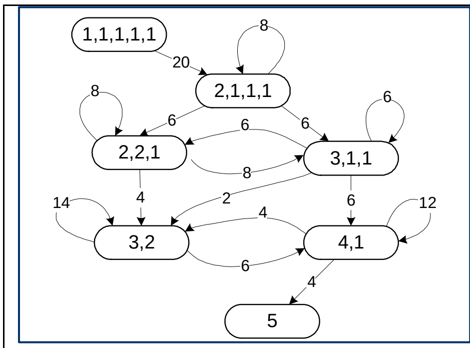
con $H_i = K_i - 1$, $H_j = K_j + 1$, $H_l = K_l$ per $l \neq i$ e $l \neq j$.

Se uno dei K_i è nullo viene tolto dalla lista e riapplicata la formula ricorsiva. Infine chiaramente $L_N = 0$ perché il gioco è terminato. Queste formule non sono altro che un sistema di equazioni lineari dove le variabili sono le lunghezze medie della partita nelle varie situazioni. Ad esempio per calcolare il caso di $N = 3$:

$$L_{1,1,1} = 1 + \left(1 - \sum_{i \neq j} \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 2}\right) L_{1,1,1} + \sum_{i \neq j} \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 2} L_{0,1,2} = 1 + \left(1 - 6 \cdot \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 2}\right) L_{1,1,1} + 6 \cdot \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 2} L_{1,2} = 1 + L_{1,2}$$

$$L_{1,2} = 1 + \left(1 - \left(\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2}\right)\right) L_{1,2} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} L_{0,3} + \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2} L_{2,1} = 1 + \frac{1}{3} L_{1,2} + \frac{1}{6} L_3 + \frac{1}{3} L_{2,1} = 1 + \frac{2}{3} L_{1,2}$$

Quindi $L_{1,2} = 3$ e di conseguenza $L_{1,1,1} = 4$.



3 *Lo schema di* ***Franco57***

In realtà in casi di piccole dimensioni il calcolo si fa meglio con un diagramma di transizione di stato, come quello a fianco per $N = 5$, dove il numero sugli archi indica in quante delle $5 \cdot 4 = 20$ possibili coppie ordinate di palline c'è la transizione di stato.

Il sistema conviene risolverlo dal basso, poiché i valori di L per $r+1$ colori dipendono unicamente dai valori di L per r colori. Quindi per lo strato a 2 colori abbiamo

$$\begin{cases} L_{3,2} = 1 + \frac{14}{20} L_{3,2} + \frac{6}{20} L_{4,1} \\ L_{4,1} = 1 + \frac{12}{20} L_{4,1} + \frac{4}{20} L_5 + \frac{4}{20} L_{3,2} \end{cases} \text{ che fornisce } \begin{cases} L_{3,2} = \frac{35}{3} \\ L_{4,1} = \frac{25}{3} \end{cases}.$$

Per lo strato a 3 colori
$$\begin{cases} L_{2,2,1} = 1 + \frac{8}{20} L_{2,2,1} + \frac{4}{20} L_{3,2} + \frac{8}{20} L_{3,1,1} \\ L_{3,1,1} = 1 + \frac{6}{20} L_{3,1,1} + \frac{6}{20} L_{4,1} + \frac{2}{20} L_{3,2} + \frac{6}{20} L_{2,2,1} \end{cases} \text{ dà } \begin{cases} L_{2,2,1} = \frac{18}{3} \\ L_{3,1,1} = \frac{38}{3} \end{cases}.$$

Poi $L_{2,1,1,1} = 1 + \frac{8}{20} L_{2,1,1,1} + \frac{6}{20} L_{3,1,1} + \frac{6}{20} L_{2,2,1}$, da cui $L_{2,1,1,1} = 15$ e infine $L_{1,1,1,1,1} = 1 + \frac{20}{20} L_{2,1,1,1} = 16$. Con diagramma e calcolo analoghi si ricava a $L_{1,1,1,1} = 9$.

Riassumendo e aggiungendo i casi banali: $L_1 = 0$, $L_{1,1} = 1$, $L_{1,1,1} = 4$, $L_{1,1,1,1} = 9$, $L_{1,1,1,1,1} = 16$. La congettura $L_{1,1,\dots,1[N \ \ volte]} = (N-1)^2$ sorge spontanea, ma ahimè non sono stato capace di dimostrarla.

L'unico quadrato tra $D_{80,0} = 397{,}2383423\dots$ e $D_{81,0} = 403{,}2038216\dots$ è $400 = 20^2$, perciò $N = 21$ palline nel sacchetto di Mati garantiscono in media rispettivamente la vittoria o la sconfitta di Davide.

… sempreché la congettura sia vera!

Ci ha scritto a proposito di questo problema anche ***Luca***, alla sua prima soluzione, che invitiamo a scegliersi un bell'allonimo e a continuare a risolvere, perché a noi fa sempre piacere vedere nuovi contributi:

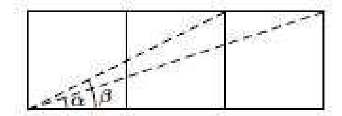
> Non essendo particolarmente pratico in distribuzioni e statistiche, ho provato a realizzare un programma che simulasse i due giochi. Risultato? Neanche con la potenza del calcolatore sono riuscito a trovare una possibile soluzione! In ogni caso allego il programma (con tanto di codice c++). Il funzionamento è semplice: si sceglie se far giocare Davide o Mati, si inserisce il numero di palline. Il programma fa "M" simulazioni del gioco, per ognuna di esse conta il numero di mosse utilizzate per completarlo; calcola la media (aritmetica) di questi valori e la stampa su schermo. "M" vale 30 di default, ma è possibile modificarlo. Spero possa essere d'aiuto a qualcuno...

Grazie ***Luca***, il programma ce lo teniamo noi e ci giochiamo. La vendetta del Capo resta disattesa. Io sono buona e se mandate altro, sono prontissima a pubblicare.

4.1.2 Facciamo pace...

Va beh, con un problemino così semplice e carino, la pace è fatta subito:

> *Se quelli in figura sono tre quadrati, quanto vale l'angolo α+β?*



4 *L'oggetto del contendere*

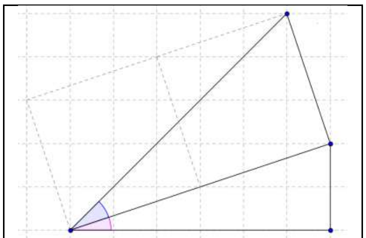
Come potete facilmente immaginarvi, sono arrivate molte risposte, e tanti hanno provato molte strade.

Luca (lo stesso di poche righe fa), ci ha scritto praticamente una sola riga di soluzione:

> La "Rudi soluzione" è per caso quella ottenuta per via puramente algebrica? Spero di sì:
>
> tan(α)=1/2 tan(β)=1/3 tan(α+β)=(tan(α)+tan(β))/(1−tan(α)tan(β))=1 => α+β=45°

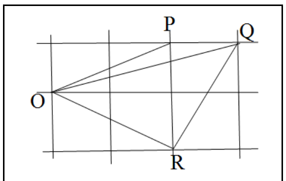
Sì, certo questa è una possibile soluzione, ma non quella di Rudy, che non ha ancora fatto pace con la trigonometria dai tempi del liceo. Per esempio ***Zar***, ci manda prima una soluzione "senza parole", e poi la integra così:

> Riguardo la dimostrazione geometrica che vi ho mandato ieri, mi è venuto in mente che esiste un metodo molto semplice per tradurla in algebra: utilizzando i numeri complessi.
>
> Basta notare che (3+*i*)(2+*i*)=6+3*i*+2*i*−1=5+5*i*, numero complesso avente argomento pari a 45 gradi.


5 *Senza parole, di **Zar***

Niente male, vero? Bella l'idea di passare nel piano complesso, anche se forse ad un non-iniziato potrebbe sembrare un tantino ostica. Incidentalmente è anche la prima versione che ci ha inviato ***Alberto R.***, che ha poi aggiunto quest'altra:

OP è stato ribaltato in OR. il triangolo ORQ è rettangolo in R ed isoscele, quindi l'angolo QOR è di 45°.



6 *Senza parole, di* ***Alberto R.***

Semplice e veloce, appena un disegnino. Cerchiamo di non ripetere tutte le versioni che ci sono arrivate, ma è un peccato non passarvi tutti i disegnini perché ognuno è speciale e bellissimo. ***Mirhonf***, da canto suo, ci ha mandato tre soluzioni, la prima sfrutta il trucco della tangente visto sopra, le altre due le vediamo qui:

2° soluzione

Disegno sotto i 3 triangoli iniziali di figura 1, altri tre triangoli come nella figura di sopra. Unisco i vertici A, C ed F che formano un triangolo isoscele, in quanto AF e CF sono diagonali che uniscono i vertici opposti del rettangolo formato da due dei triangoli iniziali. Quindi AF=CF.

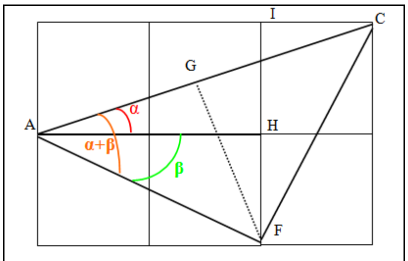
Traccio la perpendicolare ad AC da F. Considero il triangolo FGA (uguale a FGC in quanto entrambi triangoli rettangoli, aventi i lati AF=FC).

$$AG = AF\cos(\alpha+\beta) \quad (1)$$

Ora, detto L il lato di ognuno dei sei triangoli uguali,

$$AG = \frac{AC}{2} = \sqrt{9L^2 + L^2} = L\frac{\sqrt{10}}{2} \quad (2);$$

$$AF = \sqrt{4L^2 + L^2} = L\sqrt{5} \quad (3);$$



7 *La figura 2 di* ***Mirhonf***

sostituendo nella (1), la (2) e la (3), si ottiene: $\cos(\alpha+\beta) = \frac{AG}{AF} = \frac{L\frac{\sqrt{10}}{2}}{L\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, da cui si evince che $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

3° soluzione

Facendo sempre riferimento alla figura 2, considerando il triangolo rettangolo FAH, notiamo che l'angolo FAH=β, l'angolo AFH=$\pi/2-\beta$.

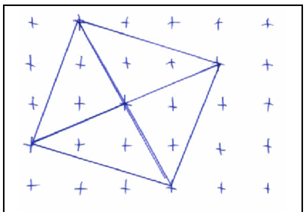
Analogamente, considerando il triangolo FIC, notiamo che anche l'angolo IFC=β.

Quindi l'angolo AFC=AFH+IFC= $\pi/2-\beta+\beta=\pi/2$.

Questo implica che il triangolo isoscele AFC è anche rettangolo, quindi gli angoli CAF=ACF=$\alpha+\beta=\pi/4$.

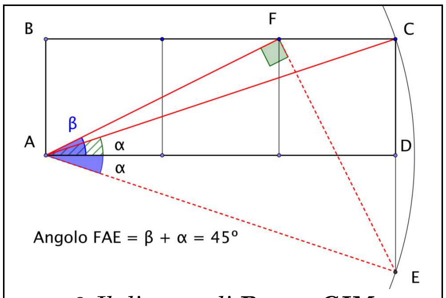
Anche queste, molto interessanti. Come si vede, il trucco era quello di ribaltare la figura, o almeno di giocare con la geometria. Nella bella lista di soluzioni che ci manda ***Riccardo***, troviamo questa conclusione:

La terza soluzione è la mia preferita perché semplice e (abbastanza) intuitiva. I Greci antichi, che avevano capito molte cose in molti campi già a quell'epoca, dissero tramite Platone: "Non sarai mai nessuno senza conoscere la geometria".


8 *Viva la geometria, di* ***Riccardo***

Vero. Ma non c'è un solo modo di usare la geometria: si può girare la figura in diversi modi, come abbiamo visto, e fare diversi ragionamenti. Ecco quello di ***Beppe GIM***:

Si disegna il rettangolo che ha la base uguale a 3 e l'altezza uguale a 1, e si divide in tre quadrati di lato unitario. Si tracciano le due diagonali.



9 *Il disegno di* ***Beppe GIM***

Il rettangolo di partenza ha la diagonale AC = √10 =√2 · √5

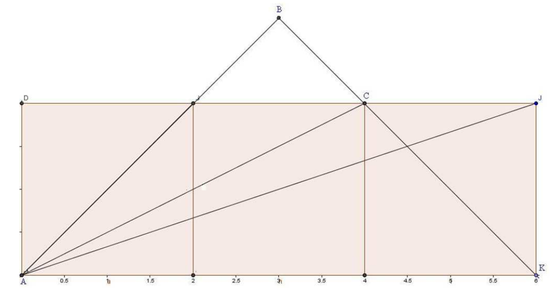
Il rettangolo con base 2 ha la diagonale AF = √5 .

Quindi è: AC = √2 AF. Perciò le due diagonali stanno nello stesso rapporto che c'è tra il lato di un quadrato e la sua diagonale. Quindi basta costruire il triangolo rettangolo isoscele avente AF per cateto: ovviamente FE = AF, e l'ipotenusa AE = √2 AF = AC. Perciò il punto E appartiene alla circonferenza di centro A e raggio AC e ovviamente si trova sulla semiretta per F perpendicolare ad AF. Il punto E si trova anche sulla corda per C perpendicolare alla base AD del rettangolo.

Dunque l'angolo DAE è uguale ad α.

Perciò l'angolo FAE è uguale a: $\beta + \alpha = 45°$. E questo è quanto.

Anche questa è una soluzione bella come tutte le altre, vero? E quella di ***Actarus***? Arriva:

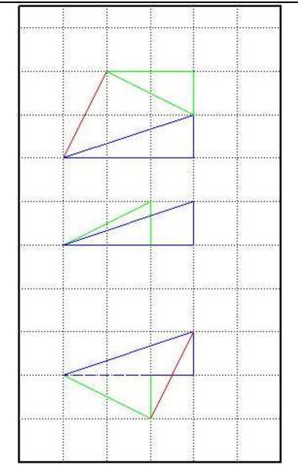

10 *La figura di* ***Actarus***

Con riferimento alla figura qui sopra, risulta facile dimostrare che il triangolo ABC è simile al triangolo AJK, infatti sono entrambi triangoli rettangoli ed il rapporto tra i due cateti minori è uguale al rapporto tra i due cateti maggiori.

Infatti AB=3√2 ed AK=6, da cui il rapporto tra i cateti maggiori vale AK/AB = 6/(3√2) = √2, e BC = √2, JK=2, da cui il rapporto tra i cateti minori vale JK/BC = 2/√2 = √2.

Quindi essendo i triangoli simili abbiamo che l'angolo JAK è uguale all'angolo BAC, per cui la somma di JAK + CAK è uguale alla somma di BAC + CAK per cui coincide con l'angolo BAK. Essendo il triangolo BAK un triangolo isoscele rettangolo si ricava che questo angolo misura 45°.

Per concludere, vediamo la versione di Camillo:


11 *Il disegno di* ***Camillo***

La prima è quella classica trigonometrica con cui vi sono diversi metodi equivalenti per farla, la più semplice mi pare la tangenza tra i cateti. I 2 angoli hanno valore: 26,565 e 18,434 che sommati fanno circa 45 gradi.

La seconda è esatta fino all'ultimo decimale ed è geometrica.

Se si rovescia uno dei 2 triangoli sul cateto lungo e si congiungo i vertici alto e basso si ottiene un triangolo rettangolo/isoscele per cui la somma dei due angoli in questione è 45 gradi esatti.

Un'altra soluzione che è equivalente alla precedente è quella di far rovesciare un triangolo ma invece che le basi farli combaciare con i vertici opposti all'ipotenusa.

Meno male che il Capo a volte si lascia andare a qualche problema facile, così vi potete sbizzarrire veramente in tutti gli approcci possibili!

Bene, con questo è tutto. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Un problema filosofico.

Si racconta che Emmanuel Kant fosse un tipo talmente metodico che la gente di Königsberg regolasse il proprio orologio sui suoi passaggi da determinati punti della città durante le sue passeggiate pomeridiane.

Una mattina, Kant si accorse con terrore che l'orologio a pendolo si era fermato; siccome il suo fido orologio da taschino era in riparazione e questi erano gli unici due orologi che possedeva, non poteva sapere che ora fosse.

Dovendo andare a trovare il suo amico Schmidt (che lo aveva invitato a vedere la sua nuova casa), si recò da lui con il suo solito passo tranquillo e, entrando, lanciò una veloce occhiata all'orologio presente nell'ingresso.

Dopo alcune ore di "interessante" conversazione (il buon Emmanuel era un tipo piuttosto prolisso), tornò a casa con l'abituale calma e, entrando, riuscì a regolare l'orologio.

Come aveva fatto? Attenzione, che ci sono due risposte!

6. Pagina 46

Dalla forma del secondo membro deduciamo che la somma dei tre quadrati a primo membro deve essere un numero pari.

Se due numeri sono dispari e il terzo è pari, supponendo sia $x=2k$, possiamo esprimere il secondo membro come $2\cdot 2\cdot kyz=4kyz$, ma in questo caso, il primo membro sarà divisibile solo per 2, mentre il secondo sarà divisibile per 4, il che è impossibile: quindi tutti e tre i numeri devono essere pari.

Imponendo quindi $x=2x_1, y=2y_1, z=2y_3$, la nostra equazione diventa:

$$4x_1^2+4y_1^2+4z_1^2=16x_1y_1z_1 \quad \Rightarrow \quad x_1^2+y_1^2+z_1^2=4x_1y_1z_1.$$

Per lo stesso ragionamento visto sopra, i tre numeri x_1, y_1, z_1 devono anch'essi essere pari, il che ci porta all'equazione:

$$4x_2^2+4y_2^2+4z_2^2=4\cdot 8\cdot x_2y_2z_2 \quad \Rightarrow \quad x_2^2+y_2^2+z_2^2=8x_2y_2z_2.$$

Proseguendo con lo stesso metodo, si ottiene che devono essere pari tutte le terne:

$$\begin{array}{lll}
x, & y, & z; \\
x_1=\dfrac{x}{2}, & y_1=\dfrac{y}{2}, & z_1=\dfrac{z}{2}; \\
x_2=\dfrac{x}{4}, & y_2=\dfrac{y}{4}, & z_2=\dfrac{z}{4}; \\
\dots & \dots & \dots \\
x_k=\dfrac{x}{2^{k^2}}, & y_k=\dfrac{y}{2^{k^2}}, & z_k=\dfrac{z}{2^{k^2}}.
\end{array}$$

Dove l'ultima riga (e tutte le altre, implicitamente) devono soddisfare l'equazione $x_k^2+y_k^2+z_k^2=2^{k+1}x_ky_kz_k, \forall k\in N^+$.

Questo però è possibile solo se $x=y=z=0$, che è l'unica soluzione dell'equazione.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Roba da ingegneri

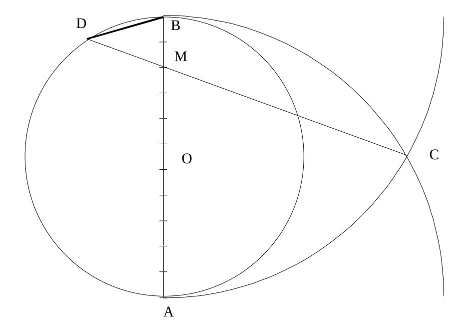
Scopo del gioco, questa volta, è *dividere la circonferenza in parti uguali*. Anche se abbiamo ormai ampiamente dimostrato che il livello di questa rivista è suppergiù quello di Gauss verso i cinque anni, credo vi ricordiate tutti che quando era più anziano (verso i diciotto, se non sbaglio) il Nostro ha dimostrato che sono costruibili con riga e compasso i poligoni aventi un numero di lati che sia ***primo*** e esprimibile nella forma:

$$P = 2^{2^n} + 1$$

...e il risultato è considerato talmente importante che la base della sua statua a Gottingen è un poligono regolare rappresentante il caso n=2, ossia un 17-agono[14]. Insomma, per gli altri numeri (anche se sono primi, ma non costruibili con questa formula) niente da fare[15].

E allora? E allora, per essere offensivo, facciamo gli Ingegneri. Ossia, cerchiamo delle costruzioni approssimate. La cosa divertente è che in alcuni (fetentissimi) testi di Disegno Tecnico vengono spacciati per *esatti*[16].

Bene, cominciamo con quello più noto, detto ***Metodo Rinaldini***. Riferimento alla figura qui di fianco. E non rompete le scatole che è malfatta: abbiamo detto metodo approssimato, quindi per tre punti passa una sola retta, se la matita è abbastanza grossa.



12 *Rinaldini*

Allora, per prima cosa si traccia il diametro *AB* del cerchio in cui vogliamo iscrivere (per esempio) un 11-agono. Indi, si divide questo diametro in tante parti quanti sono i lati del nostro aggeggio, quindi 11. Con apertura *AB*, si tracciano gli archi *BC* (centro in *A* e *AC* (centro in *B*). Quindi, si traccia il segmento da *C* passante per il *secondo* punto della nostra divisione della circonferenza (*M*), e la prosecuzione di questo segmento andrà ad intercettare la circonferenza in ***D***. la corda *BD* è il lato del nostro 11-agono.

Tutto qui? Sì, tutto qui. Costruzione ingannevolmente semplice, devo dire. Proviamo a verificare "di quanto si sbaglia".

Allora, diamo un po' di nomi a un po' di cose. Ad esempio, sia:

$$A\hat{M}C = \alpha$$

$$A\hat{C}M = \beta$$

$$D\hat{O}B = \gamma$$

$$r = 1$$

...bene, ritengo si sia stati abbastanza fantasiosi. Prego notare, comunque, che *ABC* è un triangolo equilatero.

---

[14] Leggenda vuole che sia stato depositato alla locale università un metodo per costruire il caso n=4, ovverossia il ***65537-agono***. Se passate da quelle parti e lo trovate, siete pregati di *non* mandarcelo.

[15] Giusto per fare un esempio, non sono costruibili esattamente i 7, 9 e 13-agoni, con riga e compasso. Sono necessari altri strumenti in quanto richiedono la risoluzione di una *cubica* che quindi implica la trisezione dell'angolo. È piuttosto interessante, pero', che almeno i primi due (non ho notizie sul terzo) siano costruibili esattamente con l'*origami*, e per questo potete studiarvi i PM relativi.

[16] Aspettate a scandalizzarvi: il testo di Disegno Tecnico di Alberto (Prima Media) sostiene che il Nastro di Möbius è una figura *impossibile*.

Allora, riferendoci al triangolo *MCA*, abbiamo:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{1}{1-\frac{2}{n}}$$

mentre, dal triangolo *DMO* possiamo ricavare che è:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\gamma)}=\frac{1}{1-\frac{4}{n}} \qquad \textbf{[1]}$$

E quindi:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(120^\circ-\alpha)}=\frac{1}{1-\frac{2}{n}}$$

e dividendo quest'ultima per $\sin\alpha$, si ottiene:

$$\frac{1}{\sin 120^\circ\cot\alpha-\cos 120^\circ}=\frac{1}{1-\frac{2}{n}}$$

e, noti i valori del seno e del coseno di 120°, sostituendo e semplificando, si ha:

$$\cos\alpha=\frac{n-4}{n\sqrt{3}}$$

e dividendo anche la **[1]** per $\sin\alpha$, si ha

$$\frac{1}{\cos\gamma-\sin\gamma\cot\alpha}=\frac{1}{1-\frac{4}{n}}$$

Il che significa:

$$\cos\gamma-\frac{(n-4)\sin\gamma}{n\sqrt{3}}=\frac{n-4}{n}$$

Ora, se (per semplificarci la vita) poniamo $\cos\gamma=x$, arriviamo all'equazione:

$$\frac{(1-x)^1(n-4)^2}{3n^2}=\frac{(n-4)^2}{n^2}+x^2-\frac{2x(n-4)}{n}$$

ossia, togliendo dalle scatole un po' di denominatori,

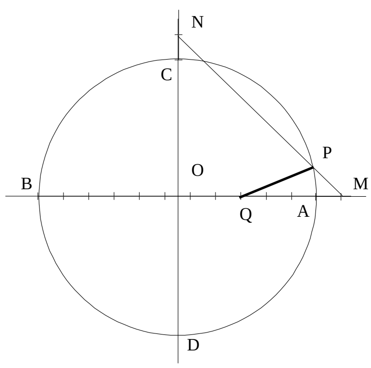
$$\left[3n^2+(n-4)^2\right]x^2-\left[6n(n-4)\right]x+\left[2(n-4)\right]=0$$

dove vi ho messo i coefficienti tra parentesi quadre.

Risolvendo (la soluzione negativa si butta in quanto per piccoli *n* darebbe dei valori negativi per il coseno), si ottiene finalmente:

$$x=(n-4)\frac{3n+\sqrt{n^2+16(n-2)}}{3n^2+(n-4)^2}$$

e questi, come detto poco sopra, sono i valori del coseno dell'*angolo al centro* sottendente il lato.



13 *Bardin*

Come faccio, adesso, a dirvi che siamo a *metà del lavoro*? Nel senso che c'è un altro metodo... Noto come ***Metodo Bardin***. Allora, disegnino (preso di pacca da quello prima...).

Con calma. Questa volta la divisione (sempre in n=11 parti) la facciamo sul diametro *orizzontale* AB. Indi, tracciamo il diametro perpendicolare *CD* e prolunghiamo questi due diametri dalla parte di *A* e *C* di una lunghezza *uguale ad uno degli intervalli* trovando i due punti *N* e *M*. Uniamo questi due punti e la retta appena tracciata intersecherà la circonferenza in *P*. Unendo *P* con il *terzo* punto di divisione *Q*, otteniamo il segmento *PQ* che è pari al lato (approssimato) del nostro n-agono.

Ora, se avete letto i problemi di questo numero, e in particolare il terzo, dovrebbe esservi evidente che è:

$$l = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - 8n + 48 - (n-6)\sqrt{n^2 - 4n - 4}} \qquad \textbf{[2]}$$

...e l'angolo al centro (giusto per avere le stesse misure) sarà il doppio dell'arco-seno di metà di questa roba[17].

Insomma, tirando le somme, se il pedice *R* indica il metodo Rinaldini, il pedice *B* quello di Bardin e il pedice *E* il valore esatto, si ha:

$$\gamma_R = \arccos\left[(n-4)\frac{3n + \sqrt{n^2 + 16(n-2)}}{3n^2 + (n-4)^2}\right]$$

$$\gamma_B = 2 \cdot \arcsin\left[\frac{1}{2n}\sqrt{n^2 - 8n + 48 - \left((n-6)\sqrt{n^2 - 4n - 4}\right)}\right]$$

$$\gamma_E = \frac{2\pi}{n}$$

E se portate (dopo averle dimostrate) le due formule in un grafico, vi accorgete che il metodo Bardin ha sempre degli errori minimi.

Il bello è che a me, alle medie, avevano insegnato il metodo Rinaldini spacciandomelo per ***esatto***... Ma il mio prof di Applicazioni Tecniche era un preclaro esempio di inettitudine, basta vedere i disegni che ho fatto sopra.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[17] Prego notare che, se n<5, il radicale sotto radice diventa immaginario, quindi *il Metodo Bardin è applicabile solo per valori maggiori o uguali a* 5.