Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 164 – Settembre 2012 – Anno Quattordicesimo

Combine one word from each of the three columns below, prefaced with "Thou":

Column 1	Column 2	Column 3
artless	base-court	apple-john
bawdy	bat-fowling	baggage
beslubbering	beef-witted	barnacle
bootless	beetle-headed	bladder
churlish	boil-brained	boar-pig
cockered	clapper-clawed	bugbear
clouted	clay-brained	bum-bailey
craven	common-kissing	canker-blossom
currish	crook-pated	clack-dish
dankish	dismal-dreaming	clotpole
dissembling	dizzy-eyed	coxcomb
droning	doghearted	codpiece
errant	dread-bolted	death-token
fawning	earth-vexing	dewberry
fobbing	elf-skinned	flap-dragon
froward	fat-kidneyed	flax-wench
frothy	fen-sucked	flirt-gill
gleeking	flap-mouthed	foot-licker
goatish	fly-bitten	fustilarian
gorbellied	folly-fallen	giglet
impertinent	fool-born	gudgeon
infectious	full-gorged	haggard
jarring	guts-griping	harpy
loggerheaded	half-faced	hedge-pig
lumpish	hasty-witted	horn-beast
mammering	hedge-born	hugger-mugger
mangled	hell-hated	joithead
mewling	idle-headed	lewdster
paunchy	ill-breeding	lout
pribbling	ill-nurtured	maggot-pie
puking	knotty-pated	malt-worm
puny	milk-livered	mammet
qualling	motley-minded	measle
rank	onion-eyed	minnow
reeky	plume-plucked	miscreant
roguish	pottle-deep	moldwarp
ruttish	pox-marked	mumble-news
saucy	reeling-ripe	nut-hook
spleeny	rough-hewn	pigeon-egg
spongy	rude-growing	pignut
surly	rump-fed	puttock
tottering	shard-borne	pumpion
unmuzzled	sheep-biting	ratsbane
vain	spur-galled	scut
venomed	swag-bellied	skainsmate
villainous	tardy-gaited	strumpet
warped	tickle-brained	varlot
wayward	toad-spotted	vassal
weedy	unchin-snouted	whey-face
yeasty	weather-bitten	wagtail

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell’altro millennio da

Rudy d’Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM163 ha diffuso 2’932 copie e il 03/09/2012 per Google eravamo in 19’700 pagine.

Come molti di voi dovrebbero sapere, Rudy è ancora alla ricerca dei suoi vecchi ***Tubolari***, e se non sapete cosa sono date una googlata. Gli è preso un attacco di nostalgia quando ha trovato il ***Generatore di Insulti Scespiriani***: mettete un “*Thou*” davanti, scegliete una parola a caso dalla prima riga, una dalla seconda e una dalla terza. Fate seguire da un punto esclamativo e cercate di capire cosa avete detto. Reperibile a http://www.blameitonthevoices.com/2011/10/shakespeare-insult-kit.html.

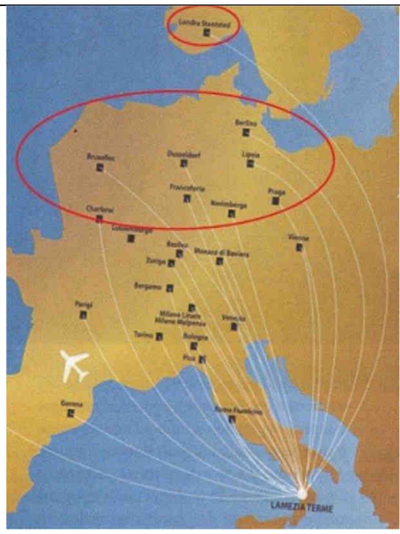
1. Isole e Laghi

Un giorno, a un saggio fu chiesto come mai gli studiosi bussano sempre alle porte dei ricchi, mentre i ricchi non sono soliti recarsi alle porte degli studiosi. Egli rispose: "Perché gli studiosi conoscono bene la necessità del denaro, mentre i ricchi ignorano la nobiltà della scienza."

"Qualunque via percorra, il geometra attraverso l'esercizio sarà elevato dall'insegnamento terreno a quello divino, che è di difficile accesso a causa delle difficoltà nel comprendere il suo vero significato, e anche perché non tutti hanno la capacità anche solo di concepirlo: specialmente coloro che rifuggono dall'arte della dimostrazione."

Qual è la quarta isola più grande d'Italia?

La domanda è davvero difficile: la risposta esatta, pronta e immediata, arriverà di sicuro dagli abitanti dell'isola in questione, da un buon numero di loro vicini, da qualche esperto di isole e certo da qualcuno che ancora coltiva il nobile hobby della geografia. Al di fuori di questo novero di persone (che immaginiamo sorprendentemente ristretto) la domanda è quasi letale. Ormai, in tempo di Internet, Google e Wikipedia sempre raggiungibili da qualsiasi cellulare, non esistono praticamente più domande così spudoratamente nozionistiche che non possano essere risolte nel giro di pochi secondi; ma se si impone di rinunciare ai grandi risponditori automatici del nostro tempo e si fa un breve sondaggio esplorativo, la difficoltà della domanda apparirà in tutta la sua travolgente grandezza.



1 *Da una guida promozionale dei voli dall'aeroporto di Lamezia Terme*

Come sempre, la parte più istruttiva non è la risposta in sé[1]: è cercare di capire le cause della difficoltà. In questo caso specifico, le cause sono davvero molte e ragionevolmente interessanti.

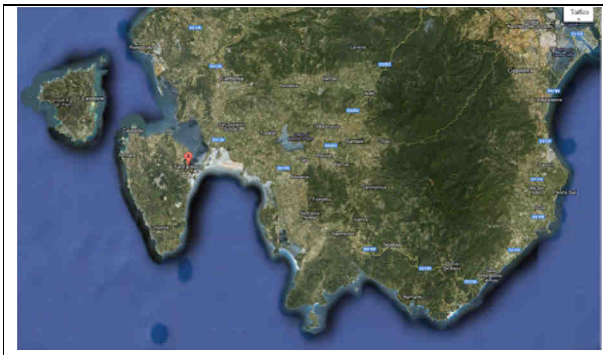
Una è certo la scarsa attrattiva della geografia, almeno quella puramente teorica: non per niente il suo insegnamento è stato di recente sostanzialmente abolito anche in istituti come quello nautico, che dello studio della geografia dovrebbero fare tesoro, a meno che i futuri navigatori non vogliano ritrovarsi con le rotte messe un po' a caso come sono messe le città nella cartina qui a fianco (pubblicata in una pagina pubblicitaria di un opuscolo turistico allegato al maggior quotidiano italiano); è probabile che gli italiani preferiscano di gran lunga applicare il metodo galileiano e sperimentare di persona, tramite viaggi, la consistenza delle informazioni contenute negli atlanti, ormai definitivamente bollati come tomi aridamente teorici e vetero-aristotelici.

[1] Non c'è invece dubbio su quale sia la parte più divertente: godersi le espressioni e catalogare le facce degli interrogati. Si dividono grossomodo in due gruppi: uno, meno numeroso, è preso da panico scolastico e si preoccupa di dover palesare la propria ignoranza; gli appartenenti all'altro, ampiamente maggioritario, dipingono sul volto l'espressione corrispondente a: "*Ma sei scemo a fare una domanda del genere?*", e non è detto che abbiano tutti i torti.

Un'altra buona ragione è che chiedere una quarta posizione in classifica è oggettivamente un po' crudele. Anche il più affezionato nozionista tende a prepararsi sui record, sulle prime posizioni: al massimo, olimpicamente, ad elencare le prime tre, i gradini del podio. I quarti posti sono quasi sempre dimenticati, le medaglie di legno subiscono automatici moti di ripulsa: perfino nell'elencare le quattro città più popolose d'Italia è facile ritrovare qualche difficoltà, figuriamoci nel ricostruire il nome della quarta isola per estensione.

Un'ulteriore ragione è proprio che le prime tre posizioni, per contro, in questo caso sono abbastanza evidenti e stranote. Le due isole maggiori, Sicilia e Sardegna, sono così prorompenti che è impossibile dimenticarle[2]; e anche la terza, l'Elba, per quanto molto più piccola delle due regioni insulari, è comunque ben più grande di tutte le altre consorelle. Questa distanza tra il bronzo e la medaglia di legno del quarto posto amplifica la difficoltà della domanda. Nel caso delle città, invece, è abbastanza noto che in Italia ci sono quattro città che hanno un numero di abitanti che supera o orbita attorno al milione, e il "gap" è più evidente tra la quarta e la quinta posizione, quindi è relativamente più facile ricostruire la classifica per popolazione nelle prime quattro posizioni (Roma, Milano, Napoli, Torino) e perdersi piuttosto dalla quinta in poi[3].

Infine, c'è anche il fatto che la fantomatica quarta isola maggiore d'Italia gioca a nascondino. È per questa ragione che anche coloro che provano ragionevolmente a dare una risposta meditata e consapevole spesso sbagliano, puntando su Pantelleria, che invece occupa solo la quinta posizione. A loro giustificazione c'è da notare che Pantelleria si staglia netta e precisa nel Mediterraneo, mostrando la sua discreta superficie di quasi cento chilometri quadrati: si mette insomma in bella mostra.



2 *Sant'Antioco e San Pietro*

La quarta isola italiana è Sant'Antioco. È così vicina alla costa sudoccidentale della Sardegna che non è neanche facile registrarla immediatamente come isola: del resto, è unita all'isola madre sarda da un ponte e da un istmo, in parte artificiale. Per quanto anch'essa prossima alle coste sarde, la sua compagna Isola di San Pietro (sesta in classifica) già mostra con maggiore determinazione la sua natura insulare. Isola di un'isola, insomma: il principio di relatività induce probabilmente i turisti di Sant'Antioco e di San Pietro a guardare la vicina costa della Sardegna come "la terraferma", dimenticando quasi che anch'essa è un'isola. E quest'ultimo elemento non è probabilmente il meno significativo nel far dimenticare Sant'Antioco dal novero delle isole maggiori.

Un'isola è tale perché è un pezzo di terra totalmente circondato dalle acque: la parte della matematica che meglio prende in considerazione le connotazioni che caratterizzano il concetto intuitivo di insularità è la topologia, che a differenza della geometria euclidea si interessa non tanto della "forma" dell'oggetto, quanto delle relazioni di struttura dell'oggetto stesso e dei confini tra un elemento topologico e l'altro. A complicare le cose anche dal punto di vista topologico arrivano (sempre che si decida di promuovere l'acqua dolce alla stessa categoria dell'acqua del mare) l'eventuale presenza di laghi nel territorio dell'isola. Dal punto di vista topologico, una regione semplicemente connessa (com'è

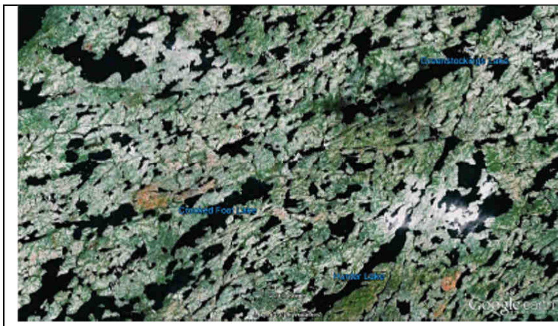
[2] Anche se non è altrettanto ovvia la reciproca posizione in classifica. Fior di discussioni si sono accese attorno ai tavoli del Trivial Pursuit, che alla domanda "qual è l'isola più grande d'Italia" dava (almeno nella prima edizione del gioco) la risposta sbagliata "Sardegna". In realtà la Sicilia supera la Sardegna di 1600 chilometri quadrati (abbondanti), che è un po' come dire che la Sicilia da sola è più grande della somma della Sardegna e di tutte le altre isole italiane messe insieme.

[3] Vengono spesso ipotizzate come candidate alla quinta posizione Bari, Bologna, Firenze, Genova e Palermo, che in effetti coprono i posti dal 5° al 9°. La vincente è Palermo, con circa 650.000 abitanti.

appunto un'isola senza laghi) è ben diversa da una regione con un buco in mezzo (come un'isola con un lago), e la cosa si complica ulteriormente (sia dal punto di vista topologico sia da quello geografico) nel caso in cui all'interno del lago dovesse trovarsi un'altra isola, appunto lacustre.

3 *L'isola "Volcano" nel Lago Taal di Luzon*

Nelle Filippine (arcipelago, cioè gruppo di isole, quindi insieme topologico già di una certa complessità) l'isola maggiore è quella di Luzon, di quasi centomila chilometri quadrati[4]. Luzon, isola, ha dei laghi al suo interno, e tra questi c'è il Lago Taal (tra l'altro, un posto davvero spettacolare, a giudicare dalle foto). Il lago Taal ospita al suo interno l'isola Volcano, che deve il nome all'evidente natura vulcanica, ben riconoscibile soprattutto per il residuo cratere nel suo bel mezzo: cratere che possiede nella caldera a sua volta un lago (del quale non siamo riusciti a scoprire il nome, se mai esiste: le fonti che abbiamo si riferiscono ad esso solo col nome generico di "lago del cratere"). A completare il ciclo, nel lago del cratere troneggia una piccola isola, il cui nome dovrebbe suonare come "Punto del Vulcano", o qualcosa del genere. Secondo Wikipedia, il citato "lago del cratere" dovrebbe essere il più grande "lago su un'isola in un lago su un'isola" del mondo. La completa assenza della proprietà transitiva non ci consente di concludere né che il "Punto del Vulcano" sia a sua volta la più grande "isola in un lago su un'isola in un lago su un'isola" del mondo, e men che meno alcunché sull'isola Volcano medesima (anzi, dubitiamo che possa essere la più grande "un'isola in un lago su un'isola[5]"); quel che è certo è che certe classifiche servono probabilmente più come generatori di scioglilingua che come reali informazioni. Il passaggio dalla Topologia alla Matematica dei Frattali è già dietro l'angolo: un laghetto da pesca artificiale sul Punto del Vulcano conta come lago? Un banchetto di sabbia nel laghetto, come isola? Una pozzanghera sul banco di sabbia è o non è un lago di nuovo ordine? E naturalmente le definizioni possono rincorrersi anche nell'altro senso: alla fin fine, l'Africa può considerarsi un'isola o è impedita nel passaggio dal mero fatto che è anche un continente?



4 *Canada. Un pezzo a caso (circa 700 kmq)*

Se il gioco geografico richiede definizioni precise e irrevocabili, specialmente in certe sorprendenti zone del globo, è anche vero che capita anche che domande molto più dirette e ingenue possano incappare in difficoltà di natura ancora imprevista. Ad esempio, per tornare al nostro gioco a quiz geografico, qual è il terzo lago più grande d'Italia?

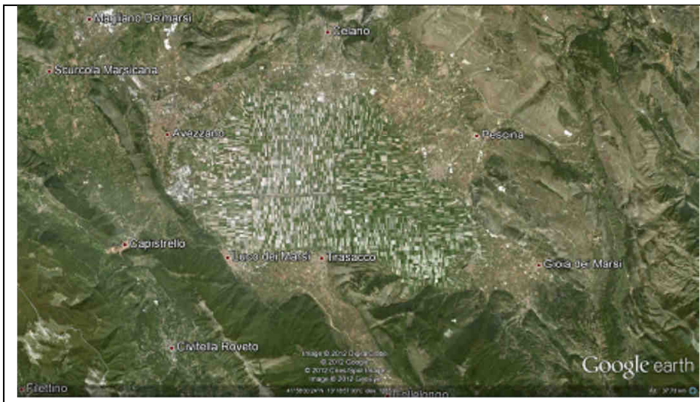
In questo caso, non sembrano esserci tutti gli elementi che rendevano difficile la domanda sulla quarta isola: i laghi italiani non si nascondono, e le prime tre posizioni dovrebbero essere deducibili anche solo da uno sguardo distratto ai laghi alpini. Il Garda è evidentemente il più esteso, ben più dell'Isola d'Elba, tanto per paragonare mele e pere, e il Lago Maggiore è buon secondo; e anche la terza posizione del Lago di Como è

[4] Un terzo dell'Italia, per intenderci.

[5] Non abbiamo intenzione di fare ricerche in merito, ma se volete togliervi la voglia fate un giro su Google Earth dalle parti della Finlandia, o meglio ancora nella zona dei laghi dei Territori del Nord-Ovest canadesi, e incrociate le dita. Noi siamo finiti per caso dalle parti tra il Grande Lago degli Orsi e il Grande lago degli Schiavi (e abbiamo catturato un'immagine a caso, che dovreste trovare in questa pagina) e, pur non avendo alcuna certezza che sia la zona migliore dove cercare, abbiamo invocato pietà a tutti gli dei della Topologia.

chiaramente leggibile[6]. In verità, ciò che rende curiosa questa nuova domanda di geografia non è la difficoltà della risposta, ma piuttosto il fatto che la risposta sarebbe stata diversa meno di due secoli fa.

Un qualsiasi atlante scolastico mostra una regione evidentemente insolita nelle tavole dedicate all'Appennino Abruzzese, ma visto che gli atlanti sono ormai destinati alle proverbiali polverose soffitte, ci appelliamo di nuovo a Google Earth.



5 *La Piana (ex-Lago) del Fucino*

È facile notare che nella zona (semplicemente connessa, direbbe un topologo) compresa tra Avezzano, Luco dei Marsi, Trasacco, Pescina e Celano l'aspetto del territorio è ben diverso da tutto il resto del circondario: la tassellatura fitta e sottile è data dalle coltivazioni agricole, ben suddivise in tanti campi rettangolari. Tutt'intorno ci sono montagne, rocciose e severe; non per niente sono le più alte di tutto l'Appennino: ma è palese che la tessitura fitta dei campi si svolge tutta in una perfetta pianura fortemente antropizzata: la Piana del Fucino. Piana che fino al 1877 non esisteva: al suo posto c'era un grande lago, il Lago Fucino. Don Alessandro Raffaele Torlonia, rampollo d'una famiglia famosa di quelle terre, finanziò la grande opera di prosciugamento nel 1865, e nel giro d'una dozzina d'anni il terzo lago d'Italia scomparve del tutto.

6 *Una vecchia mappa con il Lago Fucino*

Era certo un lago diverso da quelli alpini: privo di veri emissari e immissari, con una profondità assai limitata, era uno specchio d'acqua le cui dimensioni e forma variavano moltissimo in funzione delle precipitazioni stagionali. Ma in ogni caso era un elemento forte e dominante del paesaggio e del territorio, e di fatto determinava e imponeva l'economia e lo stile di vita della zona: il suo prosciugamento fu senza dubbio un cambiamento epocale per le popolazioni del luogo, oltre che, naturalmente, per la flora e la fauna. Cambiò anche il tasso d'umidità medio durante l'anno, e più in generale tutta la nicchia ecologica che al lago faceva capo. Nicchia che aveva anche i suoi problemi, non era un paradiso: del resto, una delle cause maggiori – se non addirittura la principale – che indusse al prosciugamento fu il desiderio di bonificare la zona dalla malaria, che imperava in tutto il territorio.

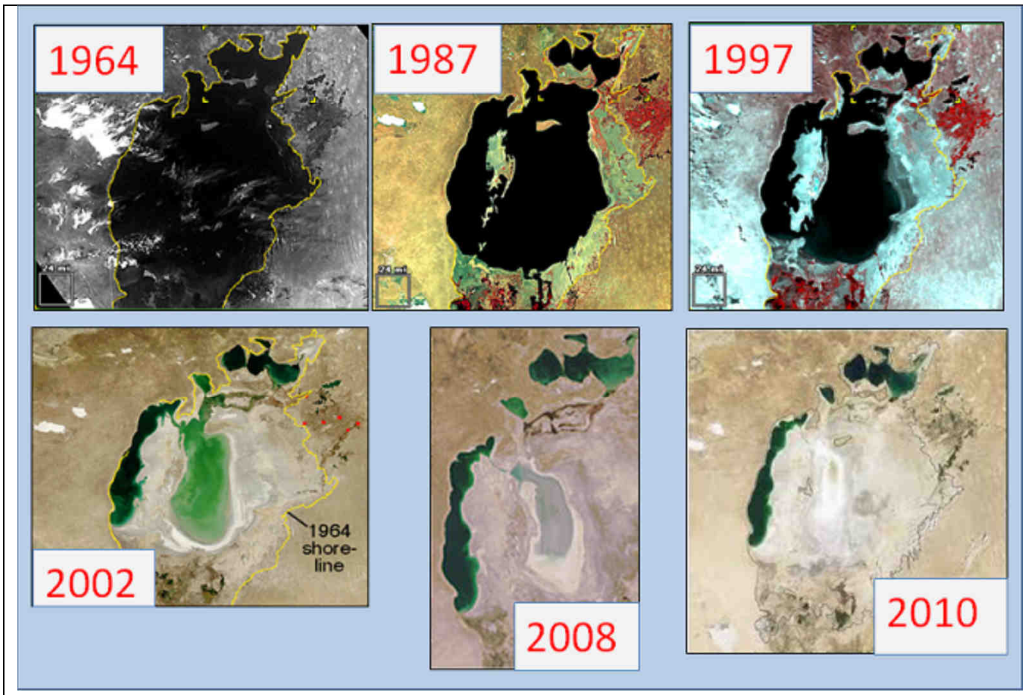
Fu un'opera davvero impegnativa: nella seconda metà dell'Ottocento non si teneva certo conto come oggi delle implicazioni ambientali di un simile stravolgimento dell'ecosistema. E per questo è ancora oggi assai difficile riuscire a dare un giudizio ragionato sull'opera del principe Torlonia: malaria battuta, e un vastissimo territorio rubato alle acque e donato all'agricoltura; probabilmente, dal suo punto di vista e con le possibilità di

[6] Forse fin troppo: la forma allungata lo fa forse sembrare molto più vasto del Trasimeno, e più vasto lo è davvero, ma la differenza (145 kmq contro 128) è probabilmente otticamente sopravvalutata.

previsione e di giudizio dei suoi tempi, il dubbio sulla bontà dell'operazione non era certo in discussione, almeno dal punto di vista morale. L'unico freno erano verosimilmente i costi, che devono essere stati giganteschi, anche per l'epoca.

Con l'etica ecologica e i principi ambientali di oggi, è verosimile che una tale bonifica non avrebbe potuto avere luogo: la rivoluzione del sistema è stata tanta e tale che il progetto non sarebbe stato forse neppure preso in considerazione. Un pezzo d'Italia ha cambiato completamente aspetto e natura, e lo ha fatto in base ai criteri, alle scelte e ai principi etici e sociali di quel tempo: tentare un giudizio a distanza di un secolo e mezzo è vano quasi quanto voler giudicare la storia. E del resto, se ancora resiste la tentazione di voler giudicare gli interventi umani sul pianeta diretti alla modifica diretta dell'ambiente come più o meno ragionati, più o meno sconsiderati, esistono casi ben più eclatanti e recenti verso cui dedicare l'attenzione.

Con i suoi 68.000 chilometri quadrati, il Lago d'Aral era il quarto lago della terra[7].Una superficie d'acqua davvero vasta, e ancor più preziosa, lontana com'è dalle coste del mare.



7 *La scomparsa del Lago d'Aral*

Il tempo imperfetto della frase precedente è necessario, perché adesso il Lago d'Aral quasi non esiste più. Una sconsiderata politica di irrigazione protratta per decenni non ha portato nessuno dei frutti ai quali mirava, ma in compenso ha cancellato uno dei laghi più grandi del mondo dalla faccia della Terra. Al Gore, ex-vicepresidente degli USA e Premio Nobel per la Pace del 2007[8], notoriamente attento ai problemi ambientali, definì il prosciugamento del Lago d'Aral come il maggiore disastro ambientale della storia. Certo è che guardare in sequenza le foto satellitari del bacino è tristissimo e preoccupante: e di sicuro fa passare la voglia di giocare agli indovinelli sulle isole e sui laghi più grandi del mondo.

[7] Come al solito, le classifiche lasciano il tempo che trovano e dipendono grandemente dalle definizioni. Il primo lago è il Mar Caspio (371.000 kmq), che però è salato, e qualcuno preferisce considerarlo un vero e proprio "mare isolato" dagli altri mari e oceani. Al secondo posto si potrebbero candidare il lago Huron e il lago Michigan, che anche se sono noti come laghi diversi sono in realtà un unico bacino lacustre (59.000+58000=117.000 kmq); se invece si vuole continuare a contarli come separati, allora si piazza secondo il Lago Superiore (82.000); segue l'africano Vittoria (69.000), e subito dopo si piazza(va) il nostro Lago d'Aral.

[8] Nonché splendido esempio delle perversioni delle leggi elettorali, essendo stato battuto nella corsa alla Casa Bianca da George W. Bush nel 2000 pur avendo raccolto mezzo milione di voti più dell'avversario.

Dalle foto si vede bene che le une e gli altri sono solo momenti nella storia del pianeta, che è ben lungi dall'essere statico e immutabile: è piuttosto mutabile, mutabilissimo, e quindi tragicamente passibile di perdizione, se lo si tratta male.


8 *Lago? Terra? Isola?*

Il passaggio dal gioco alla meditazione è inevitabile e, come al solito, palesa la forza istruttiva del curiosare. Il mondo è vasto e sorprendente, inconoscibile in tutti i suoi dettagli, ma proprio per questo interessante anche quando uno non ha intenzione di far altro che divertirsi. Il vecchio atlante "metodico e scolastico" che ha generato la prima domanda sulla quarta isola italiana è pronto a sfornarne altre mille, se solo si ha la pazienza di cercare e il coraggio di porre domande. Guardate la Macedonia: la sua capitale, Skopje, dista 300 chilometri dalle coste italiane; da Madrid, a volo d'uccello, bisogna farne almeno 1000 per toccare un pezzo d'Italia. Eppure la Macedonia sembra remota, sconosciuta, e per questo lontanissima: perfino il nome della sua capitale è poco noto ai più. Per contro la Spagna sembra vicinissima, dietro l'angolo, e bisogna far fatica a trovare un italiano che non ci sia stato almeno una volta.

O meglio ancora: quanti non restano davvero stupiti nello scoprire che il continente più vicino alla Sardegna è l'Africa, e non l'Europa continentale? Da Capo Teulada alle coste della Tunisia trovano spazio poco più di 180 chilometri, contro i quasi 230 che dal golfo di Olbia bisogna attraversare per toccare le rive del Lazio. Ma abbiamo l'abitudine di vedere la geografia, e non solo la geografia, un po' a compartimenti stagni, a confondere i confini politici con quelli fisici, e più spesso ancora a non renderci conto che girare la pagina di un atlante significa solo ubbidire ad una convenzione, ad una demarcazione solo virtuale, come lo sono quelle dei capitoli dei libri di storia.

Così il Lago d'Aral sembra davvero lontano e remoto, dall'altra parte del mondo: certo più distante dell'America, per quanto basti una controprova di un secondo sul mappamondo per rendersi conto che la sensazione è sbagliata. La distanza culturale è più profonda di quella geografica: le Americhe sono state invase dagli europei, svuotate della cultura indigena e riempite di quella occidentale; e pur con le mille profonde differenze, le due sponde dell'Atlantico sono ancora di fatto più vicine di quanto lo siano le due regioni divise dal quel confine millenario, sempre diverso ma sempre presente, che divide Oriente e Occidente. Da Alessandro Magno a Marco Polo, da Gengis Khan alle Guerre del Golfo, l'evento cruciale che ha reso celebri questi eventi e questi nomi è il tentativo di superare il confine più resistente e più invisibile della Storia.

Perché della storia dell'Asia Centrale non sa niente nessuno. Nessun occidentale, a parte qualche specialista: l'Afghanistan è salito nella conoscenza media solo nell'ultimo decennio, trent'anni fa era ancora una domanda severissima chiederne la capitale. E delle nazioni, delle regioni vicine non si conosce, ancorché la storia e la geografia, quasi neppure il nome. Il lago d'Aral giace(va) sul confine tra Uzbekistan e Kazakistan: i paesi loro vicini hanno nomi ancora più misteriosi come Turkmenistan, Tagikistan, Kirghizistan. Le capitali sono oggetto di quiz di geografia riservato ai professionisti: se Kabul è ormai fin troppo nota, già l'antica capitale uzbeka di Tashkent è quasi misconosciuta, per non parlare della kazaka Astana[9]. Della turkmena Aşgabat, della tagika Dušanbe e della kirghiza Biškek è proprio meglio non parlare: sono nomi davvero

[9] È probabile che il nome non sia sconosciuto ai tifosi di ciclismo, perché l'Astana Pro Team è una nota squadra di corridori. Ed è una squadra effettivamente kazaka, anche se ospita molti atleti stranieri, soprattutto italiani. È però anche probabile che anche a molti tifosi sfugga il collegamento tra il team e la capitale kazaka.

riconoscibili solo da pochi specialisti. Per contro, è curioso come invece qualche nome accenda gli interruttori della memoria, vagando per le mappe di quelle regioni: Bukhara, ad esempio, famosa per i tappeti; e soprattutto Samarcanda, nome così evocativo che quasi si è stupiti di ritrovarlo su una cartina, e non solo nella letteratura, al pari di Hogwarts e dell'Isola Che Non C'è. Ma in fondo anche questa è una conferma del predominio dei confini culturali su quelli geografici: nomi come Bukhara e Samarcanda vengono collocati in Persia nell'atlante della mente, con buona pace del fatto che la Persia propriamente detta non esiste più: perché la Persia che i neuroni trattengono è quella delle Mille e Una Notte, una Persia antica, ricca e misteriosa, un luogo più letterario che geografico. Ma in verità la Persia dei secoli passati era un'entità assai reale, con un'influenza grandissima in tutte quelle regioni incastrate tra Europa, India e Cina: uno stato che non è certo culturalmente riconducibile entro i confini ristretti all'odierno Iran.

Perché non contano solo le dimensioni degli stati: conta anche la capacità di marcare il territorio e determinare il corso della storia. Per il lungo periodo del Medioevo, l'Europa si è defilata un po' dai grandi eventi continentali: anche se i nostri libri di scuola continuano a raccontarci di scaramucce tra popoli europei semibarbari, tra imperatori e papi dal potere assolutissimo e limitatissimo su scala globale, è indubbio che il centro culturale del mondo si era spostato verso oriente. È facile fare una controprova, basta cercare di ricordare gli eventi storici più importanti tra il 900 e 1000 d.C.: anche gli studenti più volenterosi e diligenti faranno fatica ad estrarre qualche evento realmente significativo. Nonostante il numero fatidico e tondo, i testi registrano per gli anni attorno al Mille solo le campagne espansionistiche degli imperatori tedeschi (gli Ottoni), le prime avvisaglie che nel secolo seguente porteranno allo sconvolgimento sociale, religioso e soprattutto militare delle Crociate, e poco altro. Persino la famosa scadenza millenaristica sembra che non abbia poi avuto tutti gli effetti sconvolgenti che alcuni storici le attribuivano, per la buona e semplice ragione che la maggior parte della popolazione non sapeva neppure tenere bene il conto degli anni, e quando lo faceva di solito non usava ancora la cronologia "Anno Domini" introdotta da Dionigi il Piccolo. Ma altrove il fermento culturale era diverso: e anche l'interesse alla scienza, che in Occidente toccava allora forse il punto più basso della sua storia, era maggiore e più vivo. Proprio nell'impero persiano, magari; o proprio nelle terre vicine al Lago d'Aral, per esempio.


9 *Al Biruni*

Abu Arrayhan Muhammad ibn Ahmad al-Biruni nacque in una cittadina nei pressi di Kath il 15 Settembre 973. La sua data di nascita, che viene fissata al 15 di settembre, soffre in realtà di qualche inevitabile alea: naturalmente in quei luoghi e in quelle terre si seguiva già il calendario islamico, e si sa con ragionevole certezza che al-Biruni è nato nell'ultimo mese dell'anno 362 dall'Egira. Questo si converte nel Settembre 973 AD, e la data del 15 che riportano alcune fonti sta forse solo a sancire, con la sua centralità, che è solo il mese di nascita ad essere certo.

Kath era a quel tempo una delle maggiori città della Corasmia (Khwarazm), regione dal nome che ricorda in maniera sorprendente il nome di Al-Khwarizmi, il matematico da cui discende il termine "algoritmo[10]", e che è appunto terra che si affacciava sul lago d'Aral. Oggi corrispondente alla città di Khiva, in Uzbekistan; e il piccolo centro dove nacque il nostro protagonista si chiama oggi proprio Biruni, in suo onore. A quei tempi la Corasmia era un Principato dell'Impero Sasanide, che aveva la sua capitale a Bukhara: ma erano tempi e luoghi attraversati da molte guerre e molte rivoluzioni. Stati piccoli e grandi erano costantemente in lotta: la nazione caspica Ziaride, con capitale Gurgan; la dinastia Buwayide, che governava tra il

[10] Del resto, tutti i termini matematici che iniziano per "al" giungono da quelle zone: prima fra tutti la parola "algebra".

Caspio e la Mesopotamia; e poi lo stato che faceva capo alla città di Ghazna, nell'odierno Afghanistan. Situazione molto complicata da tenere a mente, ma probabilmente non più complessa di quanto fosse l'Europa nello stesso periodo.

La quasi totale assenza di familiarità con la storia e la geografia di quei tempi e di quei luoghi rende difficile anche immaginare come doveva essere la vita quotidiana di un ragazzo: è difficile collocarlo in uno scenario, difficile proiettare nella mente quello che poteva fare al mattino appena sveglio, o come passasse la mattina e il resto della giornata, non abbiamo molti film hollywoodiani o romanzi occidentali che ci aiutino nella visualizzazione. Sappiamo però che fin da giovane Abu si interessava alla scienza. La prima notizia su di lui racconta che, appena diciassettenne, riuscì a calcolare con buona approssimazione la latitudine di Kath, basandosi sull'osservazione del sole. Con gli strumenti e le tecniche dell'epoca, non deve essere stata impresa da poco.

All'età di ventidue anni era già un erudito che aveva scritto e pubblicato (qualunque cosa possa voler dire "pubblicato", a quei tempi) diversi lavori scientifici, soprattutto di cartografia; e la cartografia è quella strana e complessa scienza che sposa matematica e geografia, e ottiene come prole delle nozze le diverse tipologie di proiezione delle mappe; Al-Biruni, poco più che ventenne, era già un luminare nel campo. Il suo maestro principale era Abu Nasr Mansur, anch'egli geografo e matematico, e principe appartenente alla dinastia regnante.

Ma mentre in Occidente si cominciava il conto alla rovescia per l'anno Mille, nei territori tra la Persia, l'India e la Cina imperversano grandi sommovimenti politici. Alla fine del decimo secolo la Corasmia era oggetto di saccheggi e mire espansionistiche dei vicini, e forse anche per questo Abu partì verso altri lidi: vagabondò a lungo, senza un mecenate che lo aiutasse né alcuna sicurezza economica né politica. Arrivò probabilmente fino a Teheran, e quasi certamente vi trascorse un periodo, tra il 995 e il 997, perché nei suoi scritti parla con dovizia di particolari delle misure derivate dalle osservazioni che lì fece Al-Khujandi, un famoso astronomo che si dedicava soprattutto alla misura dell'obliquità dell'eclittica, utilizzando un sestante particolarmente grande (e di difficile utilizzo, per la sua pesantezza) da lui stesso costruito. Ed è proprio grazie alla descrizione che Al-Biruni riporta di alcuni eventi astronomici che i suoi biografi riescono almeno in parte a ricostruire i suoi spostamenti; l'eclisse del 997 era osservabile da Kath, ed è lecito allora supporre che per quel tempo Abu fosse ritornato in patria, anche perché si legge che si era messo d'accordo con Abu'l Wafa, un altro astronomo, affinché egli la osservasse da Bagdad mentre lui stesso l'avrebbe studiata a Kath, in modo da comparare i risultati da luoghi geograficamente distanti. Una sorta di collaborazione tra spedizioni scientifiche ante-litteram.

Scientifiche, certo: anche se non si può dimenticare che il concetto stesso di scienza era allora ancora immaturo, o quantomeno definito in maniera diversa da quello attuale. A trent'anni, Al-Biruni ha già scritto molto, e i suoi interessi sono vasti almeno quanto la sua mente: ha già nel suo curriculum opere che spaziano dal sistema decimale all'uso dell'astrolabio, ma anche altre, perfino più numerose, sulla storia e sull'astrologia.

Il ritorno in patria coincide quasi con il passaggio del potere dal regnante Ali ibn Mamun a suo fratello Abul Abbas Mamun: e il cambio fu significativo per Al-Biruni: benché entrambi i fratelli regnanti avessero a cuore le arti e le scienze, fu con il secondo che il giovane studioso di Kath trovò la sua collocazione definitiva. Sotto la protezione del re torno a lavorare con il suo antico maestro Abu Nasr Mansur, e insieme ripresero studi sia teorici sia sperimentali, costruendo anche strumenti raffinati per l'osservazione del cielo.

Di nuovo interviene la politica, di nuovo soffiano i venti di guerra. Nel 1017 il sovrano viene rovesciato (e ucciso) dal vicino regno di Ghazna, e Al-Biruni e Abu Mansur finiscono a ritrovarsi nell'orbita del nuovo conquistatore Mahmud: con ogni probabilità, erano veri e propri prigionieri, benché prigionieri privilegiati e studiosi.

Si formò uno strano tipo di rapporto tra il nuovo re e Al-Biruni: da una parte lo scienziato ricevette certo protezione e mezzi di sostentamento da parte della corte, ma è verosimile che la vita fosse tutt'altro che rose e fiori, le fonti parlano di un costante rapporto di forza, spesso più simile a quello tra padrone e schiavo che a quello, venuto di moda diversi secoli dopo in Europa, tra sovrano illuminato e cortigiani intellettuali. Fu chiamato a seguire il sovrano nelle sue campagne militari, e tutto sommato la cosa portò i suoi frutti, perché Al-Biruni ebbe così la possibilità di registrare le sue osservazioni e pubblicare la sua opera forse più famosa, intitolata semplicemente *India*. Era un compendio multidisciplinare su molti aspetti del subcontinente: geografici, storici, culturali, scritto quando la suddivisione della conoscenza in categorie era ben diversa da quella attuale. Non a caso Al-Biruni fu anche un grande traduttore ed interprete: molte opere indiane vennero da lui tradotte in sanscrito, e tra queste una gran parte erano opere di scienza: astronomia, matematica, medicina, pesi e misure, trattate con egual rispetto di quello usato per la traduzione di opere di filosofia, astrologia, religione, grammatica.

Quando il re Mahmud spirò nel 1030, sul trono salì suo figlio Masud: e anche in questo caso il cambio di governo gli giovò. Il nuovo re lo lasciò libero di muoversi, e Abu poteva quindi ormai aspettarsi di trascorrere una vecchiaia ragionevolmente serena. Morì nel 1048, pertanto ormai settantacinquenne, a Ghazna.

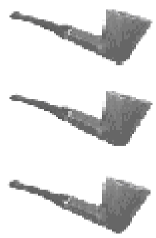
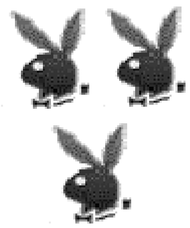
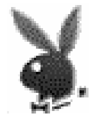

10 Monumento ad Al Biruni, a Teheran

Con uno sguardo moderno, si è tentati di giudicare Abu Al-Biruni come uno studioso non particolarmente creativo. Ed è probabilmente vero, la sua caratteristica principale era la sua vastissima capacità di conoscere: nella sua vita scrisse più di 140 opere, un numero davvero eccezionale e sorprendente, a prescindere dall'epoca e dai luoghi, qualcosa dell'ordine delle tredicimila pagine, su tutti gli argomenti dello scibile. Ciò che lo attraeva principalmente erano quei fenomeni che erano davvero suscettibili di analisi e di dimostrazione: è forse solo questa sua preferenza a renderlo più uno scienziato che un letterato.

Del resto, la differenza tra uomo di lettere e uomo di scienza è differenza tanto sottolineata quanto difficile da definire, al pari del già citato confine culturale tra Oriente e Occidente. E se basta una sola vita per veder sparire laghi grandi come mari e per veder mutare al vibrare del pianeta isole e continenti, c'è ancora speranza perché si possa imparare a veder cambiare anche i più consolidati luoghi comuni. Abu Arrayhan Muhammad ibn Ahmad al-Biruni era senza dubbio un sapiente e un saggio, aggettivi ormai passati perfino di moda.

Ma di sapienti e saggi continuiamo ad aver bisogno tutti.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Vendetta, tremenda vendetta!			
Facciamo pace			

2.1 Vendetta, tremenda vendetta!

Dovete sapere che in altro ambito Alice ha cassato a Rudy due problemi: sul primo potevo anche essere d'accordo, ma il secondo si limitava a *nominarla*, la probabilità, mica a usarla! Quindi, ho deciso che vi rifilo un problema di probabilità doppia e pure al contrario. E ci metto anche tre pipe.

Cominciamo con una cosa che forse non vi avevamo detto: i VadLdRM Alberto e Fred sono, al momento, piuttosto impegnati: il primo sta cercando di passare da brevilaureo a longilaureo, ritentando il test di ingresso mancato (per tre posizioni: la fortuna è cieca, ma la sfortuna ci vede benissimo) l'anno scorso (a Veterinaria: questo ve l'avevamo detto di sicuro), mentre il secondo ha gli esami di riparazione (LatinoGrecoScienze: li scriviamo tutti attaccati così sembrano meno materie, e poi le materie con il nome lungo – tipo "Educazione fisica", per intenderci – sono sempre più facili): quindi, non hanno molto tempo per seguire le regressioni all'infanzia dell'Augusto Genitore, il quale alla minima proposta di gioco viene preso non troppo amabilmente ad abomasi e aoristi in faccia.

Fortunatamente, in questo periodo cadono i compleanni di Mati e Davide[11] che, come al solito, unificano le feste *[Nel 2014 potrebbero non unificare i compleanni… adesso scoprite quando sono nati]*, quindi ci siamo tenuti il giochino (anzi, due) per tenerli buoni durante la festa.

Dicevamo, trattasi di due giochi: Mati ne gioca uno, mentre Davide ne gioca un altro.

Mati ha a disposizione un certo numero N di palline in un sacchetto, originariamente colorate di N colori diversi: il suo gioco consiste nel tirare fuori due palline a caso e colorare la seconda del colore della prima, per poi rimetterle entrambe nel sacchetto; il suo gioco finisce quando tutte le palline del sacchetto sono dello stesso colore.

Davide ha a disposizione M palline in un (altro) sacchetto, originariamente non colorate: il suo gioco consiste nel tirar fuori una pallina a caso e colorarla di un dato colore (gli abbiamo dato solo quel colore lì); il suo gioco finisce quando tutte le palline del sacchetto sono colorate.

M&D vanno avanti a fare una "mossa" l'uno e una "mossa" l'altro, sin quando uno dei due termina il proprio gioco: emozionante quasi quanto un lungometraggio sul gonfiaggio dei gommoni (questa non è mia, è di Deighton). Per aggiungere un po' di *suspence*, però, Rudy ha deciso che (in media) Davide deve perdere se N=80, e vincere se N=81: con numeri di

[11] Cugini di secondo grado con Rudy e di primo grado tra di loro. Un giorno o l'altro in copertina mettiamo l'albero genealogico della famiglia di Rudy: somiglia molto all'insieme di Mandelbrot.

quella dimensione, nessuno si accorgerà se a ogni giro Rudy fa sparire o aggiunge una pallina.

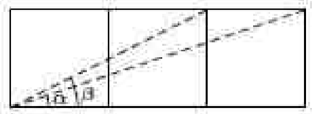
Il guaio è che Davide sta molto attento al suo sacchetto, quindi diventa difficile modificarne il contenuto: sarebbe il caso di avere un certo M che per i due N dati sopra, garantisca (in media) la vittoria o la sconfitta di Davide.

Qualcuno ha un'idea?

2.2 Facciamo pace

Avendo (nel problema precedente) assaporato una secondo lui meritata vendetta, Rudy si sente in buona e in pace con il mondo. E quindi vi fornisce un problema facile, ma con un'interessante caratteristica (che, come al solito, rischia di scatenare aspre polemiche).

Si direbbe ormai chiaro che è una questione di gusti se un problema piace o non piace: il problema che segue, stranamente, è piaciuto a tutti e tre, e avevamo *tre* soluzioni (tutte con lo stesso risultato, fortunatamente): le polemiche, qui, nascono dal fatto che Alice aveva una preferenza per le prime due soluzioni, mentre Rudy optava per la terza (certo: l'aveva trovata lui…): il problema è talmente semplice da raccontare che non ve lo matematizziamo neanche, anzi ve lo scriviamo tutto di seguito: se quelli in figura sono tre quadrati, quanto vale l'angolo $\alpha+\beta$? Tutto qui. Però, quello che ci piacerebbe, è che cercaste di trovare la soluzione di Rudy, magari dopo averne trovato almeno una di quelle di Treccia.



10 *L'oggetto del contendere*

Nel caso vi poneste la cruciale domanda "Ma Doc intanto cosa faceva?", la risposta è semplicissima: si defilava, come sempre quando Rudy e Treccia "discutono".

Svelti, che settembre è corto e questo è facile.

3. Bungee Jumpers

Provate che la media aritmetica di tre numeri non è mai minore della loro media geometrica, e che l'uguaglianza vale solo se i tre numeri sono uguali tra loro.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

A scorrere l'elenco di recensioni che appartengono a questa nevrastenica rubrica, c'è davvero da chiedersi se non sia necessaria una regolazione di fondo del senso del tempo: che so, un cronoprogramma, una specie di modulo Gantt fatto a spanne, una pianificazione quantomeno abborracciata. Perché non è tanto nei titoli dei libri recensiti (tutti splendidi per definizione, essendo essi frutto totale o parziale di grintosi lettori della Prestigiosa Rivista Italiana di Matematica Ricreativa), quanto nei tempi di comparsa, che la schizofrenia sembra imperare.

L'ultima volta che una recensione EuNBeT è comparsa su queste auguste pagine era un torrido Agosto, e fa un po' impressione vedere che questa, successiva e succedanea, è solo in apparenza perfettamente consecutiva, uscendo in Settembre. Perché nel frattempo è cambiato non solo il foglio del calendario, ma il calendario stesso. Da una parte la cosa rassicura ("*Ehi, siamo sopravvissuti ancora un altro anno!*"), dall'altra colpisce un po'; il bello è che, come al solito, per questa specifica rubrica scaricare la colpa è facilissimo: essendo statutario che si possano recensire solo e unicamente libri, articoli, dischi, oggetti che vedono il contributo fattivo di RMers, se la rubrica non esce la colpa è degli RMers, e non della Redazione. Facile, no?

Bisogna anche riconoscere, però, che la Redazione (o per meglio dire il pigrissimo[12] redattore che di questa rubrichetta è indegno responsabile) non è che si sia stracciato le vesti, strappato i capelli o alzato alti e tremebondi lai per l'assenza di lavoro. Al pari di un

[12] Dubbio: non si dirà mica "pigerrimo"? Urge consultare la Crusca…

imboscato succhiastipendio (va bene, di stipendi nemmeno l'ombra, qui in RM, ma il concetto è ugualmente chiaro) egli gongolava per l'indebita vacanza di impegni recensori, e tacendo sottaceva l'assenza di materiale recensibile. Ma il Destino, non sempre cinico e baro, dopotutto, l'ha pugnalato alle spalle per colpa d'un caffè.

Ricorderete, o fedeli lettori, che la sezione maschile della Redazione si è avventurata nel remoto Lazio, a fine primavera, complice una conferenza da tenersi in quel di Latina. E ricorderete, grazie ai flash d'agenzia che Alice si è premurata di compilare, che i due ne hanno approfittato per fare una gitarella nella capitale.

Nella Roma calda e accogliente di Maggio i nostri hanno maneggiato quel che basta per fare un breve pellegrinaggio in via Panisperna, per consumare suole e sudore dalla stazione Termini a viale Colombo, e soprattutto per visitare una redazione vera (tant'è che usiamo per essa la minuscola, che le cose vere non abbisognano di artifici), quella di "Le Scienze". Qui si sono presi saluti e coccole, si sono sentiti importanti e benvoluti, ed è col cuore grosso e gonfio che poi si sono diretti a percorrere in senso inverso il lungo tragitto di ritorno.

Il Destino però, come dicevamo, è intervenuto con la celeberrima ciliegina sulla torta d'una giornata già piacevolissima e proficua, quando si è realizzata la possibilità di scroccare un caffè a una delle più affezionate lettrici di Rudi Mathematici: Francesca Romana (che oltre a leggere RM fa anche altre cosucce, come scrivere romanzi e racconti, collaborare – "*gratis et amore Dei*", come dice il Manzoni – con l'Università di Tor Vergata, studiare l'arabo, leggere un centinaio di libri all'anno e, già che c'è, anche lavorare) ha infatti accolto i due pellegrini giunti dalla Via Francigena. Ha sapientemente avvitato una moka, e intrattenuto in amabile conversazione i tapini prima del serotino ritorno via ferrovia.

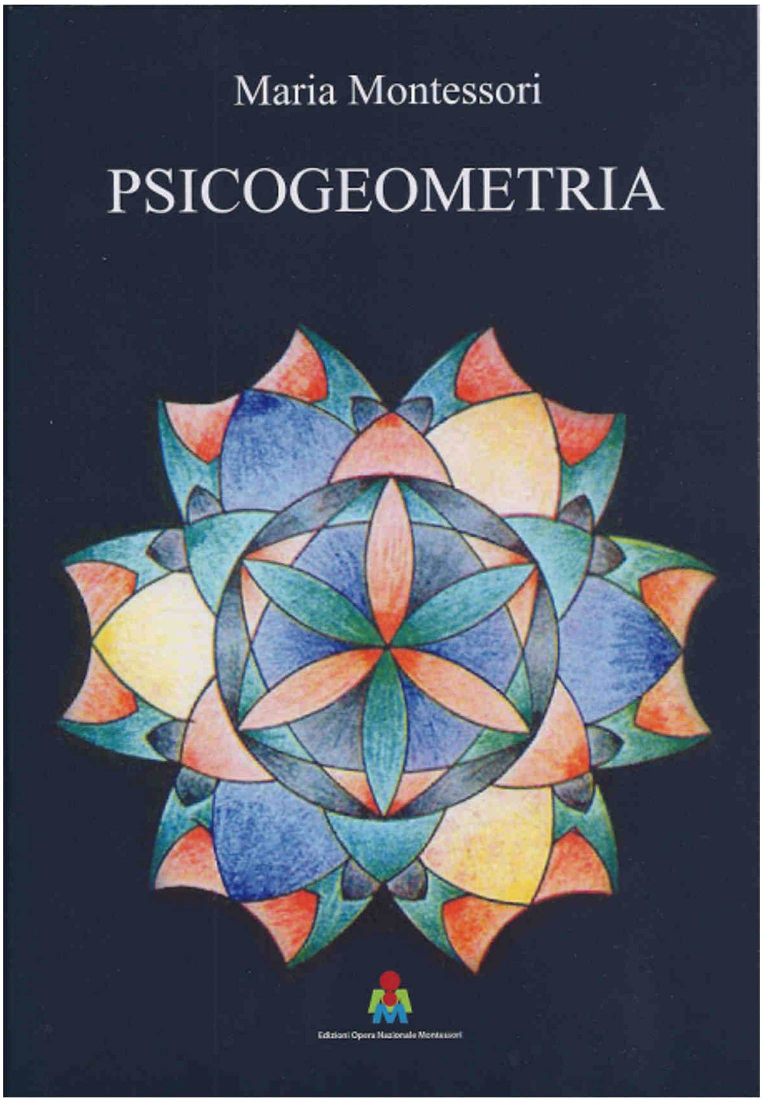
Ed è stato mentre il caffè denso e romano scendeva nelle riarse gole di Rudy e Doc, che FRC (cioè Francesca Romana, imperlappunto) ha estratto, da una delle molte pile di libri che rendono il suo appartamento più simile al colonnato d'un tempio greco che a una casa, il testo che andiamo a recensire: anche perché lei, virginalmente modesta, non lo dava a vedere, ma è stato gioco facile scoprire che ci aveva messo personalmente mano.

E così facendo, oltre che rinfrancare due incauti turisti, ha anche resuscitato questa moribonda rubrica che giaceva in coma da un annetto.

4.1 Psicogeometria

« La definizione
è un passo successivo
a quello del conoscere »

La frase che apre tra virgolette quest'articolo è stata scritta da Maria Montessori, e si trova nel libro *Psicogeometria*, recentemente dato alle stampe proprio dall'Opera Nazionale Montessori. Come il titolo stesso suggerisce, *Psicogeometria* è un testo pensato come parallelo e complementare a *Psicoaritmetica*, ma la sua vita editoriale è stata decisamente più travagliata dell'opera consorella. E tutto sommato anche da oggi in poi procurarsi questo testo non sarà comunque facile come trovare l'ultimo bestseller al supermercato: è disponibile solo sul sito della casa editrice, l'Opera Nazionale Montessori, (www.operanazionalemontessori.it) o direttamente in un paio di librerie romane. Ma la notizia è comunque lieta, se in un'opera che certo non è destinata ai cultori duri e puri della matematica si riescono a ritrovare concetti profondi e rivoluzionari come quello appena citato. Per quanto evidente subito dopo averlo letto, il concetto della definizione "successiva" alla conoscenza ha una sua forza chiaramente dirompente, e perciò sorprendente. Il lettore di libri matematici sa che virtualmente ogni testo di matematica parte dalle definizioni, poste dagli autori come intoccabili fondamenta per le costruzioni concettuali successive, per questo vengono sempre considerate il primo, ineludibile passo del percorso conoscitivo: è il ripetersi di un patto più che millenario tra discente e docente di matematica, tra autore e lettore; è il patto rinnovato che consente la comunicazione secondo le regole condivise della comunità matematica.



Ma la Montessori è un'educatrice, e più che alla sequenzialità logica e formale è interessata a quei processi, comuni ad ogni forma di conoscenza eppure così poco esplorati, che conducono la mente umana a riconoscere – in un modo che si potrebbe dir istintivo – consistenza e verità in determinate esperienze. Solo poi accetterà di procedere verso il primo passo canonicamente scientifico: appunto la definizione. In altri termini, e con pura nonchalance, Maria Montessori indaga su quel che avviene prima di quel patto: e quel che accade è indubbiamente un processo importante, anzi cruciale, per il raggiungimento della conoscenza. I bambini sono i giudici perfetti, in fondo, loro non hanno ancora sottoscritto nessun patto filosofico con nessuno, non hanno vincoli da rispettare: spiegare loro la definizione esatta e formale di "quadrato" non ha alcun senso, per il semplice fatto che non si può spiegare una parola nuova con parole altrettanto nuove. Quindi occorre porre molta attenzione a questa fase primaria della conoscenza, quando più che la precisione formale occorre far germogliare il concetto iniziale, quello che solo puoi potrà essere perfezionato, depurato, sublimato dalle definizioni esatte.

Anche perché il formarsi dei concetti è necessariamente un processo complicato e misterioso: Platone, a bene vedere, vi ha fondato quasi tutta la sua filosofia. Come si forma il concetto di "albero"? Occorre una forte componente di differenziazione, per distinguere l' "albero" dalla "casa", dal "cielo", e dai milioni di altri oggetti concettuali che formano l'universo; ma occorre anche una forte componente di generalizzazione, per poter riconoscere come "albero" sia un melo sia una quercia, sia un salice sia un abete, o addirittura sia un bonsai sia un baobab. I bambini sanno farlo, per fortuna: ma come ci riescono, quando ancora non riescono a padroneggiare neppure il concetto di "definizione"?

Psicogeometria, in tutto il suo sviluppo, conduce il lettore ad interrogarsi su questioni fondamentali e tuttora aperte sui fondamenti della scienza, anche se non è certo questo l'obiettivo dell'autrice: da pedagoga, si preoccupa solo di trovare metodi e strumenti per guidare la comprensione istintiva dei bambini, ed esorta a manipolare, toccare, manovrare forme geometriche di legno e metallo, quasi a voler far permeare i concetti geometrici (per definizione intangibili e platonici) attraverso i polpastrelli. Il lettore che la Montessori immagina non è certo il matematico dilettante o professionista: la sua ambizione essenziale resta quella di scrivere un manuale per insegnare agli insegnanti come trasmettere i rudimenti della geometria euclidea. Ciò nonostante, che la Montessori lo voglia o meno, il libro scatena questioni profonde sui meccanismi primari della conoscenza, su quell'area ai più sconosciuta che è la mente umana prima che la conoscenza stessa venga regolamentata e formalizzata.

E infatti l'autrice si prende anche delle libertà: il termine "mediana" è usato in abbondanza, ma con un significato diverso da quello reale[13]; qualche passaggio mostra qualche imprecisione terminologica, peraltro tutte corrette dall'accuratissimo lavoro del curatore, che non a caso è un matematico.

E, consapevolmente o meno, il libro sorprende anche per una sua certa naturalezza: quale migliore definizione di "linea euclidea", ad esempio, se non proprio quella che sta, visibile ma inesistente, tra due forme di legno poste a contatto? Non è certo una definizione canonica, ma non è uno splendido esempio dell'assenza di spessore richiesto da Euclide?

Forse per questi motivi è stato un matematico ad assumersi il gran lavoro di riportare alla luce l'opera, partendo da un dattiloscritto incompleto e da un'edizione spagnola fortemente imprecisa: e Benedetto Scoppola affronta il lavoro come un esegeta di fronte ad un testo che sa essere prezioso, come si vede dalla certosina precisione delle note, dalla cura e dal riverente rispetto dell'opera che in esse traspare.

A noi non resta che essere grati a chi si è occupato del lavoro grafico: un po' perché non deve essere stato davvero facile, un po' perché se a farlo non fosse stata FRC, che è un'amica di Rudi Mathematici, con ogni probabilità avremmo perduto l'occasione di leggere questo libro.

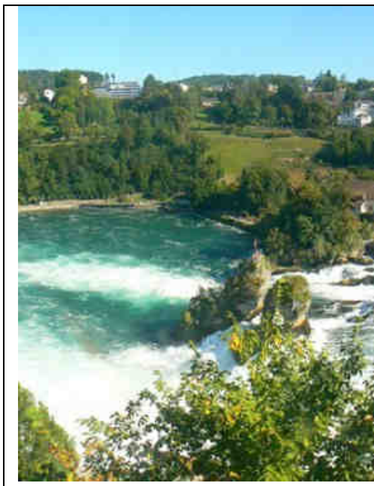
Titolo	Psicogeometria
Sottotitolo	Dattiloscritto Inedito
Autori	Maria Montessori
Editore	Edizioni Opera Nazionale Montessori
Curatore	Benedetto Scoppola
Curatore Grafico	Francesca Romana Capone (FRC)
Data Pubblicazione	Marzo 2012
Prezzo	27 Euro
ISBN	88-88227-36-9
Pagine	VIII+175

[13] Per "mediana" la Montessori sembra intendere il segmento che unisce i due punti medi di due lati d'una figura geometrica e non, più canonicamente, la linea che va da un vertice al punto medio del lato opposto.

5. Soluzioni e Note

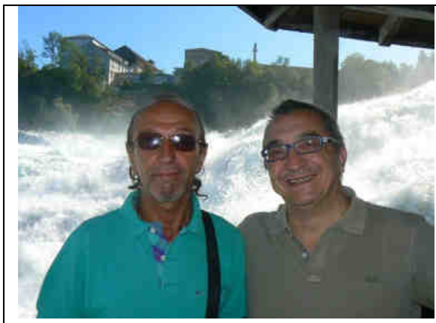
Settembre.

Siamo arrivati fino a qui e ne siamo molto orgogliosi. È essenziale scrivere una cosa del genere, perché ultimamente facciamo molta fatica ad arrivare alla fine di ogni numero, e sono in effetti tempi dalle scarse soddisfazioni, anche non volendo menzionare la ormai onnipresente crisi economica. Ma siamo qui, e questo mese abbiamo un grande evento da raccontarvi in questa parte delle S&N dedicata alle note: il Comitato di Redazione in formato estivo si è infatti riunito come ogni estate in Svizzera, molto è stato deliberato e anche quest'anno si sono prodotti articoli e decisioni.



11 *CdR Svizzero – Le cascate del Reno*

Ma CdR, da che mondo è mondo, significa anche foto redazionali dei protagonisti: ve ne facciamo vedere qualcuna qui, anche se non sono quelle che dimostrano le abilità fotografiche del nostro Postino Tuttofare, visto che è stato alla fine fotografato pure lui.



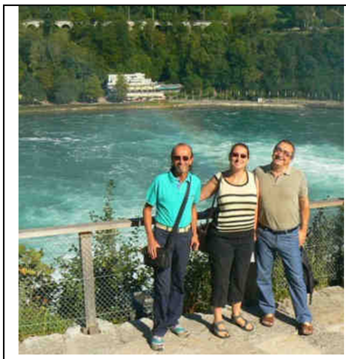
12 *CdR Svizzero – Le cascate vicine*

Sappiate che la prima tappa di questa visita agostana sono state le Cascate del Reno, un posto di una bellezza selvaggia e molto apprezzato da tutti i Redattori. Con la fortuna sfacciata di una giornata caldissima ed assolata, i protagonisti principali, fotogenici o meno, si sono lasciati fotografare da un paparazzo locale anche mentre si avventuravano nel percorso studiato apposta per avere un'impressione del volume dell'acqua.

Non paghi del percorso a lato delle cascate, i nostri eroi si sono anche letteralmente imbarcati in una navigazione del fiume che li ha portati sull'altro lato del fiume, ma anche in mezzo allo stesso.

13 *CdR Svizzero – In mezzo alle cascate*

Dall'acqua il posto da cui si osservavano i flutti prima sembra sospeso ed ancora più vicino alla potenza delle cascate. I Rudi si sono dimostrati anche intrepidi, dispensandosi solo dal tuffo nell'acqua pescosa, ma tentando tutte le gite su acqua proposte dall'ente turistico locale.



14 *CdR Svizzero – La quiete dopo le cascate*

La gita la consigliamo a tutti coloro che passano da queste parti, vi passiamo un paio di siti per informarsi delle varie possibilità: http://www.myswitzerland.com/it/cascate-del-reno.html o http://www.rheinfall.ch/. Io personalmente (Alice) ci sono stata talmente tante volte che dovrei conoscere il posto a memoria, ma ogni volta riesce a stupirmi.


15 *CdR Svizzero – Da Uetliberg*

Non paghi della giornata sul Reno, ci siamo anche impegnati in un minimo di salita verso le colline zurighesi (i locali la chiamano montagna, ma a tutto c'è un limite…) a godersi la vista mozzafiato su Zurigo, il lago e le montagne. La sezione maschile dei Rudi porta fortuna, ed ogni anno il CdR estivo è caratterizzato da un sole meraviglioso e giornate limpide (che ci crediate o no, non appena sono partiti ha cominciato a piovere), per cui le foto sono bellissime, malgrado i brutti soggetti…


16 *CdR Svizzero – Da Uetliberg*

Ed eccoli, i protagonisti, stanchi ma felici, ancora una volta presi da un paparazzo locale che è riuscito a farli ridere quasi tutti...

La stanchezza, anche se non si vede, non è dovuta alla scalata, ma alle ore mattutine spese a discutere soluzioni a problemi, commenti sul blog, progetti di scrittura di nuovi libri e chi più ne ha più ne metta. Il Capo aveva (ma voi lo sapevate già) almeno una decina di progetti in cantiere e articoli già scritti da sottoporci, e come al solito i Nullafacenti Redazionali hanno trovato montagne di scuse per non collaborare. Ma questa è la solita storia, e queste note devono arrivare ad una conclusione.

Quindi la finisco già qui, e passo ai problemi.

5.1 [162]

5.1.1 "eracrec a alesradnA"

Ecco un problema che non stanca mai… Noi continuiamo a dirlo al Capo, che i problemi geometrici sono più divertenti di quella robaccia di probabilità e statistica che propone sempre, ma lui niente… Comunque, il testo ricordava l'analogo problema relativo alla geometria di Mascheroni:

> *Dato un cerchio costruire, con la sola riga:*
>
> *1. La tangente al cerchio passante per un dato punto della circonferenza*
>
> *2. La tangente al cerchio passante per un punto esterno alla circonferenza.*

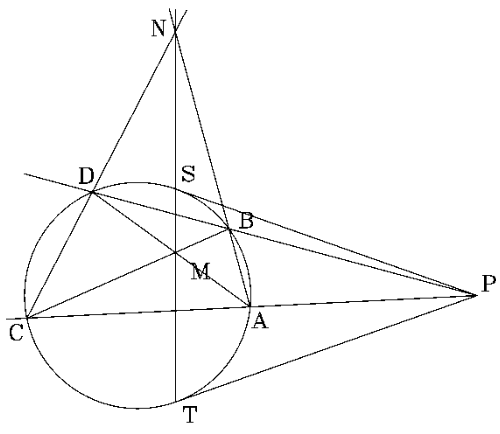
Il Capo, poi, si è dato a grandi manovre ed estensioni, che riportiamo ancora una volta per vedere se qualcuno viene ispirato:

> *Se i due problemi sono ambientati sull'orizzonte degli eventi di un buco nero bidimensionale, non potete avere punti all'interno del cerchio, e tirare una riga che vada da una parte all'altra del cerchio per due punti è impossibile: in questo caso, esiste una costruzione che funzioni?*

E ancora:

> *Con riga & compasso riusciamo a costruire un tot di cose. Con gli assiomi dell'origami riusciamo a costruirne qualcuna in più. Mascheroni dice che tutto quello che fai con riga e compasso lo fai anche con il compasso da solo, e solo con la riga fai ben poco; ma cosa si riesce a fare con Powerpoint? Se uso come assiomi e/o strumenti le funzioni di PPT, che geometria riesco a costruire? È più grande, più piccola o cosa rispetto a quelle di Euclide e dell'origami?*

Il mese scorso avevamo una sola soluzione di ***Alberto R.***, durante agosto ***Tartaruga*** ci ha scritto numerose mail in proposito, fino a raggiungere una conclusione che giustamente lui ha intitolato "alesradnA a eracrec 2 – al attednev", che ora andiamo a riportare:



17 *Figura di* ***Tartaruga***

Soluzione al problema di condurre le tangenti ad una circonferenza da un punto esterno con la sola riga:

- Dal punto P si conducano 2 secanti alla circonferenza, le cui intersezioni con la stessa siano rispettivamente A e C, B e D.
- La retta passante per A e B incrocia la retta passante per C e D nel punto N.
- La retta passante per A e D incrocia la retta passante per B e C nel punto M.
- La retta passante per M ed N incrocia la circonferenza nei punti S e T.
- PS e PT sono le due tangenti alla circonferenza passanti per P.

La costruzione è stata ottenuta combinando un metodo della costruzione della polare trovato in Internet con alcune considerazioni di geometria proiettiva relative a poli e polari di una conica (http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/StraightEdgePolar.shtml). La dimostrazione che MN è la polare rispetto alla conica del punto P (polo) è data nel link succitato.

Per dimostrare invece che PS e PT sono le due tangenti per P, servono due teoremi:

1. La polare di un punto sulla circonferenza è la tangente in quel punto.
2. Se X è un punto sulla polare del punto P, la polare del punto X passa per P.

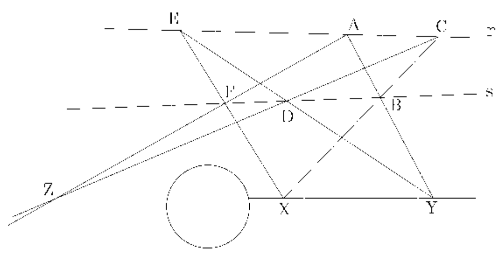
Quindi siccome S e T sono sulla polare di P, le loro polari devono passare per P, ma le polari di S e T sono le tangenti in quanto sono punti sulla circonferenza, quindi le tangenti in S e T passano per P, da cui la tesi.

Modifiche alle costruzioni per gestire il "buco nero"

La costruzione della tangente nel punto sulla circonferenza inviata da Alberto R. e la mia relativa al punto esterno possono essere modificate per gestire la condizione di "buco nero", cioè:

- non sono ammessi punti all'interno del cerchio
- non si possono tracciare linee all'interno del cerchio

Premettiamo alle soluzioni due costruzioni che ci serviranno nelle soluzioni stesse



18 *Figura di* ***Tartaruga***

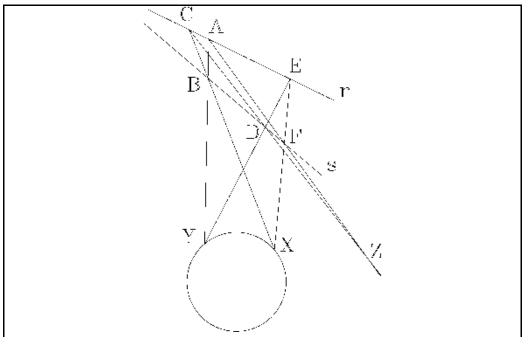
Costruzione 1 – Come proseguire una retta oltre il buco nero

- Prendiamo due punti sulla retta da estendere oltre il buco nero, siano X e Y con X più vicino al buco nero.
- Tracciamo 2 rette a caso, s più vicina a XY e r più lontana, e fissiamo il punto A su r.
- Congiungendo A con Y si individua su s il punto B.
- Congiungendo X con B e prolungando si ottiene su r il punto C.
- Fissiamo il punto D su s e congiungiamolo con C.
- Congiungendo Y con D e prolungando si ottiene su r il punto E.
- Congiungendo X con E si ottiene su S il punto F.

- Prolungando AF e CD questi si incrociano in un punto Z; Z è sulla retta XY.

Questo per il teorema di Pappo nella seguente versione: se un esagono ABCDEF (anche intrecciato) ha i punti A,C,E su una retta e B,D,F su un'altra retta, i punti di incrocio di AB e DE (Y), BC e EF (X) e CD e FA (Z) sono sulla stessa retta (oppure i 3 lati opposti sono paralleli, ma non è il nostro caso).

Ripetendo una seconda volta la costruzione, si può ottenere un altro punto W dallo stesso lato del buco nero rispetto a Z in modo da poter tracciare il segmento ZW e quindi tutta la parte di retta oltre il buco nero.



19 *Figura di* ***Tartaruga***

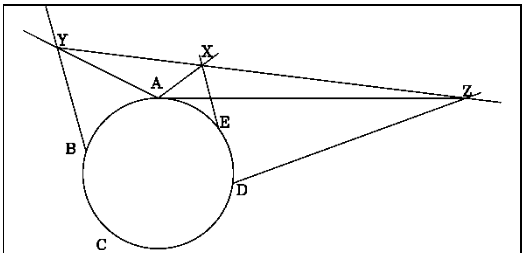
<u>Costruzione 2 – Come tracciare la retta che passa per due punti sulla circonferenza</u>

La costruzione è molto simile alla precedente, anche qui si utilizza il teorema di Pappo.

L'unico problema è che il buco nero è molto più ostacolante, in particolare siccome i segmenti YB e XD devono incrociarsi, a maggior ragione YD e XB non possono essere paralleli, quindi l'arco di cerchio deve essere un po' minore di un angolo piatto, anche perché se no i punti finiscono lontanissimi.

Ovviamente basta invertire la costruzione per costruire la parte di retta dal lato del punto Y.

A questo punto possiamo passare ai due problemi. Non metterò le costruzioni ausiliarie nel disegno perché lo renderebbero illeggibile.



20 *Figura di* ***Tartaruga***

<u>Tangente per un punto sulla circonferenza</u>

A è il punto da cui condurre la tangente.

- Si scelgano a caso i 4 punti B,C,D,E sulla circonferenza.
- Con la costruzione 2, si costruisca la parte di retta CB a partire da B esternamente.
- Con la costruzione 2, si costruisca la parte di retta EA a partire da A esternamente.
- Le due rette di cui sopra si incontrano in Y.
- Con la costruzione 2, si costruisca la parte di retta AB a partire da A esternamente.
- Con la costruzione 2, si costruisca la parte di retta DE a partire da E esternamente.
- Le due rette di cui sopra si incontrano in Y.
- Con la costruzione 2, si costruisca la parte di retta CD a partire da D esternamente.
- Si costruisca la retta passante per X e Y; questa incontrerà la precedente in Z
- Unendo Z con A si ottiene la tangente.

<u>Tangenti da un punto esterno alla circonferenza</u>

Innanzitutto, per evitare di dover trattare quello che nella mia dimostrazione originale era il punto M, per individuare la polare conviene condurre 3 secanti da punto P e individuare la polare utilizzando solo i punti esterni.

Quindi, essendo P il punto esterno da cui condurre la tangente, si procede in questo modo:

- Dal punto P si conducono 3 secanti alla circonferenza, siano A,B,C i 3 punti di intersezione con la circonferenza delle 3 secanti.
- Utilizzando due volte la costruzione 1 a partire da P ed A, si trovano i due punti G ed H sulla retta per P ed A dall'altra parte della circonferenza, il che ci consente di proseguire la retta per P ed A oltre la circonferenza. Sia D l'altro punto di intersezione con la circonferenza.
- Come al punto precedente, utilizzando due volte la costruzione 1 a partire da P e B, si trovano i due punti I e J sulla retta per P ed B dall'altra parte della circonferenza, e ottenere il punto E.
- Come al punto precedente, utilizzando due volte la costruzione 1 a partire da P e C, si trovano i due punti K e L sulla retta per P ed C dall'altra parte della circonferenza, e ottenere il punto F.
- Utilizzando la costruzione 2 su D ed E, si trova il punto M, utilizzandola su A e B si trova il punto N. La retta per D e M incrocia quella per A e N in Q.
- Utilizzando la costruzione 2 su E ed F, si trova il punto R, utilizzandola su B e C si trova il punto S. La retta per F e R incrocia quella per C e S in T.
- Utilizzando due volte una costruzione analoga alla costruzione 2 su Q e T (in quanto i punti non sono sulla circonferenza, ma sono da lati opposti, da qui l'analogia della costruzione) si trovano i punti U e V. Congiungendo Q con U e prolungando si ottiene il punto W sulla circonferenza, congiungendo T con V e prolungando si ottiene il punto X sulla circonferenza.

Congiungendo W e X a P si ottengono le due tangenti per P.

E qui ci sembra che ***Tartaruga*** abbia completato lo studio richiesto dal Capo… ma non si sa mai, lui spera sempre in altri commenti ed aggiunte. Ma andiamo avanti.

5.2 [163]

5.2.1 ...da quale pulpito...

Ecco qui un problema che poteva inventarsi solo il Capo, con regali riciclati e club a cui solo lui può voler essere iscritto. Vediamo un sommario della situazione:

> *Tutti i membri di un circolo posseggono una tessera con il loro numero d'ordine (*1…*N). Il loro gioco di fine d'anno è quello di rifilare agli altri soci alcuni dei regali ricevuti a Natale.*
>
> *Per evitare che un socio A rifili al socio B il regalo ricevuto da B in un anno passato, si è stabilita una regola strettamente matematica "il socio con numero di tessera a può rifilare il regalo al socio con numero di tessera b se e solo se a(b–1) è un multiplo di N". La regola funziona per qualsiasi N?*

Bene, molte risposte. Il primo a farsi vivo è stato ***Br1***, più che altro per lamentarsi che il problema non era chiaro, ma anche per contribuire ai ricordi di gioventù del Capo:

> C'è di certo qualcosa che mi sfugge… Il testo del dilemma in questione parla di *potenziali soluzioni non prima di Natale*, ed il fatto che il ragionamento di seguito esposto sia alquanto semplice mi fa pensare che:
>
> - c'è una falla clamorosa nel seguente ragionamento
> - oppure non ho compreso cosa realmente il problema richiedesse
> - oppure ancora l'esposizione del problema non era delle più brillanti (cosa che escluderei, data la notoria fama dei *Rudi*[14]…)

[14] Questo è ovviamente ironico, i nostri problemi sono *per definizione* scritti male, così che i lettori partano per la tangente con estensioni e nuovi problemi a cui non avevamo nemmeno pensato…

nei primi due casi, la cosa sarebbe dovuta all'avanzare dell'età, che già lo scorso mese mi ha portato a dimenticare il fatto, nel trattare il *problema di Neto & Vigio*, che a parità di lunghezza del contorno è la circonferenza la figura geometrica che abbraccia la maggior superficie…

Comunque, l'età porta anche dei vantaggi, e non mi ha lasciato sprovveduto davanti alla Vs. citazione di Pogo… Ne ricordo bene le strisce sui Linus d'epoca…

21 *Pogo, per i più giovani*

Allora, venendo al *problema*, siano a e b due interi nell'intervallo [1…N], con a diverso da b (si assume che nessun esponente del Circolo faccia mai regali a sé stesso…); la mia interpretazione del quesito è che occorra dimostrare che: *per qualsiasi N, se a(b–1) è un multiplo intero di N, allora b(a–1) non è mai a sua volta multiplo intero di N.*

Se $a(b-1)$ è multiplo intero di N, allora deve esistere un intero K tale che:

1) $a(b-1)=KN$

dove va incluso anche il caso *degenere* b=1, per il quale risulta K=0 (cioè tutti i soci del Circolo possono rifilare le proprie consunte cravatte dell'anno prima al ***Socio Fondatore N°1***…). Dalla 1) si ha:

2) $ab=a+KN$

Si ha allora, utilizzando la 2):

3) $b(a-1)=ab-b=a+KN-b=(a-b)+KN$

Per tutti i casi in cui capita che $a>b$, dalla 3) si vede che $b(a-1)$ è multiplo esatto di **N** se lo è la somma dei termini $(a-b)$ e KN; ma KN è già da sé multiplo di N, quindi anche $(a-b)$ dovrebbe essere tale. Al minimo, $(a-b)=1$ (quando i due soci in questione si sono iscritti consecutivamente), ed al massimo $(a-b)=N-1$ (quando b è il ***Socio Fondatore N°1*** ed a è l'ultimo pivellino iscrittosi al Circolo). Quindi $(a-b)$ è sempre minore di N, per cui non può esserne un multiplo intero…

Se invece $a<b$, la 3) si può riscrivere come segue:

4) $b(a-1)=(a-b)+KN=[N-(b-a)]+(K-1)N$

Adesso, il termine $(K-1)N$ è di nuovo multiplo intero di N, per cui dovrebbe essere tale anche $[N-(b-a)]$ per soddisfare la richiesta del quesito; poiché stavolta è $(b-a)$ a poter variare fra 1 ed $N-1$, il termine $[N-(b-a)]$ varierà anch'esso fra gli stessi valori, e sarà ancora sempre inferiore ad N, e quindi di nuovo indivisibile per tale numero…

Data la semplicità della soluzione, avevo pensato che ad N potesse esser consentito di variare da un anno all'altro, mantenendo però l'impossibilità di donazioni reciproche… Ma questo non capita, e basta un semplice controesempio a dimostrarlo:

- al primo Natale dopo la fondazione del Circolo, sia $N=N_1=3$; il socio a=3 può rifilare la sua cravatta al socio b=2, infatti 3(2–1)=3, che è divisibile per N_1
- l'anno dopo, con eventualmente $N=N_2=4$, b può rendere indietro la cravatta ad a, infatti 2(3–1)=4, divisibile per N_2…

E questo non è niente. ***Alberto R.*** ci scrive:

<u>Prima interpretazione</u>: qualsiasi N nel senso che N può cambiare di anno in anno.

In tal caso il sistema non funziona. Ad esempio: sia 6 il numero della tessera di Aldo, 4 il numero della tessera di Bruno, e 9 il numero totale dei soci. Poiché 6(4–1) è multiplo di 9, Aldo rifila il suo regalo a Bruno. L'anno successivo i soci sono aumentati a 10, quindi Bruno restituisce il regalo ad Aldo perché 4(6–1) è multiplo di 10.

Seconda interpretazione: qualsiasi N nel senso che non sappiamo quanti saranno i soci a fine anno, ma, a Natale, le iscrizioni si chiudono ed N resterà costante per gli anni a venire. In tal caso il sistema funziona, infatti, detto a il numero di tessera di Aldo, b quello di Bruno e N il numero dei soci, perché il regalo possa essere dato e restituito, dovrebbero esistere due interi k e h tali che sia

$a(b–1) = k·N$

$b(a–1) = h·N$

Sottraendo membro a membro

$a – b = (h – k)N$

ma, essendo a b entrambi compresi tra 1 ed N, la loro differenza non può essere multipla di N.

Terza interpretazione: le prime due conducono a problemi che, quanto a difficoltà, non meritano tre pipe ma mezza sigaretta, non tre birre ma una coca cola, non tre conigliette ma una ranocchia. Dunque deve esistere un'altra interpretazione. Ho letto e riletto il testo ma non l'ho trovata. È proprio vero: spesso è più difficile capire la domanda che dare la risposta.

Vi rendete conto? ***Tartaruga*** liquida il problema senza grosse lamentele:

Un semplice esempio con piccoli numeri dimostra che non funziona.

Supponiamo che a Natale dell'anno X i soci siano 10; il socio numero 10 può fare regali a tutti in quanto $10·(b–1)$ è multiplo di 10, quindi in particolare può fare regali al socio 2.

Se a Natale dell'anno X+1 i soci sono diventati 18, il socio 2 può rifilare il regalo ricevuto dall'anno prima al socio 10, in quanto $2·(10–1)=2·9=18$ ovviamente multiplo di 18.

Invece funziona se il numero di soci rimane costante, in quanto $a·(b–1)–b·(a–1) = ab–a–ab+b = b–a$ non può essere multiplo di N, in quanto $b\leq N$, $a\geq 1$, quindi $(b–a)<N$ e non può essere 0 in quanto $b\neq a$; quindi se $a·(b–1)$ è multiplo di N non può esserlo $b·(a–1)$.

Franco57, invece, utilizza una dimostrazione formale:

Finché numero N dei soci non varia, è facile vedere che la regola evita che "*un socio A rifili al socio B il regalo ricevuto da B in un anno passato*".

Scrivendo $a \to b$ la possibilità che il socio B di tessera b possa ricevere dal socio A di tessera a un regalo, vogliamo cioè vedere che è impossibile $b \to a \to b$.

Per definizione $a \to b$ significa $a(b-1) \equiv 0$ in aritmetica $(mod\, N)$, quindi vogliamo vedere che è impossibile $\begin{cases} a(b-1) \equiv 0 \\ b(a-1) \equiv 0 \end{cases}$.

Ma il sistema può essere riscritto come $\begin{cases} a \cdot b \equiv a \\ b \cdot a \equiv b \end{cases}$ che implica $a \equiv b$ e poiché a e b sono nel range $1 \ldots N$ significa $a = b$, il che contraddice il fatto che i due soci abbiano numeri tessere distinti.

D'altra parte se il numero N dei soci è variabile un semplice controesempio mostra che la regola fallisce. Ad esempio a Natale di un certo anno il Club ha 40 soci, quindi il 40 potrebbe fare un regalo al 5 poiché $40 \cdot (5-1) = 160$ è un multiplo di 40.

Ma l'anno successivo ci sono state 15 nuove adesioni, il club è cioè cresciuto fino a $65 (= 5 \cdot 13)$ soci, quindi il 5 potrebbe rifilare al 40 il regalo ricevuto l'anno prima poiché $5 \cdot (40-1) = 5 \cdot 39 = 5 \cdot 3 \cdot 13 = 195$ che è chiaramente un multiplo di 65.

Ho pensato allora che l'intento del quesito potesse essere dimostrare che se il numero *N* dei soci non varia, qualunque sia *N*, nessun socio potrà mai ricevere un regalo fatto ad un altro socio nel passato. Questo è un po' più impegnativo da dimostrare.

Per assurdo $a_1 \to a_2 \cdots \to a_n \to a_1$ con $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tutti distinti nel range $1 \ldots N$, infatti se le frecce non si chiudono mai in circolo, nessun socio potrà ricevere il proprio regalo riciclato, ma se anche c'è un solo circolo ciò è possibile.

Come primo passo dimostro per induzione che $\forall k, 2 \leq k \leq n \quad a_1 \cdot a_k \equiv a_1$, ovviamente sempre $(mod\, N)$.

Caso $k = 2$. $a_1 \to a_2$ significa $a_1 \cdot (a_2 - 1) \equiv 0$, cioè proprio $a_1 \cdot a_2 \equiv a_1$.

Caso $2 < k \leq n$ con l'ipotesi induttiva $a_1 \cdot a_{k-1} \equiv a_1$. Devo provare che $a_1 \cdot a_k \equiv a_1$. Per definizione $a_{k-1} \to a_k$ significa $a_{k-1} \cdot (a_k - 1) \equiv 0$ cioè $a_{k-1} \cdot a_k \equiv a_{k-1}$. Moltiplicando entrambi i membri dell'ipotesi induttiva per a_k e l'ultima equivalenza per a_1 ottengo

$$\begin{cases} a_1 \cdot a_{k-1} \cdot a_k \equiv a_1 \cdot a_k \\ a_{k-1} \cdot a_k \cdot a_1 \equiv a_{k-1} \cdot a_1 \end{cases} \Rightarrow a_1 \cdot a_k \equiv a_{k-1} \cdot a_1 .$$

e usando ancora l'ipotesi induttiva ho $a_1 \cdot a_k \equiv a_1$.

In particolare ho $a_1 \cdot a_n \equiv a_1$. Questa, abbinata all'ultima relazione rimasta da usare, cioè $a_n \to a_1$, che equivale ad $a_n \cdot a_1 \equiv a_n$, mi fornisce l'assurdo cercato: $a_n \equiv a_1$, situazione impossibile perché per ipotesi $a_n \neq a_1$ ed entrambi sono nel range $1 \ldots N$.

La proposizione è provata.

Chissà se il Capo avrà la bontà di spiegare il motivo delle sue pipe? Per quanto mi riguarda, avrei bisogno di ben più di tre birre per interessarmi a un problema così ben spiegato… ed ora basta, vediamo anche gli altri problemi…

5.2.2 Il trucco di Martin Gardner

Sto andando un po' troppo lentamente, farò meglio a sbrigarmi, o arriviamo di nuovo tardi alla pubblicazione. Ecco il testo ispirato ad un vecchio scherzo Gardneriano:

> *Il Capo lancia due monete abbastanza spesse da dare probabilità ragionevoli anche restare in bilico sul bordo: la più grande ha un diametro di 49 millimetri, e lanciandola sin quando non otteneva almeno una volta testa, almeno una volta croce e almeno una volta bordo, in media occorre tirare otto volte la moneta per ottenere una serie in cui siano rappresentati tutti i valori.*
>
> *Con la moneta più piccola (che ha lo stesso spessore di quella grande, ma diametro diverso) per ottenere lo stesso risultato di cui sopra servono lo stesso numero di lanci. Quanto è grande e quanto è spessa la moneta più piccola?*

Due soluzioni qui, cominciando da ***Tartaruga***, che questo mese non ne ha mancata una:

Ipotizziamo che per monete abbastanza spesse, la caduta su faccia o su bordo sia determinata dall'angolo di arrivo sulla superficie.

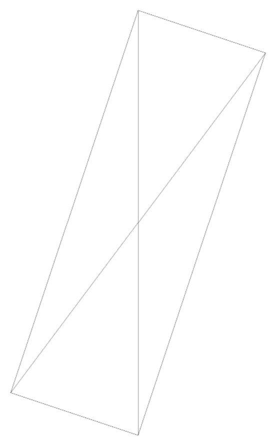
Nello schema, abbiamo la moneta rappresentata di taglio. Il baricentro è individuato dalle due diagonali.

Qui è rappresentato l'angolo di arrivo critico, in cui la moneta in teoria rimarrebbe incerta se cadere di faccia o di taglio, in pratica cade da uno dei due lati.

Possiamo ipotizzare che se l'inclinazione rispetto alla verticale è inferiore all'angolo critico, la moneta cada sul bordo, se è superiore, cada di taglio.

L'angolo critico α è pari ad $\arctan(S/D)$, dove S è lo spessore e D il diametro della moneta.

La moneta cadrà quindi di taglio con probabilità pari a $\alpha/(\pi/2)$, cioè $2\alpha/\pi$.



22 *Moneta di taglio di* ***Tartaruga***

Consideriamo ora la moneta di diametro maggiore. L'evento caduta di taglio deve essere il meno probabile, quindi verificarsi 1 volta su 8 in base ai dati.

Abbiamo quindi $2\alpha/\pi = 1/8$, cioè $\alpha=\pi/16$. Quindi $S/D = \tan(\alpha) = 0.198912$, da cui, essendo D=49mm S= 9.746706mm.

Invece, nel caso della moneta di diametro minore, l'evento caduta di taglio deve essere il più probabile, quindi in media su 8 volte avrò una volta testa, una volta croce e 6 volte taglio. Quindi $2\alpha/\pi = 6/8 = 3/4$, cioè $\alpha=3\pi/8$. Quindi $S/D = \tan(\alpha) = 2.414214$, da cui, essendo S=9.746706mm, D = 4.037218mm.

Mi chiedo dove abbiate trovato una moneta di 4 mm di diametro spessa quasi 10 mm…

Naturalmente da confrontare con quello che ha ottenuto il grandissimo ***Franco57***:

Indicando con $p_1,\dots,p_k$ le probabilità di k possibili eventi disgiunti ma non necessariamente esaustivi, che possono verificarsi ad ogni ripetizione – nel nostro caso *Testa*, *Croce* e *Bordo* – si può impostare una formula ricorsiva per calcolare in media dopo quante ripetizioni si verificano tutti quanti almeno una volta.

Chiamo questo valore $L(p_1,\dots,p_k)$. Se k è positivo, dopo una ripetizione, con probabilità $1-(p_1+\dots+p_k)$, nessuno dei k eventi si verifica e perciò in media dobbiamo aspettare ancora $L(p_1,\dots,p_k)$ ripetizioni; se invece si verifica l'i-esimo evento di probabilità p_i, abbiamo ancora da aspettare in media $L(p_1,\dots,p_{i-1},p_{i+1},\dots,p_{n,})$ dove cioè rispetto a $L(p_1,\dots,p_k)$ abbiamo tolto p_i dalla lista dei parametri. In formule:

$$\begin{cases} L(p_1,\dots,p_k) = 1 + (1-(p_1+\dots+p_k))\cdot L(p_1,\dots,p_k) + \sum\limits_{i=1,\dots,n} p_i \cdot L(p_1,\dots,p_{i-1},p_{i+1},\dots,p_n) \\ L(\ ) = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} L(p_1,\dots,p_k) = \dfrac{1}{p_1+\dots+p_k} + \sum\limits_{i=1,\dots,n} \dfrac{p_i}{p_1+\dots+p_k} \cdot L(p_1,\dots,p_{i-1},p_{i+1},\dots,p_n) \\ L(\ ) = 0 \end{cases}$$

Quindi $L(p) = \dfrac{1}{p} + p\cdot L(\ ) = \dfrac{1}{p}$, cioè ad esempio si aspettano in media 6 lanci di un dato per ottenere una certa faccia.

Per due eventi abbiamo: $L(p,q)=\frac{1}{p+q}+p\cdot L(q)+q\cdot L(p)=\frac{1}{p+q}+\frac{p}{q}+\frac{q}{p}=\frac{p+q}{p\cdot q}-\frac{1}{p+q}$.

A noi serve calcolare quando $L(t,c,b)$ vale 8, dove t, c e b sono rispettivamente le probabilità di fare *Testa*, *Croce* e *Bordo*. Da $t+c+b=1$ e dalla supposizione che la moneta non sia truccata ricavo $t=c=\frac{1-b}{2}$. Applico la formula ricorsiva e le altre ricavate:

$$L(t,c,b)=L\left(\frac{1-b}{2},\frac{1-b}{2},b\right)=1+2\cdot\frac{1-b}{2}\cdot L\left(b,\frac{1-b}{2}\right)+b\cdot L\left(\frac{1-b}{2},\frac{1-b}{2}\right)=$$

$$=1+2\cdot\frac{1-b}{2}\cdot\left(\frac{b+\frac{1-b}{2}}{b\cdot\frac{1-b}{2}}-\frac{1}{b+\frac{1-b}{2}}\right)+b\cdot\left(\frac{2\cdot\frac{1-b}{2}}{\left(\frac{1-b}{2}\right)^2}-\frac{1}{2\cdot\frac{1-b}{2}}\right)=\ldots=1+\frac{6\cdot b^2-b+1}{b-b^3}$$

Perciò $L(t,c,b)=8$ diventa $1+\frac{6\cdot b^2-b+1}{b-b^3}=8$, cioè $7\cdot b^3+6\cdot b^2-8\cdot b+1=0$ che per fortuna ha la radice razionale $b=\frac{1}{7}$ (temevo già di dover ricorrere alle terribili formule per le cubiche). Dividendo il polinomio per $7\cdot\left(b-\frac{1}{7}\right)=7\cdot b-1$ ottengo b^2+b-1, che dà le altre due radici reali $b=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, di cui è ammissibile solo quella col segno +, perché l'altra non è tra 0 e 1. Credo casualmente, vale proprio φ, il rapporto aureo.

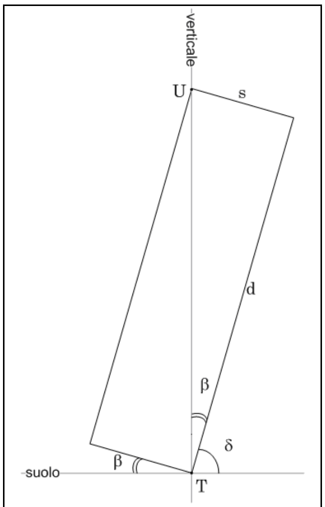
Insomma i valori di probabilità per l'evento *Bordo* sono: $b=\frac{1}{7}$ e $b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\varphi$.

La probabilità che la nostra moneta cicciotta idealizzata ad un cilindro, possa rimanere sul bordo dipende naturalmente solo dalla sua forma, cioè dal rapporto tra il diametro d e lo spessore s.

La dinamica di una moneta che cade al suolo è molto complessa, ma ai fini del calcolo possiamo supporre che tocchi il suolo in una posizione qualsiasi e sia priva di rotazione: la probabilità dei tre eventi dovrebbe essere la stessa.

Dunque si troverà poggiata al suolo in un punto T appartenente ad una delle due circonferenze che delimitano la *Testa* o la *Croce*.

Nella figura ho rappresentato la moneta di profilo in bilico nella posizione limite in cui il baricentro, che sta nel mezzo tra T e il suo opposto U, è esattamente sulla verticale (sarebbe un quarto possibile evento di probabilità nulla).



23 *Moneta in bilico di* ***Franco57***

Se la moneta pende più a destra darà *Testa* oppure *Croce*, ma se pende più a sinistra il risultato del lancio sarà *Bordo*. Quindi β e δ danno i valori relativi di probabilità rispettivamente che la moneta rimanga sul bordo o no.

Poiché $\beta+\delta=\frac{\pi}{2}$ abbiamo $b=\frac{\beta}{\pi/2}=\frac{2}{\pi}\cdot arctg\left(\frac{s}{d}\right)$, da cui l'inversa $s=d\cdot tan\left(\frac{\pi}{2}\cdot b\right)$

La moneta più grande ha diametro $d_1=49mm$ ed ha probabilità b_1 di dare *Bordo*, mentre la più piccola ha diametro d_2 e probabilità b_2. Essendo d è al denominatore e *arctg* una funzione crescente, si ha $b_1<b_2$ e quindi l'attribuzione delle probabilità calcolate è $b_1=\frac{1}{7}$ e $b_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\varphi$.

Ricavo facilmente lo spessore $s=d_1\cdot tan\left(\frac{\pi}{2}\cdot b_1\right)=11{,}183930\ldots\text{mm}$ e il diametro della "moneta" più piccola $d_2=\frac{s}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\cdot b_2\right)}=49\cdot\frac{\tan\left(\frac{\pi}{14}\right)}{\tan\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\pi\right)}=7{,}651187\ldots mm$ che, come ci si poteva aspettare, è più spessa che larga.

Il gioco per il prossimo mese è di scoprire la differenza tra le due soluzioni e risultati. Forza, che c'è ancora un problema del mese scorso.

5.2.3 Il "solito" tre per due

Indipendentemente da quanto tempo ci abbia messo il Capo la volta scorsa ad arrivare al punto, il problema è assolutamente breve:

In che base 221 *è un fattore di* 1215*?*

E moderatamente brevi le soluzioni. Per prima cosa diamo il benvenuto tra i solutori a ***Mathpower***, e ne presentiamo la soluzione:

Presentiamo il problema a modo della divisione di due polinomi, in attesa

che sostituendo b che è la base, il quoziente sia un numero intero:

$$\frac{1b^3+2b^2+1b^1+5b^0}{2b^2+2b^1+1b^0}=\frac{b^3+2b^2+b+5}{2b^2+2b+1}$$

Scartiamo base 2, 3, 4 e 5 perché il numero 1215 ha il digito 5, cioè può essere in base ≥6!

Prova base-6: $\frac{6^3+2\cdot6^2+6+5}{2\cdot6^2+2\cdot6+1}=\frac{299}{85}$

Prova base-7: $\frac{7^3+2\cdot7^2+7+5}{2\cdot7^2+2\cdot7+1}=\frac{453}{113}$

Prova base-8: $\frac{8^3+2\cdot8^2+8+5}{2\cdot8^2+2\cdot8+1}=\frac{653}{145}$

Prova base-9: $\frac{9^3+2\cdot9^2+9+5}{2\cdot9^2+2\cdot9+1}=5$

GIOCO FATTO > BINGO!

Per concludere, pubblichiamo la soluzione di ***Tartaruga***:

Sia x la base. 221 è un fattore di 1215 vuol dire che $2x^2+2x+1$ divide x^3+2x^2+x+5. Effettuiamo la divisione del polinomio x^3+2x^2+x+5 per il polinomio $2x^2+2x+1$. Risulta:

$(x^3 + 2x^2 + x +5) / (2x^2 + 2x + 1) = 1/2\ x + 1/2$ con resto $-1/2\ x + 9/2$

Il resto è zero solo se x=9, e $(1/2\ x + 1/2)=5$, quindi la base cercata è 9. Infatti, utilizzando il pedice per definire la base, $221_9 = 181_{10}$, $1215_9 = 905_{10}$, e in base 10 vale $905 = 5\cdot181$.

Passiamo al lavoro da chef:

Esistono numeri per cui la cosa è valida in più basi?

Un esempio banale è 440/22, che vale 20 in qualsiasi base maggiore di 4. Basta scegliere due numeri in modo che trasformandoli in polinomi il dividendo sia multiplo del divisore, e la cosa sarà valida in tutte le basi maggiori del massimo coefficiente.

È anche possibile fare in modo che sia valido solo in un numero finito di basi, considerando come divisore un numero di almeno 4 cifre, che corrisponde a un polinomio di grado almeno 3, in modo che il resto abbia grado almeno 2. Non sono riuscito a trovare esempi.

Esistono numeri per cui la cosa non vale in nessuna base?

Ne esistono infiniti. Un esempio è 33/22.

Esiste un modo per costruire i numeri per cui funziona in una base sola?

I numeri vanno scelti in modo che i polinomi associati abbiano un resto multiplo di (x–base). Non ho scoperto un metodo semplice per farlo.

Con due numeri qualunque, ho sempre almeno una soluzione?

Abbiamo già visto che 33/22 non ha soluzione.

Bene, con questo è tutto. Se avete altro da dire, scriveteci. Alla prossima!

6. Quick & Dirty

Se incontrate due compagni di corso scelti a caso di Alberto (il figlio di Rudy), c'è il 50% di probabilità che siano due ragazze. Qual è la vostra stima sul numero di ragazze nella classe di Alberto?

Se ci sono n persone di cui b ragazze, allora la probabilità di scegliere a caso due ragazze vale $[b(b-1)]/[n(n-1)]$. *E sappiamo che questo valore deve essere pari a* 0.5 con b e n interi *(vogliamo sperare accettiate questo presupposto senza discutere: non stiamo parlando del corso di Anatomia). I valori minimi sono* 4 *persone di cui* 3 *ragazze. I valori successivi (più probabili, visto che si tratta di un corso universitario) sono* n=21 *e* b=15.

7. Zugzwang!

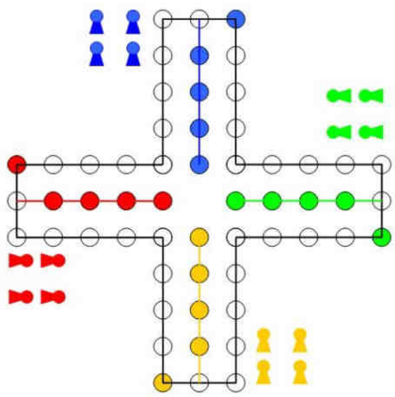
Abbiamo un dubbio: supponete di avere due giochi e di doverli spiegare. È meglio spiegare, per amore dei ludofili, prima quello complicato e lasciare in nota quello semplice, o (per amore delle *persone normali*) spiegare prima quello semplice e poi fornire la complicazione? Siccome prima chiedervelo e aspettare le vostre risposte fa a tempo ad arrivare con le Ferrovie dello Stato l'asteroide previsto per dicembre, procediamo nel modo che ci sembra più sensato; eventualmente, fateci sapere in mail se non siete d'accordo.

7.1 Ludo

Partiamo da quello più semplice, che già qui è un gordiano.

Per quanto riguarda i ***giocatori***, preparate alla bisogna da due a quattro persone (voi inclusi); considerate che come ***scacchiera***, vi serve l'obbrobrio indicato in figura: per fortuna si risparmia sulle ***pedine***, ve ne bastano sedici: piccolo problema, devono essere di quattro colori diversi. Inoltre, vi serve anche un ***dado*** (a sei facce, per ora ci teniamo sul facile).

La ***posizione iniziale*** prevede che ogni giocatore metta una pedina sulla casella di colore equivalente sul percorso a croce (quella che sta da sola: le altre servono ad altro); ad ogni ***turno***, il giocatore lancia il dado e fa avanzare una delle sue pedine in senso orario lungo il percorso. ***Caso particolare***, se fate sei con il dado avete il diritto di mettere nella vostra casella di partenza una nuova pedina (per questo, poco sopra, dicevamo "una delle sue pedine": potete averne più di una in gioco) e tirate nuovamente il dado, se non avete più pedine da mettere in gioco o se la vostra casa di partenza è occupata, muovete una vostra pedina di sei caselle e tirate nuovamente il dado.



24 *La scacchiera da* **Ludo***: e considerate che questo è facile.*

La ***presa*** è molto semplice: dovete, con un tiro, finire sopra una pedina avversaria. In questo caso, la prendete e il giocatore di quel colore la rimette tra le proprie pedine fuori dal gioco (no, non ve la tenete, quella pedina dovrà ricominciare da capo), se "passate sopra" una pedina avversaria e continuate, non succede niente.

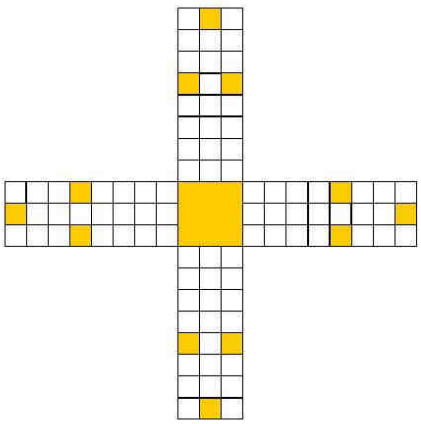
Scopo del gioco è, per ogni giocatore, tanto per cominciare fare un giro completo: arrivato alla casella bianca precedente la vostra casella di partenza, girate a destra e continuate la mossa lungo le caselle del vostro colore. ***Vince*** il primo giocatore che riesce a posizionare tutte le proprie pedine sul "castello" del proprio colore: attenzione che il posizionamento deve essere esatto, non potete "rimbalzare" sul fondo o finire su una casella occupata. Se con il dado ottenete un punteggio che non potete utilizzare, saltate il turno (sempre valida la regola del sei).

7.2 Pachisi

Adesso arrivano le complicazioni.

Siete sempre in quattro, ma questa volta giocate a coppie, e il compagno è quello che sta davanti.

Procuratevi sei cauri[15], da usare al posto del dado: quando si tirano, si contano le aperture visibili e si avanza di un ugual numero di caselle, ma attenzione che se fate 1 vale 10 e se fate 0 vale 25: se ottenete 6, 10 o 25 muovete e poi lanciate di nuovo, e se riottenete uno di questi valori rilanciate ancora e avanti.



25 *La complicazione del* **Pachisi**.

La scacchiera (o meglio, il tavoliere) è leggermente diverso, e lo vedete in figura: ogni giocatore siede ad un'estremità di un braccio della croce con i suoi pezzi nel quadratone centrale, e i primi movimenti di una sua pedina sono verso di lui, procedendo poi in senso *antiorario*. Finito il giro (vi spieghiamo dopo come finirlo, interessanti complicazioni, anche qui) tornano al centro e vengono ribaltate per ricordarsi che hanno terminato il gioco; se lo ritiene opportuno un giocatore può anche non ribaltare la pedina e ricominciare il giro (francamente, non ne vediamo il motivo, tranne forse che il nostro compagno è clamorosamente indietro e non vogliamo stare lì ad annoiarci).

[15] Sei cauri, un cauri: conchiglia del genere Ciprea (*Cypraea moneta*), caratterizzata dall'avere una faccia dotata di apertura e l'altra no.

La presa si effettua come sopra (arrivando sulla pedina e facendola tornare alla partenza), e chi prende ha il diritto di rilanciare, indipendentemente dal risultato: in pratica, se avevate diritto a ulteriori tiri da lanci precedenti avete diritto ad un tiro in più; al contrario dei supermercati, qui offerte speciali e sconti sono cumulabili.

Le caselle gialle (dette *castelli*) rendono le pedine invulnerabili: se tirando dovreste finire su un castello dove c'è una pedina avversaria, non muovete quella pedina (liberi di muoverne un'altra delle vostre sulla scacchiera, chiaro); se una pedina in un punto qualsiasi del percorso è raggiunta da una pedina amica (vostra o del vostro compagno), possono aggregarsi e procedere assieme; per essere mangiati, questi gruppi devono essere raggiunti da un numero maggiore o uguale di pedine.

La prima pedina a uscire di un giocatore può uscire con qualsiasi risultato eccedente il necessario (quindi non serve fare il risultato "giusto"), mentre le successive devono obbligatoriamente uscire con un 6, un 10 o un 25.

Una regola molto interessante è che *non avete l'obbligo di muovere*: a vostro insindacabile giudizio, potete scegliere di non tirare il dado o, tirato il dado, di non usare il risultato.

Vince *la coppia* che fa completare per prima il percorso a tutte le proprie pedine.

Torniamo ad entrambi i giochi: evidentemente, modificando opportunamente le simmetrie delle scacchiere, potete giocarli con un numero qualsiasi di partecipanti (incredibile, giocati in due, quanto poco somiglino all'*Awele*[16]); nel "Ludo" va bene qualsiasi numero strettamente maggiore di uno, mentre nel "Pachisi" dovete essere in numero pari.

Ora, noi siamo piuttosto lenti di comprendonio, quindi probabilmente ci faremmo un paio di giri a "Ludo" per poi passare al "Pachisi" e cominciare a divertirci: voi cosa ne dite?

8. Pagina 46

Va mostrato che:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc},$$

ossia che:

$$a+b+c-3\sqrt[3]{abc} \geq 0.$$

Per semplicità, lavoriamo con l'espressione $a^3+b^3+c^3-3abc$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
a^3+b^3+c^3-3abc &= a^3+3ab(a+b)+b^3+c^3-3abc-3ab(a+b)= \\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3-3ab(c+a+b)= \\
&= (a+b)^3+c^2-3ab(a+b+c)= \\
&= [(a+b)+c]\left[(a+b)^2-(a+b)c+c^2\right]-3ab(a+b+c)= \\
&= (a+b+c)\left[(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab\right]= \\
&= (a+b+c)\left(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab\right)= \\
&= (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)= \\
&= \frac{1}{2}(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2+a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc\right)= \\
&= \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right].
\end{aligned}$$

[16] Descritto nello *Zugzwang!* di RM073.

Applicando questa eguaglianza alla nostra espressione, abbiamo:

$$a+b+c-3\sqrt[3]{abc}=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2+\left(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}\right)^2+\left(\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{a}\right)^2\right]\geq 0.$$

Il segno di eguaglianza vale solo se le tre espressioni:

$$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b},$$
$$\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c},$$
$$\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{a},$$

sono contemporaneamente pari a zero. Ma questo vale solo se $a=b=c$.

9. Paraphernalia Mathematica

9.1 Il più bello di tutti

Almeno, così dicono quelli che ne parlano.

Premessa (palese caso di *excusatio non petita*): diremo un mucchio di cose delle quali abbiamo già parlato, sia in questa rubrica sia, in modo più strutturato, in *Rudi Simmetrie*; nostra intenzione, qui, è arrivare a capire un ben preciso oggetto, appunto quello che il nostro mentore considera "il più bello di tutti", a voi la decisione se abbia ragione o no.

Esistono solo cinque solidi regolari nello spazio che conosciamo: la più bella dimostrazione di questo fatto dovreste conoscerla tutti[17], ed è basata sul fatto che se mettete in un vertice più di 5 triangoli equilateri, o più di 4 quadrati o più di 3 pentagoni non potete "chiudere" la figura, in quanto ottenete un angolo giro (o peggio, con i pentagoni): una dimostrazione sicuramente meno elegante ma con alcune interessanti caratteristiche si basa su alcuni concetti piuttosto balordi.

Se siete andati a rivedervi il PM di RM082 (non fatemi citare il titolo che mi manca il carattere, in questo font), vi siete accorti che Teeteto aveva fatto un mucchio di calcoli relativamente al rapporto tra lo spigolo del solido e il raggio della sfera circoscritta (vi avevamo dato i valori senza calcolarli): la formula, che si generalizza alle dimensioni superiori (questa è la prima interessante caratteristica) mostra che il valore è correlato non solo al numero p di lati della faccia del nostro poliedro, ma anche alla cosiddetta ***figura dei vertici***, ossia al poligono i cui vertici sono i "vicini" di un vertice dato.

Se indichiamo con $R(\Pi)$ il rapporto tra lo spigolo del poliedro Π e il raggio della sfera e con Π' la figura dei vertici, se ogni faccia di Π è un p-agono si ha la formula (…e qui, secondo noi, sta tutta la "minor eleganza" di questa dimostrazione):

$$R^2(\Pi) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{p}}{R^2(\Pi')}.$$

Un attimo, prima di scappare, deve essere:

$$1 > \frac{\cos \frac{\pi}{p}}{R(\Pi')},$$

E, se Π' è un q-agono regolare, allora avremo:

$$R(\Pi') = \sin \frac{\pi}{q},$$

E il tutto si riduce alla condizione:

$$\cos \frac{\pi}{p} < \sin \frac{\pi}{q}. \qquad \textbf{[1]}$$

Finito (quasi): *solo le coppie di interi (p,q) che soddisfano la* **[1]** *possono generare dei solidi regolari.*

"Hai detto 'caratteristiche' interessanti, ma ne hai citata una sola: ce ne sono altre?". Infatti, e questa è la più importante: la dimostrazione si generalizza a dimensioni

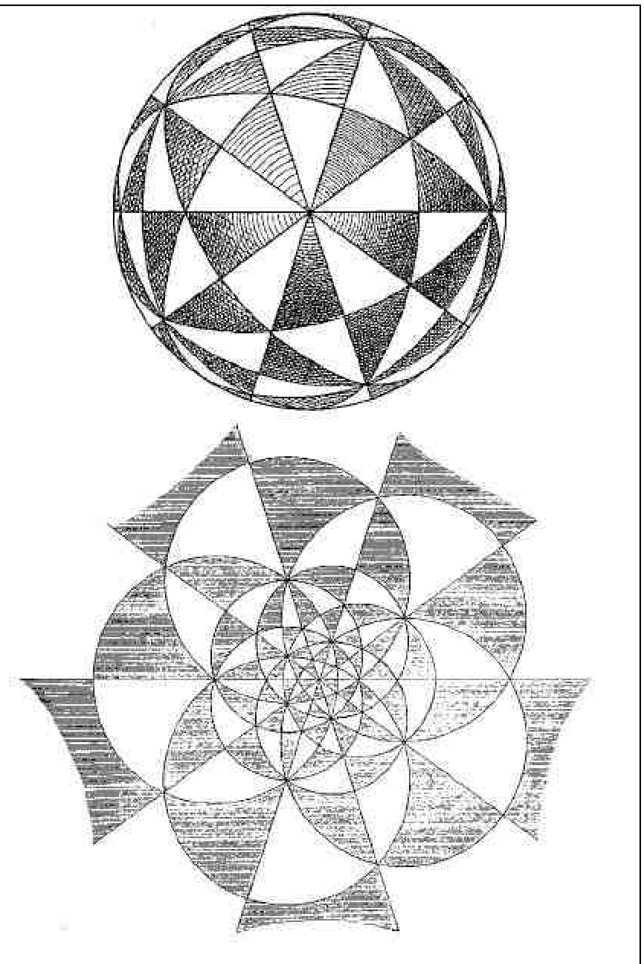
[17] La conosceva anche Euclide, e ve l'abbiamo raccontata nel PM di RM082 (Novembre 2005).

superiori e permette di ricavare i solidi regolari in R^{n+1} una volta che siano noti i solidi in R^n, il che è evidentemente utilissimo.

In questo modo riusciamo a contarli, certo, ma farebbe piacere *visualizzarli*, almeno in un qualche modo… Niente paura: ci hanno pensato ***Klein*** e ***Fricke***, nel loro ***Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen***, che tutti noi teniamo (nell'originale) come *livre de chevet*. Del ragionamento vi diamo prima la versione complicata (ma formalmente corretta) e poi vi facciamo una figura (anzi, ve la fa Klein: contenti?).

Per prima cosa, iscrivete il poliedro Π nella sfera[18] S^2 dello spazio R^3; indi, proiettate gli spigoli di Π dal suo centro su S^2, ottenendone quindi una tassellatura regolare a base di poligoni sferici; adesso, procedete per *proiezione stereografica*[19] su R^2 e guardate il disegno.

Un disegno rende la cosa sicuramente più chiara, ma vorremmo farvi notare un paio di cose: avete preso un aggeggio nello *spazio* e ne avete data una rappresentazione sul *piano*! Insomma, anche qui siete riusciti a "abbassare di una dimensione" l'aggeggio: trovate il caso più complicato, quello dell'icosaedro (o del dodecaedro[20]… indovinate perché) nella figura qui di fianco (l'altra cosa che volevamo farvi notare è che Klein disegnava bene: Rudy è invidiosissimo).



26 *Le tassellature icosaedriche di S^2 e di R^2 (da* Klein, *op.cit.)*

Dovreste ricordarvi che i solidi regolari sono delle rappresentazioni di alcuni ***gruppi di simmetria***, e il nostro icosaedro ne ha tre: con riferimento alla nostra "palla" (quella in alto della figura), se fate passare l'asse di rotazione per uno dei punti nei quali si incontrano due triangoli neri e due triangoli grigi e date *mezzo* giro avete il primo; il secondo lo ottenete facendo passare l'asse per uno dei punti dove si incontrano tre triangoli neri e tre triangoli bianchi (il centro delle facce dell'icosaedro, se avete letto le note) e date *un terzo* di giro; infine, se fate passare l'asse per un punto dove si incontrano cinque triangoli neri e cinque bianchi e date *un quinto* di giro, ottenete l'ultimo. Evidentemente, se fate *due* operazioni del primo tipo, o *tre* del secondo, o *cinque* del terzo, tornate alla posizione iniziale.

[18] Attenzione! Oggi giochiamo ai topologi e quella è la normale sfera tridimensionale!

[19] Già spiegata: poggiate la sfera su un piano tangente la base (nel polo sud della sfera), partite con una retta dal polo nord passante per un punto della sfera e prolungatela sin quando incontrate il piano. Evidentemente il polo nord è un punto anomalo, individuato da tutti i punti all'infinito del piano, ma non ci preoccupiamo della cosa.

[20] Opinione personale: il dodecaedro è più facile da vedere, ma con un minimo sforzo dovreste vedere anche l'icosaedro: cercate i "triangoli" divisi in sei triangolini, tre bianchi e tre neri.

Il tutto, se indicate le tre rotazioni con (ι, κ, λ), si esprime in un modo che secondo noi non solo è quasi bellissimo, ma mostra perfettamente che la più famosa citazione matematica[21] è vera:

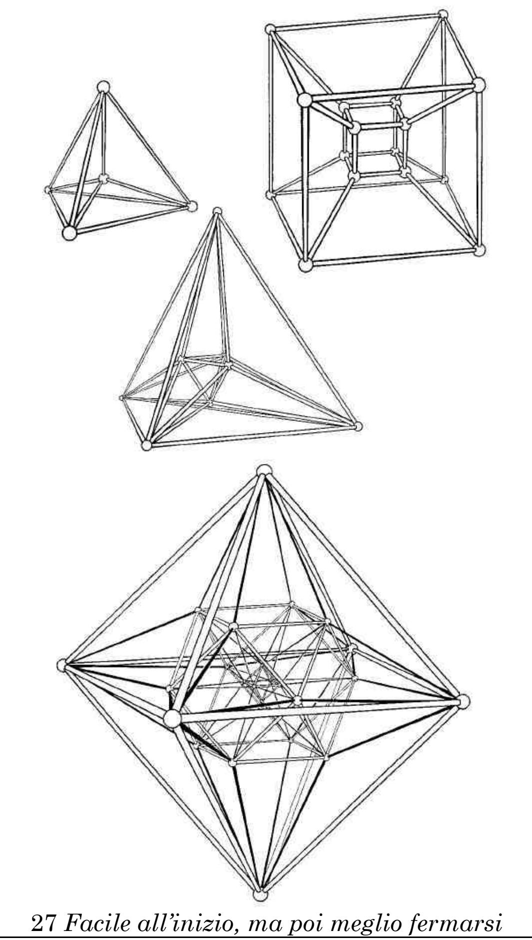
$$\begin{cases} \iota^2 = \kappa^3 = \lambda^5 = I \\ \lambda = \iota\kappa \end{cases}.$$

E se vi chiedete come mai quello qui sopra è "quasi" bellissimo, è solo perché esiste un modo più compatto:

$$\iota^2 = \kappa^3 = (\iota\kappa)^5 = I.$$

E se sulla "palla" vi sembrano incomprensibili, provate a lavorare sul piano: le varie rotazioni, a quel punto, diventano chiarissime!

Visto che a questo punto sarete *sicuramente* colti dall'entusiasmo, vi diamo la notizia triste: questi aggeggi li ha scoperti ***Hamilton***, ma non si è accorto che erano dei ***quaternioni***, proprio quelli che stava cercando.


27 *Facile all'inizio, ma poi meglio fermarsi*

Se vogliamo tornare un attimo all'argomento originale, sarebbe interessante avere un equivalente del giochino di Klein (o meglio, del suo disegno) per le dimensioni superiori; tranquilli, esiste qualcosa di simile: prima, però, vediamo un altro modo e notiamo una cosa: nella seconda figura, i "triangoli" (dell'icosaedro) *non* sono uguali tra loro, e gli "spigoli" non sono dritti: questo è abbastanza logico, visto che avete applicato una proiezione. Da queste parti la regolarità la perdete, ma di solito ci si guadagna da qualche altro lato. Non solo, ma tenete anche conto che adesso dovremo ottenere degli oggetti *tridimensionali* che *proietteremo* ulteriormente sul foglio *bidimensionale*: insomma, costruiteveli e guardateveli, che si fa prima. Trovate il simplesso, il cubo, l'ortosimplesso e il 24-celle (quadridimensionali, ovviamente) nella figura qui di fianco. Nel caso tentiate la costruzione del 24-celle, mandateci una foto (della cella imbottita dove vi hanno rinchiuso…): ***Stringham*** (che è quello che ha fatto i disegni in questo modo per la prima volta) ne sarà felice.

Quello che ci servirebbe, per disegnare quelli più complicati, è una specie di "via di mezzo", tra il metodo di Klein e quello di Stringham: possibile che non si riesca?

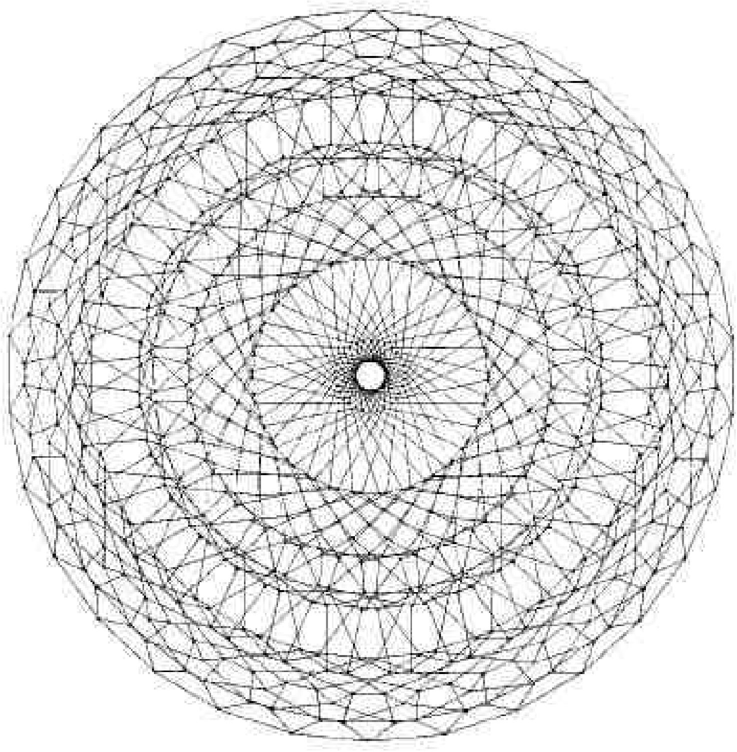
Si può provare, ed è appunto partendo dalla sorprendente conclusione cui si arriva cercando di disegnare uno di quelli che avanzano che molti matematici del ramo sostengono che sia *il più bello*.

Partiamo dal disegno "alla Klein", che già qui le cose si complicano.

[21] "I matematici sono come i francesi: qualsiasi cosa gli si dica, la traducono nella loro lingua e diventa qualcosa di completamente diverso." – Johann Wolfgang von Goethe.

Coxeter, quando ha scritto il libro sulle geometrie *n*-dimensionali, ha utilizzato un disegno preparato da ***Chilton***: successivamente, però, ***van Hoss*** gli ha mostrato un vecchio manoscritto di ***Wythoff*** che aveva *esattamente lo stesso disegno*, anche se i segni di matita erano ormai quasi illeggibili. E, visto il disegno (lo trovate in figura qui sotto), non vogliamo neanche pensare a cosa doveva essere quello di Wythoff.

Molto insoddisfacente: si riesce a vedere "qualche" pentagono, ma è praticamente impossibile vedere i dodecaedri, e anche se qualche simmetria appare evidente *[Doc: pun not intended]*, diventa decisamente difficile vederle tutte, per non parlare del fatto che cercare di "ripiegarle" in modo tale da chiudere l'oggetto è un'impresa decisamente impossibile: in fondo, stiamo parlando di una proiezione *direttamente da R^4 ad R^2*, quindi il fatto che si perdano un mucchio di pezzi è a dir poco scontato.



28 *La complicazione di Wythoff-Coxeter-Chilton-vanHoos*

Riusciamo a proiettarlo su R^3, possibilmente con un modello semplice? Ragioniamo.

Seguire Klein, in questo caso, richiede prima di proiettare dal suo centro il 120-celle (sì, parlavamo proprio di lui! Contenti?) su una sfera S^3 (ricordatevi che oggi facciamo i topologi e questo coso è un oggetto in uno spazio quadridimensionale) e quindi passare attraverso una proiezione stereografica in R^3.

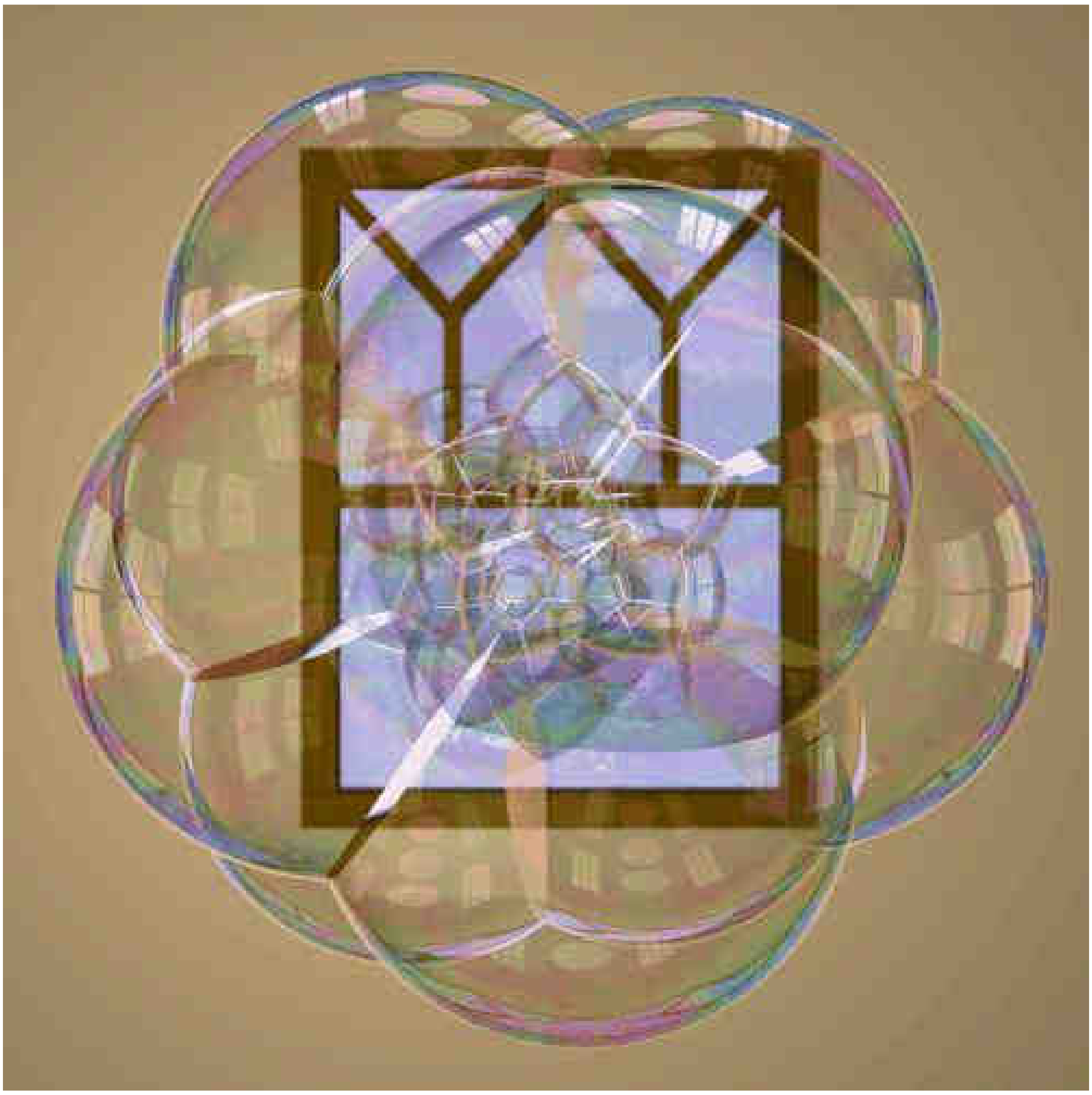
Il primo passaggio dovrebbe fornire una tassellatura dodecaedrica di S^3 (qualsiasi cosa questa frase significhi), con le facce incurvate, visto che sono sezioni delle sfere massime[22] di S^3. Inoltre, le facce dei dodecaedri devono incontrarsi a 120°, e quattro celle devono incontrarsi in ogni vertice.

Durante il secondo passaggio, le sfere restano sfere e gli angoli si conservano.

John Sullivan ha messo questi concetti assieme, ottenendo il fatto che la nostra proiezione stereografica deve, in fin della fiera, essere una partizione di R^3 in 120 regioni definite da porzioni di sfere con le superfici sferiche che si incontrano a 120° tra di loro.

Ma questo non è altro che il modo con cui si costruiscono le bolle di sapone. Con l'aiuto di un po' di sana *computer graphic*, di seguito trovate il risultato di Sullivan.

[22] Non ce lo siamo inventati noi, questo termine: sono l'equivalente dei "cerchi massimi" di S^2, la normale sfera.



"…e perché non lo metti in copertina?"
Già, così capivate subito dove volevo andare a parare…

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms