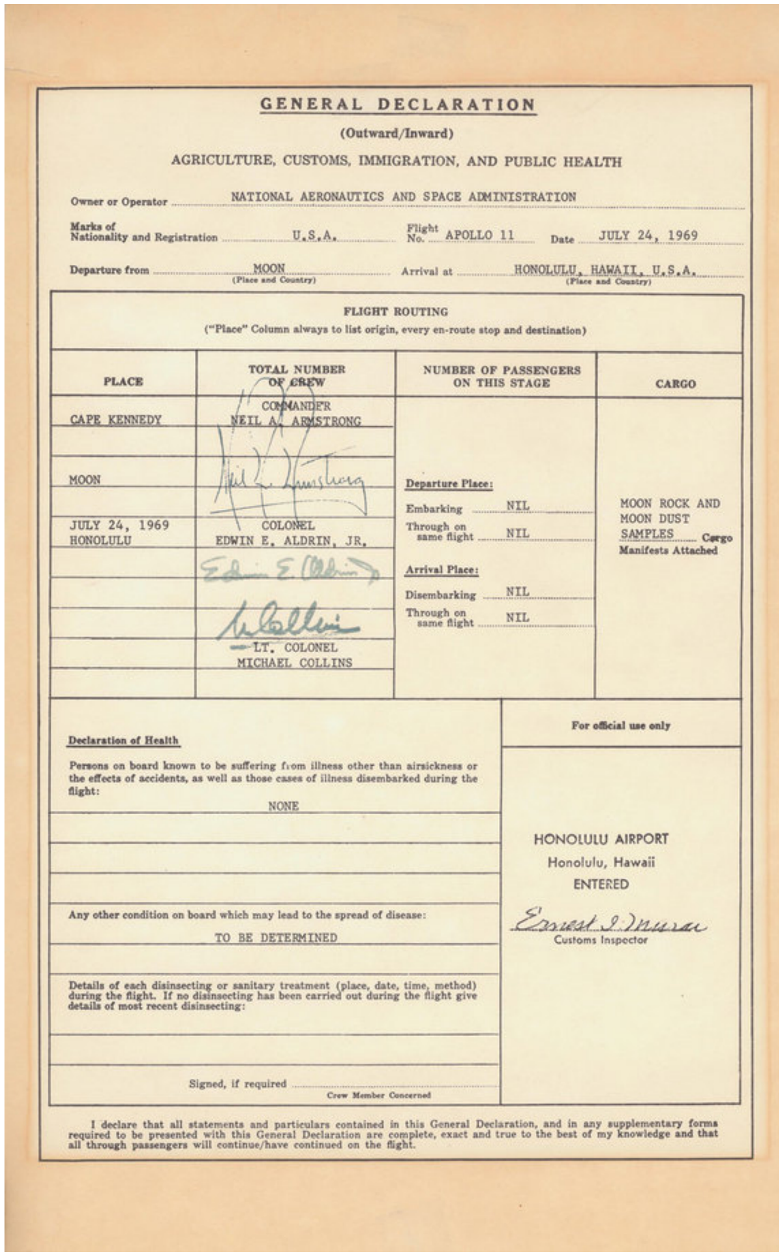
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 162 – Luglio 2012 – Anno Quattordicesimo



GENERAL DECLARATION

(Outward/Inward)

AGRICULTURE, CUSTOMS, IMMIGRATION, AND PUBLIC HEALTH

Owner or Operator: NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION

Marks of Nationality and Registration: U.S.A. Flight No.: APOLLO 11 Date: JULY 24, 1969

Departure from: MOON (Place and Country) Arrival at: HONOLULU, HAWAII, U.S.A. (Place and Country)

FLIGHT ROUTING

("Place" Column always to list origin, every en-route stop and destination)

PLACE	TOTAL NUMBER OF CREW	NUMBER OF PASSENGERS ON THIS STAGE	CARGO
CAPE KENNEDY	COMMANDER NEIL A. ARMSTRONG		
MOON	Neil A. Armstrong	**Departure Place:** Embarking NIL; Through on same flight NIL	MOON ROCK AND MOON DUST SAMPLES Cargo Manifests Attached
JULY 24, 1969 HONOLULU	COLONEL EDWIN E. ALDRIN, JR. Edwin E. Aldrin	**Arrival Place:** Disembarking NIL; Through on same flight NIL	
	M. Collins LT. COLONEL MICHAEL COLLINS		

Declaration of Health

Persons on board known to be suffering from illness other than airsickness or the effects of accidents, as well as those cases of illness disembarked during the flight:

NONE

Any other condition on board which may lead to the spread of disease:

TO BE DETERMINED

Details of each disinsecting or sanitary treatment (place, date, time, method) during the flight. If no disinsecting has been carried out during the flight give details of most recent disinsecting:

Signed, if required .... Crew Member Concerned

For official use only

HONOLULU AIRPORT
Honolulu, Hawaii
ENTERED
Ernest I. Murai
Customs Inspector

I declare that all statements and particulars contained in this General Declaration, and in any supplementary forms required to be presented with this General Declaration are complete, exact and true to the best of my knowledge and that all through passengers will continue/have continued on the flight.

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM161 ha diffuso 2'916 copie e il 01/07/2012 per Google eravamo in 120'000 pagine.

"Tutti gli americani che si recano all'estero, al rientro devono passare dalla dogana e dichiarare cosa stanno importando". Ci chiediamo se la cosa sia valida (ad esempio) anche per il Presidente degli Stati Uniti: di sicuro è stato valido per ben altri americani famosi. Sì, il documento è originale.

1. Tra la guerra e il Vietnam

«This island's mine, by Sycorax my mother,
Which thou tak'st from me. When thou cam'st first,
Thou strok'st me and made much of me, wouldst give me
Water with berries in 't, and teach me how
To name the bigger light, and how the less,
That burn by day and night. And then I loved thee
And showed thee all the qualities o' th' isle,
The fresh springs, brine pits, barren place and fertile.
Cursed be I that did so! All the charms
Of Sycorax, toads, beetles, bats, light on you!
For I am all the subjects that you have,
Which first was mine own king; and here you sty me
In this hard rock, whiles you do keep from me
The rest o' the' island.»[1]
(William Shakespeare,
"La Tempesta", Atto I Scena Seconda,
per bocca di Calibano)

«The draft is white people sending black people
to make war on the yellow people to defend
the land they stole from the red people»[2]
(Hippy a Central Park,
dal film "*Hair*" di Milos Forman
tratto dal musical omonimo
di Ragni e McDermot)

Isandlwana, Adua, Dien Ben Phu.

Non sono nomi molto noti: eppure segnano dei momenti significativi nella storia dell'uomo, specialmente in quella Storia che si preoccupi di guardare gli avvenimenti da un punto di vista non troppo centrato sulla cultura occidentale.

Isandlwana è una parola difficile da pronunciare, come è difficile la terra che ospita il villaggio che porta questo nome. Nella seconda metà del XIX secolo vi risiedeva l'esercito di occupazione inglese del Natal: nel profondo sud del continente africano, l'impero britannico era in piena espansione colonialista. In quei remoti luoghi dell'Africa australe, a dire il vero, c'erano già gli Olandesi, o meglio i Boeri, che erano il residuo della colonia che si era formata nella zona del Capo di Buona Speranza. "Boero" significa "contadino", e infatti i boeri si erano spostati nell'entroterra sudafricano, spinti lontani dalle coste dalla forza marittima inglese: avevano fondato ben due repubbliche, lo Stato Libero d'Orange e il Transvaal, nel 1848. Sulla costa sudafricana che si appoggia sull'Oceano Indiano, però, oltre agli europei (discendenti o nuovi arrivi) risiedeva anche un popolo autoctono dotato di una certa organizzazione, gli Zulu.

Nel 1879, quando ogni potenza occidentale che si rispettasse riteneva inevitabile mostrare al resto del mondo la propria potenza e supremazia, gli Inglesi decisero che era

[1] *«Quest'isola è mia: quest'isola che mi hai preso, è mia perché era di mia madre Sicorace. All'inizio, quando arrivasti, mi carezzavi e mi tenevi in cura, mi davi acqua addolcita di frutti, mi insegnavi i nomi della luce più grande e della luce più piccola, che bruciano di giorno e di notte. E a quel tempo io ti amavo, e ti mostravo tutte le ricchezze dell'isola: le dolci sorgenti, i pozzi salati, i terreni sterili e quelli fertili. Che io sia maledetto per averlo fatto! Possano fulminarti tutte le stregonerie di Sicorace: rospi, scarafaggi, pipistrelli. Perché io adesso tuo suddito, e prima ero invece il re di me stesso. Perché ora mi hai imprigionato in questo duro scoglio, e ti sei preso il resto dell'isola.»*

[2] *«La chiamata alle armi* [per la guerra nel Vietnam] *è gente bianca che manda gente nera a fare la guerra a gente gialla per difendere la terra che ha rubato a gente rossa.»*

opportuno mostrare ai primitivi Zulu quale fosse la differenza tra una zagaglia e una mitragliatrice. La differenza è davvero grande, e non si può negare che gli africani ebbero modo di conoscerla a fondo: il 4 Luglio il re Cetshwayo fu battuto nella battaglia di Ulundi, capitale del suo regno, e la nazione Zulu cessò praticamente di esistere.


1 *Battaglia di Isandlwana (dettaglio dal dipinto di C.Fripp)*

Solo sei mesi prima, però, l'Impero di Sua Maestà la Regina Vittoria era stata sconvolto da una notizia inaudita: il 22 Gennaio il presidio inglese stanziato ad Isandlwana era stato sconfitto in una battaglia campale da un esercito primitivo. Si trattava di una notizia sconvolgente, e per molte ragioni: alla base della disfatta c'erano certo molte cause di natura prettamente militare, come ad esempio il fatto che gran parte della forza inglese fosse partita per invadere il territorio zulu senza accorgersi che l'intero esercito di Cetshwayo si stava invece dirigendo verso Isandlwana; o che a guidare i circa 2000 uomini che componevano le forze inglesi fosse rimasto un ufficiale ben più esperto di tecniche amministrative che di movimenti tattici e piani strategici. Inoltre, le forze in campo erano paurosamente sbilanciate, visto che contro le due colonne britanniche si avventarono più di ventimila guerrieri zulu. Ma in ogni caso la notizia restava devastante, anche – forse soprattutto – sul piano psicologico. Gli europei erano ormai così abituati a colonizzare il "primitivo" resto del mondo che sembrava impossibile dover piangere più di milletrecento morti in un colpo solo. Del resto, la rapidità della rivincita inglese sta lì a dimostrare che lo squilibrio di potenza era davvero incolmabile: più ancora, rende bene la misura del divario l'episodio della resistenza di Rorke's Drift, praticamente contemporaneo a Isandlwana, dove un centinaio di fucilieri inglesi ben arroccati riuscì a tenere in scacco cinquemila guerrieri di Cetshwayo.

Non era mai accaduto, non in questi termini, almeno. I popoli deboli invasi si affidano quasi sempre alla guerriglia, per banale impossibilità di fare altrimenti: e le loro vittorie sono usualmente poco più che incursioni o attentati riusciti. Poche le eccezioni; anche il famosissimo caso della vittoria delle tribù Lakota, Cheyenne e Arapaho a Little Bighorn[3] contro il Settimo Cavalleggeri di George Armstrong Custer è sostanzialmente diverso. Il colonialismo degli statunitensi, a quel tempo, non era propriamente paragonabile a quello delle potenze europee che invadevano terre e popoli oltremare: quello degli USA era un progetto tecnicamente più vicino al genocidio, mirante cioè all'eliminazione di popolazioni autoctone per prendere possesso pieno e diretto del territorio. Inoltre, tutto sommato, nonostante l'epopea hollywoodiana che ne è scaturita, lo scontro che vide vincitori Toro Seduto e Cavallo Pazzo fu di dimensioni abbastanza ridotte[4]. Isandlwana era invece, a tutti gli effetti, una grande battaglia campale e, per la maggiore potenza mondiale dell'epoca, una battaglia campale risoltasi in una sconfitta.

Certo, come si è visto, è una sconfitta che comunque non cambia le sorti della guerra nello Zululand. Alla fine dell'Ottocento tutte le grandi potenze si gettano sui "primitivi", in particolare – ma non solo – sull'Africa, e la colonizzano per intero. Francia e Inghilterra su tutti, al punto che, paradossalmente, il guaio maggiore per la pace mondiale si ha nel

[3] Battaglia quasi contemporanea, almeno dal punto di vista storico: precede Isandlwana solo di due anni e mezzo (25 Giugno 1876).

[4] Il Settimo Cavalleggeri ebbe 268 morti e 55 feriti. La forza iniziale era di 647 uomini, che subirono l'attacco di mille, al massimo duemila pellerossa. L'idea che a Little Bighorn non si ebbero sopravvissuti (o che ce ne fosse solo uno, di origine italiana) è in parte romanzata, in parte dovuta al fatto che morirono effettivamente tutti gli uomini delle 5 compagnie al comando diretto di Custer; ma questo non era "tutto" il Settimo Cavalleggeri impegnato nello scontro.

1898, quando le truppe inglesi che si muovono in Africa in direzione nord-sud[5] e quelle francesi che invece spazzano il continente in direzione ovest-est si ritrovano di fronte a Fascioda, nel Sudan meridionale. La crisi di Fascioda si prolunga per mesi, e il rischio di un conflitto europeo causato dalla spartizione della torta africana sembra tutt'altro che remoto. E naturalmente anche le "ultime arrivate" nel novero delle grandi potenze si affrettano nel continente nero, perché una grande potenza senza colonie è come un cavaliere senza cavallo. Dei pochi spazi africani rimasti ancora liberi – laddove per "liberi" deve naturalmente intendersi "privi di presenza militare occidentale" – la Germania riesce a prendere possesso del Camerun, di Togo, dell'Africa Sudoccidentale Tedesca (che oggi preferisce chiamarsi Namibia) e dell'Africa Orientale Tedesca (Tanganica). Quando decide di muoversi nella grande corsa nazionalistica, all'Italia resta ben poco da scegliere. Per vie commerciali e diplomatiche ha una presenza importante in Eritrea che ha poi esteso alla Somalia, ma quella zona è davvero una zona difficile, tant'è vero che i grandi paesi colonialisti si sono sempre ben guardati dall'avventurarsi negli altipiani dell'Abissinia. Tutto il Corno d'Africa resta comunque la grande speranza italiana, e così, tra un trattato dalla duplice interpretazione[6] e qualche sgarbo diplomatico di troppo, l'Italia decide di mandare il suo giovane esercito a conquistare le "ambe" etiopi.

2 *Battaglia di Adua*

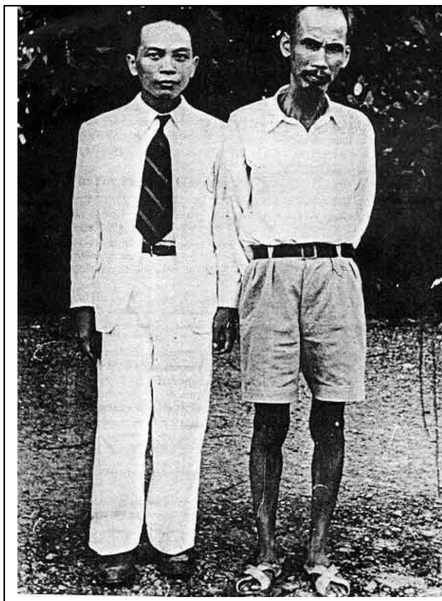
Il 1° Marzo 1896 il Regno d'Italia ha un esercito di 18.000 uomini e un mezzo centinaio di pezzi di artiglieria sulle colline di Adowa, che noi italiani conosciamo meglio come Adua: di fronte, il generale Baratieri si ritrova centomila guerrieri abissini, senza artiglieria ma con fucili, moschetti e qualche mitragliatrice. Il comando italiano divide le forze in colonne, disegna un piano strategico per l'occupazione di punti cruciali ed elevati, ma la realizzazione pratica è confusa: una colonna arriva troppo presto in posizione, anche perché si capisce abbastanza in fretta che la posizione occupata non è affatto quella pianificata. Le altre colonne si perdono di vista, il coordinamento difetta, e alla fine Menelik, negus d'Abissinia, infligge una durissima batosta all'esercito di occupazione italiano. Ognuna delle due parti lascia sul terreno circa settemila morti, e la sconfitta italiana è evidente quanto e più di quella inglese a Isandlwana di diciassette anni prima: ed è ancora più significativa, perché se Isandlwana è registrabile come la prima seria sconfitta di una grande potenza in una battaglia campale contro un popolo che non vuol essere colonizzato, Adua non segna solo una sconfitta analoga, ma anche la prima resistenza vincente alla colonizzazione. Gli Italiani non riescono a rimediare al disastro, come fecero gli inglesi, nel giro di sei mesi: la guerra è persa, e rimane una ferita aperta nell'orgoglio militare nazionale per quasi mezzo secolo, che neanche la vittoria nella Prima Guerra Mondiale cancellerà definitivamente. Gli Italiani torneranno in

[5] Nella fattispecie, in quel momento avevano dei seri grattacapi nel contenere la rivolta del Mahdi, in Sudan.

[6] Più che di duplice interpretazione, si trattava di vera e propria duplice stesura. Il trattato di Ucciali viene firmato da Menelik e dall'ambasciatore italiano in Etiopia nel 1889, ed è redatto nelle due lingue ufficiali dei contraenti. L'articolo 17 stabilisce che il Negus d'Etiopia si avvale del Re d'Italia per gli accordi e i trattati internazionali; solo che nella versione etiope questa è una facoltà opzionale, nel senso che l'Etiopia, volendo, poteva anche fare gli accordi internazionali per proprio conto, mentre nella versione italiana il senso è che l'Etiopia deve per forza rivolgersi all'Italia per ogni suo accordo internazionale: cosa che la rende, di fatto, un protettorato italiano.

Abissinia nel 1935, attirandosi le sanzioni della comunità internazionale, che riconosceva l'Etiopia ormai come una vera nazione (una delle poche, in Africa). E vinceranno, anche se non facilmente, utilizzando armi innovative per quei tempi e abominevoli per qualunque epoca.

Adua segna quindi la prima guerra colonialista perduta, come Isandlwana segna la prima battaglia colonialista perduta; analogamente, secondo molti storici, Dien Ben Phu segna forse la vittoria che mette fine all'ultima guerra colonialista propriamente detta. Anche perché ormai l'aspetto del colonialismo è mutato, complicato, evoluto. La Francia aveva le sue colonie asiatiche, come gran parte delle potenze europee, e l'Indocina era sempre stata una delle sue zone d'influenza, ma la Seconda Guerra Mondiale spariglia le carte. Il Vietnam viene invaso dal Giappone, e la situazione si fa molto confusa dopo la fine della guerra: l'unico movimento di resistenza ai giapponesi era stato quello guidato, nel nord del paese, da Ho Chi Minh: questi dichiara decaduto il protettorato francese che vige sul paese ormai dal 1883. I francesi non prendono la cosa bene, e inviano truppe per ristabilire l'ordine. È quella che si chiama "Guerra d'Indocina", ed ha ancora un'evidente matrice colonialistica, anche se le zagaglie di Isandlwana sono davvero un ricordo, ormai. La Francia ha mezzi, soldati, aviazione: ma anche il Vietnam del Nord ha un esercito, un'organizzazione rigorosa militare e politica, e armi. A Dien Ben Phu il generale Vo Nguyen Giap, poi, mostra capacità strategiche che fanno invidia ai teorici di West Point.


3 *Vo Nguyen Giap e Ho Chi Minh*

Il 13 Marzo 1954 le forze francesi stanziate nel catino di Dien Ben Phu vengono bersagliate da un fittissimo fuoco d'artiglieria, e più che i danni che subiscono è la sorpresa a sconvolgere gli eredi di Napoleone. Da dove sono sbucati i cannoni? Com'è possibile che le colline intorno siano tutte affollate da pezzi d'artiglieria, se è impossibile attraversare la giungla che le ricopre? Evidentemente, per Giap e per i suoi soldati la giungla non era impenetrabile. I francesi lasciano quasi seimila morti sul campo e, soprattutto, si convincono che è ora di lasciare definitivamente il Vietnam.

Certo, per il paese asiatico la partenza dei francesi non segnò l'arrivo dell'indipendenza. A Ginevra si decise, l'anno dopo, di dividere il Vietnam in due parti, una filocomunista a Nord e una filooccidentale a Sud. E poco dopo arrivarono gli Americani a contrastare i vietcong di Saigon, che invece volevano unificare il paese sotto l'egida di Ho Chi Minh; e per altri vent'anni il martoriato Vietnam fu teatro di battaglie, orrori, napalm, torture e scannamenti. A questo punto era però già evidente che non si trattava più di puro colonialismo, ma anche di uno scontro tra i due grandi blocchi in cui era diviso il mondo, con gli USA a guidarne una parte e l'URSS l'altra.

A voler essere pessimisti, o forse solo obiettivi, se c'è un fil-rouge che guida tutta la umana storia dei popoli, questo sembra essere quello della banale prevaricazione. Un popolo forte attacca e divora il vicino debole, anche se le forme di attacco e di annullamento cambiano molto nel tempo. In quest'ottica, così semplice che si potrebbe quasi pensare di applicarvi alcune formule base di dinamica newtoniana, tanto pare prevedibile, il colonialismo non sembra avere alcuna particolare caratteristica, se non il cambio repentino del concetto di "vicinanza". È infatti evidente che, per poter invadere un paese, condizione necessaria è quella di poterci arrivare, e di farci arrivare le armi. Paradossalmente, è in questo senso che la scoperta dell'America da parte di Cristoforo Colombo diventa significativa: nel Nuovo Mondo sono quasi certamente arrivati prima i drakkar vichinghi delle caravelle spagnole, e sicuramente sono riusciti ad arrivarci, svariate migliaia di anni prima dei vichinghi, quegli esseri umani che l'hanno popolato, arrivando dall'Asia e scendendo attraverso lo Stretto di Bering. È però solo quando gli hidalgos spagnoli sbarcano con cavalli, armature e archibugi da "piroghe grandi come palazzi" che i nodi vengono al pettine.

Si può però anche decidere di non essere troppo pessimisti: la cosa richiede un certo sforzo di volontà e di immaginazione, ma non è del tutto impossibile. Anche accettando l'idea che tendenzialmente l'essere umano tende ad impossessarsi degli averi dell'altro non appena le condizioni al contorno glielo consentono, è anche vero che con l'evoluzione e i miglioramento dei contatti, delle comunicazioni e delle conoscenze cambiano anche i modi – e forse addirittura gli obiettivi – della prevaricazione. In questo XXI secolo l'uomo non ha smesso di prevaricare il prossimo ma, ad esempio, il concetto di colonialismo si è evoluto abbastanza da assumere indirizzi prevalentemente economico-commerciali piuttosto che economico-militari: le nazioni potenti non si fanno certo troppi scrupoli a tornare ad usare le armi, quando le nuove vie di sfruttamento sono impedite, ma almeno oggi questa sembra essere una seconda scelta, più che l'unico approccio possibile. E se una volta erano quasi solo i militari quelli che, in ultima analisi, erano in grado di conoscere i luoghi remoti del pianeta, adesso le possibilità di far viaggiare cose e persone, anche per scopi amabilmente non bellici, sono incredibilmente cresciute. E nell'ultimo secolo, grazie alla radio, al telefono, alla televisione, ai satelliti per telecomunicazioni e soprattutto alla Rete, le idee riescono a viaggiare alla velocità della luce, ridimensionando il pianeta.

La speranza (indispensabile in un approccio ottimista) è quella che a forza di conoscere meglio sé stesso e il piccolo borgo cosmico che abita, l'uomo impari a pensare in termini meno individualistici o di gruppo, ma in termini collettivi davvero globali. Certo, l'obiettivo ottimista è ancora davvero lontano, vista la spettacolare inerzia che da sempre caratterizza i buoni sentimenti rispetto ai riflessi scattanti da centometrista che hanno sempre mostrato di avere la violenza e l'aggressività, ma se si guarda indietro, anche di pochi decenni, è indubbio che il mondo è cambiato, e continua a cambiare velocemente. Gran parte degli esseri umani possono muoversi da un continente all'altro con relativa facilità, consentendo un mescolarsi profondo di etnie: con buona pace dei puristi della razza, questo è certo un aspetto positivo e cruciale dei nostri tempi. Più banalmente ancora, ogni essere umano che è in grado di leggere un libro o di capire un documentario audiovisivo è in grado di conoscere la geografia dei popoli e delle terre: e per quanto questo sembri ormai ovvio e scontato, è solo da relativamente poco tempo che questo è possibile.

Fino a non molti anni fa, la Terra era un luogo ancora in gran parte sconosciuto e misterioso. L'Africa, percorsa in lungo e largo per tutto l'Ottocento da parte delle potenze occidentali, era un continente virtualmente sconosciuto. L'Asia, per quanto ricettacolo di grandi e antiche civiltà, restava in gran parte misteriosa; la natura dell'Australia e dell'Oceania è rimasta un mistero per i navigatori occidentali per lunghissimo tempo, e probabilmente l'Amazzonia è stata virtualmente conosciuta più dalle foto aeree e satellitari che da una vera e propria esplorazione terrestre. Come insegnano centinaia di romanzi d'avventure dell'Ottocento, i nostri bisnonni e trisavoli vivevano ancora in un mondo che era davvero, fisicamente, ancora tutto da scoprire, o quasi. E, sempre restando nella visione ottimistica del mondo, bisogna riconoscere che c'è un importante fattore che accomuna sia la carriera militare in tempo di pace, sia le lunghe navigazioni ottocentesche da un capo all'altro del pianeta: una gran quantità di tempo libero. Tempo che qualcuno, saggiamente, ammazzava interessandosi di matematica.


4 *Ernest de Jonquières*

Ernest de Jonquières nasce il 3 Luglio 1820 a Carpentras, tra la Provenza e la Costa Azzurra. All'età di quindici anni entra nell'Accademia Navale di Brest, per iniziare quella che sarà una lunghissima carriera nella marina militare francese: raggiungerà il grado di vice-ammiraglio a 59 anni, e se andrà in pensione, nel 1885, con le spalline da ammiraglio. Quelle che indossa sulla divisa nel 1841, appena laureato, sono però quelle meno appariscenti da tenente. Una delle sue fortune è quella di essere mandato assai presto a servire agli Alti Comandi dell'Ammiragliato francese, dal 1848 al 1850: appena due anni prima era stata infatti istituita alla Sorbona la cattedra di Geometria Superiore, di fatto creata apposta per Michel Chasles, maggiore geometra di Francia dell'epoca. Ernest ha una vera passione per la matematica, e trovarsi a Parigi (cosa non del tutto scontata per un giovane ufficiale di marina) gli consente di seguire le lezioni di Chasles all'università. Siccome ha una predisposizione naturale alla geometria, de Jonquières diventa in breve lo studente migliore di Chasles, e il commentatore più autorevole dei suoi lavori.

Ma un marinaio, per quanto giovane, dovrebbe stare in mare[7]. Ed Ernest si imbarca davvero, e comincia la lunga avventura di soldato francese alla conquista del mondo. Il periodo più fecondo è quello del 1860-61, quando i lunghi viaggi privi di distrazione gli danno la tranquillità necessaria per potersi dedicare alla matematica. È in questo periodo che scrive il trattato sulla teoria delle curve piane del quarto ordine con il quale parteciperà al Grand Prix dell'Accademia delle Scienze nel 1862. Pochi mesi prima, nel 1859, i francesi avevano conquistato Saigon: nel 1862 la conquista era stata formalizzata da accordi franco-vietnamiti, e la Cocincina (come si chiamava allora la regione) era diventata a tutti gli effetti francese. Saigon divenne in breve una città quasi occidentale: attorno al porto crebbe tutta la città, che i francesi immaginavano come una "città-parco", con case signorili, giardini, ampi viali alberati alla maniera parigina, e perfino con una grande cattedrale che naturalmente venne chiamata Notre Dame, e gran parte di questa trasformazione fu opera di de Jonquières, che, diventato da poco capitano di vascello, ebbe dall'Ammiragliato l'incarico di organizzare un'esposizione agricola e industriale a Saigon nel 1865.

[7] La citazione esatta sarebbe "*Ma un comandante, per quanto giovane, dovrebbe stare in mare*". Ma siccome il comandante del testo è proprio un comandante di marina, Ivano Fossati ci perdonerà.

5 *Saigon nell'Ottocento*

Impegni del genere non sono facilmente compatibili con uno studio approfondito della matematica, eppure de Jonquières mantenne per tutta la vita un interesse profondo per la geometria superiore: e ottenne risultati che difficilmente possono essere annoverati come l'opera di chi, a tutti gli effetti, potrebbe essere classificato come "matematico dilettante". Contribuisce alle opere fondamentali di Chasles e Poncelet, introduce il principio di corrispondenza omografica e soprattutto la trasformazione birazionale che sarà poi resa famosa da Luigi Cremona. A tempo perso, si dedicò anche all'algebra e alle equazioni diofantine con risultati notevoli. Tra le altre cose, dimostrò anche che la famosa relazione di Eulero che coniuga facce, spigoli e vertici di un poliedro (F+V=S+2) era stata scoperta già da Descartes molto prima del genio svizzero.

Una delle caratteristiche peculiari di Jonquières era quello che si potrebbe chiamare "coraggio matematico": non esitò ad usare metodi di analisi e indagine fuori dai sentieri battuti, come il principio di continuità o lo spezzettamento della curva, e altri ancora che non erano ritenuti ortodossi dai contemporanei, e che sono in parte ancora in discussione. Nel parlare di lui, Gino Loria[8] si avventura in osservazioni che romanticamente mettono in relazione la sua vita da soldato e quella da matematico: lo descrive come un geometra non di prima grandezza, asserendo che non poteva essere altrimenti poiché il suo mestiere era quello di ufficiale di marina, e ciò non gli permetteva di potersi dedicare a tempo pieno alla matematica, e notava che le discontinuità della sua produzione erano dovute soprattutto al fatto che per il suo lavoro non era in grado di mantenersi aggiornato con la letteratura scientifica del tempo. Però il suo combattere quotidiano con le onde dell'oceano sembrava averlo dotato di un approccio caratteristico nell'affrontare le tempeste dei problemi matematici, ove mostrava grande coraggio e spirito d'iniziativa: Loria suggerisce che de Jonquières, che da soldato usava le ortodosse regole d'ingaggio della guerra, in matematica sembrava invece preferire le tattiche della guerriglia, evitando le tattiche consolidate e avventurandosi nei sentieri più pericolosi. Conclude con delle affermazioni davvero poetiche e lusinghiere per il vecchio marinaio francese: "*Altri*

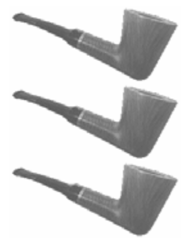
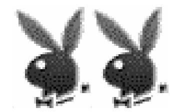
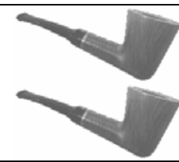
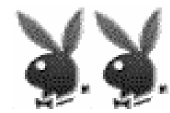
[8] Gino Benedetto Loria, mantovano, 1862-1954, gran matematico e grande storico della matematica. Dovremo deciderci a dedicargli un compleanno, prima o poi. E dovremmo proprio provare a procurarci il suo "*Storia delle matematiche dall'alba della civiltà al secolo XIX*", prima che sparisca da tutti i cataloghi.

geometri timorosi, preferendo le vie ortodosse, non hanno mancato di segnalare le ferite che hanno segnato la sua opera e che noi, storici imparziali, non abbiamo nascoste; ma possiamo rispondere che le ferite sono proprie degli eroi, e che solo i codardi che non entrano mai in battaglia riescono ad evitarle”[9].

Quello che ci pare sicuro è che, guerra o guerriglia che fosse, questo tipo di coraggio, di battaglie e di ferite è quello che ci piace di più.

[9] Ugo Foscolo massacrò Vincenzo Monti chiamandolo “gran traduttor dei traduttor d’Omero”, perché la sua versione dell’Iliade si basava più sulle traduzioni latine che sull’originale greco: non sappiamo cosa riuscirebbe a dire di noi, che riusciamo a citare l’italianissimo Loria solo ritraducendo queste sue frasi da un articolo inglese. Chiediamo scusa a Ugo, e soprattutto a Gino.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Salvare capre e cavoli			
"eracrec a alesradnA"			

2.1 Salvare capre e cavoli

In questi anni di frequentazione, dovreste aver capito che il Luogo del Divano Quantistico (la 'casa di campagna'[10] della moglie di Rudy) è sita nel Biellese; e dovreste anche aver capito che i biellesi danno dei punti a genovesi e scozzesi a tirchieria.

Durante un week-end del mese scorso ci siamo ritrovati da quelle parti per la Grande Cerimonia Rituale dell'Estate, ossia la riapertura della casa con spegnimento del riscaldamento tenuto sui due gradi per tutto l'inverno (tre anni fa sono gelati i tubi, e rifare il pavimento non è stato divertente, soprattutto per un portafoglio biellese) e quant'altro: come sempre, mentre nel resto d'Italia si toccavano i ventitré gradi, da quelle parti il maglioncino era il minimo indispensabile per garantire la sopravvivenza.

Comunque, ce l'abbiamo fatta: stanchi ma felici, ci siamo recati come d'uso a visitare gli amici che, dovreste ricordare, portano il fardello di essere omonimi dello scrivente.

Prima di procedere, vorremmo chiarire un punto che probabilmente vi arrovella da qundo conoscete i tre omonimi: ma come fate a distinguervi? Beh, semplice: Rudy è l'unico ad essere chiamato in questo modo, gli altri nei rapporti sociali preferiscono la forma estesa; per quanto riguarda gli altri due, di solito vengono apostrofati come "Geometra" l'uno (lo è veramente) e "Comandante" l'altro (ha una barca a vela della quale dovremmo avervi già parlato).

"...e qual è il problema?" Arriva, arriva. Ma se vi dicevo senza spiegazione che "Questo arriva dal Geometra biellese" non capivate niente, e pensavate fossi completamente impazzito; ma prima di tutto l'usuale *caveat*: nella soluzione che abbiamo noi, alla fine bisogna lavorare di brutto con approssimazioni, visto che ci ritroviamo con una brutta bestia. Adesso arriva.

Neto e Vigio[11] sono due fratelli che si ritrovano a dividersi un campo appena acquistato: il campo è stato completamente cintato dal precedente proprietario, e ha la forma di un quadrante di cerchio del raggio di 570 metri: come ama dire Geometra, i due fratelli, a seguito di *Veltanschauung* contrastanti, nella vita si sono ritrovati l'uno a coltivare capre, l'altro a pascolare cavoli, e vorrebbero espletare ciascuno la propria attività preferita all'interno della propria metà (intesa in senso areale) di campetto.

[10] Virgoletta *oblige*: è nel pulsante centro di un dinamico paesello di cinquecento abitanti.

[11] Vi ricordiamo che in piemontese la "o" senza dieresi si legge come la "u" italiana

I più attenti conoscitori di Alcuino da York[12] ricorderanno che "capre" e "cavoli" amano essere salvati entrambi dai matematici, ma essendo di bocca buona va bene anche un geometra; soprattutto quando Neto e Vigio, molto legati al territorio, espletano la caratteristica fondamentale dei biellesi: segue dialogo.

"Neto, dobbiamo dividere il terreno con una rete"

"Uh! Con quello che costano!"

"Ci sarebbe un rotolo di vecchia rete... Con un po' di fil di ferro forse riusciamo a farla stare assieme"

"Quella rete lì secondo me non riesce neanche a tenere dalla loro parte i cavoli, ma possiamo provare".

I nostri due eroi si apprestano a misurare la rete, e si accorgono con sgomento che ne hanno a disposizione solo 500 metri.

"Vigio, non basta, per dividere a metà"

"Vuoi dire che dobbiamo comprarne 70 metri?"

"Mah, io il modo non lo trovo..."

(Tutti e due, in coro) "...chiediamo al Geometra!"

Mentre stava lavorando al problema, il Geometra si è visto arrivare a casa una torma di assetati omonimi accompagnati dalle rispettive consorti: fornendo la corretta quantità di birra casalinga (la fa lui, ed è ragionevolmente buona, soprattutto nelle variazioni sul tema), è riuscito a mettere al lavoro il paio di omonimi che, sequestrandogli carta, matita e terrazza (il Comandante non fuma, ma Rudy sì) stanno pensando per quanto tempo riusciranno a convincere il Geometra a fornire birra senza neanche cominciare a pensare al problema.

Ora, visto che il Geometra si sta insospettendo, potreste mica dare una mano a me e al Comandante?

2.2 "eracrec a alesradnA"

Nel senso che è sostanzialmente il contrario di un problema che avevamo intitolato "Andarsela a cercare": certo che in questo numero "Geometr(i)a" è la parola magica... Comunque, siccome esattamente come nel suo contrario[13] l'ambientazione è quasi impossibile, ci limitiamo a qualche sproloquio in merito.

Solo l'abitudine ci esime dalla perplessità di voler risolvere tutta la geometria con *riga e compasso*, come diceva Euclide; consideriamo – ve lo abbiamo già detto l'altra volta – puro masochismo le acrobazie di Mascheroni relative al fare le cose con il solo compasso. Figurarsi questa volta, che potete usare *solo la riga*!

Comunque, quando abbiamo trovato il problema, abbiamo apprezzato il fatto che qualcuno fornisse anche la soluzione; il guaio (o il bello, fate voi) era che la soluzione era *puramente descrittiva*, senza neanche una figura: Rudy, durante l'eroico tentativo di leggerla e rappresentarsela a mente, ha fatto schizzare alle stelle le azioni di un'azienda nota produttrice di pastiglie a base di acido acetilsalicilico. Sconfitto, ha cominciato a disegnarla ed essendo nota la sua incapacità nel disegno tecnico, è passato a "Impress" (che sarebbe il fratellino gratuito di Powerpoint) e ha cominciato a tirare righe. Ma ad un certo punto gli è sorto un dubbio.

"Bene, con riga & compasso riusciamo a costruire un tot di cose. Con gli assiomi dell'origami riusciamo a costruirne qualcuna in più (ad esempio ci vuole un attimo, a trisecare un angolo). Mascheroni dice che tutto quello che fai con riga e compasso lo fai anche con il compasso da solo, e solo con la riga fai ben poco; ma cosa riesci a fare con

[12] Oh, Dario, adesso non lamentarti: era un po' che non parlavamo di te, e adesso due citazioni in due mesi!

[13] RM154P1, come usiamo dire. Se preferite, "Problema 1 ("Quando si dice 'andearsela a cercare"'), Rudi Mathematici 154 (novembre 2011).

Powerpoint? Se uso come assiomi e/o strumenti le funzioni di PPT, che geometria riesco a costruire? È più grande, più piccola o cosa rispetto a quelle di Euclide e dell'origami?"

Domanda oziosa quant'altre mai, ma forse qualcuno ha voglia di giocarci: come al solito, comunque, non è questo il problema.

Oh, giusto, il problema! Ah, non ve l'ho ancora detto? Beh, in realtà sono due:

Dato un cerchio costruire, *con la sola riga*:

1. La tangente al cerchio passante per un dato punto della circonferenza
2. La tangente al cerchio passante per un punto *esterno* alla circonferenza.

Come dicevamo troppe righe sopra, abbiamo disegnato la soluzione, e ci sono venute fuori una marea di righe che tagliavano in vario modo il cerchio e un mucchio di punti importanti che erano all'interno del medesimo, e a questo punto ci è sorta un'altra domanda oziosa, alla quale (esattamente come quella sopra) non abbiamo risposta: supponiamo che il miglior scrittore di racconti della banda (Doc) decida di ambientare questi due problemi sull'orizzonte degli eventi di un buco nero (supposto, per comodità, bidimensionale); evidentemente non potete avere punti all'interno del cerchio, e tirare una riga che vada da una parte all'altra del cerchio per due punti è impossibile: in questo caso, esiste una costruzione che funzioni? La nostra no di sicuro (Rudy è convinto che per costruzione almeno un punto debba "stare dentro"), ma forse riuscite a trovare un trucco o una costruzione diversa.

Reiteriamo i concetti: per quanto riguarda la geometria di Powerpoint e la giocoleria col buco nero non abbiamo neanche cercato le soluzioni, ma per i due problemi originali siamo a posto: vedete voi, se è il caso di andare a scavare in certi anfratti, magari facendo oziosamente i disegni con l'alluce su una spiaggia dorata, sorseggiando una birra gelata... Poi, però, aspettate prima di fare il bagno.

3. Bungee Jumpers

Provate che, se $n,k \in N$ (zero incluso), nessun numero positivo della forma $4^n(8k-1)$ può essere un quadrato o la somma di due o tre quadrati di interi positivi.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Luglio.

L'estate è cominciata, e vi pensiamo tutti già sulla spiaggia o in viaggio per destinazioni ottimali per la soluzione dei nostri problemi. Anche perché, malgrado noi si sia usciti con un ritardo fenomenale il mese scorso, la Redazione è stata sommersa da soluzioni, in perfetto tempo limite.

A proposito di giochi per l'estate: abbiamo un contributo eccezionale a questa rubrica direttamente dalla Finlandia, con le parole di Rudy.

Siamo certi che, se richiedete una valutazione da uno a cinque, il sentire in risposta il valore "undici" vi lasci quantomeno perplessi.

Ora, "undici" è esattamente la risposta che ha dato il matematico finlandese ***Arto Inkala*** quando gli hanno chiesto di valutare nell'usuale scala da uno a cinque la difficoltà del sudoku che aveva appena costruito.

Soluzione? Ma neanche per sogno! A Rudy il sudoku non piace.

8								
		3	6					
	7			9		2		
	5				7			
				4	5	7		
			1				3	
		1					6	8
		8	5				1	
	9					4		

AI14473 (c) Arto Inkala www.aisudoku.com

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

6 *Undici stelline!*

Ancora qualcosa da dire? Ah, sì. Il mese scorso il BJ con la sua pagina 46 hanno fatto parlare abbondantemente i nostri lettori, soprattutto il grande ***Caronte***, ed il motivo principale è che nel testo del problema il lato del quadrato sarebbe dovuto essere $2a$ invece di a... lo perdoniamo, il Capo? No, naturalmente.

Allora, cercando (senza successo) di evitare di uscire in ritardo un'altra volta, passiamo velocemente alle vostre soluzioni. Mi raccomando, fate un salto sul Bookshelf, i nostri lettori sviluppano continuamente nuove teorie e non dovete perdere l'opportunità di distruggerle o semplicemente godervele.

4.1 [161]

4.1.1 Si festeggia con un gioco!

Poco successo per questo problema, che irretiva i giovani e VAdLdRM con scommesse sul solito gioco del Capo:

> *Ci sono i numeri da 1 a 9, in una fila fatta con i gettoni della tombola: a ogni turno ciascun giocatore ne pesca uno, e si va avanti sin quando, sommando tutti o alcuni dei gettoni presi,un giocatore riesce a formare esattamente il valore quindici. Accesso al gioco un centesimo, chi vince prende tutto, se nessuno vince la puntata resta in tavola per il giro dopo. Qual è la strategia per vicere, su molte partite?*

Per cominciare, vediamo la soluzione di ***Alberto R.***, che è anche la prima che abbiamo ricevuto in assoluto:

> Chi prende per primo ha una strategia vincente.
>
> 1° gioc prende il 6
>
> 2° gioc è obbligato a prendere il 9
>
> 1° gioc prende il 7
>
> 2° gioc comunque giochi non fa 15 e non può prendere insieme 2 e 8
>
> 1° gioc prende il 2 oppure l' 8 e vince.
>
> Forse il gioco non voleva essere così semplice. Forse i giocatori sono più di due, ma in merito il testo tace.

Beh, al solito il Capo non è mai tanto generoso da spiegarsi sul numero dei giocatori, ma la stessa strategia è proposta anche da ***Trekker***. ***MBG*** concorda con la soluzione di ***Alberto***, e aggiunge:

> Il gioco diventa più interessante se per il giro dopo si lasciano in tavola i gettoni rimasti e si ripristinano tutti solo dopo che è stato preso l'ultimo, ma questo non l'ho analizzato.

Peccato, ma chissà, magari qualcun altro avrà voglia di farlo il mese prossimo. E così chiudiamo con questo gioco, che probabilmente era per voi troppo facile.

4.1.2 Ma a cosa servono?

Una domanda terribile da porsi, per un matematico, ma evidentemente il Capo non ha avuto remore. Del resto trovare una categoria di numeri con un titolo tanto adatto a noi Rudi e voler addirittura trovarne anche un uso ci sembra eccessivo... ma vediamo come sono definiti, questi numeri *selvaggi*:

> *È dato un numero n, o meglio è dato l'insieme dei numeri {1, 2 3,..., n}: vengono definite tre partizioni di questo insieme:*
>
> *A contiene solo numeri pari.*
>
> *B contiene solo numeri dispari*
>
> *C contiene tutti i multipli di tre e tutti i numeri che vi sono avanzati.*
>
> *Se esiste una partizione per cui la somma dei valori in A è pari alla somma dei valori in B che è pari alla somma dei valori in C, allora il numero n è un numero selvaggio. Esiste un metodo per trovare i numeri selvaggi e costruire le partizioni?*

Di risposte e soluzioni ne sono arrivate tante, e questa volta anche da nuovissimi solutori. Per dar loro il benvenuto, cominciamo proprio con ***Francesco***, al suo primo tentativo.

> Siano S_A, S_B e S_C le somme dei valori, rispettivamente, di A, B e C. Dato che $S_A = S_B = S_C$ e che A, B e C formano una partizione dell'insieme $\boldsymbol{I}(n) = \{1, \dots, n\}$, dobbiamo avere
>
> $$S_{I(n)} \equiv \sum_{j=1}^{n} j = S_A + S_B + S_C = 3S_A$$
>
> Quindi $S_{\boldsymbol{I}(n)}$ deve essere un multiplo di 3. Inoltre, essendo A composto solo da numeri pari, S_A deve essere pari e quindi $S_{\boldsymbol{I}(n)}$ è divisibile per 6. Utilizzando ora la formula per la somma dei primi n interi, abbiamo
>
> $$S_{I(n)} = \frac{n(n+1)}{2} = 6m \Rightarrow n(n+1) = 12m$$
>
> e quindi almeno uno tra n e $n+1$ deve essere multiplo di 4 (uno dei due è necessariamente dispari) e almeno uno tra n e $n+1$ deve essere multiplo di 3.
>
> Dobbiamo quindi considerare i casi:
>
> - $n = 4k$. Considerando i possibili resti della divisione di k per 3, avremo solo le possibilità:
>   - $k = 3q \Rightarrow n = 12q$
>   - $k = 3q+1 \Rightarrow n = 12q+4$: questo caso non è ammesso perché né n né $n+1$ sarebbero multipli di 3
>   - $k = 3q+2 \Rightarrow n = 12q+8$
> - $n = 4k-1$. Ragionando come prima, troviamo:
>   - $k = 3q \Rightarrow n = 12q-1$
>   - $k = 3q+1 \Rightarrow n = 12q+3$
>   - $k = 3q+2 \Rightarrow n = 12q+7$: questo caso non è ammesso perché né n né $n+1$ sarebbero multipli di 3
>
> Consideriamo ora i possibili valori per S_A, S_B e S_C, definendo per comodità $\overline{A}$ come l'insieme degli interi pari minori o uguali a n e non multipli di 3, $\overline{B}$ l'insieme degli interi dispari minori o uguali a n e non multipli di 3 e $\overline{C}$ l'insieme dei multipli di 3 minori o uguali a n.
>
> - A contiene al più **tutti** i numeri pari che non siano multipli di 3. Quindi troviamo $S_A \le S_{\overline{A}} = 2\sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} j - 6\sum_{j=1}^{\lfloor n/6 \rfloor} j = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right) - 3\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 1 \right)$
> - B contiene al più **tutti** i numeri dispari che non siano multipli di 3. Osserviamo che il numero di interi dispari minori o uguali a n è dato da $[(n+1)/2]$, mentre il numero di multipli di 3 dispari minori o uguali a n è pari a $[(n+3)/6]$. Ricordando che la somma dei primi m interi dispari è uguale a m^2, troviamo:
>
> $$S_B \le S_{\overline{B}} = \left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \right)^2 - 3\left(\left\lfloor \frac{n+3}{6} \right\rfloor \right)^2$$
> - C contiene almeno **tutti** i multipli di 3. Otteniamo quindi
>
> $$S_C \le S_{\overline{C}} = 3\sum_{i=1}^{\lfloor n/3 \rfloor} i = \frac{3}{2} \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1 \right)$$
>
> A questo punto possiamo esaminare i 4 casi visti precedentemente per n:

- $n = 12q$: $[n/2] = 6q$, $[n/6] = 2q$, $[(n+1)/2] = 6q$, $[(n+3)/6] = 2q$, $[n/3] = 4q$. Quindi abbiamo $S_{\bar{A}} = 24q^2$, $S_{\bar{B}} = 24q^2$, $S_{\bar{C}} = 24q^2 + 6q$. In questo caso è sempre $S_C > S_A$. Pertanto, non esistono numeri selvaggi della forma $n = 12q$.
- $n = 12q + 8$: $[n/2] = 6q+4$, $[n/6] = 2q+1$, $[(n+1)/2] = 6q+4$, $[(n+3)/6] = 2q+1$, $[n/3] = 4q+2$. Questa volta abbiamo $S_{\bar{A}} = 24q^2 + 36q + 14$, $S_{\bar{B}} = 24q^2 + 36q + 13$, $S_{\bar{C}} = 24q^2 + 30q + 9$. Supponiamo di partire con A, B e C uguali rispettivamente a $\bar{A}$, $\bar{B}$ e $\bar{C}$ e di spostare uno o più numeri pari (di somma s_p) da A a C. Analogamente, spostiamo uno o più numeri dispari di somma s_d da B a C. Le nuove somme dei valori di A, B e C saranno $S_A = S_{\bar{A}} - s_p$, $S_B = S_{\bar{B}} - s_d$, $S_C = S_{\bar{C}} + s_p + s_d$. Affinché sia $S_A = S_B = S_C$, troviamo $S_{\bar{A}} - S_{\bar{C}} = 2s_p + s_d = 6q + 5$, $S_{\bar{B}} - S_{\bar{C}} = s_p + 2s_d = 6q + 4$.

  Risolvendo per s_p e s_d, si ottiene $s_p = 2q + 2$ e $s_d = 2q + 1$. Ora si tratta di trovare una scelta dei sottoinsiemi di A e B da spostare in C che soddisfi queste condizioni. Considerando i possibili resti della divisione di q per 3, dobbiamo studiare i seguenti casi:

  - $q = 3s$: abbiamo $s_p = 6s + 2$, $s_d = 6s + 1$. Dato che $(6s + 2)$ è pari, $(6s + 1)$ è dispari e nessuno dei due può essere multiplo di 3, basta eliminare $(6s + 2)$ da A e $(6s + 1)$ da B. Quindi tutti i numeri della forma $n = 36s + 8$ sono selvaggi, e una possibile scelta per A, B e C è $A = \bar{A} \setminus \{6s + 2\}$, $B = \bar{B} \setminus \{6s + 1\}$ $C = \bar{C} \cup \{6s + 1, 6s + 2\}$
  - $q = 3s + 1$: abbiamo $s_p = 6s + 4$, $s_d = 6s + 3$. Per s_p vale il discorso di prima, mentre s_d non appartiene a $\bar{B}$. Possiamo però scrivere $s_d = (6s - 5) + 1 + 7$, con $(6s - 5)$ appartenente a $\bar{B}$. Quindi, se $s \geq 3$, $n = 36s + 20$ è selvaggio e possiamo prendere $A = \bar{A}\ \{6s+4\}$, $B = \bar{B}\ \{1, 7, 6s-5\}$, $C = \bar{C} \cup \{1, 7, 6s-5, 6s+4\}$

    Rimangono esclusi tre casi:

    - $s = 0$: si ha $s_d = 3$ che non può essere scritto come somma di interi dispari non multipli di 3. Quindi $n = 20$ non è selvaggio.
    - $s = 1$: qui abbiamo $s_d = 9$, che di nuovo non può essere scritto come somma di interi dispari non multipli di 3. Quindi $n = 56$ non è selvaggio.
    - $s = 2$: qui $s_d = 15$ e la conclusione è la stessa: $n = 92$ non è selvaggio.
  - $q = 3s + 2$: abbiamo $s_p = 6s + 6$, $s_d = 6s + 5$. Questa volta s_d è dispari e non divisibile per 3. Scrivendo $s_p = (6s + 4) + 2$, ricaviamo subito che il numero $n = 36s + 32$ è selvaggio. Una scelta per A, B, C è $A = \bar{A} \setminus \{2, 6s+4\}$, $B = \bar{B} \setminus \{6s+5\}$, $C = \bar{C} \cup \{2, 6s+4, 6s+5\}$
- $n = 12q - 1$: $[n/2] = 6q-1$, $[n/6] = 2q-1$, $[(n+1)/2] = 6q$, $[(n+3)/6] = 2q$, $[n/3] = 4q-1$. Quindi abbiamo $S_{\bar{A}} = 24q^2$, $S_{\bar{B}} = 24q^2$, $S_{\bar{C}} = 24q^2 - 6q$. Procedendo come nel caso precedente, troviamo $S_{\bar{A}} - S_{\bar{C}} = 2s_p + s_d = 6q$, $S_{\bar{B}} - S_{\bar{C}} = s_p + 2s_d = 6q$, da cui si ricava $s_p = s_d = 2q$. Consideriamo anche in questo caso i possibili resti della divisione di q per 3:
  - $q = 3s$: abbiamo $s_p = s_d = 6s$. Possiamo scrivere $s_p = (6s - 2) + 2$ e $s_d = (6s - 1) + 1$. Quindi $n = 36s - 1$ è selvaggio per $s \geq 1$. Una scelta per A, B, C è $A = \bar{A} \setminus \{2, 6s-2\}$, $B = \bar{B} \setminus \{1, 6s-1\}$, $C = \bar{C} \cup \{1, 2, 6s-2, 6s-1\}$
  - $q = 3s + 1$: qui $s_p = s_d = 6s + 2$. Possiamo scrivere $s_d = 1 + (6s + 1)$, scoprendo così che $n = 36s + 11$ è selvaggio se $s \geq 1$, con la scelta $A = \bar{A} \setminus \{6s+2\}$, $B = \bar{B} \setminus \{1, 6s+1\}$, $C = \bar{C} \cup \{1, 6s+1, 6s+2\}$. Per $s = 0$ si trova $n = 11$, che non è selvaggio.

– $q = 3s + 2$: $s_p = s_d = 6s + 4$. Con $s_d = (6s - 1) + 5$, abbiamo che $n = 36s + 23$ è selvaggio se $s \geq 2$ con la scelta $A = \bar{A} \setminus \{6s+4\}$, $B = \bar{B} \setminus \{5, 6s-1\}$, $C = \bar{C} \cup \{5, 6s+4, 6s-1\}$. Se $s = 0$ si ha $s_d = 4$ che non può essere realizzato. Con $s = 1$ si trova $s_d = 10$ che non può essere realizzato.

- $n = 12q + 3$: $[n/2] = 6q+1$, $[n/6] = 2q$, $[(n+1)/2] = 6q+2$, $[(n+3)/6] = 2q+1$, $[n/3] = 4q+1$. Quindi abbiamo $\bar{S}_A = 24q^2 + 12q + 2$, $\bar{S}_B = 24q^2 + 12q + 1$, $\bar{S}_C = 24q^2 + 18q + 3$. Quindi si trova che è sempre $S_C > S_A$, $S_C > S_B$. Di conseguenza non esistono numeri selvaggi della forma $n = 12q + 3$.

Riassumendo, la condizione necessaria e sufficiente affinché n sia selvaggio può essere espressa in termini del quoziente $s = [n/36]$ e del resto $r = n \bmod 36$ della divisione di n per 36:

- $r = 8$: $A = \bar{A} \setminus \{6s + 2\}$, $B = \bar{B} \setminus \{6s + 1\}$, $C = \bar{C} \cup \{6s + 1, 6s + 2\}$
- $r = 11, s \geq 1$: $A = \bar{A} \setminus \{6s + 2\}$, $B = \bar{B} \setminus \{1, 6s + 1\}$, $C = \bar{C} \cup \{1, 6s + 1, 6s + 2\}$
- $r = 20, s \geq 3$: $A = \bar{A} \setminus \{6s+4\}$, $B = \bar{B} \setminus \{1, 7, 6s-5\}$, $C = \bar{C} \cup \{1, 7, 6s-5, 6s+4\}$
- $r = 23, s \geq 2$: $A = \bar{A} \setminus \{6s + 4\}$, $B = \bar{B} \setminus \{5, 6s - 1\}$, $C = \bar{C} \cup \{5, 6s + 4, 6s - 1\}$
- $r = 32$ $A = \bar{A} \setminus \{2, 6s + 4\}$, $B = \bar{B} \setminus \{6s + 5\}$, $C = \bar{C} \cup \{2, 6s + 4, 6s + 5\}$
- $r = 35$ $A = \bar{A} \setminus \{2, 6s-2\}$, $B = \bar{B} \setminus \{1, 6s-1\}$, $C = \bar{C} \cup \{1, 2, 6s-2, 6s-1\}$

E bravo ***Francesco***: lettori, o meglio solutori, nuovi, ma non alle prime armi. Ci scusiamo solo del fatto che la conversione della sua soluzione potrebbe aver creato qualche problema, e ne approfittiamo per ricordarvi di mandarci le vostre soluzioni in formato editabile. Tornando al problema, il grandissimo ***.mau.***, in un breve comunicato, ci comunica:

> Guardando come sono composti i numeri triangolari e sapendo che il totale deve essere un multiplo di 6 (il fattore 3 per avere tre gruppi, il fattore 2 perché la somma di soli numeri pari è pari) si ha che n deve essere della forma
>
> $12k$
>
> $12k+3$
>
> $12k+8$
>
> $12k+11$
>
> Però se n è della forma $12k$, i soli multipli di 3 hanno somma $6k(4k+1)$ che è più di un terzo della somma totale $6k(12k+1)$, quindi in quel caso è impossibile (a meno che non si abbiano zero numeri, naturalmente. Sono o no un matematico?)
>
> p.s.: se ci sono zero numeri, sono tutti dispari oltre che tutti pari.

Comunicato che il Nostro non aveva bisogno di firmare, chiunque avrebbe riconosciuto un ragionamento del genere. Anche la soluzione di ***Mirhonf*** ci è piaciuta particolarmente:

> Dato un numero N, la somma dei numeri da 1 a N è $S = \frac{N(N+1)}{2}$. Se esiste una partizione dell'insieme dei numeri {1, 2 3,..., n} nei tre sottinsiemi sopra descritti, è evidente che la somma dei valori in ***A*** è pari alla somma dei valori in ***B*** che è pari alla somma dei valori in ***C*** che è pari a $\frac{S}{3} = \frac{N(N+1)}{6}$. Affinché sia possibile trovare una tale partizione è necessario che N(N+1) sia divisibile per 6.
>
> In realtà non basta. Infatti, poiché A contiene solo numeri pari, sommando i quali si può ottenere soltanto un numero pari, è necessario che S/3 sia divisibile per 2.
>
> Quindi la condizione necessaria (e sufficiente) affinché esista una partizione dell'insieme dei numeri {1, 2 3,..., n} nei tre sottinsiemi sopra descritti, è evidente che la somma dei valori in *A* è pari alla somma dei valori in *B* che è pari alla

somma dei valori in *C* che è pari a $\frac{S}{3}=\frac{N(N+1)}{6}$, è che N(N+1) sia divisibile esattamente per 12, in altre parole che il MCD tra N e (N+1) sia 12 o un multiplo di 12.

La condizione è anche sufficiente, infatti, consideriamo l'insieme B.

La somma dei numeri dispari è $S_B=\left(\frac{N+1}{2}\right)^2$ se N è dispari, $S_B=\left(\frac{N}{2}\right)^2$ se N è pari. Il primo valore è sempre maggiore di $\frac{S}{3}=\frac{N(N+1)}{6}$, il secondo lo è per N>2.

Quindi, per N>2, esisterà sempre un sottinsieme dei numeri dispari la cui somma è S/3. Se consideriamo l'insieme A, se N è pari, la somma dei numeri pari da 2 a N è $S_A=S-S_B=\frac{N(N+2)}{4}$ che è sempre maggiore di S/3; se N è dispari, $S_A=S-S_B=\frac{(N-1)(N+1)}{4}$ che è maggiore di S/3 per N>3.

Quindi, per N>3, esisterà sempre un sottinsieme dei numeri pari da 2 a N la cui somma è S/3 (purché, come detto sopra, S/3 sia pari). A questo punto, dato un numero N, basta verificare che N(N+1) sia divisibile per 12. Se lo è, N è un numero selvaggio, altrimenti non lo è.

Una volta stabilito che N è un numero selvaggio, come si fa a costruire gli insiemi A, B e C? Calcolo S/3. Poi considero l'insieme A; ci aggiungo il valore pari più grande possibile (sarà N oppure N–1), poi aggiungo il valore pari immediatamente minore (N–2 oppure N–3), se la somma così ottenuta è minore di S/3, continuo ad aggiungere il valore pari immediatamente minore, altrimenti tolgo il valore appena aggiunto e continuo ad aggiungere il valore pari immediatamente minore, ecc, sino ad avere come somma S/3. Analogamente per la costruzione di B.

Esempio:

N=23. Poiché N(N+1)=23·24=552 è multiplo di 12, N è un numero selvaggio. S/3=92.

Costruisco A. Comincio con il numero pari più grande: 22. Metto in A, 22, poi 20. La somma dei valori in A vale 42. Continuo aggiungendo 18: la somma dei valori in A ora vale 60. Continuo aggiungendo 16: la somma dei valori in A ora vale 76. Continuo aggiungendo 14: la somma dei valori in A ora vale 90. A questo punto, basta aggiungere 2 in A per ottenere che la somma dei suoi membri sia pari a 92.

A={2, 14, 16, 18, 20, 22}

Costruisco B. Comincio con 23. Metto in B 23, poi 21. La somma dei valori in B vale 44. Continuo aggiungendo 19: la somma dei valori in A ora vale 63. Continuo aggiungendo 17: la somma dei valori in B ora vale 80. Se aggiungessi 15 la somma dei valori in B supererebbe 92. Allo stesso modo non va bene neanche 13. Continuo aggiungendo 11: la somma dei valori in B ora vale 91. A questo punto, basta aggiungere 1 in B per ottenere che la somma dei suoi membri sia pari a 92.

B={1, 11, 17, 19, 21, 23}

In C metto tutti gli altri numeri:

C={3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15}.

Come dicevamo, le soluzioni che abbiamo ricevuto sono state molte, e tutte simpatiche ed interessanti. ***Actarus***, per esempio, proponeva una semplice teoria:

Condizione necessaria (ma non sufficiente) per ottenere un numero selvaggio è che il resto della divisione per 3 di questo numero sia uguale a 2.

> Condizione sufficiente (ma non necessaria) per ottenere un numero selvaggio è che possa essere scritto nella seguente forma: $8+36\cdot(k^2+k)$, dove k è un qualsiasi numero intero non negativo.
>
> In tal caso:
>
> L'insieme C è formato dai primi $(3+6\cdot k)$ numeri interi, oltre a tutti i multipli di tre
>
> L'insieme B è formato dai restanti numeri dispari
>
> L'insieme A è formato dai restanti numeri pari
>
> Alcuni esempi di questo tipo di numeri selvaggi: 8, 80, 224, 440, 728, 1088, 1520, 2024, 2600, 3248, 3968, ecc…
>
> Ora faccio un esempio di numero selvaggio che non si può scrivere nella forma: $8+36\cdot(k^2+k)$. Il numero 680 è un numero selvaggio in cui: l'insieme C è formato da tutti i multipli di tre più i seguenti numeri: 1, 11, 50, 64, 101, l'insieme B è formato dai restanti numeri dispari, l'insieme A è formato dai restanti numeri pari. Eppure (680 – 8) non è nemmeno divisibile per 36.

In seguito abbozzava una dimostrazione. Anche ***BR1***, ***Rethi***, ***trentatre*** e ***MBG*** hanno soluzioni lunghe e dettagliate, mentre ***Camillo*** si è dato agli algoritmi:

> Sono un tipo algoritmico le formule mi piacciono ma con moderazione (soprattutto se non so ricavarle). Per cui dopo aver ricavato la sommatoria (scusandomi se ho trasformato n in N ma così è più evidente) da 1 a N con la nota formula $S=N\cdot(N+1)/2$ mi accingo a proseguire, in realtà, più velocemente, il mio algoritmo prevede un ciclo di "for" per cui la sommatoria viene incrementata via via col nuovo numero. Per soddisfare l'assunto delle tre partizioni uguali è evidente che la divisione della sommatoria per 3 deve dare un risultato esatto (R): modulo(S/3)=0.
>
> Questo risultato esatto deve inoltre essere pari, se fosse dispari la partizione A (solo numeri pari) non potrebbe essere riempita.
>
> La partizione C deve contenere tutti i numeri divisibili per 3 per cui la loro somma non deve eccerere il risultato R cosa che avviene quando N è multiplo esatto di 3, dunque anche questi vanno scartati.
>
> Quelli che restano sono papabili a selvaggi, la loro collocazione nella sequenza dei numeri naturali segue un certo ritmo: a partire dall'8 dopo 3 un'altro è papabile poi dopo 9 per ripetersi all'infinito, ogni 3 poi 9 e così via. 8,11,20,23,32,35,44,47,56 ecc.
>
> Ora non tutti possono definirsi selvaggi o meglio dopo il 95 compreso lo sono tutti, di quelli precedenti sei non lo sono (mi piace 'sei-sono') e precisamente: 11,20,23,56,59 e 92.
>
> Il mio ragionamento, fuor d'algoritmo, è perché cercare di riempire le partizioni A e B non tolgo l'eccesso. Metto tutti i pari senza i multipli di 3 in A ed i dispari in B poi vedo di quanto eccedono e se posso togliere quest'eccedenza con quelli che ho nella partizione.
>
> A proposito le eccedenze di questi papabili sono per i numeri pari tutti i pari a coppie: 2,2,4,4,6,6 ecc. per i dispari invece i numeri consecutivi 1,2,3,4 ecc.
>
> La partizione A è sempre risolvibile perché si riesce a formare qualunque numero pari da togliere usando uno o più numeri pari.
>
> Purtroppo non è così con la partizione B di soli dispari che nei 6 casi suddetti non si riesce a togliere quello che si dovrebbe. La differenza tra quello che contengono e quello che dovrebbero contenere è: 2,3,4,9,10 e 15, questi numeri non si riescono a formare sommando solo dei dispari con escluso i multipli di 3.
>
> I primi numeri selvaggi sono quindi:8,32,35,44,47,68,71,80,83,95,104,107....
>
> Lo so si voleva "costruire le tre partizioni: non per tentativi ma con metodo" accettatemi cosi come sono...

Ma certo, anzi, noi di RM siamo la prima conferma non solo che il mondo è bello perché è vario, ma anche che non è necessario essere Grandi Matematici per divertirsi con la matematica. Ed ora vediamo la soluzione di un altro nuovo solutore, ***Gerardo***:

Sia “n” un intero positivo.

Siano gli insiemi così definiti:

$S_n = \{1,2,3,\ldots\ldots,n-1,n\}$

$A \subset S_n \quad \text{t.c.} \quad \forall\, a \in A \quad a \equiv 0 \bmod(2) \ \wedge\ a \not\equiv 0 \bmod(3)$

$B \subset S_n \quad \text{t.c.} \quad \forall\, b \in B \quad b \equiv 1 \bmod(2) \ \wedge\ b \not\equiv 0 \bmod(3)$

$C = S_n \setminus (A \cup B)$

Si chiede che esista “N” intero positivo tale che:

$$\sum_{a\in A} a = \sum_{b\in B} b = \sum_{c\in C} c = N$$

L’idea generale sarà di far dipendere A e B da C. Riscrivo il problema osservando:

$A \subset S_n \quad \text{t.c.} \quad \forall\, a \in A \quad a \equiv 2 \bmod(6) \ \vee\ a \equiv 4 \bmod(6)$

$B \subset S_n \quad \text{t.c.} \quad \forall\, b \in B \quad b \equiv 1 \bmod(6) \ \vee\ b \equiv 5 \bmod(6)$

Questa osservazione è anche il germe per una generalizzazione del problema che farò nelle conclusioni. Inizio con l’osservare che se tale “N” esiste allora:

$$3\,N = N + N + N = \sum_{a\in A} a + \sum_{b\in B} b + \sum_{c\in C} c = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Poiché N è intero positivo $\Leftrightarrow 3|n \ \vee\ 3|(n+1)$ e quindi $N = \frac{n\,(n+1)}{6}$. L’insieme C a sua volta è l’unione di due insiemi disgiunti: R l’insieme dei “restanti” ed M l’insieme dei “multipli di 3”.

$R = \{r \in C : r \not\equiv 0 \bmod(3)\} = \{r \in C : r \equiv 2 \bmod(6) \vee r \equiv 4 \bmod(6) \vee r \equiv 1 \bmod(6) \vee r \equiv 5 \bmod(6)\}$ $M = \{m \in C : r \equiv 0 \bmod(3)\} = \{r \in C : r \equiv 0 \bmod(6) \vee r \equiv 3 \bmod(6)\ \}$

$C = R \cup M$

$$N = \sum_{c\in C} c = \sum_{r\in R} r + \sum_{m\in M} m \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{r\in R} r = N - \sum_{m\in M} m$$

$$\sum_{m\in M} m = \sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor} (3k) = 3\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor} k$$

Sostituendo nella precedente:

$$\sum_{r\in R} r = N - 3\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor} k = \frac{n\,(n+1)}{6} - 3\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor} k$$

Si presentano i due casi:

Se $3|n$ ovvero esiste “l“ intero positivo: $n = 3l$ pertanto $\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{3\,l}{3}\right\rfloor = l$

$$\sum_{r\in R} r = \frac{n\,(n+1)}{6} - 3\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor} k = \frac{3l\,(3l+1)}{6} - 3\sum_{k=1}^{l} k = \frac{l\,(3l+1)}{2} - 3\,\frac{l\,(l+1)}{2} = -l$$

Ma $l \geq 1$ quindi Assurdo!

Se $3|(n+1)$ ovvero esiste “l“ intero positivo: $n = 3\,l + 2$ pertanto $\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{3\,l+2}{3}\right\rfloor = \left\lfloor l + \frac{2}{3}\right\rfloor = l$

$$\sum_{r\in R} r = \frac{n\,(n+1)}{6} - 3\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{3}\right] = l+1} k = \frac{(3l+2)\,(3l+3)}{6} - 3\sum_{k=1}^{l} k = \frac{(3l+2)\,(l+1)}{2} - 3\,\frac{l\,(l+1)}{2}$$

Quindi: se "n" è selvaggio allora $n \equiv 2 \bmod(3)$

Scomponiamo ulteriormente R (l'insieme dei restanti) nei suoi due sottoinsiemi dei pari (che chiamerò P) e dei dispari (che chiamerò D):

$$P = \{p \in R : p \equiv 0 \bmod(2)\} = \{p \in S_n \backslash A : p \equiv 2 \bmod(6) \vee p \equiv 4 \bmod(6)\}$$

$$D = \{d \in R : d \equiv 1 \bmod(2)\} = \{d \in S_n \backslash B : d \equiv 1 \bmod(6) \vee d \equiv 5 \bmod(6)\}$$

Questo porta a concludere:

$$A \cup P = \{x \in S_n : x \equiv 2 \bmod(6) \ \vee \ x \equiv 4 \bmod(6)\}$$

$$B \cup D = \{y \in S_n : y \equiv 1 \bmod(6) \ \vee \ y \equiv 5 \bmod(6)\}$$

È qui che uso l'idea iniziale di far dipendere A e B da C (più precisamente dai due sottoinsiemi disgiunti P e D di $R \subset C$)

$$\sum_{t\in A\cup P} t = \sum_{a\in A} a + \sum_{p\in P} p \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{p\in P} p = \sum_{t\in A\cup P} t - N$$

$$\sum_{s\in B\cup D} s = \sum_{b\in B} b + \sum_{d\in D} d \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{d\in D} d = \sum_{s\in B\cup D} s - N$$

Osservazione: se conoscessi P e D tali da soddisfare le due equazioni precedenti allora il problema sarebbe risolto! Infatti in A metteremo tutti i pari non multipli di 3 non contenuti in P ed in B metteremo tutti i dispari non multipli di 3 non contenuti in D. L'interessante, nelle equazioni precedenti, consiste nel fatto che le somme:

$$\sum_{t\in A\cup P} t \qquad \text{ed} \qquad \sum_{s\in B\cup D} s$$

sono direttamente calcolabili.

$$\sum_{t\in A\cup P} t = \sum_{\substack{j=1 \\ j\equiv 2 \bmod(6)}}^{n} j + \sum_{\substack{k=1 \\ k\equiv 4 \bmod(6)}}^{n} k$$

$$\sum_{s\in B\cup D} s = \sum_{\substack{j=1 \\ j\equiv 1 \bmod(6)}}^{n} j + \sum_{\substack{k=1 \\ k\equiv 5 \bmod(6)}}^{n} k$$

Per esplicitare queste sommatorie occorre suddividere il problema in due casi: "l" è intero pari oppure dispari.

$\boldsymbol{l = 2g}$ ***con g intero positivo***: $\boldsymbol{n = 3l + 2 = 6g + 2}$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\equiv 2 \bmod(6)}}^{n} j = \sum_{j=0}^{g} (6j+2) = (g+1)(3g+2) \qquad \wedge \qquad \sum_{\substack{k=1 \\ k\equiv 4 \bmod(6)}}^{n} j = \sum_{k=0}^{g-1} (6k+4) = g\,(3g+1)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\equiv 1 \bmod(6)}}^{n} j = \sum_{j=0}^{g} (6j+1) = (g+1)(3g+1) \qquad \wedge \qquad \sum_{\substack{k=1 \\ k\equiv 5 \bmod(6)}}^{n} j = \sum_{k=0}^{g-1} (6k+5) = g\,(3g+2)$$

$$\sum_{t\in A\cup P} t = \sum_{\substack{j=1 \\ j\equiv 2 \bmod(6)}}^{n} j + \sum_{\substack{k=1 \\ k\equiv 4 \bmod(6)}}^{n} k = (g+1)(3g+2) + g\,(3g+1) = 2 + 6g + 6g^2$$

$$\sum_{s\in B\cup D} s = \sum_{\substack{j=1\\ j\equiv 1 \bmod(6)}}^{n} j + \sum_{\substack{k=1\\ k\equiv 5 \bmod(6)}}^{n} k = (g+1)(3g+1) + g\,(3g+2) = 1 + 6g + 6g^2$$

$$N = \frac{n\,(n+1)}{6} = \frac{(6g+2)(6g+3)}{6} = 1 + 5g + 6g^2$$

$$\sum_{p\in P} p = \sum_{t\in A\cup P} t - N = 2 + 6g + 6g^2 - (1 + 5g + 6g^2) = 1 + g$$

$$\sum_{d\in D} d = \sum_{s\in B\cup D} s - N = 1 + 6g + 6g^2 - (1 + 5g + 6g^2) = g$$

Il problema dunque si riduce a trovare due insiemi P e D (definiti precedentemente) tali che:

$$S1: \begin{cases} n = 6g + 2 \\ \sum_{p\in P} p = 1 + g \\ \sum_{d\in D} d = g \end{cases}$$

L'idea è di procedere al contrario: trovando le soluzioni del sistema S1 vedremo quali "n" verranno prodotti. Siano gli insiemi di interi così definiti:

$$S2: \begin{cases} \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\dots, \alpha_s\} & t.c.\ \forall\, i \neq j\ \ \alpha_i \neq \alpha_j \\ \{\beta_1, \beta_2, \dots\dots, \beta_r\} & t.c.\ \forall\, i \neq j\ \ \beta_i \neq \beta_j \\ \{\gamma_1, \gamma_2, \dots\dots, \gamma_h\} & t.c.\ \forall\, i \neq j\ \ \gamma_i \neq \gamma_j \\ \{\delta_1, \delta_2, \dots\dots, \delta_q\} & t.c.\ \forall\, i \neq j\ \ \delta_i \neq \delta_j \end{cases}$$

L'insieme P è costituito da elementi $x \equiv 2{,}4 \bmod(6)$ mentre l'insieme D da elementi $y \equiv 1{,}5 \bmod(6)$ pongo:

$$D = \{6\alpha_1 + 1, 6\alpha_2 + 1, \dots, 6\alpha_s + 1, 6\beta_1 + 5, 6\beta_2 + 5, \dots, 6\beta_r + 5\}$$
$$P = \{6\gamma_1 + 2, 6\gamma_2 + 2, \dots, 6\gamma_h + 2, 6\delta_1 + 4, 6\delta_2 + 4, \dots, 6\delta_q + 4\}$$

$$\sum_{d\in D} d = (6\alpha_1 + 1) + (6\alpha_2 + 1) + \cdots + (6\alpha_s + 1) + (6\beta_1 + 5) + (6\beta_2 + 5) + \cdots + (6\beta_r + 5)$$
$$= 6(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r) + s + 5r = g$$

$$\sum_{p\in P} p = (6\gamma_1 + 2) + (6\gamma_2 + 2) + \cdots + (6\gamma_h + 2) + (6\delta_1 + 4) + (6\delta_2 + 4) + \cdots + (6\delta_q + 4)$$
$$= 6(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_h + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_q) + 2h + 4q = 1 + g$$

Posto dunque:

$$g = 6(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r) + s + 5r$$

Risolvere il problema equivale a trovare la/le soluzioni dell'equazione:

$$6(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r) + s + 5r + 1$$
$$= 6(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_h + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_q) + 2h + 4q$$

Con le condizioni date dal sistema S2. Sia:

$$\begin{cases} s + 5r + 1 \equiv \nu \ \ mod(6) \\ 2h + 4q \quad\ \equiv \mu \ \ mod(6) \end{cases} \text{ ovvero: } \begin{cases} s + 5r + 1 = 6a + \nu \\ 2h + 4q \quad\ = 6b + \mu \end{cases} \text{ dove ho posto: } \begin{cases} a = \left\lfloor \frac{s+5r+1}{6} \right\rfloor \\ b = \left\lfloor \frac{2h+4q}{6} \right\rfloor \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione precedente e raccogliendo:

$$6(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r) + 6a + \nu$$
$$= 6(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_h + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_q) + 6b + \mu$$

$$6(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r + a) + \nu$$
$$= 6(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_h + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_q + b) + \mu$$

L'equazione ha soluzione se e soltanto se:

$$S3: \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\dots+\ \alpha_s+\beta_1+\beta_2+\dots+\ \beta_r+a=\gamma_1+\gamma_2+\dots+\ \gamma_h+\delta_1+\delta_2+\dots+\ \delta_q+b \\ \nu=\mu \end{cases}$$

Questo perché $\nu\ e\ \mu$ sono le classi di resto cioè: $\begin{cases} 0\le\nu<6 \\ 0\le\mu<6 \end{cases}$

Risolvere la prima equazione del sistema S3 non è un problema: infatti, a meno delle condizioni del sistema S1, le variabili intere $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k\ e\ \delta_k$ sono libere di essere scelte a piacere. Quindi, momentaneamente, ci concentreremo sulla seconda equazione: $\nu=\mu$ che, comunque, non creerà problemi nel risolverla.

$2h+4q\ =6b+\mu\ \ \Leftrightarrow\ \ 2(h+2q-3b)=\mu\ \ \Rightarrow 2|\mu$ pertanto pongo: $\mu=2\eta$ va risolto il sistema:

$$\begin{cases} s+5r+1\equiv 2\eta\ \ mod(6) \\ 2h+4q\ \ \ \ \equiv 2\eta\ \ mod(6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s+5r+1\equiv 2\eta\ \ mod(6) \\ h+2q\ \ \ \ \ \equiv\ \eta\ \ mod(3) \end{cases}$$

È un sistema di congruenze le cui soluzioni sono: (è sufficiente la buon vecchia calcolatrice)

Se $\eta=0\ \Rightarrow \begin{cases} h\ \ \ \ \ \equiv q\ \ mod(3) \\ s+1\equiv r\ \ mod(6) \end{cases}$

Se $\eta=1\ \Rightarrow \begin{cases} h+2\equiv q\ \ mod(3) \\ s+5\ \equiv r\ \ mod(6) \end{cases}$

Se $\eta=2\ \Rightarrow \begin{cases} h+1\equiv q\ \ mod(3) \\ s+3\ \equiv r\ \ mod(6) \end{cases}$

Vediamo alcune soluzioni particolari del problema iniziale:

Un caso di $\eta=1$ scegliendo: $\begin{cases} s=h=1 \\ r=q=0 \end{cases}$ la condizione $\nu=\mu$ è soddisfatta.

È necessario soddisfare anche la prima equazione del sistema S3 cioè: $\alpha_1+a=\gamma_1+b$

$$\begin{cases} a=\left\lfloor\frac{s+5r+1}{6}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{2}{6}\right\rfloor=0 \\ b=\ \left\lfloor\frac{2h+4q}{6}\right\rfloor\ \ \ =\left\lfloor\frac{2}{6}\right\rfloor=0 \end{cases}\ \ e\ \ quindi\ \ \alpha_1$$

$$=\gamma_1\ \ pertanto\ \begin{cases} g=6\alpha_1+1 \\ n=6g+2=36\alpha_1+8 \\ \mathrm{D}=\{6\alpha_1+1\} \\ \mathrm{P}=\{6\gamma_1+2\}=\{6\alpha_1+2\} \end{cases}\ \ \forall\,\alpha_1\in\mathbb{N}$$

Come esempio numerico si scelga $\alpha_1=0$ si avrà:

$$\begin{cases} g=1 \\ n=8 \\ D=\{1\} \\ P=\{2\} \\ M=\{3,6\} \\ C=P\cup D\cup M=\{1,2,3,6\} \\ A=\{4,8\} \\ B=\{5,7\} \\ N=1+5g+6g^2=12 \end{cases}$$

Un caso di $\eta=0$ scegliendo: $\begin{cases} s=0 \\ r=h=q=1 \end{cases}$ la condizione $\nu=\mu$ è soddisfatta. È necessario soddisfare anche la prima equazione del sistema S3 cioè: $\beta_1+a=\gamma_1+\delta_1+b$

$$\begin{cases} a = \left\lfloor \frac{s+5r+1}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6}{6} \right\rfloor = 1 \\ b = \left\lfloor \frac{2h+4q}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6}{6} \right\rfloor = 1 \end{cases} \Longrightarrow \beta_1 = \gamma_1 + \delta_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g = 6\beta_1 + 5 = 6(\gamma_1 + \delta_1) + 5 \\ n = 6g + 2 = 36(\gamma_1 + \delta_1) + 32 \\ \mathrm{D} = \{6(\gamma_1 + \delta_1) + 5\} \\ \mathrm{P} = \{6\gamma_1 + 2, 6\delta_1 + 4\} \end{cases} \quad \forall \ \gamma_1, \delta_1 \in \mathbb{N}$$

Come esempio numerico si scelga $\gamma_1 = \delta_1 = 0$ si avrà:

$$\begin{cases} g = 5 \\ n = 32 \\ D = \{5\} \\ P = \{2, 4\} \\ M = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\} \\ C = P \cup D \cup M = \{2, 3, 4, 5\ 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\} \\ A = \{8, 10, 14, 16, 20, 22, 26, 28, 32\} \\ B = \{1,7, 11, 13, 17, 19,23, 25, 29, 31\} \\ N = 1 + 5g + 6g^2 = 176 \end{cases}$$

Analogamente è possibile fare per un caso di $\eta = 2$. Nello stesso e identico modo tratterò il caso "l dispari"

$\boldsymbol{l = 2g + 1}$ ***con g intero positivo***: $\boldsymbol{n = 3l + 2 = 6g + 5}$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\equiv 2 \bmod(6)}}^{n} j = \sum_{j=0}^{g} (6j + 2) = (g + 1)(3g + 2) \quad \wedge \quad \sum_{\substack{k=1 \\ k\equiv 4 \bmod(6)}}^{n} j$$

$$= \sum_{k=0}^{g} (6k + 4) = (g + 1)\ (3g + 4)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\equiv 1 \bmod(6)}}^{n} j = \sum_{j=0}^{g} (6j + 1) = (g + 1)(3g + 1) \quad \wedge \quad \sum_{\substack{k=1 \\ k\equiv 5 \bmod(6)}}^{n} j$$

$$= \sum_{k=0}^{g} (6k + 5) = (g + 1)\ (3g + 5)$$

$$\sum_{t\in A\cup P} t = \sum_{\substack{j=1 \\ j\equiv 2 \bmod(6)}}^{n} j + \sum_{\substack{k=1 \\ k\equiv 4 \bmod(6)}}^{n} k = (g + 1)(3g + 2) + (g + 1)\ (3g + 4) = 6 + 12g + 6g^2$$

$$\sum_{s\in B\cup D} s = \sum_{\substack{j=1 \\ j\equiv 1 \bmod(6)}}^{n} j + \sum_{\substack{k=1 \\ k\equiv 5 \bmod(6)}}^{n} k = (g + 1)(3g + 1) + (g + 1)\ (3g + 5) = 6 + 12g + 6g^2$$

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{n}\ (\mathrm{n} + 1)}{6} = \frac{(6g + 5)(6g + 6\ )}{6} = 5 + 11g + 6g^2$$

$$\sum_{p\in P} \mathrm{p} = \sum_{t\in A\cup P} \mathrm{t} - \mathrm{N} = 6 + 12g + 6g^2 - (5 + 11g + 6g^2) = 1 + g$$

$$\sum_{d\in D} \mathrm{d} = \sum_{s\in B\cup D} \mathrm{s} - \mathrm{N} = 6 + 12g + 6g^2 - (5 + 11g + 6g^2) = 1 + g$$

Il problema dunque si riduce (come prima) a trovare due insiemi P e D tali che:

$$S3: \begin{cases} n = 6g + 5 \\ \sum_{\mathrm{p}\in \mathrm{P}} \mathrm{p} = 1 + g \\ \sum_{\mathrm{d}\in \mathrm{D}} \mathrm{d} = 1 + g \end{cases}$$

Non riscrivo tutto il procedimento poiché è IDENTICO al caso precedente. Mi focalizzerò su alcuni punti:

$$g = 6(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r) + s + 5r - 1$$

Ponendo: $\begin{cases} s + 5r & \equiv \nu \ mod(6) \\ 2h + 4q & \equiv \mu \ mod(6) \end{cases}$ ovvero: $\begin{cases} s + 5r & = 6a + \nu \\ 2h + 4q & = 6b + \mu \end{cases}$ dove ho posto: $\begin{cases} a = \left\lfloor \frac{s+5r}{6} \right\rfloor \\ b = \left\lfloor \frac{2h+4q}{6} \right\rfloor \end{cases}$

Bisognerà sempre risolvere il sistema:

$$S4: \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r + a = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_h + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_q + b \\ \nu = \mu \end{cases}$$

Come prima si risolverà prima $\nu = \mu$

$$\begin{cases} s + 5r & \equiv 2\eta \ mod(6) \\ 2h + 4q & \equiv 2\eta \ mod(6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s + 5r \equiv 2\eta \ mod(6) \\ h + 2 \equiv \ \eta \ mod(3) \end{cases}$$

È un sistema di congruenze le cui soluzioni sono: (è sufficiente la buon vecchia calcolatrice)

Se $\eta = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} h \equiv q \ \ mod(3) \\ \mathrm{s} \equiv r \ \ mod(6) \end{cases}$

Se $\eta = 1 \ \Rightarrow \begin{cases} h + 2 \equiv q \ \ mod(3) \\ \mathrm{s} + 4 \ \equiv r \ \ mod(6) \end{cases}$

Se $\eta = 2 \ \Rightarrow \begin{cases} h + 1 \equiv q \ \ mod(3) \\ \mathrm{s} + 2 \ \equiv r \ \ mod(6) \end{cases}$

Vediamo alcune soluzioni particolari del problema iniziale. Un caso di $\eta = 0$ scegliendo: $\begin{cases} s = r = 1 \\ h = q = 1 \end{cases}$ la condizione $\nu = \mu$ è soddisfatta. È necessario soddisfare anche la prima equazione del sistema S4 cioè: $\alpha_1 + \beta_1 + a = \gamma_1 + \delta_1 + b$

$\begin{cases} a = \left\lfloor \frac{s+5r}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6}{6} \right\rfloor = 1 \\ b = \left\lfloor \frac{2h+4q}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6}{6} \right\rfloor = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} g = 6(\alpha_1 + \beta_1) + 5 \\ n = 6g + 5 = 36(\alpha_1 + \beta_1) + 35 \\ \mathrm{D} = \{6\alpha_1 + 1, 6\beta_1 + 5\} \\ \mathrm{P} = \{6\gamma_1 + 2, 6\delta_1 + 4\} \end{cases}$ $\forall \ \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \in$ $\mathbb{N}$ $\ \alpha_1 + \beta_1 = \gamma_1 + \delta_1$Come esempio numerico si scelga $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 = 0$ si avrà:

$$\begin{cases} g = 5 \\ n = 35 \\ D = \{1, 5\} \\ P = \{2, 4\} \\ M = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33\} \\ C = P \cup D \cup M = \{1,2,3,4,5\ 6,9,12,15,18,21,24,27,30\} \\ A = \{8, 10, 14, 16, 20, 22, 26, 28, 32, 34\} \\ B = \{7, 11, 13, 17, 19,23, 25, 29, 31, 35\} \\ N = 5 + 11g + 6g^2 = 210 \end{cases}$$

Conclusione: molto interessante è la seguente generalizzazione di "Ma a cosa servono?". Siano interi positivi i seguenti: "*n*, *w* , *k* ed $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$". Siano alcune delle classi di resto modulo *w* (cioè alcuni interi da *0* a *w–1*) riordinate in modo arbitrario:

$\{r_{1,1}, r_{1,2}, \dots, r_{1,s_1}, r_{2,1}, r_{2,2}, \dots, r_{2,s_2}, \dots, r_{k,1}, r_{k,2}, \dots, r_{k,s_k}\}$ *dove* $\forall\, i,j,u,v \quad r_{i,j} = r_{u,v} \Leftrightarrow \begin{cases} i = u \\ j = v \end{cases}$ L'ultima condizione è solo per dire che considero le classi di resto tutte "distinte" cioè senza che possano ripetersi. Definisco gli insiemi:

$A_1 \subset \mathrm{S_n}$ t.c. $\forall\, \mathrm{a} \in A_1 \quad \mathrm{a} \equiv r_{1,1} \bmod(w) \ \vee\ \mathrm{a} \equiv r_{1,2} \bmod(w) \ \vee \dots \vee\ \mathrm{a} \equiv r_{1,s_1} \bmod(w)$

$A_2 \subset \mathrm{S_n}$ t.c. $\forall\, \mathrm{a} \in A_2 \quad \mathrm{a} \equiv r_{2,1} \bmod(w) \ \vee\ \mathrm{a} \equiv r_{2,2} \bmod(\mathrm{w}) \ \vee \dots \vee\ \mathrm{a} \equiv r_{2,s_2} \bmod(w)$

………………………………………………………………………………………………

$A_k \subset \mathrm{S_n}$ t.c. $\forall\, \mathrm{a} \in A_k \quad \mathrm{a} \equiv r_{k,1} \bmod(w) \ \vee\ \mathrm{a} \equiv r_{k,2} \bmod(w) \ \vee \dots \vee\ \mathrm{a} \equiv r_{k,s_k} \bmod(w)$

$C \subset \mathrm{S_n}$ t.c. $C = \mathrm{S_n} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{A_i} = \mathrm{S_n} \setminus (\mathrm{A_1} \cup \mathrm{A_2} \cup \dots \cup \mathrm{A_k})$

Esiste(?) un intero N (dipendente da n, w, k e dalla scelta delle classi di resto $r_{i,j}$) tale che:

$$\sum_{\mathrm{a_1} \in \mathrm{A_1}} \mathrm{a_1} = \sum_{\mathrm{a_2} \in \mathrm{A_2}} \mathrm{a_2} = \dots = \sum_{\mathrm{a_k} \in \mathrm{A_k}} \mathrm{a_k} = \sum_{\mathrm{c} \in \mathrm{C}} \mathrm{c} = \mathrm{N}$$

("Ma a cosa servono?" si ottiene ponendo: $w = 6$, $k = 2$, $r_{1,1} = 2$, $r_{1,2} = 4$, $r_{2,1} = 1$, $r_{2,2} = 5$). Usando le stesse idee dell'inizio si può osservare che:

$$(k+1)N = N + N + \dots + N = \sum_{\mathrm{a_1} \in \mathrm{A_1}} \mathrm{a_1} + \sum_{\mathrm{a_2} \in \mathrm{A_2}} \mathrm{a_2} + \dots + \sum_{\mathrm{a_k} \in \mathrm{A_k}} \mathrm{a_k} + \sum_{\mathrm{c} \in \mathrm{C}} \mathrm{c} = \sum_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{t} = \frac{\mathrm{n}\,(\mathrm{n}+1)}{2}$$

Poiché N è intero positivo $\Leftrightarrow (k+1) \mid \frac{n(n+1)}{2}$ e quindi $N = \frac{\mathrm{n}\,(\mathrm{n}+1)}{2(\mathrm{k}+1)}$

Chiaramente le idee usate in "Ma a cosa servono?" non sono sufficienti per una soluzione generale… ma si possono usare per una piccola estensione. Ad esempio supponendo che $k + 1 = p$ con p primo dispari: comporta nuovamente che $p|n \vee p|(n+1)$. Supponiamo che l'insieme C contenga tutti i multipli di p e che $p|w$: $\forall\, i,j \quad M.C.D.(r_{i,j}, p) = 1$ ovvero che tutte le classi di resto usate negli insiemi A_i siano coprime con p. A questo punto (come nel caso particolare) supponiamo che l'insieme C contenga solo i "restanti" (cioè gli interi che avanzano dagli insiemi A_i) e i multipli di p.

$R = \{r \in C : r \not\equiv 0 \bmod(p)\}$

$M = \{m \in C : r \equiv 0 \bmod(p)\}$

$C = R \cup M$

$$N = \sum_{\mathrm{c} \in \mathrm{C}} \mathrm{c} = \sum_{\mathrm{r} \in \mathrm{R}} \mathrm{r} + \sum_{\mathrm{m} \in \mathrm{M}} \mathrm{m} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{\mathrm{r} \in \mathrm{R}} \mathrm{r} = \mathrm{N} - \sum_{\mathrm{m} \in \mathrm{M}} \mathrm{m}$$

$$\sum_{\mathrm{m} \in \mathrm{M}} \mathrm{m} = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{p}\right]} (pk) = p \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{p}\right]} k$$

Sostituendo nella precedente:

$$\sum_{\mathrm{r} \in \mathrm{R}} \mathrm{r} = \mathrm{N} - p \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{p}\right]} k = \frac{\mathrm{n}\,(\mathrm{n}+1)}{2p} - p \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{p}\right]} k$$

Procedendo identicamente a quanto già fatto precedentemente:

Se $p|n$ ovvero esiste "l" intero positivo: $n = pl$ pertanto $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{p\,l}{p} \right\rfloor = l$

$$\sum_{r\in R} r = \frac{n\,(n+1)}{2p} - p\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{p}\right]} k = \frac{pl\,(pl+1)}{2p} - p\sum_{k=1}^{l} k = \frac{l\,(pl+1)}{2} - p\frac{l\,(l+1)}{2}$$
$$= -\frac{l(p-1)}{2}$$

Ma $l \geq 1$ e $p \geq 3$ quindi Assurdo!

Se $p|(n+1)$ ovvero esiste "l" intero positivo: $n = p\,l + p - 1$ pertanto $\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{p\,l+p-1}{p}\right\rfloor = \left\lfloor l + \frac{p-1}{p}\right\rfloor = l$

$$\sum_{r\in R} r = \frac{n\,(n+1)}{2p} - p\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{p}\right]} k$$
$$= \frac{(p\,l+p-1\,)\,(p\,l+p)}{2p} - p\sum_{k=1}^{l} k = \frac{(p\,l+p-1\,)\,(l+1)}{2} - p\frac{l\,(l+1)}{2}$$
$$= \frac{(1+l)(p-1)}{2}$$

Per come ho scelto di costruire C è chiaro che le $r_{i,j}$ saranno tutte (e non solo alcune) le classi di resto modulo w coprime con p. Definisco gli insiemi:

$P_1 \subset R$ t.c. $\forall x \in P_1 \quad x \equiv r_{1,1} \bmod(w) \ \vee \ x \equiv r_{1,2} \bmod(w) \ \vee \dots \vee \ x \equiv r_{1,s_1} \bmod(w)$

$P_2 \subset R$ t.c. $\forall x \in P_2 \quad x \equiv r_{2,1} \bmod(w) \ \vee \ x \equiv r_{2,2} \bmod(w) \ \vee \dots \vee \ x \equiv r_{2,s_1} \bmod(w)$

…

$P_k \subset R$ t.c. $\forall x \in P_k \quad x \equiv r_{k,1} \bmod(w) \ \vee \ x \equiv r_{k,2} \bmod(w) \ \vee \dots \vee \ x \equiv r_{k,s_k} \bmod(w)$

Tali che

$$R = \bigcup_{i=1}^{k} P_i = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k$$

Porta a concludere che:

$$A_1 \cup P_1 = \{x \in S_n : x \equiv r_{1,1} \bmod(w) \ \vee \ x \equiv r_{1,2} \bmod(w) \ \vee \dots \vee \ x \equiv r_{1,s_1} \bmod(w)\}$$
$$A_2 \cup P_2 = \{x \in S_n : x \equiv r_{2,1} \bmod(w) \ \vee \ x \equiv r_{2,2} \bmod(w) \ \vee \dots \vee \ x \equiv r_{2,s_1} \bmod(w)\}$$

……………………………………………………………………………………………

$$A_k \cup P_k = \{x \in S_n : x \equiv r_{k,1} \bmod(w) \ \vee \ x \equiv r_{k,2} \bmod(w) \ \vee \dots \vee \ x \equiv r_{k,s_k} \bmod(w)\}$$

Continuando in analogia:

$$\sum_{t\in A_1\cup P_1} t = \sum_{a\in A_1} a + \sum_{u\in P_1} u \iff \sum_{u\in P_1} u = \sum_{t\in A_1\cup P_1} t - N$$
$$\sum_{t\in A_2\cup P_2} t = \sum_{a\in A_2} a + \sum_{u\in P_2} u \iff \sum_{u\in P_2} u = \sum_{t\in A_2\cup P_2} t - N$$

………………………………………………………………………………

$$\sum_{t\in A_k\cup P_k} t = \sum_{a\in A_k} a + \sum_{u\in P_k} u \iff \sum_{u\in P_k} u = \sum_{t\in A_k\cup P_k} t - N$$

L'interessante, nelle equazioni precedenti, consiste nel fatto che le somme:

$$\sum_{t\in A_k\cup P_k} t$$

sono direttamente calcolabili.

$$\sum_{t\in A_1\cup P_1} t = \sum_{\substack{j_1=1\\ j_1\equiv r_{1,1} \bmod(w)}}^{n} j_1 + \sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\equiv r_{1,2} \bmod(w)}}^{n} j_2 + \dots + \sum_{\substack{j_{s_1}=1\\ j_{s_1}\equiv r_{1,s_1} \bmod(w)}}^{n} j_{s_1}$$

$$\sum_{t\in A_2\cup P_2} t = \sum_{\substack{j_1=1\\ j_1\equiv r_{2,1} \bmod(w)}}^{n} j_1 + \sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\equiv r_{2,2} \bmod(w)}}^{n} j_2 + \cdots + \sum_{\substack{j_{s_2}=1\\ j_{s_2}\equiv r_{2,s_2} \bmod(w)}}^{n} j_{s_2}$$

………………………………………………………………………

$$\sum_{t\in A_k\cup P_k} t = \sum_{\substack{j_1=1\\ j_1\equiv r_{k,1} \bmod(w)}}^{n} j_1 + \sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\equiv r_{k,2} \bmod(w)}}^{n} j_2 + \cdots + \sum_{\substack{j_{s_k}=1\\ j_{s_k}\equiv r_{k,s_k} \bmod(w)}}^{n} j_{s_k}$$

> Qui mi fermo poiché si può procedere analogamente con quanto già fatto nel caso particolare. Il mio scopo era mostrare una traccia per una piccola estensione.

Le nostre S&N hanno però quasi raggiunto le 20 pagine, ed è proprio ora di smetterla. Grazie anche a tutti gli altri che hanno scritto e scuse se non ho fatto in tempo a menzionarli. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

I vostri tre eroi si sono dovuti recare a Parigi con relativa urgenza e tornare indietro, basandosi su un affidabile aereo che, conscio dell'importanza del suo compito, ha percorso l'intero tragitto di andata e ritorno alla velocità massima. Il guaio è che oggi c'è un ventaccio che tira da Torino verso Parigi, e andrà avanti tutto il giorno.

Ottimisticamente, Doc sostiene che essendo favoriti nel viaggio di andata, tra andare e tornare impiegheranno meno tempo.

Pessimisticamente, Rudy sostiene che essendo sfavoriti nel viaggio di ritorno, in totale impiegheranno più tempo.

Dialetticamente, Alice sostiene che essendo sfavoriti una volta e favoriti l'altra, impiegheranno lo stesso tempo.

Secondo voi (ossia, matematicamente), chi ha ragione?

> *Secca ammetterlo, ma ha ragione Rudy. Anche se* sembra *che quello che ci avvantaggia all'andata sia pari a quello che ci svantaggia al ritorno (e quindi si possa pensare che il tempo impiegato sia lo stesso), pensate al fatto che (andando più veloci) siete avvantaggiati* per meno tempo *di quanto siate svantaggiati; quindi, in definitiva ci mettete più tempo.*

6. Pagina 46

Supponiamo sia $4^n(8k-1) = X^2 + Y^2 + Z^2$, con $X, Y, Z \in N$; per $n > 0$, i tre numeri X, Y, Z devono essere tutti pari, in quanto:

- Se uno e solo uno fosse dispari, la somma dei loro quadrati sarebbe dispari
- Se due fossero dispari, la somma dei loro quadrati sarebbe esprimibile come $(2k+1)^2 + (2l+1)^2 + (2m)^2 = 4(k^2 + k + l^2 + l + m^2) + 2$ e non sarebbe divisibile per 4.

Se $n > 1$ possiamo imporre:

$$\frac{X}{2} = X_1, \quad \frac{Y}{2} = Y_1, \quad \frac{Z}{2} = Z_2,$$

da cui si arriva all'equazione:

$$4^{n-1}(8k-1) = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2.$$

E a questa equazione è possibile applicare esattamente lo stesso ragionamento effettuato sopra.

Se $n > 2$, con posizione simile si arriva a $4^{n-2}(8k-1) = X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2$ per cui deve valere il medesimo ragionamento.

Applicando l'opportuno numero di volte quanto detto, si arriva alla conclusione che il numero $8k-1$ deve essere pari alla somma di tre quadrati:

$$8k-1 = x^2 + y^2 + z^2.$$

O uno di questi numeri è dispari, o lo sono tutti e tre (se nessuno o due numeri fossero dispari il risultato sarebbe pari, e $8k-1$ non lo è); ma il quadrato di un dispari si può esprimere sotto la forma:

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = [4n(n+1)] + 1$$

Consideriamo la parte tra parentesi quadre: sicuramente avrà un fattore 4, ma avrà anche un ulteriore fattore 2, dato che uno tra n e $n+1$ sarà pari; quindi il quadrato di un numero dispari darà sempre resto 1 se diviso per 8. Il quadrato di un numero pari quando viene diviso per 8 può dare resto 0 (se il numero è divisibile per 4) o 4 (se il numero non è divisibile per 4). Questo significa che se tutti i tre numeri x, y, z sono dispari, allora la somma dei loro quadrati ha resto 3 quando divisa per 8, menter se uno solo dei tre numeri è dispari, la somma dei loro quadrati darà, se divisa per 8, resto 1 o 5.

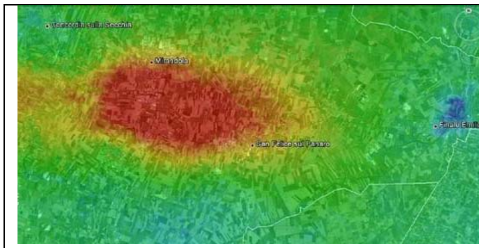
In nessun caso darà resto 7, come richiesto dall'ipotesi che abbiamo prospettato all'inizio.

Nota: È stato dimostrato che qualsiasi numero che *non* possa essere scritto nella forma $4^n(8k-1)$ è esprimibile come somma di tre o meno quadrati, ma la dimostrazione è decisamente complessa.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Magnifico Eulero

Il titolo non c'entra niente, o meglio rappresenta il punto di arrivo; in realtà eravamo partiti da un'immagine diventata piuttosto nota: la trovate riprodotta in figura.



7 *Dodici centimetri!*

La riconoscete? Nel caso ve ne foste dimenticati, si tratta dell'immagine del sollevamento (appunto, di dodici centimetri) conseguenza del terremoto in Emilia. Superato l'impatto emozionale, lo scrivente (Rudy) ha cominciato a fare un po' di conti[14].

La foto non è stata sicuramente scattata da un satellite geostazionario; rilievi del genere vengono fatti da satelliti in orbita bassa ma non troppo, e una buona stima (che facilita anche i calcoli) è dalle parti dei milleduecento chilometri di altezza. Il che significa che si è riusciti a misurare una differenza rispetto al giro prima del terremoto pari a *un decimilionesimo* della distanza in ballo. E anche supponendo un errore più o meno mezzo centimetro, tanto di cappello alla precisione.

La domanda che ci siamo posti quasi immediatamente è stata: ma come si fa a vedere le differenze tra due immagini? È tradizione che, nella più tenera infanzia, il primo contatto con una nota rivista di enigmistica[15] sia con la rubrica "Aguzzate la vista"; prendendola un po' più matematicamente, come si ricava la differenza tra due immagini?

La risposta più facile è "Spettro di Fourier, differenza tra i due, amplificazione, antitrasformata"[16]; resta però la vaga sensazione che qualcuno avrebbe potuto anche inventarsi qualcos'altro, con tutto il tempo avuto per pensarci.

E in effetti è vero: esistono altri metodi e quello che ci è sembrato più interessante è noto come ***Amplificazione Euleriana***, e confrontando il nome con il titolo dovreste capire il tremendo gioco di parole. Per prima cosa, cerchiamo di capire come mai si chiama così, e cominciamo capendo come *non* funziona.

Sapete come si fanno i cartoni animati? Quelli a passo uno, di una volta, quando Disney poteva permettersi un esercito di disegnatori sottopagati.

Per prima cosa disegnate lo sfondo, e lo tenete ben fermo; poi, disegnate il personaggio su un foglio di acetato, lo piazzate sullo sfondo e scattate la foto; su un altro acetato disegnate il personaggio leggermente spostato, piazzate e scattate, e avanti così; cambiando l'immagine ogni ventiquattresimo di secondo, *101 Dalmatians* (*La carica dei 101*, quello dove c'è un Rudy che fuma la pipa e che dura 74 minuti) richiede un qualcosa come 106560 disegni, anzi di più, se due personaggi (e quindi due fogli di acetato) si muovono contemporaneamente nella stessa scena[17]

In pratica, quello che fate è spostare il personaggio, tenendo fermo lo sfondo: un metodo possibile per rilevare il movimento in un filmato (digitale) diventa quindi il rispondere alla domanda: "Dove è finito il puntino che rappresenta la punta del naso di Rollie?" Se il naso di Rollie non è più dove era prima, vuol dire che Rollie si è spostato: una affermazione così pragmatica non poteva venire che da un torinese, e infatti il metodo è noto come *Metodo Lagrangiano*: in pratica, per rilevare il movimento seguite il punto;

[14] Si ringrazia Ugo che, avendo dato Astronomia, ha contribuito con alcuni dati numerici.

[15] È un mese che volevamo dirvelo, ma non trovavamo la scusa: *ci hanno copiato un problema!* Sia ben chiaro, la cosa non costituisce reato (da parte loro) ma motivo di vanto (da parte nostra).

[16] Almeno, è la prima che viene in mente a Rudy: l'ha usata per la tesi.

[17] La carica degli gnu ne *Il Re Leone* e la discesa dei tartari dalla montagna in *Mulan* sono fatti al computer. L'attraversamento di strada dei cuccioli davanti alla macchina di Crudelia DeMon no. E Pongo e Perdida ("Peggy" non ci è mai piaciuto) li fanno traversare a *dieci* per volta. Incredibile.

matematicamente non sarà facilissimo, ma usando un metodo cui ***J. Wang*** ha dato l'illuminante nome di *Filtro del Cartone Animato*, si riescono ad ottenere ottimi risultati.

È però possibile anche *lavorare al contrario*, e questo è noto come *Metodo Euleriano*: mi concentro su un punto fisso e, nel momento stesso nel quale cambia colore, vuol dire che qualcosa si è mosso[18].

Mettiamo un po' di matematica? Talmente poca che ci teniamo nel caso monodimensionale.

Prendiamo il valore di un segnale (luminosità, colore,... genericamente, una intensità) $I(x,t)$, e supponiamo esista una funzione spostamento $\delta(t)$; per renderci le cose più facili, possiamo scrivere:

$$\begin{cases} I(x,0) = f(x) \\ I(x,t) = f(x+\delta(t)) \end{cases}.$$

Ossia, la funzione spostamento agisce su *x*, non sull'intera funzione: il nostro scopo finale diventa quello di riuscire ad ottenere la funzione (attenti all'accento circonflesso):

$$\hat{I}(x,t) = f(x+(1+\alpha)\delta(t)),$$

per un qualche valore (positivo) di α che amplifica il segnale.

Quando un fisico si ritrova davanti ad una cosa del genere, la prima cosa che fa è approssimare al primo termine la serie di Taylor:

$$\hat{I}(x,t) \approx f(x) + \delta(t)\frac{\partial f(x)}{\partial x}. \qquad [1]$$

Con l'opportuno filtro passabanda[19] posso eliminare la "parte ferma" e ottenere:

$$B(x,t) = \delta(t)\frac{\partial f(x)}{\partial x}.$$

Amplificando il segnale e sommandolo al segnale originale (attenti che rispetto alla [1] il circonflesso diventa un tilde e l'uguaglianza approssimativa diventa un'uguaglianza, visto che qui parliamo di "cose misurate"):

$$\tilde{I}(x,t) = I(x,t) + \alpha B(x,t).$$

In definitiva, quindi:

$$\tilde{I}(x,t) \approx f(x,t) + (1+\alpha)\delta(t)\frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

e supponendo che l'approssimazione al primo termine della serie di Taylor valga anche per l'amplificazione, l'elaborazione del nostro segnale diventa:

$$\tilde{I}(x,t) \approx f(x+(1+\alpha)\delta(t)).$$

"Rudy, facci capire: ci hai messo mezza pagina di formule per cambiare un circonflesso in una tilde?" Esatto. Ma col "circonflesso" parlavamo di una funzione a priori sconosciuta, qui abbiamo un segnale elaborato noto, e siamo riusciti ad amplificare[20] *solo la parte in movimento*: e scusate se è poco.

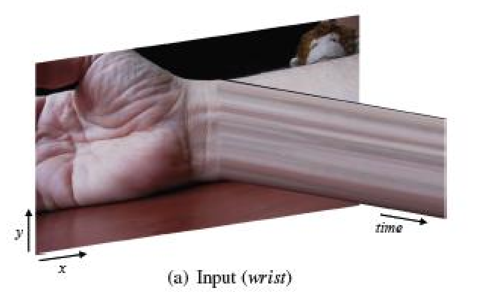
[18] Quindi, alla domanda "Che differenza c'è tra Pippo e un antifurto?" la risposta è "Il primo è lagrangiano, il secondo è euleriano". Siamo sicuri che questa battutaccia la Settimana Enigmistica non ce la tocca.

[19] Questa può sembrare una fregatura: "opportuno" significa, in questo contesto, che conosco il movimento (o meglio, conosco la parte "ferma" e so quali parti dovrebbero muoversi); per il momento sì, ma tranquilli.

[20] Ci limitiamo a segnalare che ***Wu*** e ***Rubinstein*** (gli autori: se volete l'articolo, chiedete) per "amplificazione" qui usano il bellissimo termine *boosting*.

A questo punto, dovrebbero sorgervi un paio di dubbi: in particolare, dovreste chiedervi cosa succede se sbaglio il passa-banda e quanto possa essere valido il limitare l'approssimazione al primo termine della serie di Taylor.

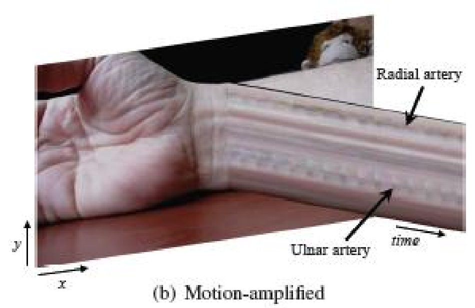
Per quanto riguarda il passa- banda, meglio generalizzare il problema. Tutti questi calcoli funzionerebbero a meraviglia se avessimo una periodicità descritta da una frequenza pura (nota). Prendiamo un filtro strettissimo, che lascia passare solo la frequenza data e via andare: nel caso più generale, prendiamo lo spettro di Fourier della nostra funzione nel tempo, e tanti filtri stretti quante sono le componenti necessarie: in questo modo, amplifichiamo quello che ci serve.



8 *L'importante è avere il "polso fermo".*

"E fare un esempio?" Se proprio insistete... Nella figura a fianco vedete la foto di un polso umano (la parte "ferma"); la strisciata (che a noi fa un po' impressione... sarà perché abbiamo visto troppi film con gli zombie) è la dimensione temporale, nel senso che la stessa sezione del polso è riportata dalle diverse immagini del filmato; qui non sta succedendo niente, nel senso che la strisciata non è altro che una serie di righe (verticali) colorate sostanzialmente uguali l'una all'altra e messe in modo suppergiù perpendicolari al piano *xy*. Ma provate a dare un'occhiata all'immagine successiva.

Qui, alle varie righe del polso, è stata applicata la nostra formuletta di cui sopra: amplificando le differenze tra le diverse immagini (e sommandole alla parte costante: non per niente il colore resta uguale), si riescono a vedere i microscopici spostamenti dovuti alla pulsazione: non solo, ma si riesce a distinguere tra due diversi movimenti della pulsazione arteriosa: quello ulnare e quello radiale sono (se guardate sulla verticale) leggermente sfasati: insomma, riusciamo addirittura a misurare la differenza di percorso tra due flussi arteriosi.



9 *"Epur si muove..."*

Non sappiamo se i dodici centimetri di cui abbiamo parlato all'inizio siano stati misurati sfruttando il metodo della magnificazione euleriana, ma sono quelli che ci hanno fatto cercare tutta questa roba: e un metodo per fare misure minuscole su distanze enormi, anche se matematicamente "ovvio", ci pare valga la fatica di fare qualche conto.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms