Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 161 – Giugno 2012 – Anno Quattordicesimo

Se qualche volta vi è capitato di pensare che RM in fondo non sia altro che un vuoto contenitore di inutili giochini e curiosità senza alcun utilizzo pratico, è solo perché tendete ad identificare troppo la rivista con quegli scansafatiche dei redattori. Ma gli RMers sono fatti di un'altra pasta, e spesso uniscono all'interesse per la matematica delle capacità sorprendenti. Questa copertina, per la prima volta del tutto autoprodotta, mostra cosa è in grado di fare ***Sawdust***, che oltre a risolvere i nostri quesiti riesce a dar forma reale, spaziale e tridimensionale ad alcuni incubi di Euclide. E poi ci fa colazione sopra.

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell’altro millennio da

Rudy d’Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

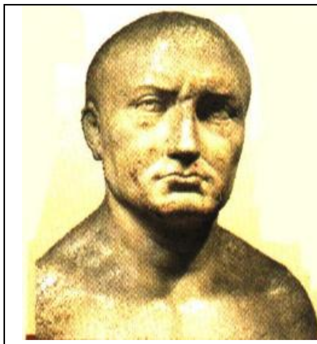
RM160 ha diffuso 2’903 copie e il 08/06/2012 per Google eravamo in 19’200 pagine.

1. Confusione

«Just as the wave cannot exist for itself, but is ever a part of the heaving surface of the ocean, so must I never live my life for itself, but always in the experience which is going on around me.»[1]
Albert Schweitzer

È davvero molto facile confondersi.

Quel che è peggio è che, con ogni probabilità, la predisposizione alla confusione derivi proprio dalla facilità con cui riusciamo ad operare sintesi, a semplificare; e questa è una dote davvero preziosa, alla quale non possiamo permetterci di rinunciare. Lo scolaro che si interroga su chi diavolo sia mai quello "Scipio" il cui elmo cita ogni volta che si ritrova a cantare l'inno nazionale, è soddisfatto e rassicurato quando scopre finalmente che si tratta di un console romano che ha battuto un grande generale cartaginese durante le guerre puniche. Se è scolaro diligente, memorizzerà accuratamente il triplice nome completo: Publio Cornelio Scipione, per gli amici solo Scipione, per gli amici più stretti Scipione l'Africano, proprio per ricordare che la sua grande vittoria la colse in terra d'Africa. Facile, sintetico, indimenticabile.

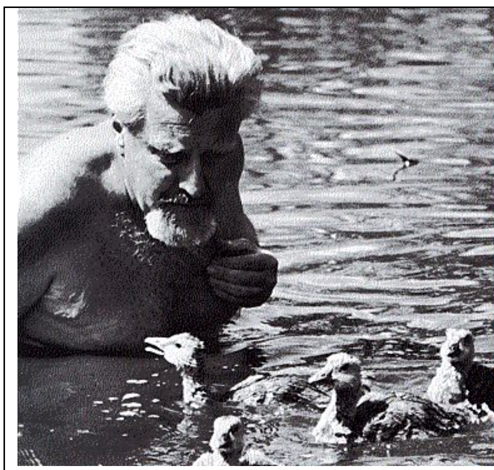

1 *Scipio, quello dell'elmo*

I problemi, come al solito, sorgono quando si entra nei dettagli. Il primo atto eroico Scipione lo compie nel 218 a.C., nella battaglia del Ticino, quando l'esercito guidato da suo padre prende una sonora batosta da Annibale. Il nostro diciassettenne eroe salva in extremis il papà, e fin qui sembra andare ancora tutto bene, se non fosse che il succitato papà si chiamava anche lui Publio Cornelio Scipione. I banchi di memoria cominciano ad essere messi a dura prova, perché poi, in età più adulta, leggendo che Annibale ha sconfitto Publio Cornelio Scipione sul Ticino nel 218 a.C. e poi che è stato sconfitto da Publio Cornelio Scipione a Zama nel 202, risulterà assai facile cadere nell'ovvio errore che il PCS antiannibalico fosse sempre la stessa persona: e invece no. Il disastro giunge poi inevitabile quando si ricorda che lo Scipione dell'elmo andò a farsi le ossa in Iberia agli ordini dello zio che – indovinate un po'? – era un Cornelio Scipione pure lui. E se è vero che lo zio era distinguibile, giacché si chiamava Gneo e non Publio, resta incontrovertibile il fatto che di Corneli Scipioni impegnati a fare la Seconda Guerra Punica ce ne erano decisamente troppi. La faccenda si complica poi oltremodo, e raggiunge il suo acme, quando gli stanchi banchi di memoria sono chiamati a ricordare chi, alla fine, distrusse definitivamente la sfortunata Cartagine. Questo è uno dei casi in cui la conoscenza di qualche dettaglio può rivelarsi controproducente: muniti solo di una debole infarinatura si potrebbe infatti azzardare "Publio Cornelio Scipione l'Africano?", vincendo immeritatamente. Se invece ci si distrae ricordando che, alla fin fine, Cartagine fu rasa al suolo e salata come carne affumicata alla fine della *terza*, e non della *seconda* guerra, e magari anche che la suddetta terza guerra punica scoppiò un mezzo secolo abbondante dopo la precedente, allora si diventa

[1] *«Così come l'onda non può esistere di per sé stessa, dacché resta parte della superficie del possente Oceano, così io non devo vivere la mia vita di per sé stessa, ma solo nell'esperienza di tutto ciò che mi circonda».* Questa frase di Albert Schweitzer è così bella e così rappresentativa della splendida persona che era l'autore, che è abbastanza crudele mettersi a fare le pulci sulla validità della sua metafora fisica. Le onde di materia rientrano certo nel comportamento descritto dal grande medico-filosofo, ma per altre il discorso si fa più complicato. Anzi, confuso, perlopiù…

molto più cauti nel chiamare in causa l'eroe dell'inno nazionale. E si sbaglia, perché alla fin fine è stato proprio Publio Cornelio Scipione l'Africano a cancellare Cartagine dall'atlante[2]: solo che non era l'Africano famoso, ma suo nipote. Questi aveva inizialmente come soprannome "Emiliano", che più che soprannome era patronimico, essendo lui figlio di un certo Aemilius[3]: ma la sua impresa da rasoio trilama sulle sponde tunisine gli fa meritare il soprannome "Africano", al pari del nonno[4]. E il cerchio è pronto a chiudersi con il gran finale: l'originale Emiliano si chiamava Publio Cornelio Scipione (perché era stato adottato da un tal Publio Cornelio Scipione, figlio primogenito del celebre Publio Cornelio Scipione Africano vincitore a Zama, il quale, nel caso ve ne foste dimenticati, era figlio di un altro Publio Cornelio Scipione) ed è stato lui pure soprannominato "Africano". Così possiamo smetterla – pur essendo convinti che risalendo l'albero genealogico degli Scipioni troveremmo valanghe d'altri PCS, sia verso le radici che verso le fronde – e concludere che Publio Cornelio Scipione l'Africano ha vinto due guerre puniche su tre, e che era il nonno adottivo di sé stesso.

Questi comunque, non sono altro che accidenti minori, scatenati da crudeli omonimie che, per quanto antipatiche anche durante una singola esistenza umana, concorrono allo sfacelo mnemonico soprattutto quando si prova ad abbracciare in un paio di pagine di manuale di storia un secolo abbondante di eventi guerreschi. Lo insegna molto bene Gabriel Garcia Marquez, per lo meno a quei lettori che riescono ad arrivare al fondo di "Cent'anni di solitudine" senza perdersi nei meandri della famiglia Buendìa. È invece decisamente più grave quando la confusione nasce per ragioni meno dirette e più sottili.


2 *Konrad Lorenz*

Una forma sottile e traditrice di confusione è quella che potrebbe chiamarsi da "imprinting". Il termine è bassamente rubato alla terminologia degli etologi e ricorda il comportamento delle paperette di Lorenz[5], e in parte lo si è visto in atto anche nel disastro mnemonico appena ricordato della *gens* Cornelia: una volta che lo scolaretto riesce ad associare Publio Cornelio Scipione alle guerre cartaginesi, sarà decisamente restio a rendere più fragile il ventaglio di conoscenze appena acquisito, e tenderà a restare fedele alla sua iniziale relazione biunivoca. Il che comporta che qualsiasi altro Publio Cornelio Scipione gli risulterà fortemente antipatico. Ma l'imprinting è più universale, e non si limita ai cataloghi storici.

È inevitabile associare il termine "relatività" ad Albert Einstein. Che sia vero o meno che "*Tutto è relativo*", è quasi indiscutibile che "*Tutto quello che è relativo è relativo ad Einstein*", per dirla in maniera confusa ma efficace. E per quanto la Teoria della Relatività sia appena sfiorata (poco e male) da tutti i corsi di studi a parte quei pochi, del tutto specifici, di ardue facoltà universitarie, è indubbio che gli studenti che incontrano

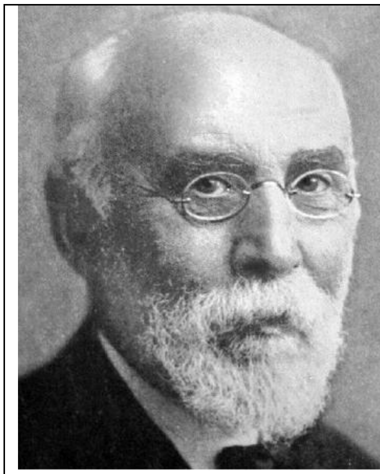
[2] Per "atlante" qui si intende il noto librone che raccoglie molte carte geografiche, ma nella frase potrebbe anche leggersi l'Atlante, catena montuosa di tutto rispetto che praticamente finisce proprio dalle parti di Cartagine. Lo diciamo perché non vorremmo creare confusione…

[3] Lucius Aemilius Paulus, se siete curiosi. E non era neppure uno qualunque, ma un tipo abbastanza importante, ai tempi suoi. Ma non confondetelo con l'omonimo console scannato a Canne: quello era suo papà.

[4] Va notato che persino i Romani, probabilmente un po' stressati dalle omonimie, talvolta specificavano "Africano Minore".

[5] Konrad Lorenz, etologo austriaco. Si accorse, fra mille altre cose, che le oche neonate assumevano come "madre" la prima cosa in movimento che cadeva sotto il loro sguardo appena nate.

per la prima volta il Principio di Relatività Galileiana mostrino all'istante una bella faccia stupefatta: "*Ma come? La Relatività non l'ha scoperta quell'altro, quello spettinato e coi capelli grigi?*". Il tutto in buona pace col fatto che, sotto molti aspetti, è forse proprio la relatività galileiana a demolire molte vecchie assunzioni aristoteliche e a far nascere definitivamente la fisica così come la conosciamo. Sottilmente, il fraintendimento e la confusione proliferano e permangono, e quel che è peggio, trascinano con loro anche un po' di mitologia. Quando si affrontano finalmente i primissimi rudimenti di Relatività (einsteniana) le trasformate di Lorentz[6] appaiono certo come misteriose e soprattutto difficili; eppure, gran parte delle loro caratteristiche essenziali, fatta salva la sciocchezzuola della presenza della velocità della luce come costante universale, sono già perfettamente presenti nelle trasformate galileiane. E certamente, se si fossero studiate in maniera opportuna a tempo debito, le *difficili* Trasformate di Lorentz risulterebbero probabilmente più semplici, e certamente più chiare.


3 *Hendrik Antoon Lorentz*

Ma c'è, naturalmente, anche di peggio. La Meccanica Quantistica è per definizione difficilissima: più difficile della Relatività, perfino[7]. Al pari della teoria einsteniana è piena di paradossi che vanno contro il senso comune (orologi che rallentano, treni che si accorciano, gemelli che invecchiano in modo diverso, strappi scuri nell'Universo da una parte; particelle che giocano a nascondino dietro fenditure, schizofrenia irrisolta onda/corpuscolo, tunnel attraversati senza tunnel[8], gatti inscatolati mezzo morti e mezzo vivi dall'altra), ma forse la Relatività ha il vantaggio di usare come esempi roba tangibile come treni e razzi, mentre la MQ sembra riuscire a rendere intangibile perfino cose che fino a poco prima sembravano toccabilissime. Prendete gli atomi: alzi la mano chi non se li è figurati, almeno in tenera età, la prima volta che li si è sentiti nominare, come dei microscopici granellini di sabbia, sassetti tutto sommato lanciabili con una fionda, se solo se ne trovasse una sufficientemente piccola. E invece no, gli atomi e i componenti subatomici non sono sassetti: non sono particelle ben definite, sono anche onde, però non sono onde di materia come le onde del mare, ma onde in un certo senso di probabilità, e…

Ci si perde facile, già con gli esempi discorsivi e didattici, quelli studiati apposta per facilitare la comprensione. E così, quando si arriva a sentir parlare di mostri sacri, di veri babau della fisica moderna come il Principio di Indeterminazione di Heisenberg, il terrore regna sovrano: e si conclude che i principi della fisica quantistica sono incomprensibili, impossibili da visualizzare correttamente, e troppo lontani dal senso comune. Ora, tutte queste asserzioni possono perfino essere lecite e vere, almeno per una buona parte delle persone: e non c'è dubbio che per entrare in uno stato reale di "visualizzazione" degli eventi quantistici ci vogliono teste fuori dal comune. Ciò non di meno, è abbastanza irritante notare che, alla fin fine, il Principio di Indeterminazione viveva e proliferava la sua placida vita già prima che Heisenberg vedesse la luce, e che gran parte dello "sconvolgimento quantistico" causato dal tentativo di comprendere appieno il Principio di

[6] Questo invece è Hendrik Antoon Lorentz, fisico olandese. Ci usa la cortesia, che gli Scipioni ci negano, non solo di avere un nome di battesimo diverso da quello dell'etologo, ma perfino di segnalarci la differenza già nel cognome, con l'inserzione di una preziosa "t".

[7] Almeno nell'opinione comune dei più: gli esperti dei due campi potranno serenamente decidere altrimenti, facendo terminare la sfida alla pari o avocando all'una o all'altra teoria le maggiori difficoltà. Noi ci fermiamo molto prima, per manifesta incompetenza.

[8] Ogni riferimento a precedente Ministri dell'Istruzione è puramente casuale. Davvero: si accenna all'Effetto Tunnel, qui, non alle autostrade per neutrini.

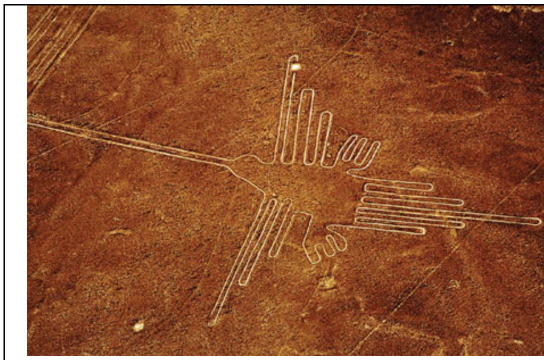
Heisenberg è in realtà uno sconvolgimento del tutto classico. E, con ogni probabilità, il guaio sta tutto nelle splendide nozze celebrate a suo tempo fra Matematica e Fisica: probabilmente il matrimonio più riuscito dello scorso millennio ma, come tutte le convivenze, con qualche piccolo screzio sempre in agguato.

La meccanica si basa sul concetto di punto materiale. È quasi impossibile cominciare a studiare l'ABC della fisica newtoniana se non si accettano frasi assolutamente usuali e canoniche del tipo "*il corpo C si trova nel punto x*". Da quel momento in poi è possibile prendere il corpo C, magari dotato di massa M, farlo muovere di un certo Δx, e si è pronti (beh, quasi…) a costruire tutta la meccanica classica con l'aiuto dell'analisi e di tutto l'armamentario matematico a disposizione. Resta però incontrovertibile il fatto che il corpo (fisico) C non si trova *mai* nel punto (matematico) x, per la buona ragione che il punto matematico non ha estensione veruna; non ha parti, come dice il vecchio Euclide: e un corpo C invece un'estensione ce l'ha. Nella migliore delle ipotesi, il corpo C occupa un volumetto (in 3D; oppure un'areola, in 2D; o un intervallino, in 1D) all'interno del quale è contenuto il punto x; ma deve essere ben chiaro che l'assunzione iniziale che un qualsiasi corpo sia puntiforme è una semplificazione che ci concediamo per costruire la scienza più bella del mondo per mezzo della disciplina più bella del mondo: e che semplificare si può soltanto quando è lecito farlo.


4 *Louis De Broglie*

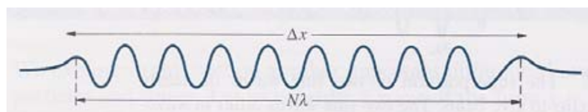
Le particelle elementari sono così piccole che sembrano fatte apposta per esser considerati dei "punti" materiali. Il guaio arriva quando il duca Louis De Broglie, pur di laurearsi, ipotizza nella sua tesi di laurea che non solo la luce (che già aveva avuto – da Newton a Huygens, da Fresnel ad Einstein – il suo lungo travaglio in merito alla sua natura considerata talvolta ondulatoria e talvolta corpuscolare), ma anche tutta la materia genera guai ad volerla considerare solo alla stregua di "punti", perché anch'essa ha intimamente associata una natura ondulatoria. Siccome l'idea del nobile laureando francese non sembrò del tutto campata per area neanche ai fisici teorici suoi contemporanei, sorse subito il problema di inventarsi una sorta di meccanica che, oltre ai consolidati artifici collaudati per trattare le particelle come punti matematici, si prendesse anche la briga di trattarli come ondicole.

Lo studio delle onde, al pari di quello dei punti materiali, era stato brillantemente affrontato dalla fisica classica. E, al pari di quanto accade ai punti, anche per analizzare le onde si fanno delle semplificazioni iniziali, in modo da poter usare i servigi della matematica: il problema è che le assunzioni semplificatrici dello studio delle onde sembrano fatte apposta per essere incompatibili con le assunzioni semplificatrici attuate per i punti materiali. Là dove la particella/punto viene considerata senza estensione, l'onda viene considerata di estensione infinita. Se c'è una cosa che torna utile nel considerare la particella puntiforme, questa è la sua chiarissima collocazione spaziale, laddove il considerare l'onda infinitamente estesa rende il concetto di "esatta posizione nello spazio" virtualmente senza senso. Non ci sono troppi problemi finché si riesce a separare le applicazioni ondulatorie da quelle corpuscolari come cose distinte, quasi come discipline diverse, ma se si deve dare ascolto a De Broglie e mettere le cose insieme, i guai cominciano subito.



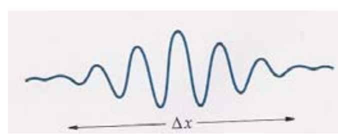
5 *Una delle figure di Nazca*

Facciamo un piccolo e virtuale volo in Sudamerica, in Perù, per la precisione. Evitiamo di atterrare a Lima, e chiediamo al pilota di fare una deviazione, per goderci una planata sopra Nazca: potremo così bearci della vista delle famose "Linee di Nazca". Enormi figure lunghe centinaia di metri, riconoscibilissime come uccelli, ragni, o altro ancora; ma il superlativo "riconoscibilissime" va bene solo finché siamo seduti sull'aereo: per molto tempo le strane linee, viste da terra, altro non erano considerate che viottoli contorti che facevano strane curve senza senso. Non era possibile riconoscere la "figura" semplicemente perché si stava troppo vicini ad essa, e se ne "vedeva" solo una parte priva di significato. C'entra qualcosa con la Meccanica Ondulatoria? Beh, sì: un po' c'entra.



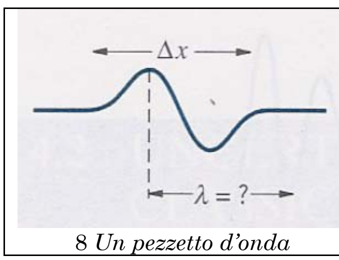
6 *Un'onda*

Rubando un po' di figure da un gran bel libro regalatoci da un'anima buona[9], potremo sorvolare anche senza volare una specie di microscopica Nazca ondulatoria. La nostra onda iniziale, perfetta e matematica, è ben rappresentata nella figura. Essendo infinita, possiamo facilmente studiarne alcune caratteristiche fondamentali, come ad esempio la lunghezza d'onda λ: anche perché un'onda senza lunghezza d'onda è come un alpinista nei Paesi Bassi. Consideriamo un intervallo Δx, contiamo in esso N creste d'onda, e tutto fila liscio. Nel tentativo di usarla come elemento di fisica atomica però bisogna subito fare delle concessioni corpuscolari: in fondo, il duca francese ha imposto di considerare ondulatoria la materia, ma che la materia non sia infinitamente estesa come le onde teoriche è esperienza che riesce a fare anche un lattante quando si infila l'intero pollice in bocca.



7 *Un pacchetto d'onda*

Utilizzando proprio una delle più cruciali caratteristiche delle onde e un po' di matematica (il lavoro di Fourier, per esempio) si può aggirare il problema: le onde hanno la felice proprietà di interferire fra loro, amplificandosi e attenuandosi in maniera del tutto peculiare. È pertanto possibile immaginare un ente che, pur essendo il risultato di pure onde, sia in effetti limitato nello spazio: in buona sostanza, un oggetto ondulatorio formato da un sistema di interferenze che abbia un'ampiezza diversa da zero solo in un intervallo limitato. Il "pacchetto d'onda", che possiamo immaginare come quello in figura.



8 *Un pezzetto d'onda*

Ma anche aggirando il problema dell'estensione infinita e riducendo la natura ondulatoria solo all'intervallo Δx che da sempre ci interessa, il problema di Nazca continua a persistere. Cosa accade, infatti, se spingiamo il nostro interesse al dettaglio fino a considerare un Δx di dimensioni comparabili con quelle della lunghezza d'onda del nostro pacchetto? Succede che non riusciamo più a misurarne la lunghezza d'onda, anzi, a dirla tutta, rischiamo di non riconoscerla proprio più come un'onda: ci ritroviamo, insomma, come il pastore peruviano che attraversa le linee di Nazca rimanendo del tutto ignaro di essere una pulce su un uccello gigantesco.

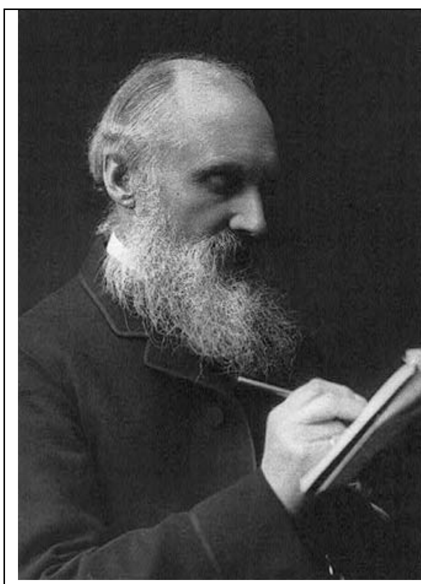
[9] Kenneth S.Krane, "Modern Physics", John Wiley & Sons, 1996. Grazie, ***Alberto F***.!

Questa incapacità è puramente classica: si potrebbe dire anche "puramente matematica": per quanto si sia citato De Broglie, non è certo per la sua ipotesi che ci troviamo in quest'imbarazzo. Imbarazzo che ha un nome ben preciso: si chiama "*principio di indeterminazione per le onde classiche*", e si esprime con la formula $\Delta x\Delta k\sim 1$, con k pari al "numero d'onda", o anche nella forma temporale $\Delta\omega\Delta t\sim 1$, dove ω è la velocità angolare.

Non vi è dubbio che la successiva introduzione delle caratteristiche puramente quantistiche abbia complicato le cose. Quando Erwin Schrödinger decide di provare ad inventarsi una formula in grado di formalizzare la dinamica delle particelle elementari, non agisce come un poeta ispirato, ma come un fisico geniale e ben determinato: se le particelle hanno una natura ondulatoria, partiamo dalla equazione fondamentale della meccanica delle onde[10]; una bella equazione con derivate parziali di secondo grado. Poi ci si aggiungono delle condizioni al contorno: alcune puramente matematiche, come quelle di continuità, di mantenere un singolo valore per ogni x, e così via; altre squisitamente fisiche, come quelle di rispettare il principio di conservazione dell'energia e – soprattutto – l'ipotesi di De Broglie. Dopo di questo, non c'è quasi bisogno d'altro.

Così come la presenza della costante della velocità della luce c complica e arricchisce le formule fondamentali della Relatività, la costante di Planck h appare e complica la lettura dell'Equazione di Schrödinger; ma dovrebbe essere evidente, almeno per quel che riguarda il Principio di Indeterminazione, che questa amplifica e generalizza anche in termini fisici una criticità che di fatto era già presente nel trattamento matematico delle onde classiche. Anche nella forma, il principio di indeterminazione di Heisenberg ricorda molto quello "classico": $\Delta x\Delta p\sim\hbar$.

Il fatto che questa situazione di indeterminazione venga messa in forte evidenza durante lo studio della Meccanica Quantistica produce un marcato effetto "imprinting", confermando in chi studia la convinzione che nella fisica classica tutto era chiaro e determinato, mentre nella fisica moderna tutto è confuso e difficile. In realtà, è certo vero che la scienza moderna è difficile e in parte confusa, ma l'idea che la scienza classica fosse un tappeto di rose è probabilmente un'illusione mitizzata. Ma ci si può consolare: anche se il dualismo onda/corpuscolo riesce a resistere indomito agli attacchi dei divulgatori che tentano di renderlo digeribile ai ragazzi che lo incontrano per la prima volta, quantomeno i suddetti divulgatori non devono impazzire come i loro colleghi che insegnano la storia di Roma Antica, con tutti quei nomi uguali da ricordare.



9 *William Thomson, Lord Kelvin*

Davvero? Beh, quasi…

Il più grande fisico inglese dell'Ottocento è stato probabilmente William Thomson. Fu così famoso che giunse ad essere il primo scienziato del Regno Unito ad entrare nella Camera dei Lord. Quando la Regina Vittoria lo elesse al titolo di "sir", Thomson scelse come titolo nobiliare un nome derivato da un fiumiciattolo che scorreva non distante dal suo laboratorio di Glasgow: il Kelvin River. E come "Lord Kelvin" è diventato così famoso che, per lo più, la gran parte delle persone si dimentica proprio che si chiamava Thomson.

Thomson è un nome un po' pericoloso: tanto per cominciare, è molto facile da confondere con Thompson, specie se ben pronunciato, perché la "p" tende a sparire facilmente nei meandri delle onde

[10] Che qui vi risparmiamo, perché i "compleanni" hanno il comandamento non scritto ma ben chiaro di dover usare meno formule possibile.

sonore che riproducono quel nome. E di Thompson famosi ce ne sono un bel po': il solo McTutor della St.Andrews University[11] che riporta biografie di matematici e fisici registra ben quattro Thompson: da Abigail a Robert, passando per John e naturalmente per il grande D'Arcy Wentworth[12]. Ma questo è niente.

Un po' per la sua celebrità, un po' per il periodo fecondo di scoperte in cui è vissuto, il potere di attrazione di "Lord Kelvin" Thomson è tale che mette generalmente in allarme gli insegnanti di fisica di liceo. C'è infatti un momento cruciale nella storia delle scoperte sulla natura atomica della materia: e la notizia che il fisico britannico Thomson, nell'aprile 1897, attraverso un lungo studio e molti esperimenti con raggi catodici, ha finalmente scoperto l'elettrone, induce in modo del tutto naturale la convinzione che si tratti del vecchio leone Lord Kelvin, ancora vivo e vegeto, benché ultrasettantenne. Si tratta invece di Joseph John Thomson, detto familiarmente J.J., e i professori devono ripetere almeno una mezza dozzina di volte che c'è Thomson e Thomson, anche se sono entrambi fisici, entrambi britannici, entrambi diventati "sir" per meriti scientifici.


10 *J.J. Thomson*

Anche perché J.J. è davvero un personaggio notevole, anche se un pochino sfortunato per quel che riguarda proprio gli agganci mnemonici attraverso il quale lo si ricorda. Non scopre solo l'elettrone, ma anche gli isotopi, e già che c'è, inventa pure lo spettrometro di massa. Viene premiato con uno dei primi Premi Nobel per la Fisica, nel 1906: è il primo a dimostrare che l'idrogeno aveva un solo elettrone per atomo, è un pioniere negli studi della radioattività, e chissà quanto altro ancora. Ciò non di meno, come si è visto, viene spessissimo confuso con l'altro Thomson più famoso, e come se non bastasse, nonostante i suoi molti successi, gli studenti ricordano più facilmente i suoi insuccessi. A valle della scoperta dell'elettrone, Thomson propone il modello atomico detto "a panettone", con gli elettroni dispersi nell'atomo più o meno come l'uva passa nel dolce natalizio (la metafora viene riportata quasi in ogni testo liceale). Il modello è in linea coi tempi, e serve soprattutto a mettere in evidenza le scoperte principali del tempo, ovvero che l'atomo ha effettivamente una sua struttura, è composto da particelle più piccole dell'atomo stesso; inoltre segnala le dimensioni molto piccole degli elettroni, circa 1/1000 di quelle dell'atomo, anche perché fino al giorno prima andava per la maggiore l'idea che le dimensioni dell'elettrone fossero comparabili a quelle dell'atomo. Infine, rammenta la natura di "particella" dell'elettrone, che infatti Thomson chiama "corpuscolo"[13].

Accade però che, dal punto di vista storico e soprattutto da quello didattico, l'esperimento di Rutherford che demolisce il modello atomico di J.J. Thomson è estremamente più noto, ed è vissuto non tanto come un completamento delle scoperte di J.J., ma quasi come una messa in ridicolo del modello precedente. Questo è certo un peccato, e non solo per Thomson: perché sarebbe stato ben difficile per Rutherford immaginare il suo famoso esperimento senza il lavoro pregresso di Thomson, e questo non solo perché senza l'ipotesi degli "elettroni" sarebbe stato ben difficile scoprire il "nucleo", ma soprattutto

[11] Mai troppo celebrato e ringraziato: senza di esso, ben pochi compleanni avrebbero potuto essere scritti.

[12] Di lui si parla in RM138, Luglio 2010, nel compleanno "Tre Matematici alla corte del Re": tanto per cambiare, anche in quel caso i nomi dei protagonisti erano piuttosto ricorrenti…

[13] Il nome "elettrone" è stato proposto da George J. Stoney.

perché Rutherford altri non era che il miglior allievo dello stesso Thomson, e lavorava nel suo laboratorio[14].


11 *George Paget Thomson*

A parziale consolazione di J.J. e in chiusura di questo percorso ad ostacoli d'omonimia, manca solo l'ultimo tassello. E, ovviamente, anche l'ultimo tassello si chiama Thomson. George Paget Thomson è figlio di J.J. Thomson, e seguì le orme paterne, diventando un fisico.

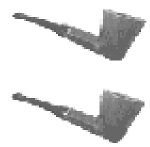
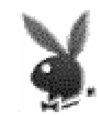
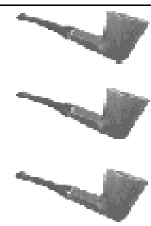
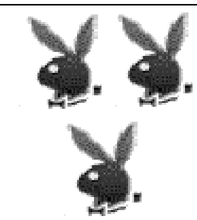
Orme seguite con merito, con particolare fedeltà e, in un certo senso, con sorprendente complementarietà. Aveva solo cinque anni quando suo padre scoprì la natura corpuscolare dell'elettrone: crescendo, si dedicò anche lui alla matematica e alla fisica, studiò a Cambridge (al Trinity College), combatté con onore la prima guerra mondiale e infine si dedicò agli studi dell'atomo. Lo fece con tale successo da meritarsi anche lui, come l'augusto genitore, il premio Nobel per la Fisica, nel 1937; ma quel che sorprende più di ogni altra cosa è la natura della scoperta che gli aprì le porte del prestigioso premio svedese. Se suo padre aveva ottenuto il riconoscimento per i suoi "corpuscoli", per aver stabilito la natura *corpuscolare* degli elettroni, George lo vince perché dimostra, con i suoi studi sulla diffrazione, la natura *ondulatoria* dell'elettrone.

Il dualismo onda-corpuscolo mantiene intatto il suo amore per i colpi di scena.[15]

[14] Tanto per ribadire la "*damnatio memoriae*" di J.J., è curioso anche notare come, nel già citato prezioso archivio della St.Andrews, figurino anche quattro "Thomson" (senza "p") ma non Joseph John: eppure il nostro aveva tutti i suoi i gradi di laurea in matematica, non in fisica, ed era stato ammesso al prestigioso Owens College dell'Università di Manchester alla tenera età di anni 14.

[15] **Nota Importante** – I lettori più attenti si saranno accorti che, diversamente dal solito, questo "compleanno" sembra non avere un protagonista nato nel mese di uscita della rivista. Questo non è del tutto vero, perché Lord Kelvin è nato il 26 Giugno 1824; è però evidente che egli non si pone nel testo come "protagonista", anzi. Il fatto è che l'autore del pezzo ha …ehm… fatto *confusione*, incrociando la data di nascita di William Thomson (26 Giugno) con quella di George Paget Thomson (3 Maggio). Questi poteva, tutto sommato, essere considerato degno concluditore di un compleanno comunque un po' improprio, ma l'errore nelle date ha disinnescato tutto. Visto il ritardo abominevole dell'uscita di questo numero di RM, la cosa non era più rimediabile: speriamo che i lettori, nonché tutti i Thomson e gli Scipioni, possano perdonarci.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Si festeggia con un gioco!			
Ma a cosa servono?			

2.1 Si festeggia con un gioco!

Lo scrivente (Rudy) intende mettere le mani avanti: *tutto* quanto segue è rigorosamente vero. Inclusa la Tombola, che abbiamo recuperato a scopo di verifica delle nostre affermazioni.

Se qualcuno si chiede come mai il mese scorso la copertina era dedicata alle "nanobambole" e quindi alla chimica (materia che frequentiamo piuttosto poco: sorry, Dario), la cosa è presto detta: volevamo festeggiare il fatto che il Valido Assistente di Laboratorio dei Rudi Mathematici universitario (sarebbe Alberto, come al solito) ha passato l'esame di chimica con un punteggio ragionevole, e la cosa è stata opportunamente celebrata in famiglia: Rudy, quando aveva passato il primo esame era andato a mangiare fuori con la famiglia, data la crisi si è optato per il mangiare in casa ma *in sala*, e con il servizio bello.

Verso la conclusione del pasto (e delle bottiglie), come sempre si è cercato di vivacizzare l'ambiente con un giochino veloce, in cui il VAdLdRM più giovane (Fred: liceo, e la sensazione è che ci starà a lungo... Bah, vedremo) veniva torturato in questo modo:

"Fred, ci sono i numeri da 1 a 9, in una bella fila fatta con i gettoni della tombola: a ogni turno ciascuno di noi ne pesca uno, e andiamo avanti sin quando, sommando tutti o alcuni dei gettoni che hai preso, riesci a formare esattamente il valore quindici. Accesso al gioco un centesimo, chi vince prende tutto, se nessuno vince la puntata resta in tavola per il giro dopo. giochi?"

"Certo!"

L'entusiasmo di Fred sembrava troppo ben riposto per non pensare che avesse una qualche strategia... Secondo voi, come è andata a finire, su molte partite?

No, non vi diciamo il voto di Alberto (problemi di privacy) ma Rudy si sta ponendo un quesito: ha interrogato sei amici laureati (lui incluso), e ha scoperto che *tutti* sono arrivati alla tesi con una media esattamente pari al primo voto: la base statistica (che, tra l'altro, è il prossimo esame di Alberto) non è gran cosa, quindi poniamo ai laureati in lettura una domanda ulteriore: voi come ci siete arrivati, alla tesi, rispetto al voto del primo esame?

2.2 Ma a cosa servono?

Domanda che un matematico non dovrebbe mai porsi, e quindi ci riteniamo perfettamente autorizzati a porcela.

Rudy di recente si è scontrato con una specifica categoria di numeri, e a parte l'essere riuscito finora ad individuarne uno solo "non banale", come si dice da queste parti, si sta giustappunto chiedendo se valgano o no la fatica del calcolo: per il momento propendiamo per il "no", ma se riuscite a trovarne un uso fate contenti sia noi sia loro.

Bene, cominciamo. È dato un numero n, o meglio è dato l'insieme dei numeri $\{1, 2\ 3,..., n\}$: vengono definite *tre* partizioni di questo insieme:

A contiene solo numeri *pari*.

B contiene solo numeri *dispari*

C contiene tutti i multipli di *tre* e tutti i numeri che vi sono avanzati.

La definizione di ***C*** può sembrare balorda, ma non abbiamo detto che in ***A*** debbano esserci *tutti* i pari o in ***B*** *tutti* i dispari.

Se esiste una partizione per cui la somma dei valori in ***A*** è pari alla somma dei valori in ***B*** che è pari alla somma dei valori in ***C***, allora il numero n è un numero ***selvaggio***.

Forse con un esempietto ce la caviamo meglio (ve lo dicevamo, che ne abbiamo trovato uno non banale... vorremmo sfoggiare i nostri calcoli). Consideriamo n=8, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, si può dividere in:

$$\begin{aligned} A &= \{5,7\}; \\ B &= \{4,8\}; \\ C &= \{1,2,3,6\}. \end{aligned}$$

E la somma degli elementi di ognuno degli insiemi è pari a 12, e quindi 8 è un numero selvaggio.

Ora, a parte trovarne un uso, come dicevamo prima, saremmo interessati ad avere un modo veloce per capire se un numero è o no selvaggio e, possibilmente, a costruire le tre partizioni: non per tentativi ma con metodo, evidentemente.

Qualcuno ha delle idee?

3. Bungee Jumpers

Vietate le derivate!

Da un quadrato di cartone di lato a dobbiamo ricavare una scatola senza coperchio tagliando dei quadrati di lato b dagli angoli e ripiegando le ali su ogni lato.

Quale valore di b (in funzione di a) ci garantisce il massimo volume della scatola?

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Summer Contest

Visto, che *a volte ritornano*?

Rudy ha trovato una serie di problemi che (ma ve lo spiegheremo poi, nelle soluzioni) hanno una certa qual rilevanza storica; è nostra intenzione, di questi, porvi solo i più interessanti (dal punto di vista risolutivo, non dal punto di vista storico: per quelli, è sempre uguale) e, per questo motivo, la numerazione dei problemi non è un gran che; se poi mostrerete di essere interessati, per l'Autumn Contest potremmo anche passarvi gli altri. E dirvi chi li ha inventati.

3	Le facce di una piramide triangolare hanno tutte la stessa area; mostrate che sono tra di loro congruenti.
4	La scomposizione in fattori primi di m e n coinvolge gli stessi fattori; anche i numeri $m+1$ e $n+1$ hanno questa proprietà. Il numero di coppie (m,n) di questo tipo è finito o infinito?
7	Scegliete un punto su ogni spigolo di un tetraedro; mostrate che il volume di almeno uno dei tetraedri risultanti dall'unione dei punti è $\leq 1/8$ del volume del tetraedro iniziale. *[Secondo i nostri esperti, questo è il più difficile di tutti]*
8	Mostrate che, se: $$\begin{aligned} a^2+4b^2&=4,\\ cd&=4, \end{aligned}$$ allora $$(a-d)^2+(b-c)^2>1.6$$
9	È dato un punto K sul lato AB di un trapezio $ABCD$. Trovate un punto M su CD tale che sia massima l'area del quadrangolo dato dall'incrocio dei triangoli AMB e CDK.
11	Siano H_1,H_2,H_3,H_4 le altezze di una piramide triangolare, sia O un punto interno alla piramide e siano h_1,h_2,h_3,h_4 le perpendicolari per O alle facce della piramide. Mostrate che è $H_1^4+H_2^4+H_3^4+H_4^4\geq 1024\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3\cdot h_4$
13	Mostrate che, se a, b e c sono i lati di un triangolo e A, B e C sono gli angoli, allora è: $$\frac{a+b-2c}{\sin(C/2)}+\frac{b+c-2a}{\sin(A/2)}+\frac{c+a-2c}{\sin(B/2)}\geq 0.$$
14	In quanti modi possiamo rappresentare un quadrangolo come unione di due triangoli? *[Sempre i nostri esperti, dicono che la formulazione originale avrebbe dovuto considerare solo triangoli non sovrapponentesi: provate a risolvere entrambi i casi]*
18	Le bisettrici degli angoli esterni in A e in C si incontrano in un punto del cerchio circoscritto. Dati i lati AB e BC del triangolo, trovate il raggio del cerchio. *[Qui c'è un tranello decisamente brutto]*
20	Confrontate i numeri $\log_3 4\cdot\log_3 6\cdot\ldots\cdot\log_3 80$ e $2\cdot\log_3 3\cdot\log_3 5\cdot\ldots\cdot\log_3 89$.
22	Dati k segmenti sul piano, mostrate che il numero dei triangoli per cui tutti i lati appartengono all'insieme dato di segmenti è minore di $C\cdot k^{\frac{3}{2}}$, per una qualche costante $C>0$
23	Data la parabola $y=x^2$ costruire, con riga e compasso, gli assi coordinati.
25	Siano A, B e C gli angoli e a, b e c i lati di un triangolo. Mostrate che è: $$60^\circ\leq\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}\leq 90^\circ.$$

...e siccome sono tanti, ci vediamo ad autunno inoltrato.

5. Soluzioni e Note

Giugno.

Siamo in un ritardo pazzesco, ed è tutta colta della sottoscritta (Alice). Non c'è tempo per niente. Il Capo (che in ritardo non è mai), mentre aspettava che mi muovessi a comporre RM, ha trovato questa chicca, che purtroppo richiede la conoscenza della lingua d'Albione, ma è fenomenale: http://www.youtube.com/watch?v=YX_OxBfsvbk. Provate a perdonarci mentre la guardate.

Come previsto i due eroi più in gamba della Redazione (Piotr e Rudy) hanno fatto un figurone a Latina presentando la loro conferenza sul calendario. Trovate molti dettagli sulla favolosa iniziativa culturale a questo link http://lievito.org/. Per strada discendendo verso sud sono passati anche a Roma alla **R**edazione (ci va una R più grande, che per la nostra) di Le Scienze. Non resisto e vi passo un estratto della relazione finale del magico Postino Tuttofare:

> Missione del venerdì, Roma. Optiamo per il treno (tutti e due) e per l'impermeabile (solo Rudy). La scelta, forse, poteva essere migliore. Caldo allucinante: viaggio in treno all'andata un po' caro (intercity, posti prenotati) ma assolutamente liscio e piacevole. Giunti a Roma, decidiamo di fare luuuunga passeggiata e risparmiare sull'autobus. Giriamo per via Panisperna, ciondoliamo un po', attraversiamo via dei Fori Imperiali già predisposta alla parata del 2 Giugno, fondiamo sotto il calore, e alla fine di… boh? Cinque o sei o sette chilometri, giungiamo sotto la redazione di Le Scienze.

12 *Il Supremo, alias Diretur, Marco Cattaneo*

> Telefono, scende Giovanna a prenderci. Ci paga il caffè al Bar dell'edificio di tutta Repubblica/Espresso, si chiacchiera, quindi si va in Redazione. Saluti di benritonato (a me) e entusiastiche presentazioni (a Rudy). Tra gli altri, ci salutano e/o baciano Claudia di Giorgio, Giovanni Spataro e Cinzia Sgheri (...). Si attende che compaia il Supremo, che infatti si fa attendere ma infine compare regalmente alla porta. Parla già di un post/articolo con la Di Giorgio, poi sequestra noi e la Giò e ci porta nel suo studio (fotografato anche lui, la fotografia di gruppo – noi con loro – mi sono scordato di farla[16]) ci fa leggere il post e ci porta tutti a pranzo.

> In una bottiglieria non lontanissima, ma neppure vicinissima. Si mangia e si beve bene (ci siamo contenuti, ma la roba era buona), paga il Supremo. Torniamo poi nel suo ufficio, ci fa vedere dei filmati, si cazzeggia ancora un po'. Torniamo in redazione, Giò ci allunga la copia cartacea dei Rudi di Giugno (non la trovo più), ci fa prendere un paio di giornali dispersi nel corridoio, e alla fine noi decidiamo che è ora di lasciarli lavorare. Giò ci saluta e ci promette che verrà il giorno dopo a Latina.

> (...)

> Sveglia alle sei per dirigersi verso Latina. Viaggio tranquillo, il sabato è un buon giorno per viaggiare, perfino il Grande Raccordo Anulare di Roma è poco frequentato. Facciamo la Pontina e arriviamo a Latina. Grazie al GPS di Rudy troviamo il teatro. Siamo in anticipo, ma fuori c'è già uno spilungone: è Felice Costanti, il nostro uomo. Ci paga il caffè, ci porta al teatro, ci mostra la scena. Dentro stanno provando tutto (tre eventi, in quel giorno: noi al mattino, una

[16] Ecco, vedete? Se non ci sono io si scordano le cose importanti…*[Nota di Alice]*

rappresentazione teatrale e un film nel pomeriggio). Si mettono a punto le cose (con un po' di panico: Felice ci chiede se possiamo usare i nostri pc, perché il loro non va; proviamo con quello di Rudy, che però si rifiuta, nonostante la versione giusta di ppt, di lanciare la presentazione; corro in macchina, prendo il mio pc e per fortuna lui non fa storie). Nel frattempo da Roma è arrivata davvero Giovanna, in treno da Roma. Il teatro piano piano si riempie di scolaresche. Il telecomando del GC funziona anche dal palco, e intratteniamo un paio di centinaia di ragazzi per un paio d'ore. Direi che si sono divertiti. In una mail agli organizzatori, Felice definirà poi "interessantissime" le ultime due conferenze del ciclo, una delle quali era la nostra; forse è solo per dire, ma comunque… (...)

E adesso basta, passiamo velocemente alle soluzioni, che se no questo numero di giugno esce a luglio. Non senza ricordarvi di fare un salto sul Bookshelf presto, perché ci sono arrivati nuovi articoli che aspettano i vostri commenti, e di andare a visitare il nuovissimo sito dei nostri amici Diego, Paolo e Sara, di cui abbiamo parlato già molte volte come protagonisti di "Fate il Nostro Gioco": www.taxi1729.it.

E via, ancora cominciando con le soluzioni ai Calendari, che ormai vanno per la maggiore.

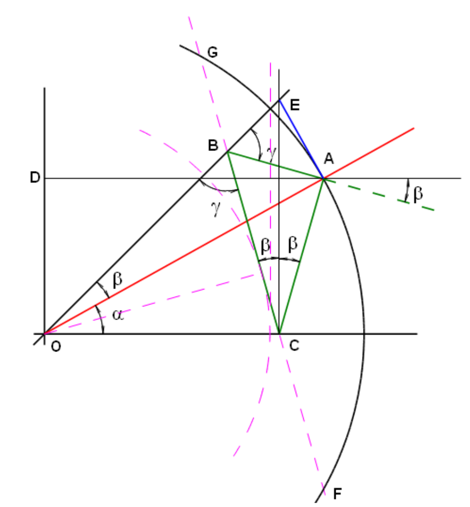
5.1 [Calendario 2001]

5.1.1 Dicembre 2001: 22° USAMO (1993) – 4

Sawdust ha proposto questa soluzionne come regalo di compleanno per il nostro Piotr, vediamo il testo:

Dato un punto (a,b) per cui è $0<b<a$*, determinare il perimetro minimo del triangolo con un vertice in (a,b), un secondo vertice sull'asse x e il terzo vertice sulla linea y–x, assumendo come premessa che esista questo valore.*

E la soluzione di ***Sawdust***:



13 *Figura di* ***Sawdust***

Il percorso minimo per andare da un punto all'altro passando per un terzo punto non allineato con i primi 2 è quello che si ottiene con una "riflessione" nel punto intermedio.

Nel nostro caso bisogna trovare 2 di questi percorsi (ACB e CBA).

Tracciamo una circonferenza con centro nell'origine degli assi e di raggio OA, chiamiamo

B il vertice sulla retta $y = x$, C il vertice sull'asse x e α l'angolo AOC. Gli angoli che le rette per CB e AC formano con l'asse y devono essere uguali, e uguali all'angolo β che la retta per AB forma con l'asse x, e quindi ABC è un triangolo rettangolo (in A) la cui bisettrice di <CAB passa per l'origine e l'angolo β è uguale all'angolo che la retta per OA forma con la retta per OB, perciò $\beta = (45° - \alpha)$.

Per costruzione sono valide le uguaglianze

AC = CF e AB = BG

Per cui il perimetro ABC è uguale a una corda tangente alla circonferenza di centro O e di raggio cos 45°, la cui lunghezza è 2 · sen 45°, e perciò

$$2p=\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$$

Chiaramente anche il terzo percorso (BAC) si ottiene con una riflessione sulla tangente in A alla circonferenza.

Volendo provare a calcolare il perimetro di ABC:

Posto $a^2+b^2=1$,

1) il punto A si trova nel primo ottante del cerchio goniometrico con coordinate (a,b) pari a sen(α) e cos(α).

2) il punto C ha coordinate pari a (cos(α) – sen(α) · tan(β), 0),

3) il lato AC è pari a sqrt((sen(α))^2 + (sen(α) · tan(β))^2),

4) il lato AB è pari a AC · tan(2β)

5) il lato BC si calcola con Pitagora tra i primi 2

Di conseguenza il perimetro di ABC è

$$2p=\sqrt{sen^2\alpha+(sen\alpha\cdot tg\beta)^2}\cdot(1+tg2\beta)+\sqrt{sen^2\alpha+(sen\alpha\cdot tg\beta)^2+\left(tg2\beta\sqrt{sen^2\alpha+(sen\alpha\cdot tg\beta)^2}\right)^2}$$

$$2p=\sqrt{sen^2\alpha+(sen\alpha\cdot tg\beta)^2}\cdot(1+tg2\beta)+\sqrt{sen^2\alpha+(sen\alpha\cdot tg\beta)^2(1+tg^2 2\beta)}$$

$$2p=\sqrt{sen^2\alpha+(sen\alpha\cdot tg\beta)^2}\cdot(1+tg2\beta)+\sqrt{sen^2\alpha+(sen\alpha\cdot tg\beta)^2}\cdot\sqrt{(1+tg^2 2\beta)}$$

$$2p=\sqrt{sen^2\alpha+(sen\alpha\cdot tg\beta)^2}\cdot\left(1+tg2\beta+\sqrt{(1+tg^2 2\beta)}\right)$$

Ma, come detto prima, $\beta=(45°-\alpha)$ e allora

$$2p=\sqrt{sen^2\alpha+(sen\alpha\cdot tg(45-\alpha))^2}\cdot\left(1+tg(2\cdot(45-\alpha))+\sqrt{(1+tg^2(2\cdot(45-\alpha)))}\right)$$

che per qualunque valore di α compreso tra 0° e 45° (a > b), vale √2.

Fantastico, andiamo avanti.

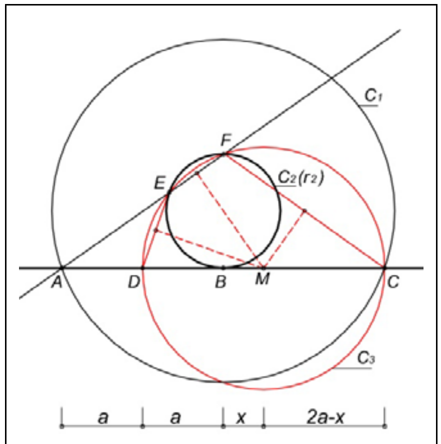
5.2 [Calendario 2008]

5.2.1 Agosto 2008: 2° USAMO – 1998

La soluzione a questo quesito è proposta da ***trentatre***. Ecco il problema:

> *Siano C_1 e C_2 due cerchi concentrici, con C_2 interno a C_1. Da un punto A di C_1 viene tracciata la tangente AB a C_2 ($B\in C_2$). Sia C il secondo punto di intersezione AB e C_1, e sia D il punto medio di AB . Una retta passante per A interseca C_2 in E e F in modo tale che le bisettrici perpendicolari di DE e CF si intersecano in un punto M su AB. Trovate, con prova, il rapporto AM/MC.*

E la soluzione di ***trentatre***:



14 *Figura di* ***trentatre***

Sono dati

- i cerchi concentrici C_1 e C_2 (di raggio r_2)

- la retta AC tangente a C_2 in B che individua su C_1 i punti A e C con $AB = BC = 2a$

- il punto D su AC con $AD = DB = a$

- la retta passante per A che interseca C_2 in E, F.

Gli assi dei segmenti DE, FC si incontrano in M che deve essere su AC.

Per ogni retta passante per il punto A e che interseca il cerchio C_2 vale la $AE \cdot AF =$ costante (la "potenza" del punto rispetto al cerchio); questo vale anche per una tangente, per cui $AE \cdot AF = (AB)^2 = 4a^2 \rightarrow \dfrac{AE}{a} = \dfrac{4a}{AF} \rightarrow \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AC}{AF} \rightarrow$ i triangoli $\Delta(AED)$ e $\Delta(ACF)$ sono simili.

Ne segue per gli angoli $\angle DEF + \angle FCD = \angle DEF + \angle AED = \pi$: il quadrilatero ($DEFC$) ha gli angoli opposti supplementari e quindi è iscrivibile nel cerchio C_3 con centro in M, di cui DE, EF, FC sono corde e DC un diametro.

Quindi $DM = MC \rightarrow a + x = 2a - x \rightarrow x = a/2$.

Il rapporto cercato è $AM / MC = (2a + x)/(2a - x) = 5/3$, costante per ogni coppia di cerchi concentrici C_1, C_2.

Dato il cerchio C_2 e il punto A esiste una sola posizione possibile della retta EF.

Il valore della semicorda $f = EF/ 2$, in funzione di a e di r_2, è dato da (salto la dimostrazione)

$f = a\sqrt{(9r_2^{\,2} - 4a^2)/(4r_2^{\,2} + a^2)}$. Fissato il cerchio C_1 e la retta AC (e quindi tutti i punti su di essa) il cerchio C_2 ha dimensione minima quando $f = 0$ (ratta tangente al cerchio) e vale $r_2 = (2/3)a$. Quando EF è un diametro di C_2 si ha $r_2 = f = a$.

E avanti un altro.

5.3 [Calendario 2012]

5.3.1 Febbraio 2012: Putnam 1997-A2

Adesso è il turno di ***Mirhonf*** per questo problema:

> *I giocatori* 1, 2, 3, *…, n sono seduti intorno a un tavolo ed ognuno ha un penny. Il giocatore* 1 *passa un penny al* 2*, che a sua volta passa* 2 *penny al* 3*. Il giocatore* 3 *allora passa un penny al* 4*, che passa due penny al* 5*, e così via, con i giocatori che passano alternativamente uno o due penny al successivo se ha ancora soldi. Se un giocatore resta senza soldi esce dal gioco e lascia il tavolo. Trovare un insieme infinito di numeri n per cui un giocatore finisce con tutti gli n penny.*

Vediamo subito la soluzione di ***Mirhonf***:

Ho affrontato il problema prima di tutto scrivendo un programma di simulazione del gioco che mi ha dato i risultati in tabella.

n	sì/no[17]	steps
1	sì	0
2	sì	1
3	sì	2
4	sì	4
5	sì	8
6	sì	10
7	no	
8	no	
9	sì	24
10	sì	26
11	no	
12	no	
13	no	
14	no	
15	no	
16	no	
17	sì	64
18	sì	66
da 19 a 32	no	
33	sì	160
34	sì	162
da 35 a 64	no	
65	sì	384
66	sì	386
da 67 a 128	no	
129	sì	896
130	sì	898

Facilmente ho dedotto che se $N=2^n+1$ oppure $N=2^n+2$ il gioco finisce con un giocatore che ha tutti gli N penny, altrimenti il gioco non termina mai.

Supponiamo che $N=2^n+1$.

All'inizio abbiamo la seguente situazione:

Giocatori:	1	2	3	...			$2^n–1$	2^n	2^n+1
Penny:	1	1	1	1			1	1	1

Dopo esattamente $N–1$ mosse, la situazione diventa:

Giocatori:	1	2	3	...	$2p+1$		$2^n–1$	2^n	2^n+1
Penny:	0	0	2	0	2	0	2	0	3

I Giocatori 1, 2 e tutti i giocatori pari vengono eliminati; rimangono in gioco gli $(N–1)/2$ giocatori dispari, di cui $(N–3)/2$ hanno 2 penny e l'ultimo ha 3 penny (infatti $2·(N–3)/2+3=N$).

La situazione può essere riscritta nel modo seguente:

Giocatori:	3	5	7	...	...	...	$2^n–1$	2^n+1
Penny:	2	2	2	2	2	2	2	3

Dopo esattamente altre N–1 mosse, la situazione diventa la seguente:

Giocatori:	3	5	7	...	...	...	$2^n–1$	2^n+1
Penny:	4	0	4	0	4	0	0	5

Tutti i giocatori in posizione pari vengono eliminati; rimangono in gioco gli $(N–1)/4$ giocatori in posizione dispari, di cui $(N–5)/4$ hanno 4 penny e l'ultimo ha 5 penny (infatti $4·(N–5)/4+5=N$).

La situazione può essere riscritta nel modo seguente:

Giocatori:	3	7	11	...	...	...	2^n+1
Penny:	4	4	4	4	4	4	5

Ripetendo il ragionamento, dopo $k(N–1)$ mosse, la situazione diventa la seguente:

Giocatori:	3	$3+k$	$3+2k$	...	...	...		$2^n+1–k$	2^n+1
Penny:	2^k	0	2^k	0	2^k	0		0	2^k+1

Dopo $k(N–1)$ mosse, tutti i giocatori in posizione pari vengono eliminati; rimangono in gioco gli $(N–1)/2^k$ giocatori in posizione dispari, di cui $(N–1–2^k)/2^k$ hanno 2^k penny e l'ultimo ha 2^k+1 penny (infatti $2^k·(N–1–2^k)/2^k+2^k+1=N$).

La situazione può essere riscritta nel modo seguente:

Giocatori:	3	$3+2k$	$3+4k$	...	...	...	2^n+1

[17] Sì significa che il gioco finisce con un giocatore che ha tutti gli n penny; no altrimenti.

Penny:	2^k	2^k	2^k		2^k		2^k

Quindi, dopo esattamente $k(N–1)$ steps $(N–1–2^k)/2^k$ giocatori hanno 2^k penny; ma $N=2^n+1$, quindi $(2^n–2^k)/2^k$ giocatori hanno 2^k penny.

Se $k=n$, tutti i giocatori vengono eliminati tranne l'ultimo che rimarrà con $2^n+1=N$ penny.

Quindi il gioco si conclude per $k=n$; $n=\log_2(N–1)$; quindi il gioco si conclude in $k(N–1)$ steps, cioè in **$(N–1)\log_2(N–1)$** steps.

Supponiamo ora che $N=2^n+2$.

Dopo esattamente $N–1$ mosse dall'inizio, la situazione diventa:

Giocatori:	1	2	3	...	$2p+1$		2^n	2^n+1	2^n+2
Penny:	0	0	2	0	2	0	0	2	2

I Giocatori 1, 2 e tutti i giocatori pari vengono eliminati; rimangono in gioco gli $N/2$ giocatori dispari, tutti con 2 penny (infatti $2\cdot(N/2)=N$).

La situazione può essere riscritta nel modo seguente:

Giocatori:	3	5	7	...	...	...	2^n+1	2^n+2
Penny:	2	2	2	2	2	2	2	2

Dopo esattamente altre $N–2$ mosse, la situazione diventa:

Giocatori:	3	5	7	...	...	...	2^n+1	2^n+2
Penny:	4	0	4	0	4	0	4	2

I giocatori di posto pari vengono eliminati; rimangono in gioco gli altri $(N–2)/4$ giocatori dispari, tutti con 4 penny più l'ultimo giocatore con 2 penny.

La situazione può essere riscritta nel modo seguente:

Giocatori:	3	7	11	...	...	2^n+2
Penny:	4	4	4	4	4	2

Ripetendo lo stesso ragionamento, dopo $k(N–2)+1$ mosse, la situazione diventa la seguente:

Giocatori:	3	$3+k$	$3+2k$	...	...	2^n+2
Penny:	2^k	0	2^k	0	…	2

Dopo $k(N–2)+1$ mosse, tutti i giocatori di posto pari vengono eliminati; rimangono in gara gli altri $(N–2)/2^k$ giocatori di posto dispari con 2^k penny più l'ultimo giocatore con 2 penny. Infatti $2^k\cdot(N–2)/2^k+2=N$. La situazione può essere riscritta nel modo seguente:

Giocatori:	3	$3+2k$	$3+4k$	...	...	2^n+2
Penny:	2^k	2^k	2^k	...	…	2

Quindi, dopo esattamente $k(N–2)+1$ steps $(N–2)/2^k$ giocatori hanno 2^k penny; ma $N=2^n+2$, quindi $2^n/2^k$ giocatori hanno 2^k penny; l'ultimo giocatore ha 2 penny.

Se $k=n$, rimane in gioco il solo giocatore 3 con 2^n penny più l'ultimo giocatore con 2 penny.

Al passo successivo, l'ultimo giocatore cede i suoi 2 penny al giocatore 3 che vince con tutti gli N penny in mano.

Quindi il gioco si conclude con $k=n$, cioè in $n(N–2)+2$ = $\mathbf{2 + (N–2)\log_2(N–2)}$ steps.

Se N non ricade in uno dei casi precedenti, distinguiamo altri 2 casi: N dispari ed N pari.

***N* dispari.**

Dopo N mosse, la situazione è sempre la seguente:

Giocatori:	3	5	7	...	...	...	N
Penny:	3	2	2	2	2	2	2

Rimangono in gioco $(N–1)/2$ giocatori (tutti i dispari tranne l'uno).

Ora, se $(N–1)/2$ è ancora dispari, dopo altri $(N–1)$ steps si ripropone la stessa identica situazione di sopra. Evidentemente, la sequenza va in loop e non può più terminare.

Se invece, $(N–1)/2$ è pari, dopo altri $(N–1)$ steps la situazione diventa la seguente:

Giocatori:	5	9	13	...	...	N
Penny:	5	4	4	4	4	4

Rimangono in gioco $(N–1)/4$ giocatori tutti con 4 penny tranne l'ultimo il giocatore 5 che rimane con 5 penny.

Lo stesso ragionamento si ripete ora con $(N–1)/4$. Cioè se $(N–1)/4$ è dispari, dopo altri $(N–1)$ steps si ripropone la stessa identica situazione di sopra. Evidentemente, la sequenza va in loop e non può più terminare. Se invece $(N–1)/4$ è pari rimarranno $(N–1)/8$ giocatori ecc.

Quindi rimarrà un solo giocatore soltanto se $(N–1)/2^x=1$, cioè $N=2^x+1$, in accordo a quanto già detto in precedenza.

***N* pari.**

Dopo N mosse, la situazione è sempre la seguente:

Giocatori:	3	5	7	...	...	...	$N–1$
Penny:	4	2	2	2	2	2	2

Rimangono in gioco $(N–2)/2$ giocatori (tutti i dispari tranne l'uno).

Ora, se $(N–2)/2$ è dispari, dopo altri $(N–2)$ steps si ripropone la stessa identica situazione di sopra. Evidentemente, la sequenza va in loop e non può più terminare.

Se invece $(N–2)/2$ è pari, dopo altri $(N–2)$ steps la situazione diventa la seguente:

Giocatori:	3	7	11	...	...	...
Penny:	6	4	4	4	4	4

Rimangono in gioco $(N–2)/4$ giocatori tutti con 4 penny tranne il giocatore 3 che rimane con 6 penny.

Lo stesso ragionamento si ripete ora con $(N–2)/4$. Cioè se $(N–2)/4$ è dispari, dopo altri $(N–2)$ steps si ripropone la stessa identica situazione di sopra. Evidentemente, la sequenza va in loop e non può più terminare. Se invece $(N–2)/4$ è pari rimarranno $(N–2)/8$ giocatori ecc.

Quindi rimarrà un solo giocatore soltanto se $(N–2)/2^x=1$, cioè $N=2^x+2$, in accordo a quanto già detto in precedenza.

E non ci resta che ringraziare ***trentatre***, ***Sawdust*** e ***Mirhonf***. Aspettiamo nuove, possibilmente su *altri* problemi calendaristici.

5.4 [153]

5.4.1 Il giardino dei destini incrociati

Questo problema continua a far pensare i nostri lettori. Prima di tutto il testo, che il mese scorso eravamo di corsa e non l'abbiamo ricordato:

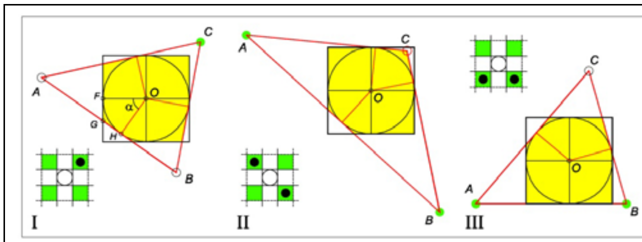
> *Piotr ha piastrellato in bianco un cerchio del raggio di dieci metri, poi ha piantato degli alberi ai vertici di un quadrato e di un triangolo nei quali era inscritto il cerchio piastrellato. Adesso sta pensando di piastrellare la parte comune al triangolo e al quadrato in colore rosso. Qual è il minimo dell'area in comune tra triangolo e quadrato rispetto al raggio del cerchio?*

In RM154 avevamo solo una soluzione di ***Mirhonf***, nel numero successivo (RM155) da lui stesso migliorata, e affiancata da una versione di ***Camillo***. In RM161 compariva ancora una versione di ***Marmi***, che sfruttava le figure degli altri, probabilmente stimolando il commento di ***trentatre***:

> Ho visto varie soluzioni (fino all'ultimo numero) del problema RM 153 2.1 – Il giardino…. Mi sembrano un po' pasticciate. Ho provato a vedere la cosa in modo più sintetico (evitando la selva oscura della geometria analitica).
>
> Allego il risultato, anche se il problema è vecchio, ampiamente trattato e non troppo interessante. In questi casi – come sempre – il lettore propone e RM dispone (immagino che in redazione abbiate un grande cestino).

Certo, RM dispone di pubblicare:

> Siano ∅ il cerchio di <u>raggio unitario</u> e centro *O*, il quadrato e Δ il triangolo circoscritti.
>
> La fig. 1 riporta le possibili posizioni di Δ rispetto a .

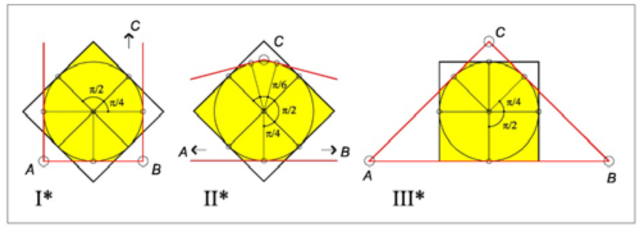


15 *Figura 1 di **trentatre**: posizioni di Δ rispetto a*

> Va calcolata l'area *S* (in giallo) inclusa in Δ e in . L'area è suddivisa dalle mediane di e dai raggi di ∅ ortogonali ai lati di Δ in parti, tutte della stessa forma. Ogni parte (p.es.*OFGH*) è un quadrilatero con angolo al centro <u>in radianti</u> α. Indichiamo uno di questi quadrilateri con $Q(\alpha)$.
>
> Le rette da *O* che determinano i $Q(\alpha)$ sono sette (quattro dovute a e tre a Δ) : *S* è, in generale, un ettagono. Se, per la posizione di Δ, alcuni dei raggi coincidono, si possono avere $Q(0)$ di area nulla (p.es. nello schema III, in cui *S* è un esagono).
>
> Dividiamo il piano in nove sottospazi prolungando i lati di (schema piccolo) e coloriamo ogni vertice di Δ in verde se cade all'interno (oppure è sul bordo) di un sottospazio diagonale rispetto a . Le uniche posizioni possibili sono quelle del disegno: un vertice verde (I) oppure due vertici verdi (II e III). Ogni vertice verde determina in *S* un angolo esterno retto, cioè un quadrilatero $Q(\pi/2)$ che corrisponde a un quarto di .
>
> L'area del quadrilatero $Q(\alpha)$ è $\tan(\alpha/2)$; con gli angoli $\alpha_1 \ldots \alpha_7$ si ha

$\sum_{n=1}^{7}\alpha_n = 2\pi$, $S = \sum_{n=1}^{7}\tan(\alpha_n / 2)$ che valgono anche se alcuni α sono nulli.

Se $\alpha+\beta = \text{cost.}$, $\tan\alpha + \tan\beta$ è minima per $\alpha = \beta$, e questo vale anche per la somma di un numero qualsiasi di angoli. Pertanto <u>la *S* minima si ottiene rendendo uguali fra loro gli angoli α compresi fra gli angoli fissi π/2</u>.



16 *Figura 2 di* ***trentatre****: soluzioni minime*

Dagli schemi I, II e III si ricavano i tre casi di fig. 2, dove la soluzione è sempre simmetrica, cioè Δ è isoscele.

I valori degli angoli α e le relative aree *S* sono

I* $2\pi = \pi/2 + 6\times\pi/4$ (il vertice *C* è all' ∞)

$S_I = \tan(\pi/4) + 6\tan(\pi/8) = 6\sqrt{2} - 5 = 3.485281$

II* $2\pi = 2\times\pi/2 + 2\times\pi/4 + 3\times\pi/6$

$S_{II} = 2\tan(\pi/4) + 2\tan(\pi/8) + 3\tan(\pi/12) = 6 + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} = 3.632275$

III* $2\pi = 4\times\pi/2 + 2\times\pi/4$

$S_{III} = 2\tan(\pi/4) + 4\tan(\pi/8) = 4\sqrt{2} - 2 = 3.656854$.

La soluzione minima è la I*, con 6 angoli uguali. Volendo evitare la condizione $C\to\infty$ si può imporre in *C* un angolo 2β e si ha

$S_I(\beta) = \tan(\pi/4) + 2\tan(\pi/8) + 2\tan(\pi/8 - \beta/2) + 2\tan(\pi/8 + \beta/2)$

cioè con qualche passaggio $S_I(\beta) = (2\sqrt{2} - 1) + 4/(1 + \sqrt{2}\cos\beta)$ che fornisce naturalmente valori crescenti con β ed è valida fino a $S_I(\pi/4) = 2\sqrt{2} + 1 = 3.828427$ (in questo caso Δ è rettangolo in *C* come in III* ma la soluzione è peggiore).

I vari casi corrispondono, anche per i valori numerici (fatti salvi la sottrazione dell'area ∅ uguale a π, e un fattore di scala) a quanto trovato da ***Mirhonf*** e da altri.

Grazie ***trentatre***. Andiamo avanti.

5.5 [159]

5.5.1 Il problema di Marco L.

Ricordate che in RM159, nelle note, avevamo proposto questo problema, a sua volta proposto da ***Marco L.***:

> *Su una scacchiera standard da* 8x8 *caselle, è possibile disporre pedine che hanno quattro diversi valori e precisamente* 1, 2, 3 *e* 4. *La pedina di valore* 1 *può essere posata su una qualsiasi casella, quella di valore* 2 *può essere posata solo di fianco (non in diagonale) ad una di valore* 1. *La pedina di valore* 3 *può essere collocata solo di fianco ad una di valore* 1 *e ad una di valore* 2. *Infine la pedina di valore* 4 *può essere posata solo di fianco a pedine di valore* 1, 2 *e* 3. *Qual è la migliore distribuzione possibile delle pedine per massimizzare il totale ottenuto dalla somma di tutte le pedine presenti sulla scacchiera?*

Il mese scorso avevcamo visto la soluzione di ***trentatre***, qui vi proponiamo l'approccio di ***Mirhonf***:

> Io ho seguito un ragionamento diverso da quello illustrato nello scorso numero. Al fine di massimizzare il totale ottenuto dalla somma di tutte le pedine presenti sulla scacchiera, cerco di porre sulle diagonali tutti 4 e successivamente cerco di riempire la scacchiera in modo da rispettare tutti i vincoli:

4							4
	4					4	
		4			4		
			4	4			
			4	4			
		4			4		
	4					4	
4							4

> Comincio piazzando gli 1, poi i 2, poi i 3, infine i 4:

			1	1			
1							1
1							1
			1	1			

		2	1	1	2		
			2	2			
2							2
1	2					2	1
1	2					2	1
2							2
			2	2			
		2	1	1	2		

	3	2	1	1	2	3	
3		3	2	2	3		3
2	3		3	3		3	2
1	2	3			3	2	1
1	2	3			3	2	1
2	3		3	3		3	2
3		3	2	2	3		3
	3	2	1	1	2	3	

4	3	2	1	1	2	3	4
3	4	3	2	2	3	4	3
2	3	4	3	3	4	3	2
1	2	3	4	4	3	2	1
1	2	3	4	4	3	2	1
2	3	4	3	3	4	3	2
3	4	3	2	2	3	4	3
4	3	2	1	1	2	3	4

> La somma di tutte le caselle in questa configurazione è **176**.
>
> Poi sono riuscito a piazzare ben 24 caselle con valore "4".

	1					1	
	1					1	
	1					1	
	1					1	

2	1	2			2	1	2
2	1	2			2	1	2
2	1	2			2	1	2
2	1	2			2	1	2

2	1	2	3	3	2	1	2
3							3
3							3
2	1	2	3	3	2	1	2
2	1	2	3	3	2	1	2
3							3
3							3
2	1	2	3	3	2	1	2

2	1	2	3	3	2	1	2
3	4	4	4	4	4	4	3
3	4	4	4	4	4	4	3
2	1	2	3	3	2	1	2
2	1	2	3	3	2	1	2
3	4	4	4	4	4	4	3
3	4	4	4	4	4	4	3
2	1	2	3	3	2	1	2

> La somma di tutte le caselle in questa configurazione è **184**.

Aspettiamo ancora di sentire se ***Marco L.*** ha qualche commento.

5.5.2 Eastern Contest?

Di questi problemi, l'ottavo è quello che ha fatto pensare il lettori più di ogni altro:

> *Un quadrato di 16 caselle contiene, per ogni casella, un segno più o un segno meno. Invertiamo i segni di una riga (o di una colonna) sin quando otteniamo il numero minimo di segni meno: una tabella per la quale effettuando questa operazione non si possa ridurre ulteriormente il numero dei segni meno è detta "tabella minimale", e il numero dei segni meno è detta caratteristica della tabella. Trovate tutti i possibili valori della caratteristica.*

Marmi ci scrive:

> avevo letto male il quesito eatern conference n.8 pensavo il quadrato fosse 16x16 : il problema è – per me – tosto, la risposta non ho idea di quale sia.
>
> Su una 4x4 :
>
> La dimostrazione dell'esistenza di 0 – 4 direi che è veloce: preso un quadrato 2x2 ogni "operatore" che agisce su queste 4 caselle mantiene la parità dei segni (la cosa si estende a ogni quadrato di lato pari).
>
> Divido il quadrato 4x4 in 4 quadrati 2x2: in ciascuno di questi ultimi posso inserire o meno un segno '–", e così avrò le caratteristiche 0 1 2 3 4.
>
> Tentativo di dimostrazione che 4 sia il massimo: se immetto 5 o più segni meno ho almeno una riga ed almeno una colonna con 2 o piu` segni "–". Da queste cofigurazioni si può sempre ridurre il numero di segni "–":

> caso 1) i segni "–" sono 3 o più su una riga o una colonna, semplicemente "invertendo" quella riga o colonna.
>
> Caso 2) ci sono una riga e una colonna con 2 "–":
>
> caso 2a) la casella comune a questa riga e colonna contiene un "+", si inverte la riga e poi la colonna (o viceversa, gli operatori commutano per qualsiasi dimensione del quadrato) .
>
> caso 2b) la casella comune contiene un"–", qui i casi sono ancora tanti, passo alla notazione scacchistica:
>
> sia la casella con il "–' la a1 (e siano "–' le caselle a2 e b1) caso 2b1) se anche b2 e` "–" si invertono le due colonne 'a" e "b", la riga 3 o la 4 contengono almeno 3 "–", si inverte quella riga.
>
> caso 2b2) la b2 contiene un "+". mi restano "indipendenti e significativi solo i casi in cui i "–" sono in b3 e c4 ovvero in c3 e d4 entrambe si "semplificano" facilmente.
>
> Non ho trovato una via semplice.
>
> Rinnovo l'invito alla 16x16 o n x n.

E adesso basta, che non abbiamo ancora toccato i problemi del mese scorso.

5.6 [160]

5.6.1 Sarò Pompiere

Ebbene, il bello di questo problema era proprio ripensare al caro Grisù, che fa parte dei miei più bei ricordi d'infanzia. Ma non lasciamoci distrarre, e cerchiamo di riscrivere il testo:

> *Dovete sapere che ogni numero naturale, a Natale, ha ricevuto in dono una candela con sopra inciso il proprio numero, e per la mezzanotte del 31 dicembre tutte le candele sono ordinatamente in fila e spente. Mezzo secondo più tardi arriva uno degli gnomi di Babbo Natale e cambia stato a tutte le candele (insomma, le accende tutte). Un quarto di secondo dopo il primo gnomo, un suo collega arriva e cambia stato (a questo punto, spegnendole) a una candela sì e una no. Un ottavo di secondo dopo, arriva un altro nano e cambia stato a una candela sì e due no. Un sedicesimo di secondo… e avanti così.*
>
> *A mezzanotte e due minuti, arriva un Terribile Drago, che conta "UNO!" e deposita un uovo infiammabile vicino alla candela numero uno. Poi conta "Uno, DUE!" e deposita un uovo infiammabile vicino alla candela numero tre. Poi conta "Uno, due, TRE!" e deposita indovinate cosa vicino alla candela numero sei.*
>
> *Il nostro drago va avanti così, al ritmo di una candela al secondo (depositando l'uovo in tempo zero) quando, ad un tratto, deposita l'uovo infiammabile troppo vicino alla candela accesa, e salta per aria! Dopo l'esplosione resta solo un pezzo di candela, della quale si vedono ancora le ultime cifre del numero scritto sopra, 576.*
>
> *Che giorno (della settimana) e ora erano quando è esploso l'uovo?*

Le soluzioni che abbiamo ricevuto sono di ***Alberto R.***, ***Camillo*** e ***MBG***. Cominciamo con ***Alberto R.***

> "*Interpretatio contra extensorem*" è un sacrosanto principio giuridico in base al quale, se Tizio e Caio litigano circa l'interpretazione di una clausola contrattuale, il giudice, accertato che la clausola è effettivamente equivoca ed accertato pure che il contratto è stato redatto da Tizio, darà l'interpretazione che più fa comodo a Caio, in danno di Tizio, così punito per la sua scarsa chiarezza.
>
> Cari redattori di RM, di questo principio mi avvarrò due volte:

La prima quando leggo che ...*ogni numero naturale ha ricevuto in dono una candela*... I numeri naturali partono da zero o da uno? Da zero perché così mi fa comodo!

La seconda quando gli gnomi cambiano stato alle candele una sì e *una* no, poi una sì e *due* no, poi una si e *** no. Cosa metto al posto degli asterischi? Se considero *due* come il doppio di *uno* devo mettere *quattro*, se invece considero *due* come il successivo di *uno* devo mettere *tre*. Metto *tre* perché cosi mi fa comodo!

E veniamo alla soluzione.

La N_{esima} operazione di cambio-stato-candele avviene dopo un tempo (in secondi) pari a 1/2 + 1/4 +1/8 +... + 1/2^*N*. Poiché la serie converge a 1, a mezzanotte e un secondo tutte le operazione sono terminate e tutte le candele hanno assunto lo stato definitivo.

Tutte? Non proprio: la prima (la numero zero) ha cambiato stato infinite volte (ogni operazione inizia con *una sì*...) e siccome ∞ non è né pari né dispari (perché ∞ non è un numero), la candela zero è in sovrapposizione di stati accesa/spenta.

La chiameremo candela di Schrodinger in ricordo del famoso gatto.

Ora osserviamo che l'operazione di accendere/spegnere le candele *una sì e k no* (a partire da zero) agisce sull'N_{esima} candela se e solo se N è multiplo di k+1.

Quindi, al variare di k da 0 a ∞ l'N_{esima} candela avrà cambiato stato tante volte quanti sono i divisori di N, e siccome inizialmente era spenta, alla fine sarà spenta o accesa a seconda che il numero di detti divisori sia pari o dispari. (e i conti tornano anche con la candela di Schrodinger, visto che zero ha infiniti divisori).

È poi facile dimostrare che N ha un numero pari o dispari di divisori a seconda che sia o no un quadrato. Infatti se D è divisore di N anche N/D lo è, cioè i divisori "vanno a coppie"; ma se N è un quadrato ed R la sua radice, i due elementi della coppia R, N/R coincidono.

In definitiva le ripetute operazioni di cambio stato delle candele si concludono lasciando accese tutte e sole le candele "quadrate" (ci vedo una vaga analogia con il crivello di Eratostene).

Ora (siamo al 1° gennaio 2012) arriva il drago che deposita un uovo infiammabile in corrispondenza di ogni candela recante un numero triangolare [tipo $n(n$+1)/2], correndo un grave rischio ogni volta che il numero triangolare è <u>anche</u> un quadrato (candela accesa).

I quadrati triangolari (bello l'ossimoro!), che chiameremo QT, si calcolano con una formula che trovate su Wikipedia: QT_1 = 1; QT_2 = 36 QT_3 = 1225 etc. Il primo che termina con 576 è QT_{16} = 98286503002057414584576 . Qui, *al più presto*, può essere avvenuto l'incidente. Dico "*al più presto*" perché i QT sono infiniti e, quindi, sono presumibilmente infiniti anche quelli terminanti con 576.

Sennonché il numero QT_{16} è preceduto da circa 4,434·10^11 numeri triangolari e per sistemarvi altrettanti ovetti, al ritmo di uno al secondo, ci vogliono circa 14.000 anni. Dunque l'esplosione dell'ovetto, di cui dobbiamo verbalizzare l'accadimento, è accaduta.... nel futuro! Altro che gatto di Schrodinger!

Con ordine e pazienza, passiamo a ***Camillo***:

In "Sarò pompiere" c'è qualcosa che non mi quadra.

Non è specificato se i numeri naturali presi in considerazione comprendano lo zero o no. Considero la cosa con lo 0 per cui da un breve schema su un foglio a quadretti si evince che le candele che alla fine rimangono accese sono solo quelle col numero che è un quadrato di un naturale (esclusa la prima che lampeggia). Visto che "il gioco" potrebbe svolgersi al massimo in 3 giorni ovvero 259200s gli unici numeri naturali che siano quadrati e terminanti per 576 sono il 576 ed il 226576.

Se poi i numeri naturali considerati partissero da 1 le candele accese sarebbero quelle col numero ($N \cdot N$+1), ed è ancora peggio perché nessun numero terminante per 576 ha la candela accesa

La draghetta che deposita l'uovo seguendo le indicazioni di Tartaglia lo deposita anche accanto alle candele 15576, 100576, 1203576 ecc. nessuna delle quali corrisponde ad una candela accesa quantomeno nel primo mezzo secolo di tempo.

Quindi adatterò il vostro quesito all'unica risposta congrua che sarebbe la candela 100576. Il deposito alla candela 15576 avverrebbe meno di 4 ore e mezza dopo mezzanotte, mentre col deposito vicina alla 1203576 sarebbero passate quasi due settimane.

Parto dal fatto che il primo gnomo non le accenda tutte ma agisca come il secondo gnomo cambiando lo stato una si ed una no. Questo comporta che tutte le candele sono accese escluse quelle del quadrato esatto.

Gli gnomi sacristi allo scoccare del primo secondo hanno finito il loro lavoro e le infinite candele sono nello stato definitivo. Il bambino è rapidissimo ad addormentarsi, tempo un secondo.

Nel frattempo, 120s dopo mezzanotte arriva l'irresponsabile draghetta che comincia a depositare le sue uova ma arrivata alla candela 100576 booom.

Il verbale di polizia riporta che la tragedia è avvenuta il 2 gennaio alle ore 3, 58 minuti e 13 secondi.

Direi che un po' tutti sono spazientiti dall'imprecisione del problema... Ma il Capo dice sempre di farlo apposta, perché dalle incomprensioni esce sempre fuori qualcosa di interesante. Terminiamo con ***MBG***:

Prima domanda.

Un secondo dopo la mezzanotte del 31, gli gnomi di Babbo Natale hanno già finito il loro lavoro (anche se lo gnomo Zenone continua dire che non è vero...).

Lasciando perdere la candela numero zero, delle altre sono accese solo quelle dei numeri quadrati: 1, 4, 9, etc.

La spiegazione è semplicemente data dal fatto che ogni candela cambia stato tante volte quanti sono i suoi divisori distinti, dato che cambio stato prima a tutti i multipli di 2, poi a tutti i multipli di 3 e così via.

Ogni numero ha in generale un numero pari di divisori: un numero primo N, ha 1 e N; se poi un numero N è divisibile per D, ha anche il divisore N/D. Quindi in questi casi la candela risulta sempre spenta. Fanno eccezione appunto i quadrati per cui $N=D \cdot D$ e quindi c'è un divisore spaiato.

Nota: non ho guardato in archivio ma se non ricordo male c'era un problema analogo in uno dei primissimi numeri di RM. Scatole aperte/chiuse o qualcosa di simile al posto delle candele.

Seconda domanda:

Dobbiamo trovare una candela accesa e che finisca con 576.

Per quanto detto prima il numero completo è un quadrato e 576 andrebbe già bene. Qui però non è ben chiaro se il drago è sopravvissuto fino alla sera del 2, per cui aveva già acceso almeno 24 x 3600 = 86400 candele, oppure se è solo il racconto della storiella che si prolunga nelle sere successive. Diamo per buona la prima.

> Ci serve quindi un quadrato maggiore di 86400 che finisce per 576. Per evidenti motivi, questo numero di candela è sicuramente divisibile per 8; ma essendo quadrato, ha almeno un altro fattore 2, per cui lo troviamo nei quadrati dei multipli di 4.
>
> Qui mi son fatto in 30 secondi una tabellina in Excel e ho trovato che la prima candela che soddisfa i requisiti è la 226576 e il drago ci è arrivato dopo 2 giorni, 14 ore, 56 minuti e 16 secondi da quando ha iniziato a contare (o covare?).
>
> Avendo iniziato alle 00:02 del 1 gennaio, il misfatto dovrebbe essere successo alle 14:58:16 del 3 gennaio.
>
> Comunque poco più avanti c'è anche la candela 274576 (3 giorni e spiccioli) che potrebbe essere la colpevole e altre più avanti, anche se qui dobbiamo aspettare almeno 11 giorni.

E non diteci che i risultati sono tutti diversi, che se no dobbiamo dire che il Capo ha ragione... passiamo all'ultimo problema.

5.6.2 Più semplice di un vecchio Q&D

Forza e coraggio, che questo è (a quanto mi dicono) facile:

> *Il Postino ha N lettere cartacee da inviare, e al suo Assistente non importa nulla dei destinatari; tant'è che prende le lettere, le mette dentro le buste e poi scrive il nome del destinatario sulle buste, senza guardare dentro a chi sia destinata la lettera. Quali sono le probabilità che nessuna lettera arrivi al corretto destinatario?*

Probabilità, uffa. Le soluzioni sono di ***Alberto R.*** e ***Rub***. Cominciamo da ***Alberto R.***, che si lamenta della facilità del problema:

> Nessuno riceverà la "sua" lettera se la successione degli indirizzi sulle buste è una permutazione completa della successione dei veri destinatari. Quindi la probabilità cercata è il rapporto tra il numero di permutazioni complete di N oggetti e il numero totale di permutazioni di N oggetti, cioè:
>
> $$\frac{\left[\frac{N!}{e}\right]}{N!}$$
>
> dove la parentesi quadra indica l'arrotondamento all'intero più vicino.
>
> Notare che, se N è grandicello, N!/e è un numero enorme, quindi il suo arrotondamento all'intero può essere omesso perché ha un effetto trascurabile (come aggiungere o togliere qualche centesimo di euro al debito dello stato italiano) e la probabilità diventa, quasi esattamente, 1/e.

E che dire della soluzione di ***Rub***?

> Calcoliamo la probabilità, su N buste ed N Lettere, di avere TUTTE le coppie esatte con selezione causale. Al primo accoppiamento abbiamo $1/N$ probabilità; al secondo restano N–1 buste ed N–1 lettere, così avremo $1/(N–1)$ probabilità; moltiplicando tutti i valori (corretta la prima E la seconda E la terza…), sono ad N otteniamo
>
> Probabilità di TUTTE buste corrette = 1/N!
>
> ALMENO UNA coppia esatta: occorre valutare un processo ricorsivo. Alla prima coppia ho probabilità $1/N$ per CORRETTA, ed $1–1/N$ per ERRATA. Se ESATTA, mi fermo, gli altri accoppiamenti sono ininfluenti; se ERRATA, allora considero il secondo paio e prendo una lettera nel mucchio.
>
> Si danno due opzioni: le seconda busta era quella estratta nella prima coppia (errata), nel qual caso ho la certezza di non avere un corretto accoppiamento in

questo passaggio; oppure no, e quindi avrò $1/(N-1)$ probabilità di un giusto accoppiamento.

Inserendo le probabilità degli eventi che compongono il caso del secondo accoppiamento ESATTO, si ha:

(prima coppia errata)·(busta non ancora estratta)·(probabilità accoppiamento corretto seconda coppia)

$$[(1-1/N)] \cdot [(N-1)/N] \cdot [1/(N-1)] = (1-1/N)\cdot(1/N)$$

In sintesi si crea la successione seguente:

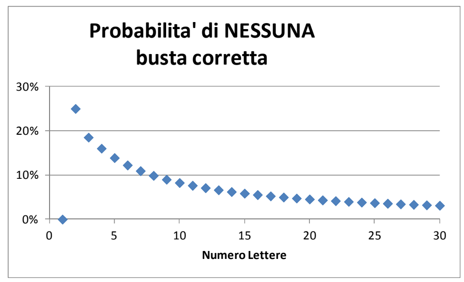
$$P(1) = 1/N$$

$$P(J)=[1-P(j-1)]/N$$

E la probabilità cercata è data dalla SOMMA (corretta la prima O la seconda O la terza…) dei $P(j)$.

Infine, la risposta alla domanda della probabilità di NESSUNA busta, è semplicemente 1–ALMENO UNA.

In grafico, in funzione di N, abbiamo la soluzione al variare del numero di lettere.



17 *Figura di* ***Rub***

E adesso è proprio ora di smetterla. Alla prossima!.

6. Quick & Dirty

I vostri tre eroi si sono dovuti recare a Parigi con relativa urgenza e tornare indietro, basandosi su un affidabile aereo che, conscio dell'importanza del suo compito, ha percorso l'intero tragitto di andata e ritorno alla velocità massima. Il guaio è che oggi c'è un ventaccio che tira da Torino verso Parigi, e andrà avanti tutto il giorno.

Ottimisticamente, Doc sostiene che essendo favoriti nel viaggio di andata, tra andare e tornare impiegheranno meno tempo.

Pessimisticamente, Rudy sostiene che essendo sfavoriti nel viaggio di ritorno, in totale impiegheranno più tempo.

Dialetticamente, Alice sostiene che essendo sfavoriti una volta e favoriti l'altra, impiegheranno lo stesso tempo.

Secondo voi (ossia, matematicamente), chi ha ragione?

7. Pagina 46

Il volume della scatola è pari a:

$$(2a-2b)^2 \cdot b = 4b(a-b)^2.$$

Possiamo scrivere il secondo membro di questa eguaglianza nella forma:

$$\frac{4}{a^2}\left[b \cdot \alpha(a-b) \cdot \alpha(a-b)\right], \qquad [1]$$

e possiamo scegliere un valore di α tale che la somma dei fattori tra parentesi, ossia

$$b + 2\alpha(a-b) = 2\alpha a + (1+2\alpha)b,$$

non dipenda da b (ciò avviene per il valore $\alpha = \frac{1}{2}$).

Il valore massimo del prodotto **[1]** si ottiene[18] quando:

$$b = \alpha(a - b).$$

e da questo si ricava:

$$b = \frac{\alpha a}{1+\alpha} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{3}{2}} = \frac{a}{3},$$

che è il valore cercato.

[18] Più in generale, il massimo prodotto di n numeri positivi la cui somma sia pari ad un dato numero k si ottiene quando tutti i numeri sono uguali tra di loro: per la dimostrazione di questa affermazione si veda BJ&P46 di RM133 (Febbraio 2010).

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 "Un guaio" è un eufemismo...

Un ingegnere pensa che le formule approssimino la realtà.
Un fisico pensa che la realtà approssimi le formule.
Un matematico non vede il nesso tra le due cose.
Autore sconosciuto

Sì, l'abbiamo messa nel calendario tra le barzellette, ma non ne siamo mica convinti.

Qualche anno fa, erano usciti svariati testi che, in fin della fiera, si ponevano (senza rispondere) la domanda: "Perché l'universo è matematico?", chiedendosi quale fosse la ragione dell'"incredibile efficienza" della matematica nello spiegare il mondo reale.

Non abbiamo la minima intenzione di scrivere un pezzo di metafisica, quindi sorvoliamo sulla questione: siamo ormai abituati (sia come fisici che come ingegnere) a considerare la matematica un ottimo modo per spiegare i coportamenti del mondo reale. Nel momento stesso nel quale un modo (matematico) per descrivere un fenomeno ha successo, il fenomeno viene considerato "spiegato" dall'esistenza stessa della formuletta in grado di descriverlo: per cercare solamente gli estremi, se partite da Newton per arrivare a Einstein (passando per Maxwell), vedete che praticamente trutto quello che è stato spiegato dalla fisica in mezzo non è altro che una variazione sul tema del calcolo differenziale[19].

Il grosso guaio con le equazioni differenziali è che hanno la pessima abitudine di richiedere che esistano delle derivate, ossia che la funzione iniziale che descrive il fenomeno si comporti abbastanza bene da essere continua e derivabile (almeno un paio di volte) in ogni punto: quando cercate di spiegare qualcosa con dei punti un po' balordi, tutto il costrutto salta.

Diventa interessante, a questo punto, provare ad utilizzare il metodo a spanne per capire come si comporta un sistema. Partiamo da quelli che si "comportano bene", e ricordiamoci che possiamo avere un'idea di come si comporta il sistema prendendo la funzione *potenziale* e mettendo una pallina nel punto di interesse: se per piccoli spostamenti la pallina schizza via (la mettete in cima ad una collina) allora l'equilibrio è *instabile*; se torna dov'era è *stabile*, se se ne sta ferma dove l'avete messo è *indifferente*. Il metodo permette, se riuscite a trovare la funzione potenziale, di analizzare il comportamento del sistema[20].

Possiamo, sempre se le cose si comportano ragionevolmente bene, estendere il concetto di potenziale e, senza andare a richiedere conservazioni dell'energia o quant'altro, sostenere che è la linea (o superficie, o quel che vi pare, tendenzialmente una dimensione in meno rispetto alle variabili) sulla quale si muove il punto che rappresenta lo stato dell'oggetto: qui non pretendiamo che la nostra biglia stia ferma, in quanto l'evoluzione del sistema viene governata dalle variabili di stato. In pratica, il nostro sistema sta fermo in un punto sin quando qualcosa cambia un valore a una delle variabili: a quel punto il sistema cambia stato, ma essendo costretto sul nostro "potenziale", potremo determinare lo stato in cui si trova.

[19] ...e stiamo andando solo sui principali: le equazioni d'onda, dal parlato allo tsunami, sono anche loro equazioni differenziali.

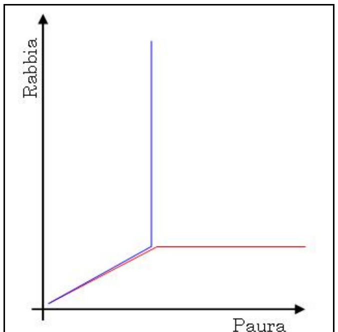
[20] Trovate una trattazione più dettagliata e formulosa nella seconda parte di "Grande argomento per un cocktail-party" (PM di RM137, giugno 2010), dove partiamo dall'equazione di Volterra per arrivare, appunto, alle soluzioni di equilibrio.

Complicato? Forse possiamo cavarcela con un esempio. Il guaio è che a noi l'esempio "semplice" più diffuso pare pochissimo chiaro, e ne preferiamo un altro leggermente più complicato ma, secondo noi, più comprensibile. Ma prima un caveat.

DON'T TRY IT AT HOME!

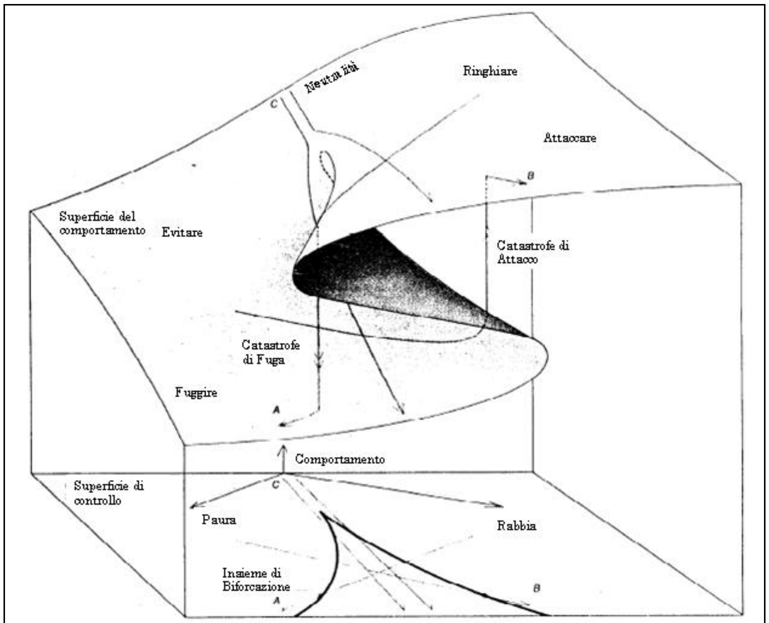
Per una serie di motivi: tanto per cominciare lo riteniamo estremamente scorretto, poi rischiereste grosso, inoltre i conviventi potrebbero seccarsi e in ultimo – visto che vi raccontiamo come va a finire – non è proprio il caso.

Supponiamo di far scoppiare una quantità di petardi vicino ad un animale domestico (cane, gatto, mucca, pitone, cobra con gli occhiali... quel che vi pare); il Fufi è molto probabile si arrabbi ed abbia paura, e ci aspettiamo dei comportamenti come nella prima parte della figura qui di fianco: qualsiasi sia la specie che avete deciso di perseguitare, al succedersi degli scoppi aumenteranno abbastanza linearmente entrambi i parametri, ma solo sino ad un certo punto. Quando Fufi non ne può più, ci sono due ipotesi:



18 *Quando si tormenta Fufi*

1. La rabbia resta costante, ma la paura diventa quasi non misurabile: Fufi scappa e vi inonda il tappeto persiano di deiezioni organiche.
2. La paura resta costante, ma la rabbia aumenta in modo molto veloce: Fufi sceglie accuratamente il vostro punto più sensibile e vi morde.



19 *Da affrontare con calma e senza paura.*

Ci teniamo a dire che in entrambi i casi vi sareste ampiamente meritati la reazione, e i tappeti persiani sono molto simpatici.

In pratica, arriviamo in un punto nel quale, se ci basiamo sul grafico in figura, non riusciamo a prevedere il comportamento: la situazione, diciamo, "precipita" ma non si riesce a decidere in che direzione[21]: qui, meglio tornare alle palline...

Che è quello che ha fatto ***René Thom***[22]: tanto per cominciare, ha introdotto una variabile indipendente, il "comportamento": secondariamente, ha deciso che Fufi deve stare su una *superficie* ben precisa, anche se piuttosto complicata: la trovate in figura, e

[21] Basarsi sulla taglia porta a disillusioni decisamente dolorose: Balto, il cagnone della madre dello scrivente, è in grado di sommergere in un colpo la produzione annuale in tappeti di Turkmenistan, Iraq e Cina messi assieme: Virgilio il gatto, di contro, lascerebbe tutto pulito. Anche dai resti di chi ci provasse.

[22] Protagonista di "Tutto sbagliato, tutto da rifare", RM080, Settembre 2005.

scusate la scarsa leggibilità: non ci sogniamo neanche di tracciarla con i mezzi a nostra disposizione, e l'abbiamo copiata da un articolo traducendo i termini.

Tanto per cominciare, notate che sul pavimento c'è una curva clamorosamente simile a quella che abbiamo tracciato noi prima; adesso, comunque, partiamo dal punto ***C*** della superficie del comportamento, e facciamo partire l'idiota con i petardi. Con l'aumentare di paura e rabbia, Fufi si sposterà sulla linea partendo da ***C*** e ad un certo punto (dove comincia la piega) sceglierà se iniziare a ringhiare, per far aumentare la rabbia e quindi morsicarvi/graffiarvi/inglobarvi, oppure fare il possibile per evitarvi e, se appena possibile, scappare (sul tappeto).

Notate però che, contrariamente al caso bidimensionale, qui il processo è ***continuo***, il che lo rende decisamente più facile da descrivere. Non solo, ma può benissimo darsi che, quando Fufi è decisamente incavolato, un petardo più vicino degli altri trasformi la rabbia in paura, e scappi: in questo caso, la nostra pallina si sposta sulla curva ***A*** e, arrivata al bordo, cade al piano di sotto, e il poveretto scappa. Anche se dal punto di vista fisico la cosa risulta scarsamente comprensibile, può succedere anche il contrario: Fufi, spaventatissimo, si ritrova chiuso in un angolo e la "caduta" della pallina, qui si verifica verso l'alto, e vi beccate il morsicone alla fine della curva ***B***.

Lasciamo in pace Fufi, e occupiamoci un attimo della pallina. Ammetterete che, dopo un tranquillo rotolare, la caduta sulla piega sia piuttosto traumatica: non per niente, Thom ha deciso di chiamare tutta questa roba ***Teoria delle Catastrofi***, e dovreste capire quindi il motivo del titolo.

"OK Rudy, hai descritto il fenomeno e promettiamo che lasciamo in pace Fufi, Balto e Virgilio. Però ci pare eccessivo chiamare la spiegazione di un caso 'Teoria'...".

Attenzione, perché in realtà i casi sono moltissimi, già solo con un modello semplice come questo: ad esempio, se sostituite alla fuga l'orso, all'attacco il toro e il procedere lungo la piega dal punto ***C*** l'aumento del contenuto speculativo, potete disegnare la situazione del mercato borsistico, mentre con le opportune variabili potete descrivere situazioni psicologiche di stress... Insomma, questo modello serve a spiegare un mucchio di fenomeni nei quali inspiegabilmente (secondo il modello classico) ad un certo punto c'è un crollo.

"Sicuro che non si possa piegare il foglio in altri modi, facendo qualche strano origami? Potrebbero esserci infiniti modelli".

Thom vi dà parzialmente ragione: infatti è riuscito a dimostrare che esistono svariate *catastrofi elementari*, ma che queste sono solo ***sette***, il che è una buona notizia[23].

Catastrofe	**Dimensioni di controllo**	**Dimensioni di comportamento**
Piega	1	1
Cuspide	2	1
Coda di rondine	3	1
Ombelico iperbolico	3	2
Ombelico ellittico	3	2
Ombelico parabolico	4	2

La cattiva notizia è che qualcuna gira in più di tre dimensioni, quindi farci rotolare le biglie può essere un problema. Per fortuna (tranne in un caso), decidere *quale* catastrofe usare non è difficile, una volta che avete deciso cosa analizzare, infatti, avrete un certo numero di ***dimensioni di controllo*** (due, nel nostro caso la paura e la rabbia) e un certo numero di

[23] La cosa non è completamente vera: ***Vladimir I. Arnold*** ha dimostrato che aumentando il numero delle dimensioni potete costruirne un'infinità, e ha catalogato quelle delle prime venticinque dimensioni. Comunque, i fenomeni del mondo reale che hanno fino a quattro parametri di controllo possono essere descritti attraverso queste sette.

dimensioni di comportamento (una, il comportamento vero e proprio). Tranne in un caso, quando sapete quante dimensioni avete di ognuno dei tipi avete anche deciso che catastrofe usare: le trovate indicate nella tabella.

"...E perché non ci hai spiegato quello più semplice?" Per il semplice motivo che ve l'ho già spiegato: andate a riprendervi il pezzo sull'equazione di Volterra, cercate la figura 13, non fatevi ingannare dalla didascalia che dice "due dimensioni" (una è di controllo, l'altra di comportamento) e avete la piega. *Et voila*.

Potrebbe ora venirvi un sospetto: se riprendete le curve ***C*** del disegno, dopo la parte in comune si dividono (una va sopra e una va sotto). La parte dopo la divisione, vista dall'alto, dovrebbe somigliare molto alla parabola (o alla "piega", come è più corretto chiamarla).

E, in questo caso, avreste pienamente ragione: se prendete la cuspide e la sezionate secondo piani paralleli al piano di base, ottenete una serie di parabole, visto che la superficie in mezzo è irraggiungibile, e le altre catastrofi si costruiscono nello stesso modo, impilando in quattro dimensioni delle catastrofi a cuspide ottenete la farfalla, che somiglia vagamente ad una cuspide con una "tasca" (quadridimensionale) nella zona di biforcazione; impilando le code di rondine[24] ottenete una catastrofe pentadimensionale, eccetera.

Come buona parte di voi sanno, pur non interessandomi di calcio, nutro una vaga simpatia per una determinata squadra: giustamente, il pezzo sulla Teoria delle Catastrofi è stato scritto durante un clamoroso due a zero. Quella simpatica era a zero, chiaro.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[24] Non abbiamo la più pallida idea di come fare, ma abbiamo il forte sospetto che si possa fare in ***due*** modi, dando origine a due catastrofi diverse.