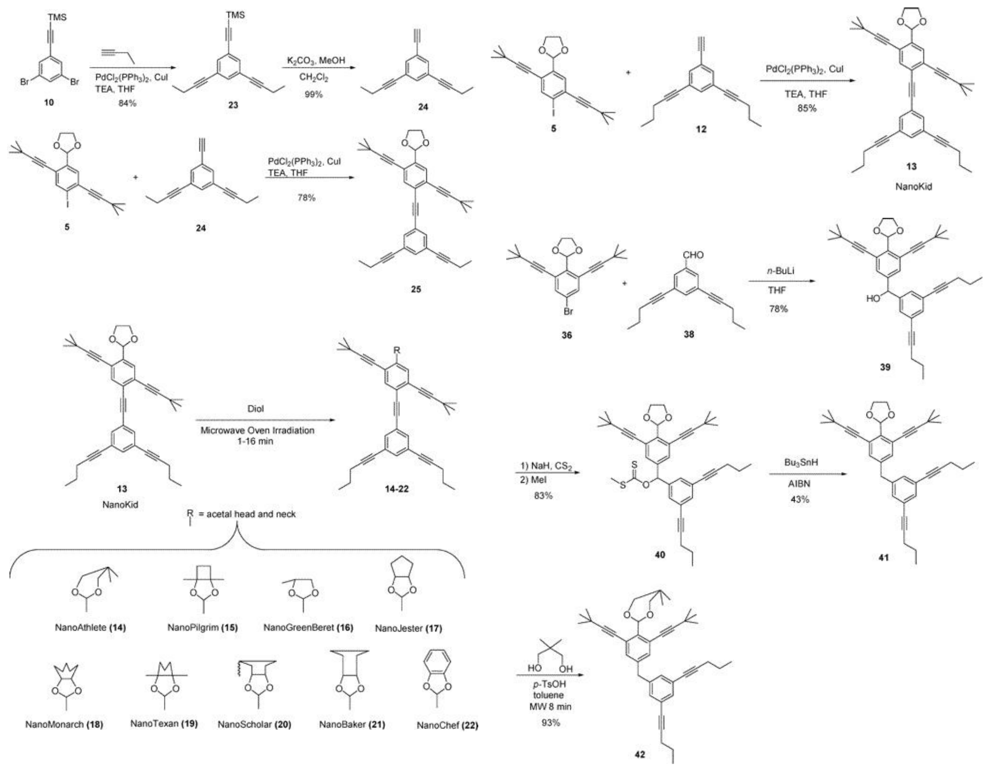
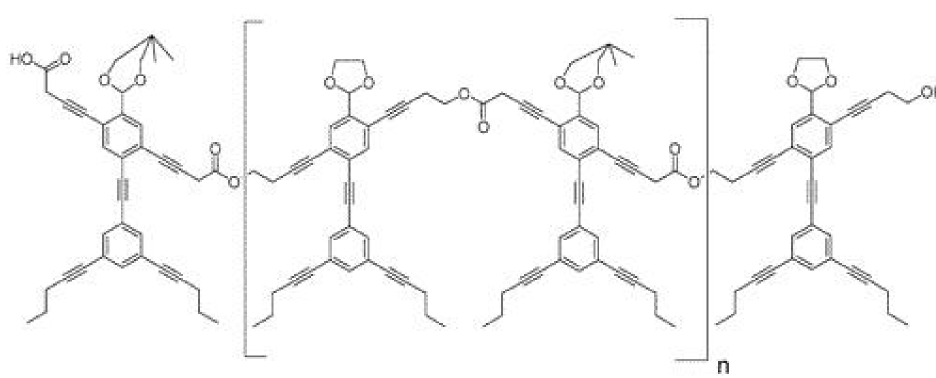
# Rudi Mathematici

*Rivista fondata nell'altro millennio*

Numero 160 – Maggio 2012 – Anno Quattordicesimo

***Rudi Mathematici***

Rivista fondata nell'altro millennio da

*Rudy d'Alembert* (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

*Piotr Rezierovic Silverbrahms* (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

*Alice Riddle* (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM159 ha diffuso 2'891 copie e il 01/05/2012 per Google eravamo in 20'200 pagine.



I chimici della Rice University sono riusciti a fare le bambole più piccole del mondo. Visto che le abbiamo trovate il *31 marzo*, qualche chimico più abile di noi riesce a verificare se il processo è giusto o hanno solo anticipato di un giorno il pesce? Quando eravamo giovani ("molto poveri e molto felici", avrebbe detto Hemingway) per vedere la pietra sull'anello di fidanzamento ci voleva la lente; adesso, per trovare le bambole ci vuole lo spettrografo.

# 1. Rosso Malpelo

*«La logica può permettersi di essere paziente, perché è eterna.»*

*«Forse è troppo aspettarsi da un uomo di essere al tempo stesso il principe degli sperimentatori e un buon matematico.»*

*«Questa serie è divergente, pertanto potremmo riuscire a combinarci qualcosa.»*

*«Dovrei rifiutare una buona cena solo perché non capisco i processi digestivi implicati? »*

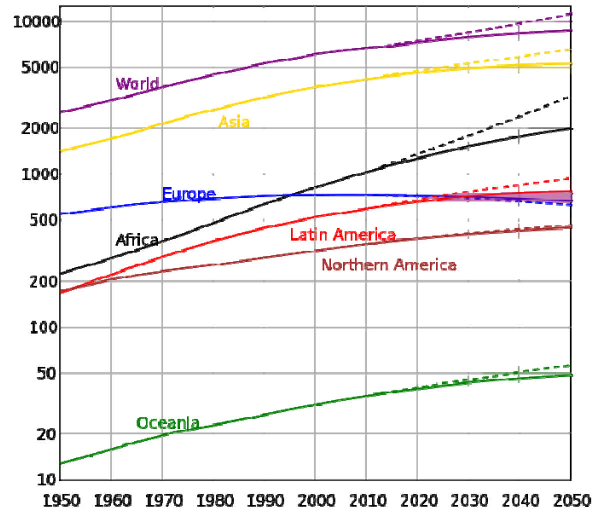
*«È barbaro insegnare Euclide ai bambini.»*

Siamo quasi sessanta milioni, dice l'Istat che ha cominciato a sfogliare i risultati più macroscopici dell'ultimo censimento; cinquantanove virgola cinque, a voler essere un po' più precisi, con il traguardo della cifra tonda ancora da raggiungere. Una bella cifra, tutto sommato: anche se, come al solito, tutto dipende dalla metrica e dalla scala che si prende in considerazione.

Siamo nel bel mezzo di una gran bella crisi, dicono i giornali, le televisioni e tutti quelli che hanno possibilità di commentare l'attuale situazione economica e finanziaria. E anche su questo, al pari delle statistiche dell'Istat, non sembra esserci molto da aggiungere: anche perché che la crisi sia viva e reale è cosa tangibile ed evidente anche senza guardare la televisione o leggere i giornali. In un afflato d'ottimismo, però, forse anche in questo caso un cambio di scala può risultare, se non proprio salutare, quanto meno distraente.

Secondo gli esperti, lo scorso 31 Ottobre 2011 la popolazione terrestre ha raggiunto i sette miliardi di persone: questo significa che non c'è neanche un italiano intero per ogni cento uomini che calpestano il pianeta. Stare sotto la soglia dell'un per cento può sembrare deprimente, ma potrebbe risultare consolatorio notare che, dal punto di vista del peso storico e culturale, la nostra beneamata patria, per quanto negletta, racchiude in sé un patrimonio decisamente superiore al misero punto percentuale. Per contro, come ogni tanto qualcuno si affretta a ricordarci, con la storia e la cultura non si mangia, quindi è opportuno provare a calcolare quanta roba da mangiare abbiamo davvero a disposizione. In questo tentativo, avere come punto di riferimento una percentuale semplice e facile come l'1% può essere comodo. In un mondo perfetto ed equo, ogni persona dovrebbe aver diritto ad una sua parte uguale a quella di tutti gli altri: se ci limitiamo a fare i conti per nazioni (anche perché farli per sette miliardi di individui rischia di essere un impegno eccessivo per i nostri poveri mezzi), dovrebbe essere sufficiente verificare se agli italiani spetta più o meno dell'un per cento delle risorse del pianeta. Basta riuscire a quantificare la ricchezza globale disponibile, e il gioco è presto fatto, spostando la virgola del totale di un paio di posti decimali.

Contare un grande numero di persone come gli abitanti della Terra non è affare da poco, e naturalmente comporta, più che l'uso progressivo e ripetuto della successione dei numeri naturali, delle accurate stime statistiche. Non di meno è verosimile che tali stime abbiano un ottimo livello di affidabilità, ed è molto interessante osservare l'evoluzione della popolazione negli ultimi sessanta anni, suddivisa per continenti.




1 *Popolazione mondiale per continente (preso da Wikipedia: la scala delle ordinate non è lineare neanche per idea, quindi figuratevi da soli le pendenze)*

Il grafico qui a fianco, preso da Wikipedia, mostra con devastante chiarezza che il mezzo secolo appena trascorso è stato davvero sconvolgente dal punto di vista demografico. Nello spazio di una vita umana (la nostra) la popolazione del mondo si è quasi triplicata: l'Europa, che alla fine della seconda guerra mondiale contava circa un quarto degli esseri umani viventi, ne ha oggi meno del 10%. È già stata ampiamente superata dall'Africa, e mentre nel 1950 contava più abitanti di tutte e due le Americhe messe insieme, sarà presto superata da entrambe prese singolarmente. L'Asia è sempre il serbatoio maggiore di persone, ma il tasso di crescita dell'Africa è così elevato che potrebbe strapparle il non troppo invidiabile primato di continente più popoloso entro la fine del secolo. Tra le molte cose che si possono leggere dal grafico vi è pure la constatazione che, assumendo come grosso modo stabile la popolazione italiana dagli anni Sessanta ad oggi (le variazioni percentuali sono in effetti trascurabili), all'epoca del boom si poteva contare un italiano ogni circa quaranta esseri umani.

Resta il fatto indiscutibile che avere 56 o 60 milioni di connazionali è un'informazione che suscita al più un tiepido interesse, mentre il confrontarsi con la crisi economica scatena emozioni decisamente più dirompenti. La cosa è talmente ovvia da non meritare particolari osservazioni: per quanto una persona possa essere coinvolta e interessata al mondo nella sua visione globale, sono le condizioni personali di vita e di benessere quelle che incidono sugli stati d'animo e sulla qualità dell'esistenza. E poi non ci si confronta con gli abitanti degli antipodi, ma con i propri vicini; e, soprattutto, si confronta la propria attuale qualità della vita con quella dell'anno prima, del mese prima. Ogni persona d'Occidente è più o meno conscia del fatto che il proprio grado di ricchezza è maggiore di quello di quasi tutta la popolazione del resto del pianeta, ma questa eventuale consapevolezza resta tutto sommato sullo sfondo, trasversale agli affanni di ogni giorno. Ciò non di meno, non fosse altro per esercizio, si può provare a calcolare come è distribuita la torta che madre Terra ci offre.

A differenza del conteggio degli esseri umani, la quantificazione globale della ricchezza è una stima legata ad un gran numero di assunzioni che è necessario ipotizzare, assunzioni che sono in gran parte opinabili. La maniera più facile è quella di assumere come "ricchezza" il prodotto interno lordo (PIL) del mondo; e anche concedendo che per "ricchezza" si possa intendere esclusivamente la somma dei beni materiali, la scelta è suscettibile di molte critiche. Ad esempio, si parte dal presupposto che la ricchezza si appunto "prodotta", anche se alla crescita (o diminuzione) del PIL concorrono anche molte variabili che non sembrano impattare direttamente sul concetto di creazione/produzione dei beni. Inoltre, il PIL è alla fin fine un indice di produzione su base annua, mentre chi ha una visione ancora ingenua dell'economia (come chi scrive) è portato ancora a pensare alla "ricchezza" come qualcosa che esiste e persiste, e non che venga periodicamente consumata e riprodotta. È però vero che questa visione rischia davvero di essere molto ingenua, e comunque, in ultima analisi, il PIL resta un indice con buone credenziali per indicare lo stato di salute di un paese. Infine, tenendo conto che quest'articolo non ha certo la velleità di sancire delle inattaccabili verità economiche, il PIL ha il grande merito di essere un dato di facile reperibilità con una ricerca in rete.

Con queste premesse, si può apprendere direttamente che la "ricchezza totale" del pianeta assomma a circa 74,43 migliaia di miliardi di dollari americani. Il dato ci consente subito di ottenere la ricercata "misura della fetta di torta", o se preferite "il numero di pagnotte di pane pro capite": sappiamo quant'è la popolazione mondiali (i famosi sette miliardi), e sappiamo ora quant'è la ricchezza globale. Un'ardita divisione ci fornisce subito il PIL pro capite: più o meno 10.600 dollari o, se preferite, 8000 euro tondi, che è pure più facile da ricordare. Questi ottomila euro possono essere letti sia come "*quanto dovrebbe avere ogni uomo all'anno se la ricchezza fosse equamente ripartita",* sia come *"quanto dovrebbe produrre ogni essere umano ogni anno se ognuno contribuisse in egual maniera alla ricchezza del mondo*". Preferire l'una o l'altra delle due definizioni (stanti le assunzioni che abbiamo preso), è probabilmente questione più di orientamento politico che di effettiva sostanziale differenza d'approccio. In ogni caso, un confronto immediato con le proprie tasche è immediatamente possibile: se spendete/producete meno di 8000 euro lordi l'anno siete in credito (o debito?) con il resto dell'umanità, altrimenti vivete al di sopra della media.

Passiamo ai conti nazionali. Il nostro famoso ed iniziale 1% (scarso) di popolazione dovrebbe assegnarci un corrispondente 1% (scarso) di PIL mondiale. Sembra però che l'Italia abbia un PIL pari a 2,2 migliaia di miliardi di dollari, invece che gli 0,7 che ci saremmo aspettati[1]. Quindi è inutile provare a far finta di non saperlo: se fossimo tutti seduti alla stessa tavola con mamma Terra a fare le porzioni nei piatti, è indubbio che non possiamo lamentarci della pietanza che ci è stata servita (o che ci siamo guadagnati, d'accordo, d'accordo…). Il passo elementare successivo è ovvio: se mettiamo a rapporto il 2,2 che abbiamo rispetto allo 0,7 teorico, ci ritroviamo con un indice ricchezza/popolazione (potremmo chiamarlo fantasiosamente R/P) superiore a 3. E questo è un indice con una certa facilità di lettura: in estrema sintesi e forte di brutali approssimazioni, si può leggere come "*se ad ogni uomo spetta una pagnotta di pane, l'italiano se ne mangia tre*". Anzi, a questo punto tanto vale rinunciare al pretenzioso nome R/P e ripiegare in un più prosaico RdP: Razione di Pagnotte.

A parte le facili e grevi battute, l'indice appena costruito per l'Italia sembra avere davvero una certa immediatezza, cosa che ci fa pensare che dev'essere indice stranoto ai professionisti della materia, i quali sapranno senza dubbio articolarlo e determinarlo in maniera decisamente più accurata e significativa di quanto fatto in un paio d'ore d'una mattina festiva e piovosa. Però l'appetito vien mangiando, e la disponibilità d'un qualsiasi foglio elettronico apparecchia la tavola: prendendo le principali nazioni del globo e i relativi PIL, calcolandone il peso percentuale sia in termini di popolazione che di ricchezza, è davvero semplice stilare una sorta di classifica basata sulla Razione di Pagnotte: un po' per vedere se i conti tornano con il giudizio intuitivo che ci si fa della ricchezza di ogni paese, e un po' per vedere quali siano i "paesi campione", quelli con l'indice RdP più vicino ad uno: per provare a capire, insomma, dove si dovrebbe vivere se tutti i beni fossero equamente ripartiti.

Il risultato è riassunto nella tabella che segue[2]. Visto il gran lavoro manuale di copia e incolla e la nota predisposizione agli errori di calcolo di chi scrive potrebbero esserci delle imprecisioni, ma il messaggio generale che veicola sembra comunque chiaro:

[1] Ricordate quello che dicevamo poche righe fa? Basta prendere la ricchezza totale e spostare di due posizioni la virgola, per fare il famoso 1% (lo insegnano tutti i maestri, alle elementari), quindi il 74,43 diventa subito uno 0,7443; visto che poi il nostro 1% di popolazione è molto "scarso", si può approssimare a 0,7.

[2] Per quanto abborracciata e frettolosa, la metodologia usata deve essere sommariamente descritta. Le tabelle fonti dei dati sono state prese dalle Wikipedia italiana e inglese (che offrono diversi elenchi, a seconda delle loro proprie fonti; si sono scelti quelli che sembravano, ad occhio, più completi); essendo determinanti sia la popolazione sia la ricchezza, sono stati presi in considerazione tutti gli stati con una popolazione superiore a dieci milioni di abitanti e tutti quelli con un PIL superiore allo 0,1% del PIL mondiale. Ne è risultata una lista di 107 stati che coprono più del 97% sia della popolazione (97,18%) sia della ricchezza prodotta (97,75%). Nel 3% scarso che rimane fuori prendono posto comunque molte nazioni, che sono state trascurate anche perché potrebbero avere indici RdP particolarmente elevati (la Repubblica di San Marino si piazzerebbe comodamente

| # | Nazione | Ricchezza | | Popolazione | | R/P |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | PIL | % | Abitanti | % | |
| 1 | Qatar | 122.200 | 0,16 | 1.699.435 | 0,02 | **6,66** |
| 2 | Singapore | 292.200 | 0,39 | 5.076.700 | 0,07 | **5,33** |
| 3 | Norvegia | 276.400 | 0,37 | 5.035.500 | 0,07 | **5,08** |
| 4 | Kuwait | 144.300 | 0,19 | 2.736.000 | 0,04 | **4,89** |
| 5 | Germania | 4.046.000 | 5,44 | 83.743.000 | 1,21 | **4,48** |
| 6 | Stati Uniti d'America | 14.720.000 | 19,78 | 317.667.000 | 4,61 | **4,29** |
| 7 | Francia | 2.951.000 | 3,97 | 65.930.000 | 0,96 | **4,15** |
| 8 | Svizzera | 326.900 | 0,44 | 7.856.600 | 0,11 | **3,85** |
| 9 | Paesi Bassi | 680.400 | 0,91 | 17.053.400 | 0,25 | **3,70** |
| 10 | Austria | 332.900 | 0,45 | 8.416.982 | 0,12 | **3,66** |
| 11 | Irlanda | 174.000 | 0,23 | 4.470.700 | 0,06 | **3,61** |
| 12 | Australia | 889.600 | 1,20 | 22.982.900 | 0,33 | **3,59** |
| 13 | Canada | 1.335.000 | 1,79 | 35.044.000 | 0,51 | **3,53** |
| 14 | Svezia | 354.000 | 0,48 | 9.418.732 | 0,14 | **3,48** |
| **15** | **Italia** | **2.189.000** | **2,94** | **59.464.644** | **0,86** | **3,41** |
| 16 | Danimarca | 204.100 | 0,27 | 5.560.628 | 0,08 | **3,40** |
| 17 | Belgio | 394.900 | 0,53 | 10.827.000 | 0,16 | **3,38** |
| 18 | Regno Unito | 2.229.000 | 3,00 | 62.237.000 | 0,90 | **3,32** |
| 19 | Taiwan | 807.200 | 1,08 | 23.165.878 | 0,34 | **3,23** |
| 20 | Finlandia | 185.400 | 0,25 | 5.406.960 | 0,08 | **3,18** |
| 21 | Giappone | 4.338.000 | 5,83 | 137.960.000 | 2,00 | **2,91** |
| 22 | Corea del Sud | 1.467.000 | 1,97 | 48.988.833 | 0,71 | **2,77** |
| 23 | Spagna | 1.374.000 | 1,85 | 46.147.440 | 0,67 | **2,76** |
| 24 | Grecia | 321.700 | 0,43 | 11.282.751 | 0,16 | **2,64** |
| 25 | Oman | 76.530 | 0,10 | 2.694.094 | 0,04 | **2,63** |
| 26 | Israele | 217.100 | 0,29 | 7.718.600 | 0,11 | **2,61** |
| 27 | Nuova Zelanda | 119.200 | 0,16 | 4.463.500 | 0,06 | **2,47** |
| 28 | Repubblica Ceca | 261.500 | 0,35 | 10.532.770 | 0,15 | **2,30** |
| 29 | Emirati Arabi Uniti | 199.800 | 0,27 | 8.264.070 | 0,12 | **2,24** |
| 30 | Portogallo | 247.000 | 0,33 | 10.637.713 | 0,15 | **2,15** |
| 31 | Arabia Saudita | 622.500 | 0,84 | 27.136.977 | 0,39 | **2,13** |
| 32 | Slovacchia | 121.300 | 0,16 | 5.435.273 | 0,08 | **2,07** |
| 33 | Ungheria | 190.000 | 0,26 | 9.986.000 | 0,14 | **1,76** |
| 34 | Polonia | 721.700 | 0,97 | 38.092.000 | 0,55 | **1,76** |
| 35 | Croazia | 78.520 | 0,11 | 4.429.078 | 0,06 | **1,64** |
| 36 | Cile | 260.000 | 0,35 | 17.094.270 | 0,25 | **1,41** |
| 37 | Malesia | 416.400 | 0,56 | 27.565.821 | 0,40 | **1,40** |
| 38 | Russia | 2.160.000 | 2,90 | 144.927.297 | 2,10 | **1,38** |
| 39 | Argentina | 596.000 | 0,80 | 40.091.359 | 0,58 | **1,38** |
| 40 | Libia | 89.030 | 0,12 | 6.355.000 | 0,09 | **1,30** |
| 41 | Messico | 1.560.000 | 2,10 | 114.322.757 | 1,66 | **1,26** |
| 42 | Bielorussia | 128.400 | 0,17 | 9.476.600 | 0,14 | **1,26** |
| 43 | Turchia | 958.300 | 1,29 | 73.722.988 | 1,07 | **1,20** |
| 44 | Bulgaria | 91.830 | 0,12 | 7.351.234 | 0,11 | **1,16** |
| 45 | Romania | 253.300 | 0,34 | 21.469.959 | 0,31 | **1,09** |
| 46 | Kazakistan | 193.800 | 0,26 | 16.473.000 | 0,24 | **1,09** |
| 47 | Venezuela | 344.200 | 0,46 | 29.636.000 | 0,43 | **1,08** |
| 48 | Iran | 863.500 | 1,16 | 76.301.000 | 1,11 | **1,05** |
| 49 | Sudafrica | 527.500 | 0,71 | 49.991.300 | 0,73 | **0,98** |
| 50 | Cuba | 114.100 | 0,15 | 11.241.161 | 0,16 | **0,94** |
| 51 | Azerbaigian | 90.150 | 0,12 | 8.997.400 | 0,13 | **0,93** |
| 52 | Tunisia | 100.300 | 0,13 | 10.549.100 | 0,15 | **0,88** |
| 53 | Perù | 274.700 | 0,37 | 29.461.933 | 0,43 | **0,86** |
| 54 | Colombia | 431.900 | 0,58 | 46.476.000 | 0,67 | **0,86** |
| 55 | Brasile | 1.782.000 | 2,39 | 195.732.694 | 2,84 | **0,84** |
| 56 | Repubblica Dominicana | 84.940 | 0,11 | 9.378.818 | 0,14 | **0,84** |
| 57 | Thailandia | 580.300 | 0,78 | 67.070.000 | 0,97 | **0,80** |
| 58 | Serbia | 80.650 | 0,11 | 9.856.000 | 0,14 | **0,76** |
| 59 | Ecuador | 114.700 | 0,15 | 14.306.876 | 0,21 | **0,74** |
| 60 | Cina | 9.872.000 | 13,27 | 1.348.785.700 | 19,57 | **0,68** |
| 61 | Algeria | 254.700 | 0,34 | 36.300.000 | 0,53 | **0,65** |
| 62 | Ucraina | 306.300 | 0,41 | 45.760.051 | 0,66 | **0,62** |
| 63 | Egitto | 500.900 | 0,67 | 81.941.000 | 1,19 | **0,57** |
| 64 | Angola | 114.100 | 0,15 | 19.000.000 | 0,28 | **0,56** |
| 65 | Sri Lanka | 104.700 | 0,14 | 20.653.000 | 0,30 | **0,47** |
| 66 | Siria | 106.400 | 0,14 | 21.530.000 | 0,31 | **0,46** |
| 67 | Guatemala | 70.310 | 0,09 | 14.361.666 | 0,21 | **0,45** |
| 68 | Marocco | 153.800 | 0,21 | 32.465.300 | 0,47 | **0,44** |
| 69 | Bolivia | 47.980 | 0,06 | 10.426.154 | 0,15 | **0,43** |
| 70 | Indonesia | 1.033.000 | 1,39 | 240.556.363 | 3,49 | **0,40** |
| 71 | Iraq | 117.700 | 0,16 | 32.105.000 | 0,47 | **0,34** |
| 72 | Filippine | 351.200 | 0,47 | 96.013.200 | 1,39 | **0,34** |
| 73 | Vietnam | 278.100 | 0,37 | 85.846.997 | 1,25 | **0,30** |
| 74 | Uzbekistan | 86.070 | 0,12 | 28.095.900 | 0,41 | **0,28** |
| 75 | Yemen | 61.880 | 0,08 | 22.492.035 | 0,33 | **0,25** |
| 76 | Pakistan | 451.200 | 0,61 | 179.180.000 | 2,60 | **0,23** |
| 77 | Nigeria | 369.800 | 0,50 | 157.431.790 | 2,28 | **0,22** |
| 78 | Camerun | 44.650 | 0,06 | 19.406.100 | 0,28 | **0,21** |
| 79 | Sudan | 98.790 | 0,13 | 43.500.000 | 0,63 | **0,21** |
| 80 | Cambogia | 29.460 | 0,04 | 13.395.682 | 0,19 | **0,20** |
| 81 | Senegal | 23.860 | 0,03 | 12.171.265 | 0,18 | **0,18** |
| 82 | India | 2.194.000 | 2,95 | 1.210.193.422 | 17,56 | **0,17** |
| 83 | Costa d'Avorio | 37.800 | 0,05 | 21.395.000 | 0,31 | **0,16** |
| 84 | Kenya | 65.950 | 0,09 | 38.610.097 | 0,56 | **0,16** |
| 85 | Bangladesh | 259.300 | 0,35 | 152.566.000 | 2,21 | **0,16** |
| 86 | Corea del Nord | 40.000 | 0,05 | 24.052.231 | 0,35 | **0,15** |
| 87 | Ciad | 18.560 | 0,02 | 11.274.106 | 0,16 | **0,15** |
| 88 | Ghana | 38.240 | 0,05 | 24.233.431 | 0,35 | **0,15** |
| 89 | Zambia | 20.030 | 0,03 | 13.046.508 | 0,19 | **0,14** |
| 90 | Tanzania | 62.220 | 0,08 | 44.484.857 | 0,65 | **0,13** |
| 91 | Uganda | 41.700 | 0,06 | 31.800.000 | 0,46 | **0,12** |
| 92 | Burkina Faso | 20.060 | 0,03 | 15.730.977 | 0,23 | **0,12** |
| 93 | Myanmar | 60.070 | 0,08 | 48.000.000 | 0,70 | **0,12** |
| 94 | Afghanistan | 29.810 | 0,04 | 23.993.500 | 0,35 | **0,12** |
| 95 | Nepal | 35.310 | 0,05 | 28.584.975 | 0,41 | **0,11** |
| 96 | Mali | 16.740 | 0,02 | 14.517.176 | 0,21 | **0,11** |
| 97 | Ruanda | 11.840 | 0,02 | 10.412.820 | 0,15 | **0,11** |
| 98 | Haiti | 11.180 | 0,02 | 10.085.214 | 0,15 | **0,10** |
| 99 | Madagascar | 20.730 | 0,03 | 18.866.000 | 0,27 | **0,10** |
| 100 | Guinea | 10.600 | 0,01 | 10.217.591 | 0,15 | **0,10** |
| 101 | Malawi | 13.510 | 0,02 | 13.077.160 | 0,19 | **0,10** |
| 102 | Etiopia | 84.020 | 0,11 | 81.455.634 | 1,18 | **0,10** |
| 103 | Mozambico | 22.190 | 0,03 | 22.416.881 | 0,33 | **0,09** |
| 104 | Niger | 10.580 | 0,01 | 15.730.754 | 0,23 | **0,06** |
| 105 | Somalia | 5.896 | 0,01 | 9.330.000 | 0,14 | **0,06** |
| 106 | Zimbabwe | 4.395 | 0,01 | 12.571.000 | 0,18 | **0,03** |
| 107 | Rep. Dem. del Congo | 22.920 | 0,03 | 66.000.000 | 0,96 | **0,03** |
| | | | 97,75 | | 97,18 | |

2 *Classifica delle nazioni in base alla Razione di Pagnotte (dati elaborati dalle tavole della popolazione e del PIL presi da Wikipedia)*

L'indice RdP rivela qualche sorpresa nel dettaglio ("*Ullallà, siamo davvero incastrati tra le opime grazie di Svezia e Danimarca? E come mai loro hanno servizi pubblici da urlo e noi da disperazione?*") ma tutto sommato un andamento globale non inaspettato. Che la Germania raccolga qualche briciola più degli USA può stupire un po', come che il vituperato Portogallo la spunti sull'Arabia Saudita[3], ma sono per l'appunto dettagli.

nelle prime cinque posizioni, e non abbiamo idea di quanto alto sarebbe l'indice RdP delle Isole Cayman…). Se vi piace, fate finta che questo sia uno degli aspetti che rendono particolarmente perigliosi i calcoli dei limiti della forma 0/0.

[3] Qualcosa ci fa supporre, vista la fama dell'Arabia di terra di straricchi e quella del Portogallo come economia affaticata, che i sauditi distribuiscano le Pagnotte tra i cittadini in maniera molto meno efficace di quanto facciano i portoghesi. Si potrebbe inserire il concetto di "sigma" nelle distribuzioni nazionali di Pagnotte, ma non ci pare davvero il caso di farlo qui…

L'Africa si ammucchia al fondo della classifica come fa sempre in tutte le classifiche di ricchezza e di qualità della vita, la vecchia Europa si difende ancora, anche se con marcate differenze e raggruppamenti (l'Europa occidentale da una parte, le pattuglie dell'Europa dell'est da un'altra), e così via.

Una delle cose più significative è la posizione dei BRICS[4]; con la sola eccezione della Russia – unico paese europeo del gruppo – tutti i componenti sono ancora sotto la fatidica soglia di parità dell'indice Razione delle Pagnotte. Sentirsi in credito col mondo, verosimilmente, aiuta e alimenta la voglia di sviluppo.

In ogni caso, una delle risposte cercate la si può leggere direttamente in tabella: i paesi "campione", quelli che sono più vicini all'Equità Assoluta stabilita da un RdP prossimo ad 1 sono Iran e Sudafrica. Paesi decisamente diversi come storia, cultura, economia e politica, stranamente accomunati da dal numero di pagnotte ben ripartite su scala globale. In ogni caso, non sembrano essere particolarmente attraenti per l'italiano medio (per lo meno dal punto di vista finanziario).

Un altro gioco che è naturale fare, una volta nota la razione di pagnotte di ogni stato, è il confronto non tanto con il punto di equilibrio iran-sudafricano, ma tra nazione e nazione. Il rapporto tra il primo e l'ultimo della classifica (Qatar e Congo) è un terribile 222, che nella nostra ormai frusta metafora panificatrice significa che un congolese mastica un boccone ogni 222 deglutizioni degli abitanti del Qatar[5]. Ma anche rapporti meno drammatici sono ampiamente significativi: gli Albanesi diretti in Italia negli anni passati e recentemente vogliosi di ritornare in patria spiegano che i migranti usavano una specie di "regola del cinque", se non riesci a guadagnare all'estero almeno cinque volte di più di quello che rimedi in patria, allora non vale la pena partire[6]. Ma cinque è un rapporto assai facile da ottenere, combinando opportunamente gli RdP delle nazioni: ne segue che è del tutto naturale, ovvio, diremmo quasi "matematico" che un gran numero di persone decida di mettersi in viaggio, su barche o attraverso il deserto, investendo i risparmi di una vita su un volo low-cost o magari anche a piedi, per cercare una qualità di vita migliore.

È una cosa che è sempre successa, dall'alba dell'uomo. Se il ventesimo secolo ha forse amplificato l'effetto è perché è in questo periodo della storia che si sono verificate delle grandi rivoluzioni: e si tratta, guarda caso, di rivoluzioni essenzialmente culturali. Più che la devastazione di due guerre mondiali, è probabile che il secolo scorso sarà ricordato per alcuni eventi topici nella storia dell'umanità: a) per la prima volta la popolazione urbana ha superato quella delle campagne; b) la tecnologia ha reso relativamente facile lo spostamento di merci e di persone; c) l'incredibile facilità di comunicazione rispetto ai periodi storici precedenti. Chi ha poco per vivere ma immagina che il mondo sia ovunque ugualmente disperato difficilmente decide di mettersi in viaggio, se non in casi estremi, quando anche l'ignoto e l'incerto spaventa meno della probabile morte certa per stenti; ma chi scopre che nel mondo esistono molti posti in cui sopravvivere è assai più facile non ha troppe remore a tentare l'avventura.

In realtà, si potrebbe perfino estendere il gioco dell'indice RdP in un modello rigorosamente fisico, anzi elettrico. Si potrebbe assimilare la Razione di Pagnotte al

---

[4] Acronimo di Brasile, Russia, India, Cina e Sudafrica, economie emergenti (alcune ormai decisamente emerse) che meritavano plauso dagli investitori. La sigla suona come "bricks", mattoni, e la stampa anglofona gli rende omaggio con questo nome che ricorda solidità. Dall'altro latro della barricata c'è la denominazione dei PIGS, porci, che indica invece Portogallo, Italia (o Irlanda, dipende dal periodo), Grecia e Spagna. Paesi ritenuti la parte fragile dell'Europa finanziaria, son stati premiati con un acronimo che si commenta da solo.

[5] Come si chiamano? Kataresi? Cataroni? Qatarini?

[6] L'Albania (che per qualche misteriosa ragione non abbiamo incluso nella tabella dei 107 paesi, anche se secondo i criteri stabiliti avrebbe dovuto figurarvi) ha un RdP pari a 0,69. Messo a rapporto con il 3,41 italiano si ottiene un valore pari a 4,94: è impressionante come gli Albanesi sembrino rispettare davvero la "regola del cinque", pur senza star lì a far calcoletti sulle tabelle di Wikipedia.

potenziale di un campo elettrico, considerare le nazioni come nodi puntiformi del circuito e costruire una rete che congiunga tutti i paesi in accordo con i loro confini geografici, per poi misurare l'intensità di corrente della rete così costruita. Potrebbe essere un modello banale, ma comunque indicativo, del tasso di migrazione atteso in ogni ramo del circuito. Occorrerebbe di certo almeno un'altra variabile: la resistenza. E questa è in verità una variabile quanto mai opportuna ed adatta al modello, perché esistono confini che offrono resistenza bassissima (ad esempio, l'area Schengen), altri che ne mostrano una altissima; due paesi confinanti in guerra avranno una "resistenza" virtualmente infinita, ma anche la minaccia di essere presi a cannonate a largo di Lampedusa è valutabile in un gran bel numero di kiloOhm. L'attribuzione del valore di resistenza è attività possibile, ma certo troppo complicata per poter proseguire il giochino, quindi la piantiamo qui[7]. In fondo, l'intenzione era solo di mostrare come sia drammaticamente naturale aspettarsi di vedere popolazioni in migrazione da una parte all'altra del pianeta, e come sia, per complemento, ingenuo stupirsi del fatto che le nostre città si popolano sempre più di etnie diverse.

Eppure, se il cognome "Hu" supera "Brambilla" nella classifica dei cognomi milanesi più diffusi, i giornali ne parlano con toni quasi allarmistici: eppure l'Europa è da sempre una terra di "vigorosi meticci", come la definì, in tempi non sospetti, lo storico inglese H.A.L. Fisher[8]. Ancora più drammatico è l'urlo di dolore che si alza da parte di chi vede a rischio, nel giro di qualche lustro, il primato storico del cognome "Rossi" su scala nazionale. La cosa è particolarmente divertente perché, con ogni probabilità, il cognome principe nazionale deriva anch'esso da una sorta di rivincita d'una minoranza.

Sembra infatti acclarato che Rossi (e tutti i cognomi derivati: Rosso, Russo, Rossini, Rossetti, ed altri ancora) derivino sostanzialmente dall'identificazione tricocromatica del portatore: insomma, il cognome deriva dall'insolito colore dei capelli. I capelli rossi sono relativamente rari[9], e la proprietà sembrava tanto rimarchevole da dover essere promossa ad marchio di identità. È curioso notare che gran parte delle popolazioni umane non ha una varietà di colorazione tale da consentire una simile distinzione. Capelli ed occhi scuri sono una caratteristica virtualmente senza eccezione per le etnie d'Africa, d'Asia, d'America e d'Oceania. Solo la razza[10] caucasica ha una sensibile varietà di chiome e di iridi, e questo a prima vista dovrebbe renderla più aperta alla tolleranza delle differenze somatiche; ma a giudicare da quel che raccontano i libri di storia quest'ipotesi non regge alla prova dei fatti, anzi. Una tinta un po' particolare, pur se appartenente a individui che senza dubbio alcuno fanno parte della comunità indigena, è sempre oggetto di sospetto, curiosità, quando non esplicitamente di scherno. Ancora oggi si ritrovano un bel numero di luoghi comuni sui rossochiomati: nei confronti delle fanciulle, è solito catalogarle in due categorie ben distinte e distanti, brutte o bellissime. E anche questo è un modo per ratificarne la peculiarità, la differenza dal "normale": anche perché se il marchio di "brutta" è generico e crudele (oltre che poco obiettivo) di per sé, quello di "bellissima" è inevitabilmente accompagnato dall'aggiunta di considerazioni morali poco gratificanti. La bella donna rossa è dipinta sempre come un po' perversa, spesso cattiva, in ogni caso devastante per il povero maschio che ne cade affascinato, da

---

[7] Anche perché in verità le variabili di cui tener conto sono comunque troppe. Il nostro RDP è indice percentuale, e bisognerebbe riconvertirlo ai valori assoluti se davvero volessimo trovare un'ipotesi di intensità elettrica/flusso migratorio: il gran numero di migranti cinesi che si trovano nelle nostre città è dato certo dal RdP cinese più basso di quello nazionale (specie se si considerano quelli di dieci o vent'anni fa), ma soprattutto dal fatto che i cinesi sono, in valore assoluto, davvero *tanti*. Inoltre, i "valori nazionali" hanno poco significato se non c'è una buona distribuzione della ricchezza all'interno delle nazioni. Una nazione con un RdP alto che ripartisce le proprie ricchezze solo verso pochi oligarchi e non verso la popolazione (diciamo qualcosa di analogo alle medievali monarchie europee) è di fatto assimilabile ad una con un RdP basso ma con ricchezza distribuita.

[8] E se non credere ad uno che si chiama H.A.L., a chi credere?

[9] E lo diventeranno sempre di più nel futuro, a dar retta ad alcune previsioni degli studiosi di genetica.

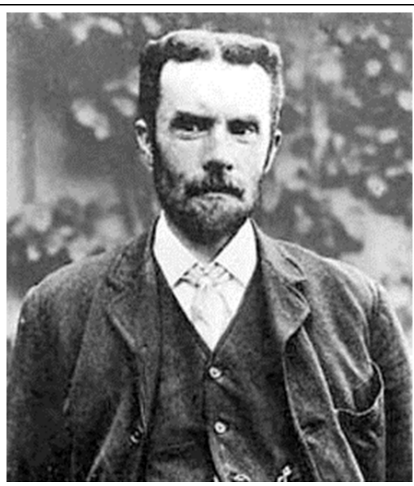
[10] Sul fatto che lo stesso termine "razza", se riferito all'uomo, è inappropriato, abbiamo già parlato in "Tolleranza Zero", compleanno di Tullio Levi Civita, RM098, Marzo 2007.

Rita Hayworth a Nicole Kidman, passando naturalmente anche attraverso Jessica Rabbit.

3 *Alcune Rosse Fatali*

Non ci risulta che lo stesso connotato erotico-perverso sia attribuito anche ai maschietti: la "rossa fatale" è quasi un luogo comune dell'immaginario cinematografico e collettivo, mentre non ci viene in mente nessuna controparte maschile nel medesimo ruolo. Ma se il "rosso" non è canonicamente considerato di bellezza eclatante, non ha nulla da invidiare alle colleghe di sesso femminile in quanto a "cattiveria". Alcuni degli uomini più odiati della storia avevano i capelli rossi: celebri quelli davvero insoliti di Malcom X, meno noti quelli di Vladimir Ulianov, detto Lenin. Era rosso di capelli l'uomo che "si nomò due secoli", Napoleone Bonaparte, e che certo fu molto amato dai francesi e odiatissimo da quasi tutto il resto del mondo. Ma, soprattutto, aveva i capelli rossi l'archetipo stesso della malvagità della cultura occidentale: Giuda Iscariota.

Come tutte le minoranze, i rossi hanno dovuto fare i conti con lo sguardo diffidente e un po' ghettizzante delle maggioranze: e, come sempre, le cause e gli effetti hanno spesso delle relazioni di feedback. "Rosso Malpelo" non è solo una novella di Verga, è anche un modo di dire: ed è possibile che se un ragazzo viene apostrofato in maniera così aggressiva fin da piccolo, possa sviluppare per legittima difesa un'aggressività di pari livello. Può anche non accadere, certo, ma siamo a conoscenza di un certo personaggio che era rosso di capelli, piccolo di statura, mezzo sordo e con un carattere decisamente difficile. Però era anche un genio assoluto, eppure, forse per contrappasso o forse per ghettizzazione, non gli è ancora stata riconosciuta una fama pari a quella che indubbiamente si merita.



4 *Olivier Heaviside*

Oliver Heaviside nacque in Camden Town, un sobborgo di Londra, il 18 Maggio 1850, da una famiglia numerosa e tutt'altro che ricca. Se vi ha commosso scoprire che Charles Dickens, da bambino, si ritrovò a mezzo schiavizzato a lavorare in una fabbrica di lucido per scarpe, può ben rendere l'idea dell'ambiente natio di Heaviside, visto che quella fabbrica non era troppo lontana da casa sua. Per restare nel tema delle buone notizie, Oliver fu colto dalla scarlattina quando era molto piccolo, e fu a causa di questa malattia che perse gran parte dell'udito. La sordità gli rese molto difficili i rapporti con gli altri ragazzi, e da adulto era solito ricordare che quel tragico periodo gli aveva sconvolto per sempre la vita. Nonostante l'infermità, comunque, i suoi risultati scolastici erano di livello molto buono: ma, cosa strana per un personaggio destinato a segnare la storia della matematica, l'unica materia in cui andava male era la geometria euclidea. Trovava le costruzioni di Euclide astruse, complicate e circolari, nel senso che si arrabattavano per dimostrare delle verità già ovvie sulla base di altri assunti altrettanto ovvi[11]. Fin dall'inizio, insomma, era evidente che, nell'eterna lotta tra teoria e pratica, Oliver Heaviside si sarebbe sempre schierato a favore di quest'ultima.

5 *La famiglia Heaviside. Conoscendo il carattere di Oliver, non dovrebbe essere difficile capire quale sia, nel gruppo.*

Tanto per chiarire ancora meglio il concetto: Oliver Heaviside decide presto che la scuola, nonostante i buoni risultati, non è il suo ambiente ideale, e la abbandona alla tenera età di 16 anni. Poiché siamo nel periodo d'oro degli sviluppi dell'elettricità, Oliver impara da solo l'alfabeto Morse e chiede al suo zio famoso di trovargli un lavoro. Lo zio (acquisito) famoso è ricordato ancora ancora oggi: si tratta di Charles Wheatstone, colui che dà il nome al celebre "ponte di Wheatstone", marchingegno che viene ancora insegnato nelle università e che serve a misurare la resistenza elettrica[12]. Wheatstone è amico di personaggi del calibro di Lord Kelvin e Faraday, e non deve aver faticato troppo a sistemare il nipote in una società di telegrafi, anche se la società in questione era in Danimarca. Oliver, lieto d'avere 18 anni e uno stipendio, parte senza indugio: ancora non sa che quel breve periodo sarà l'unico della sua vita in cui avrà un salario fisso.

Heaviside non ama la scuola, ma non si può certo dire che non ami lo studio. Dopo sei anni, quando è ancora solo un ventiquattrenne di belle speranze, lascia il lavoro proprio per dedicarsi esclusivamente a studiare gli argomenti che più lo interessano. E ciò che lo interessa sopra ogni altra cosa al mondo è la teoria dei campi elettromagnetici di James Clerk Maxwell. Studiò da solo l'opera del fisico scozzese, dedicandovisi anima e corpo. La studiò per intero, e poi, secondo le stesse parole, proseguì da solo.

---

[11] A scanso equivoci: quello che non tollerava davvero era il metodo, non la geometria in sé. Questo è quanto dichiarò da adulto: "*È barbaro che i giovani debbano confondersi il cervello su mere sottigliezze logiche, sforzandosi di capire la dimostrazione di un fatto ovvio in termini di qualcosa altrettanto ovvio, e concependo in questo modo una profonda avversione per la matematica, quando potrebbero imparare davvero la geometria, un oggetto di studio di importanza fondamentale.*"

[12] Potrebbe forse essere utile per costruire una volta per tutte il nostro circuito simulatore del flusso migratorio RdP. Quel che è certo è che se avessimo a disposizione Heaviside, non ci sarebbe nessun tipo di problema a risolvere nessun tipo di circuito…

Non è facile riuscire a visualizzare realmente la situazione di quei tempi: l'azione di Maxwell riesce a fondere i due grandi problemi del tempo in uno solo, l'elettricità e il magnetismo. Nel farlo, riesce anche a dar conto dell'approccio di Faraday, che aveva introdotto il concetto delle linee di campo; come surplus, si ritroverà alla fine con una teoria dell'ottica perfettamente integrata nella sua teoria elettromagnetica; soprattutto, aveva ipotizzato l'esistenza dei campi elettromagnetici oscillanti e la conseguente creazione di onde. Ma, alla resa dei conti, quelle di Maxwell sono ancora teorie in attesa di essere verificate, e lo scozzese morirà prima ancora di vederle accettate da tutti. Eppure, alla resa dei conti, il lavoro di Maxwell resta un lavoro mastodontico, complicatissimo, portato avanti con tecniche matematiche complesse (i quaternioni, ad esempio) e ben diverso dalle elegantissime equazioni che oggi prendono il suo nome.

Olivier Heaviside nuota nella nuova teoria elettromagnetica come un delfino nuota nell'oceano. È certamente il suo personale paradiso: ha una capacità di visione, di comprensione così profonda dei fenomeni elettromagnetici da rivoluzionare per sempre, e marchiare per l'eternità, la terminologia stessa della nuova scienza. In quel periodo si stavano ponendo i primi cavi sottomarini transoceanici, ma l'idea che basti un conduttore da una sponda all'altra dell'Atlantico per poter trasmettere segnali è così ingenua da risultare sostanzialmente sbagliata. Tra i molti problemi tecnici che sorsero, quello causato dall'induzione magnetica sembrava semplicemente insormontabile: fu Oliver Heaviside, dopo una lunghissima battaglia con altri personaggi che non condividevamo le sue teorie, a risolvere il problema grazie alla "bobina di carico".

Se la telefonia intercontinentale è resa possibile da Heaviside, anche le trasmissioni radio non sono esentate dal rendergli credito: Marconi riesce a trasmettere i suoi primi segnali transcontinentali grazie alla conducibilità della ionosfera, ed è stato Heaviside il primo ad ipotizzarne l'esistenza, tant'è che una regione della ionosfera porta ancora oggi il suo nome. La terminologia elettrica è composta da termini che in grandissima parte sono stati introdotti da Oliver Heaviside: impedenza, reattanza, induttanza, permettibilità, suscettibilità e molti altri; sua l'invenzione del cavo coassiale, suoi i nomi di diversi effetti di elettrotecnica (effetto "pelle", equazione delle linee).

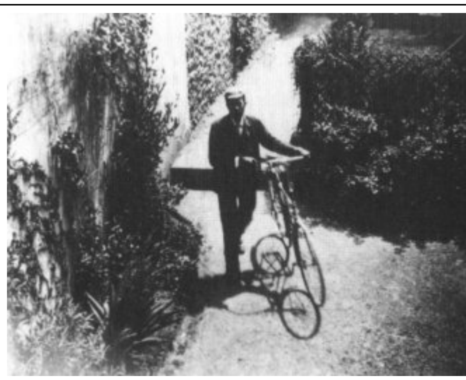
Ma questi successi di fondamentale importanza per lo sviluppo dell'elettrotecnica restano perlopiù non associati al suo nome. Potrebbe sembrare che sia una sorta di contrappasso verso gli scienziati sperimentali, che quasi sempre vedono la stima e la gloria giungere come alloro sulle tempie dei teorici, più facilmente premiati con la definizione di "geni". Ma nel caso di Heaviside è probabile che le cause non siano solo queste: Olivier era certamente dotato di un carattere difficile, scontroso, e questo certo non facilitava il suo successo tra i colleghi. Anche quando entrò a far parte della Royal Society (un risultato niente male, per uno che a sedici anni era scappato da scuola) nel 1891, i suoi rapporti umani non cambiarono molto. Forse contava il fatto d'essere un po' sordo; forse contava davvero la maledizione del "rosso malpelo".

Ma la cosa è davvero stupefacente, perché nonostante il suo odio verso i formalismi matematici e l'eccesso di rigore, una dei meriti più straordinari di Oliver Heaviside è merito essenzialmente teorico. Avevamo lasciato Maxwell poche righe fa, in mezzo alla sua difficilissima e rivoluzionaria opera. Quello che gli studenti si immaginano, di solito, è che in quelle sacre carte spicchino come un faro nella notte, da qualche parte, le Quattro Equazioni sacre dell'Elettromagnetismo, quelle che campeggiano in ogni libro di testo, quelle che, inevitabilmente, fanno dire ad ogni professore che le scrive alla lavagna: "*Ecco, per quanto la cosa possa sembrare impossibile, tutta la teoria elettromagnetica è racchiusa qua.*" Ma il punto è che quelle quattro equazioni, nel libro del genio scozzese, non ci sono: è anzi possibile che le celeberrime "Equazioni di Maxwell" Maxwell non le abbia mai viste.

L'incredibile contributo di Heaviside alla fisica è l'introduzione dei calcolo vettoriale nella teorica dell'elettromagnetismo. I vettori erano già conosciuti, ma mentre al giorno d'oggi vengono insegnati già ai quattordicenni, tanto risultano utili, a quei tempi non erano affatto ben considerati. Oliver Heaviside e pochi altri cercano di mostrare al mondo quanto sarebbero utili. Forte del suo metodo autodidatta, e quindi pronto ad abbandonare i canoni consacrati dalla tradizione, Heaviside introduce l'analisi complessa nei circuiti, con tanto di calcolo operazionale. Quando gli fecero presente che stava introducendo degli strumenti la cui validità non era rigorosamente provata, rispose con la celebre frase riportata in testa a quest'articolo: "*Dovrei smettere di mangiare solo perché non capisco come funziona la digestione?*"

E, infine, mise mano alle equazioni di Maxwell. Quelle che il grande James aveva lasciato non erano quattro, ma ben venti equazioni. Quando la sua teoria fu riconosciuta valida, grazie soprattutto alla scoperta di Hertz delle onde elettromagnetiche che Maxwell aveva previsto, fu proprio Hertz che cercò di "ripulire" l'aspetto della teoria maxwelliana. Ma in parallelo ad Hertz, Heaviside aveva già cominciato il lavoro di semplificazione, riscrivendo tutta la teoria maxwelliana sulla base di due soli "vettori" (appunto), uno per il campo elettrico e uno per il campo magnetico. Herr Heinrich Rudolf Hertz, di nazionalità tedesca e di professione fisico, era un vero signore: quando venne a conoscenza della cosa dichiarò apertamente che la priorità del lavoro sulle Equazioni di Maxwell spettava ad Heaviside. Un altro celebre fisico irlandese, Georges Francis Fitzgerald[13] lodò con parole entusiastiche il lavoro di Oliver Heaviside, che aveva ricondotto le venti confuse equazioni maxwelliane a quei gioielli di sintesi che sono oggi un autentico patrimonio dell'umanità, ma la storia è spesso inconsapevole e crudele, o forse la maledizione dei rossi malpelo esiste davvero.

Per alcuni anni, le equazioni furono chiamate "Equazioni di Hertz-Heaviside", che era un compromesso che forse penalizzava Maxwell, ma era in qualche modo dato per scontato che il lavoro importante teorico fosse del fisico scozzese. Per ragioni che la ragione non conosce, ad un certo punto però le si chiamò soltanto più come "Equazioni di Hertz". Quando nel 1905 Einstein pubblica le su celeberrima memorie sugli Annalen der Physik le chiama "Equazioni di Maxwell-Hertz", tornando a dare visibilità al teorico d'Edimburgo. Poi, altrettanto ingiustamente che nel caso di Heaviside, anche il nome di Hertz si perse nelle pubblicazioni scientifiche, e ormai resta solo la frase "Equazioni di Maxwell" a brillare come un mantra di sintesi teorica.



6 *Olivier Heaviside*

Non è neppure detto che la cosa, ad Oliver Heaviside, dispiacesse poi troppo. In fondo pare chiaro, dalle dichiarazioni e dai documenti dell'epoca, che i grandi fisici suoi contemporanei riconoscevano senza difficoltà la grandezza di Heaviside: Lord Kelvin lo definì "un'autorità"; il direttore di "Nature", Lodge, lo presentò ai suoi lettori scrivendo che si trattava di uno scienziato "*le cui profonde ricerche nel campo delle onde elettromagnetiche si sono spinte più lontano di quanto chiunque possa ancora comprendere*"; e a sostenere la sua candidatura alla Royal Society erano gli stessi Kelvin e Lodge, Poynting, Fitzgerald e altri.

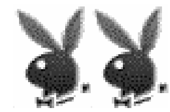
Ma Oliver aveva i capelli rossi, era piccolo di statura, ed era mezzo sordo. Era insomma forse fin troppo abituato ad essere sulla difensiva, e sembra addirittura che gli onori che riceveva lo spaventassero più di quanto gli facessero piacere. Dopo qualche anno si ritirò in campagna, si isolò, e probabilmente peggiorò anche il rapporto con sé stesso, se è vero che era solito firmare i suoi documenti con la scritta "W.O.R.M.", che però fingeva solo d'essere un acronimo.

[13] Certo, è il Fitzgerald della "contrazione di Fitzgerald" principio base della Relatività Ristretta.

Si considerava davvero un verme[14]? Speriamo davvero di no. Era con tutta evidenza un genio di prima grandezza, eppure davvero le cose hanno agito su di lui in maniera strana, se è tuttora così poco famoso, rispetto a quanto è riuscito a fare (e partendo da condizioni tutt'altro che favorevoli). Se ha finito la sua vita in tristezza, non possiamo che dispiacercene, a nome di tutta la razza umana. E come buon proposito in suo nome, potremmo promettere di non molestare mai più un bambino solo perché è rosso di capelli. O piccolo di statura. O duro d'orecchi. O con la pelle scura. O con una religione curiosa, con dei tic comici, con una voce stridula, con le orecchie grandi, con una nazionalità diversa, con pensieri differenti, con…

[14] "Worm" in inglese significa "verme".

# 2. Problemi

| | **Rudy d'Alembert** | **Alice Riddle** | **Piotr R. Silverbrahms** |
|---|---|---|---|
| "Sarò POMPIERE!" |  |  |  |
| Più semplice di un vecchio Q&D |  |  |  |

## 2.1 "Sarò POMPIERE!"

Ve lo ricordate? Grisou, il draghetto che, per gap generazionale, suscitava la più nera disperazione nel genitore.


*7 Grisou*

Bene, questa volta ci sarà utile, visto che un suo parente andrà a mettersi nei guai. Premettiamo che il problema è freschissimo, nel senso che l'hanno inventato gli americani apposta per quest'anno; come favola, ci pare un ottimo modo per far andare a dormire presto a Capodanno sia i bambini che i matematici.

Dovete sapere che ogni numero naturale, a Natale, ha ricevuto in dono una candela con sopra inciso il proprio ~~nome~~ numero, e per la mezzanotte del 31 dicembre tutte le candele sono ordinatamente in fila e spente.

Mezzo secondo più tardi (giusto il tempo di un veloce "Buon anno!"), arriva uno degli gnomi di Babbo Natale e cambia stato a tutte le candele (insomma, le accende tutte).

Un quarto di secondo dopo il primo gnomo, un suo collega arriva e cambia stato (a questo punto, spegnendole) a una candela sì e una no.

Un ottavo di secondo dopo, arriva un altro nano e cambia stato (a questo punto… ve lo calcolate voi) a una candela sì e *due* no.

Un sedicesimo di secondo… Insomma, avanti così sin quando il bambino (e/o il matematico) si addormenta.

La sera dopo, assillati dalla richiesta di finire la vostra favola, ve ne uscite con un: "Ma a mezzanotte e due minuti, arriva un Terribile Drago[15]!"

Il drago conta "UNO!" e deposita un uovo infiammabile[16] vicino alla candela numero uno.

Poi conta "Uno, DUE!" e deposita un uovo infiammabile vicino alla candela numero tre.

Poi conta "Uno, due, TRE!" e deposita indovinate cosa vicino alla candela numero sei.

E andate avanti sin quando le due pesti (il bambino e/o il matematico: no, il drago sta sveglio) si addormentano.

[15] In realtà, come vedremo tra poco, il drago è una draga e, più che terribile, sembra irresponsabile.

[16] Dal che si vede che è una favola: lo sanno tutti, che i draghi sono ovovivipari *[Non chiedetemi perché, ma ho sempre avuto questa impressione: voi cosa ne pensate? RdA]*

La sera del due gennaio (giusto? Sì, giusto), siete pronti per la terza (e finale) puntata: "Il nostro drago va avanti così, al ritmo di una candela al secondo (depositando l'uovo in tempo zero) quando, ad un tratto (probabilmente distratto dalla tediosità del compito), deposita l'uovo infiammabile *troppo vicino* alla candela accesa, e salta per aria!"

"Dopo l'efficace intervento del Draghetto Grisou, del Terribile Drago e dell'uovo non ci sono più tracce: è rimasto però un pezzo di candela, della quale si vedono ancora le ultime cifre del numero scritto sopra, 576."

"A questo punto, cari bambini e/o matematici, giusto per il verbale della Polizia del Mondo Fatato, dovreste dirmi *che giorno* (della settimana) *e ora erano* quando è esploso l'uovo…"

### 2.2 Più semplice di un vecchio Q&D

Nel senso che avevamo un Quick & Dirty che metteva "una" al posto di "nessuna", nella domanda finale. E quella era facile, tant'è che non ve la facciamo (forse).

Il Nostro Valido Postino (sarebbe Doc, come sanno tutti quelli che scrivono a qualcun altro: risponde sempre lui) ha $\boldsymbol{N}$ lettere cartacee da inviare, e al suo Assistente (assunto a progetto, master in letteratura contemporanea e fortemente demotivato a fare il leccatore di buste) non importa nulla dei destinatari; tant'è che prende le lettere (tutte quante intestate "Caro *Nome del Destinatario*"[17]), le mette dentro le buste e *poi* scrive il nome del destinatario sulle buste, logicamente senza guardare dentro a chi sia destinata la lettera (e non stiamo usando quelle robe con la finestra che si vede l'intestazione della lettera: ci stanno antipatiche).

Ora, la domanda è: quali sono le probabilità che *nessuna* lettera arrivi al corretto destinatario?

Se il tempo di maggio vi rende più pigri di quello di aprile, almeno provate a risolvere il vecchio Q&D... Dai che è facile.

## 3. Bungee Jumpers

Iscrivete, tra la corda di un cerchio e l'arco da essa sotteso, il rettangolo di area massima.

> *Senza usare le derivate, ma al più andando a rivedere il BJ di RM133, che richiedeva di provare che il prodotto dei numeri (positivi) appartenenti ad un insieme raggiunge il massimo quando i numeri sono uguali tra loro.*

*La soluzione, a "Pagina 46"*

## 4. Soluzioni e Note

Maggio.

Questa sezione sarà brevissima, visto che tanto per cambiare siamo in ritardo e io sono colpevolissima. Aprile è stato divertentissimo, con ponti e giorni di ferie, e ho ricevuto tantissimi auguri... dev'essere per questo che mi sono distratta. Ma voi non distraetevi prima dell'evento che chiude la serie dei festeggiamenti della Redazione: presto è il compleanno del nostro Piotr, Doc, grandissimo Postino e Tuttofare... ma tanto lo so che non ve lo devo ricordare, che già lo sapete. Però approfitto per fare gli auguri io da qui, per una volta. Auguri, Doc!

Veniamo alle notizie. Questo maggio registrerà un grosso evento a Latina, la cui presentazione copio direttamente dal loro programma:

[17] No, non nel senso che su tutte c'è scritto "Nome del Destinatario". Nel senso che su tutte c'è il nome giusto. Oh, u\insomma, avete capito.

> “Scienze in LieviTo” è parte del progetto LieviTo, con cui condivide l’obiettivo di regalare a Latina – di cui ricorre l’80° – una rassegna culturale degna di un capoluogo. Nello specifico, la sezione “Scienze” propone alcune conferenze da presentare nell’aula magna delle scuole che hanno aderito alla rassegna. Il ciclo di conferenze è curato in collaborazione con le sezioni locali delle principali organizzazioni di promozione della cultura scientifica, Mathesis e ATA. Alcune conferenze sono organizzate in collaborazione con l’associazione MICROmacro.
>
> Si tratta di una sorta di “settimana larga” del sapere scientifico, annidata in maniera armonica all’interno di un percorso fruitivo più articolato e ramificato in varie direzioni: cinema e teatro, musiche, arti figurative, architettura, letterature, graphic novel e scienze. LieviTo ruoterà intorno al teatro e la casa della cultura, disponibile nei giorni dal 12 al 28 maggio, che saranno perciò i giorni ufficiali della rassegna. Sarà però tutta la città ad essere coinvolta nel progetto, quindi i teatri minori e privati, le sale dei musei e di alcuni palazzi “storici” di Latina, con la loro aura estraniante e metafisica, tra pittura di De Chirico e architettura razionalista d’inizio ‘900.

Gli organizzatori hanno anche invitato noi – i Rudi Mathematici – nelle persone dei nostri due grandi Rudy e Piotr e aperto un sito internet in cui a breve saranno riportati tutti i dettagli: lievito.org. Nel frattempo andate a vedere il programma nella nostra sezione del sito dedicata agli eventi, il Memento.

Prima di lasciarvi, una notizia sconvolgente: RM si è modernizzato, e dopo Wikipedia compare anche su Facebook, anche se non sappiamo bene da che parte cominciare per gestirlo. A tutti i nostri lettori presenti su faccialibro, un cordiale invito a venire a trovare la nostra pagina e suggerire cose divertenti a consumo energetico prossimo allo zero, perché noi come noto siamo non solo pigri, ma anche molto impegnati.

E adesso basta, che c’è tanto, tantissimo da dire nella parte di soluzioni, cominciando da quelle calendaristiche... perché sì, questo mese un nuovo intrepido solutore si è unito alle danze dei solutori di problemi di calendari di RM.

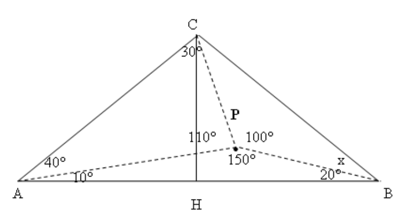
## 4.1 [Calendario 2007]

### 4.1.1 Settembre 2007: 25° USAMO – 1996

***Sawdust*** sta ci aveva inviato una soluzione di questo quesito il mese passato, ed ora ***Mirhonf*** vuole proporre una soluzione alternativa, ma per ordine, vediamo prima il testo:

> *Il triangolo ABC gode della proprietà che esiste un punto P interno al triangolo per cui <PAB=10°, <PBA=20°, <PCA=30° e <PAC=40°. Provare che il triangolo ABC è isoscele.*

Vediamo una soluzione di ***Mirhonf***:




> CH=AC sin50° = BC sin(x+20°) (1)
>
> Applicando il teorema dei seni al triangolo ACP: $AC = CP\dfrac{\cos 20°}{\sin 40°}$ (2)
>
> Applicando il teorema dei seni al triangolo BCP: $BC = CP\dfrac{\cos 10°}{\sin x}$ (3)
>
> Sostituendo la (2) e la (3) nella (1) si ha: $\dfrac{\cos 20° \cdot \sin 50°}{\sin 40°} = \dfrac{\cos 10°(\sin x \cdot \cos 20° + \cos x \cdot \sin 20°)}{\sin x}$

da cui $\frac{\cos 20° \cdot \sin 50°}{\sin 40°} = \cos 10°\left(\cos 20° + \frac{\sin 20°}{tgx}\right)$

Con semplici passaggi si giunge a ottenere: $tgx = \frac{\cos 10° \cdot \sin 20° \cdot \sin 40°}{\cos 20°(\sin 50° - \cos 10° \cdot \sin 40°)}$

Poiché sin50°=sin(40°+10°)=sin40°cos10°–sin10°cos40°, si ottiene:

$tgx = \frac{tg 20° \cdot tg 40°}{tg 10°} = \frac{tg(30° - 10°) \cdot tg(30° + 10°)}{tg 10°}$ ponendo t=tg10°,

$$tgx = \frac{\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}+t}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}t} \cdot \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}-t}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}t}}{t} = \frac{3t^2-1}{t(t^2-3)}.$$

Ora, $tg 30° = tg(20° + 10°) = \frac{tg 20° + t}{1 - t \cdot tg 20°} = \frac{t + \frac{2t}{1-t^2}}{1 - \frac{2t^2}{1-t^2}} = \frac{t^3 - 3t}{3t^2 - 1} = t\frac{t^2-3}{3t^2-1}.$

Quindi $tgx = \frac{1}{tg 30°} = \sqrt{3} \Rightarrow x = 60°.$

Poiché x = 60°, l'angolo <ABC=80° e l'angolo <ACB=50°=<BAC.

Quindi il triangolo ABC è isoscele.

Che ne dite? Sì, ha ripreso anche l'altro.

## 4.2 [Calendario 2010]

### 4.2.1 Settembre 2010: 6th IMO (1964) – 3

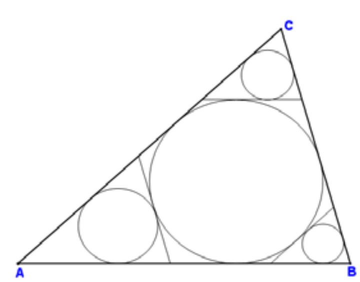
Anche questo problema è di settembre, e la soluzione di ***Sawdust*** era stata presentata il mese scorso:

> *Il triangolo ABC ha lati a, b, c. Sono costruite le tangenti al cerchio inscritto parallele ai tre lati. Ogni tangente forma un triangolo con gli altri due lati del triangolo originale, e in ognuno di questi triangoli viene inscritto un cerchio. Trovate l'area totale dei quattro cerchi.*

Lo stesso ***Sawdust*** ci ha scritto durante aprile alcuni punti di errata corrige, ma visto che ***Mirhonf*** ha pensato di mandare un suo contributo, ve lo passiamo al posto delle correzioni di ***Sawdust***:

> Mi permetto di commentare e fare considerazioni personali sulla soluzione al problema di Sawdust.

> Comincio il mio ragionamento dai triangoli simili per costruzione ABC e $AB_1C_1$, i cui lati misurano rispettivamente a, b, c, e $a_1$, $b_1$, $c_1$, con $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k_1$




> Sia A l'area di ABC e $A_1$ l'area di $AB_1C_1$.

> $A - A_1 = A(1 - k_1^2) = \frac{(a + a_1)2r}{2} = (1 + k_1)ar$

Ora poiché $r=\frac{A}{p}$ risulta che $A\left(1-k_1^2\right)=\left(1+k_1\right)a\frac{A}{p}\Rightarrow 1-k_1=\frac{a}{p}\Rightarrow k_1=\frac{p-a}{p}$.

Analogamente $k_2=\frac{p-b}{p}, k_3=\frac{p-c}{p}$.

Il raggio r del cerchio inscritto in ABC è $r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$, da cui calcolo l'area $A=\pi\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$ (1)

L'area di $AB_1C_1$ è $A_1=k_1^2A=\pi\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\cdot\left(\frac{p-a}{p}\right)^2$

L'area di $A_2BC_2$ è $A_2=k_2^2A=\pi\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\cdot\left(\frac{p-b}{p}\right)^2$

L'area di $A_3B_3C$ è $A_3=k_3^2A=\pi\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\cdot\left(\frac{p-c}{p}\right)^2$

L'area totale è

$$A_{tot}=A+A_1+A_2+A_3=\pi\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\cdot\left[1+\left(\frac{p-a}{p}\right)^2+\left(\frac{p-b}{p}\right)^2+\left(\frac{p-c}{p}\right)^2\right]=$$

$$=\pi\frac{(p-a)(p-b)(p-c)\left[4p^2+a^2+b^2+c^2-2p(a+b+c)\right]}{p^3}=\pi\frac{(p-a)(p-b)(p-c)\left(a^2+b^2+c^2\right)}{p^3}.$$

$$A_{tot}=A\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)}{p^2}.$$

Se a=b=c=l, $A_{tot}=A\frac{3l^2}{\left(\frac{3}{2}l\right)^2}=\frac{4}{3}A$.

$$r=\frac{A}{p}=l\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$A=\pi\frac{l^2}{12}.$$

$$A_{tot}=\frac{4}{3}A=\pi\frac{l^2}{9}.$$

E non ci resta che ringraziare ***Mirhonf***. Aspettiamo nuove sugli altri problemi calendaristici.

## 4.3 [153]

### 4.3.1 Il giardino dei destini incrociati

Abbiamo ricevuto una bella mail su questo problema, ma a causa delle restrizioni autoinflitte dal nostro ritardo, vi passiamo solo la mail e vi consigliamo di seguire le direttive del nostro ***Marmi***:

> Torno ad un problema del numero 153: stavo ripassando! Quello del triangolo e del quadrato circoscritti ad un cerchio. La mia risposta è che il minimo è una soluzione al limite. La mia soluzione è: prendiamo la figura 17 di Camillo (n. 155) e spostiamo il punto A all'infinito (verso l'alto).
>
> Inoltre ho pensato che la dimostrazione che questa sia l'area minima possa essere: utilizzo ancora i nomi usati nella figura 17 si Camillo e sempre dalla figura di Camillo considero le 4 zone rosse o viola esterne al cerchio interne al quadrato: alto, basso, destra, sinistra – fissate le rette BC e BA, spostando il punto di tangenza "sul lato destro" in modo che RST sia isoscele, l'area da piastrellare ha un minimo al variare del punto di tangenza (ho calcolato che l'area di RST, con il vincolo della tangenza, è massima nel caso sia isoscele).
>
> Con questa operazione A e C si sono spostati lungo le rispettive rette senza modificare le aree da piastrellare in alto, a sinistra e in basso. Inoltre questo vale qualunque sia il punto di tangenza di AC e di BC e quindi con pendenze diverse di tali rette, basta che i punti di tangenza siano a sinistra e in basso.
>
> Ora fisso le rette BC e AC e muovo il punto di tangenza di destra e seguo lo stesso ragionamento: il punto A si muove verso l'alto. Dai miei conti l'area viene: 34.3689 m$^2$.

Verificate voi stessi su RM155 e RM153, e diteci qualche cosa.

## 4.4 [159]

### 4.4.1 Il problema di Marco L.

Il mese scorso nelle note avevamo proposto questo problema, a sua volta proposto da ***Marco L.***:

> *Su una scacchiera standard da* 8x8 *caselle, è possibile disporre pedine che hanno quattro diversi valori e precisamente* 1, 2, 3 *e* 4. *La pedina di valore* 1 *può essere posata su una qualsiasi casella, quella di valore* 2 *può essere posata solo di fianco (non in diagonale) ad una di valore* 1. *La pedina di valore* 3 *può essere collocata solo di fianco ad una di valore* 1 *e ad una di valore* 2. *Infine la pedina di valore* 4 *può essere posata solo di fianco a pedine di valore* 1, 2 *e* 3. *Qual è la migliore distribuzione possibile delle pedine per massimizzare il totale ottenuto dalla somma di tutte le pedine presenti sulla scacchiera?*

Per fortuna ***trentatre*** si è incaricato di fornire una soluzione, che vi passiamo:

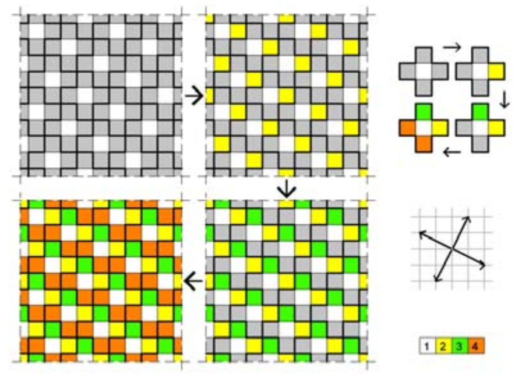
> Nel problema come formulato in RM 159, tutte le caselle della scacchiera, per massimizzare il risultato, vanno occupate con una pedina. Pertanto si può parlare di "caselle" della scacchiera anzichè di "pedine".
>
> Indico di seguito con
>
> $A$ : un insieme composto di un numero $N$ qualsiasi di caselle connesse
>
> $S(A)$ : una soluzione per $A$ con le caselle colorate in modo compatibile con i vincoli
>
> $Smax(A)$ : una soluzione con $K$ massimo
>
> $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ : una generica casella di un dato colore
>
> $N_1$, $N_2$, $N_3$, $N_4$ : il numero di caselle di un dato colore ( $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$ )
>
> $K$ : il valore di una $S(A)$ ( $K = N_1 + 2N_2 + 3N_3 + 4N_4$ )
>
> Nei disegni i numeri (1, 2, 3, 4) sono indicati con colori (bianco, giallo, verde, arancio).

È possibile definire una colorazione $T^*$ dell'intero piano quadrettato, compatibile con i vincoli, e con $K$ massimo. $T^*$ si ottiene per passi successivi colorando prima tutte le caselle $C_1$ (bianche) poi le $C_2$ (verdi) ecc. con il criterio che ogni casella deve essere <u>adiacente al massimo numero di caselle degli ordini successivi</u>. Questo garantisce il minimo di caselle $C_1$ rispetto alle altre, e così via; e quindi il minimo di $K$. Il processo è riportato nella fig. 1.

Una casella $C_1$ può essere adiacente a un massimo di 4 caselle di altri colori ($C_2$, $C_3$, $C_4$). L'unica disposizione (primo schema) è una tassellatura con croci composte ognuna di cinque caselle, con al centro $C_1$ (bianco). In grigio sono indicate le caselle ($C_2$, $C_3$, $C_4$) ancora da colorare. In questo schema il numero di caselle bianche è il minimo possibile.

Proseguendo, una casella $C_2$ (giallo) può servire al massimo 3 ($C_3$, $C_4$), una casella $C_3$ (verde) al massimo 2 $C_4$. Le caselle grigie rimaste nel terzo schema possono essere solo $C_4$ (arancio).

Lo schema $T^*$ finale rispetta tutte le condizioni del problema, ed è unico, fatta salva la possibilità di disporre i colori attorno a $C_1$ in modo diverso. A meno di rotazioni e ribaltamenti, esiste oltre a $T^*$ solo un altra colorazione $T^{**}$ (con le caselle arancio contrapposte, anzichè vicine, rispetto al bianco) che non disegno.




8 *fig. 1 - tassellatura del piano - K max*

Valgono in $T^*$ (e in $T^{**}$) le proprietà

- la distribuzione delle caselle bianche presenta uno schema che si ripete, sfasato, per le gialle, per le verdi e – ripetuto due volte – per le arancio

- tutte le croci iniziali sono colorate nello stesso modo, con il centro bianco, un lato giallo, uno verde, e i restanti due arancio

- lo schema è invariante per le traslazioni indicate dai vettori in figura, e per qualsiasi composizione di essi; in particolare per traslazioni di 5 caselle in orizzontale e verticale

- una fila di 5 caselle presenta quindi la stessa composizione di ogni croce

- il valore $K$ si può calcolare su una sola croce con $K = 1\times1 + 1\times2 + 1\times3 + 2\times4 = 14$

- per un qualsiasi sottoinsieme di croci (immerse in $T^*$), con $N$ caselle, vale $K / N = 14/5$ e questo valore è il massimo possibile.

Una soluzione $S(A)$ con un numero finito $N$ di caselle si può ottenere ritagliando $A$ dallo schema $T^*$. Sul confine di $A$ le coppie di caselle esterna-interna ($C_n$, $C_k$) con $n < k$ impongono la modifica (cioè la riduzione) di $C_k$ e delle sue adiacenti, con diminuzione di $K$.

Per ogni soluzione $S(A)$ con $A$ finito, valgono pertanto le

- $K < (14/5)\, N$

- $K$ si può avvicinare al limite $14/5$ quanto più $A$ è grande e compatto (le caselle da modificare dipendono dal contorno e non da $N$)

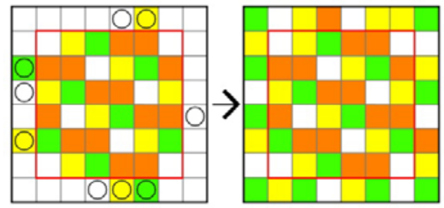
- per $A$ abbastanza grande esiste un nucleo interno di caselle colorate come in $T^*$.

Il massimo $K$ per un insieme rettangolare $A(n \times m)$ si può trovare come segue

- si colora $A$ come lo schema $T^*$

- sul bordo di $A$ di spessore 1 si colorano con $C_1$ (bianco) le caselle *non necessarie* a giustificare le caselle interne

- si cerca la soluzione attimale colorando solo queste caselle "libere" .



9 *fig. 2 - soluzione 8x8 - K = 160*

In figura 2 riporto una soluzione della scacchiera (8×8) con $K$=160, che credo sia il massimo. Sono evidenziate a sinistra le caselle sul bordo bloccate per non modificare quelle interne al nucleo (in rosso). A destra il risultato che dipende

- dalla collocazione di $A$ in $T^*$ (salvo riflessioni e rotazioni si possono scegliere 5 posizioni diverse)

- dalla colorazione delle caselle libere sul bordo (nel caso di rettangoli con lati > 6, si può presentare solo un numero limitato di blocchi diversi e ognuno non maggiore di 8 caselle).

Per i quadrati più piccoli ho ottenuto i valori ($L$, $K$) , con $L$ : lato

(3, 19), (4, 38); (5, 61); (6, 89); (7, 119); (8, 160); (9, 203); (10, 256); (11, 312); (12, 371).

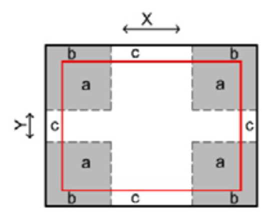
(NB. ogni soluzione può avere delle varianti equivalenti).

$T^*$ è invariante per traslazioni di 5 caselle; questo consente di passare dalle soluzioni per i rettangoli ($P \times Q$) a quelli ($P' \times Q'$) con $P' = P + 5\,m$, $Q' = Q + 5\,k$.

Il procedimento è riportato nel diagramma di fig, 3 :

- si separa ($P \times Q$) in 4 parti (in grigio) con striscie (in bianco) di larghezze $X = 5\,m$, $Y = 5$ k

- in ($P \times Q$) le parti (a) sono estratte da $T^*$ : quindi l'intero rettangolo rosso è parte di $T^*$




10 *fig. 3 - calcolo di K per rettangoli grandi*

- gli angoli (b) sono noti da ($P \times Q$) e restano da completare solo le parti (c) del perimetro

- se $m$, $k$ > 1 i blocchi (c) si ripetono e vanno calcolati solo una volta.

Si arriva così a formule per il valore massimo di $K$. Per i quadrati di lato $L$ si ha p.es.

$K_5 = 61 \rightarrow K_{5+5m} = 61 + 125m + 70m^2$ - che comprende $K_{10} = 256$

$K_6 = 89 \rightarrow K_{6+5m} = 89 + 153m + 70m^2$ - che comprende $K_{11} = 312$ ecc.

Queste sono in realtà formule di ricorrenza, della forma

$K_{L+5m} = K_L + pm + 70m^2$ , con $p = K_{L+5} - K_L - 70$ , valide per ogni $L \geq 4$

per cui bastano i primi due valori per ottenere tutti gli altri.

Con $N = L \times L$ : numero di caselle, si ha per $m \rightarrow \infty$, $K / N \rightarrow 14/5$ .

Si possono costruire formule analoghe per i rettangoli.

***Trentatre*** conclude con una nota finale:

Nota - Il problema prevede 4 tipi di caselle, ma si può impostare anche con 2 tipi ($C_1$, $C_2$), con 3 ecc. fino a 5 ($C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$, $C_5$) dove ogni casella richiede la presenza delle precedenti, e i valori sono (1, 2, 3, 4, 5). Se $Pm$ ($m$ = 2, 3, 4, 5) è il problema con $m$ caselle diverse, ogni soluzione per $Pm$ vale anche per $Pm$-1 : basta declassare ogni casella $Cm \rightarrow Cm$-1. Questo vale anche per gli schemi ottimali $T^*$. Il valore massimo di $K$ è (9/5, 12/5, 14/5, 15/5=3) . Il processo di costruzione di $T^*$ di fig. 1 equivale a costruire in successione $T_2^*$, $T_3^*$, $T_4^*$.

Sono certa che ***Marco L.*** sarà molto contento.

### 4.4.2 Eastern Contest?

Una serie di mini-problemi, in questo primo quesito, tutti più o meno facili:

1. *Cinque sacchi di riso sono stati pesati a coppie, e sono stati ottenuti i seguenti risultati: 72, 73, 76, 77, 79, 80, 81, 83, 84 e 87. Quanto pesavano i singoli sacchi?*
2. *Cancellate 60 cifre dal numero formato dai primi 40 numeri scritti di seguito in modo tale che il risultato sia il più piccolo possibile.*
3. *Trovate la somma delle cifre di* $10^{2004} - 2004$.
4. *In un sacchetto ci sono 100 biglie di colori diversi: 10 bianche, 10 nere, 12 gialle, 14 blu, 24 verdi, 30 rosse. Quante biglie dovete estrarre senza guardarne il colore per avere la certezza di avere almeno 15 biglie dello stesso colore?*
5. *Il quadrato ABCD ha lato 24 cm.: viene costruito il quadrato AEFG di lato 2 cm con la diagonale AF su AB e l'angolo E all'esterno del quadrato ABCD. Quanto vale CE?*
6. *Se scrivo tutti i numeri in sequenza (come nel P.2), che cifra trovo nella posizione 206.788 da sinistra?*
7. *Quante volte appare il numero 2 quando il prodotto* $1002 \cdot 1003 \cdot 1004 \cdot \ldots \cdot 2004$ *viene scomposto in fattori primi?*
8. *Un quadrato di 16 caselle contiene, per ogni casella, un segno più o un segno meno. Invertiamo i segni di una riga (o di una colonna) sin quando otteniamo il numero minimo di segni meno: una tabella per la quale effettuando questa operazione non si possa ridurre ulteriormente il numero dei segni meno è detta "tabella minimale", e il numero dei segni meno è detta caratteristica della tabella. Trovate tutti i possibili valori della caratteristica.*

Bene, tante soluzioni divertenti, da parte di ***Mirhonf***, ***Rub***, ***Alberto R.***, ***Sawdust***, ***Tesctassa***, ***Actarus*** e ***Camillo***. Siccome sono tutte belle e non so bene chi scegliere, ne prendo una a caso, quella di ***Tesctassa***:

***I cinque sacchi di riso (e il genio che li ha pesati).***

Supponendo che il peso di ciascun sacco sia intero, considero che siccome delle dieci coppie, 6 hanno un peso dispari e 4 hanno un peso pari, dei cinque sacchi 3 hanno un peso pari e 2 un peso dispari. Infatti poiché ciascun sacco viene pesato una volta con ciascuno degli altri, i due sacchi dispari danno origina a una coppia col peso pari quando vengono pesati assieme più tre coppie dispari quando viene pesato con ciascuno degli altri sacchi col peso pari. Quindi detti a, b, c i sacchi pari e d, e i sacchi dispari, posso scrivere:

$$2a + 2b + 2c + d + e = 72 + 76 + 80 + 84 = 312$$

$$2a + 2b + 2c + 3d + 3e = 73 + 77 + 79 + 81 + 83 + 87 = 480$$

E sottraendo la prima dalla seconda ottengo:

$$2d + 2e = 480 – 312 = 168$$

d + e = 84 e a + b + c = 114

A questo punto posso calcolare i pesi dei sacchi pari come segue:

a = [(a+b)+(a+c)–(b+c)]/2 = (72+76–80)/2 = 68/2 = 34;

b = [(a+b)+(b+c)–(a+c)]/2 = (72+80–76)/2 = 76/2 = 38;

c = [(a+c)+(b+c)–(a+b)]/2 = (76+80–72)/2 = 84/2 = 42;

Per concludere considero tutte le coppie dispari e sottraggo loro il sacco a e verifico quali valori soddisfano la condizione d + e = 84 e così facendo (vi risparmio i calcoli facili facili) trovo che d =39 ed e = 45.

***40 numeri in fila per 1 col resto di 11.***

Scrivendo i primi 40 numeri in fila, suppongo da sinistra verso destra (quindi 1234… ecc), ottengo un numero che ha complessivamente:

$$9\cdot 1 + (10\cdot 2)\cdot 3 + 2 = 71$$

cifre ({1,…,9} da una cifra, più tre gruppi di dieci numeri con due cifre {10,…,19}, {20,…,29},{30,…,39}, più le due cifre di 40). Dovendone sottrarre 60, mi restano 11 cifre nel numero finale. Poiché nel mio numero le cifre da 0 a 9 compaiono con le seguenti molteplicità:

$$0 \rightarrow 4,\ \{1,2,3\} \rightarrow 14,\ 4 \rightarrow 5,\ \{5,6,7,8,9\} \rightarrow 4$$

mi conviene scegliere 4 zero e 7 uno, per ottenere il numero 11111110000.

***Perché proprio 2004?***

Niente supposizioni qui, anzi, se scrivo direttamente la soluzione va bene? Direi che questo è abbastanza facile, perciò mi limiterò a scrivere:

$$9\cdot 2002 + 7 + 6 = 18031$$

***Biglie verdi, biglie rosse.***

Anche questo è abbastanza facile. Poiché solo le biglie verdi e le biglie rosse sono in numero sufficiente per averne 15, e poiché il numero minimo di biglie da estrarre se avessi solo quelle nel sacchetto è:

$$(15 - 1)\cdot 2 + 1 = 29$$

e poiché devo anche farei conti con la proverbiale "iella statistica" che mi farà sicuramente capitare per le mani tutte le altre biglie prima, per avere la tanto agognata certezza mi tocca estrarre:

$$10 + 10 + 12 + 14 + 29 = 75$$

biglie tra le quali le 15 richieste potranno essere, per l'appunto, o verdi o rosse.

***(triangoli) Rettangoli si nasce!***

Perdonatemi, ma non ho voglia di disegnare, perciò mi appello alla vostra buona immaginazione. Il triangolo (ACE) è rettangolo per costruzione, e poiché i due cateti AC e AE sono rispettivamente la diagonale del quadrato grande, e il lato del quadrato piccolo, per il potere conferitomi da Pitagora, dichiaro:

$$CE = \sqrt{AC^2 + AE^2} = \sqrt{(24\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{576\cdot 2 + 4} = \sqrt{1156} = 34$$

***Una cifra a caso.***

Qua cominciano le incertezze. Di questa risposta sono abbastanza sicuro, almeno del procedimento per ottenerla, ma diffido dei calcoli. (Delle risposte successive invece non ne parliamo proprio). Comunque, osservo che scrivendo i numeri da 1 a 99999 in fila, ottengo un numero composto da un bel po' di cifre, per l'esattezza:

$$9*10^0+2*9*10^1+3*9*10^2+4*9*10^3+5*9*10^4=488889>206788$$

Perciò raggiungerò il fatidico traguardo scrivendo un numero compreso tra 10000 e 100000. Tenendo conto che arrivando a 9999 mi mancheranno

$$206788-(9*10^0+2*9*10^1+3*9*10^2+4*9*10^3)=206788-38889=167899$$

cifre per raggiungere l'obiettivo, e considerando che le utilizzerò a gruppi di cinque, so che l'ultimo numero completo che scriverò sarà:

[167899 / 5] = 33579

con l'avanzo di 4 cifre del numero successivo, cioè: 33580. Perciò la cifra richiesta è 8.

***2004 again.***

Il fattore 2 compare una volta (la molteplicità è espressa dall'esponente! :P). D'accordo, smetto di essere pigro e dico che l'esponente vale 1002. Per ricavarlo procedo così: tra 1002 e 2004 ci sono 502 numeri pari, gli unici divisibili per 2 ovviamente, quindi mi dimentico degli altri fattori del prodotto. Ora considero il nuovo intervallo da 2004/2 a 1002/2 considerando solo i numeri pari, che genera il nuovo intervallo (1002, … , 501) e osservo che contiene 251 numeri pari. Ripetendo questo processo in tutto 10 volte (difatti 210=1024 è la potenza di 2 più grande contenuta nell'intervallo di partenza), ottengo in tutto dieci intervalli, o insiemi se vogliamo, con queste quantità di numeri pari:

501 + 251 + 125 + 63 + 31 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 1002

la cui somma esprime la molteplicità del fattore 2 per il prodotto richiesto.

***Più o meno indipendenti.***

Ed infine giungiamo all'ultimo nonché quello che mi ha stuzzicato di più, forse proprio perché la soluzione l'ho solo intuita e non ce l'ho ancora ben chiara al momento. La risposta secca comunque è: i valori possibili sono {0, 1, 2, 3, 4}, cioè tutti i valori possibili per il rango di una matrice 4x4 (nel caso specifico ottenuta considerando il segno "–" come 1 e il segno "+" come 0). Perché questo? Booooh! L'iperglicemia pasquale ha appesantito le mie celluline grige… No vabbé, lo ammetto, non ne sono ancora venuto a capo, ma considerando che invertire una riga (colonna) equivale a sottrarla al vettore (1,1,1,1), se procediamo alla sostituzione dei segni come ho proposto prima, credo che sicuramente centri qualcosa la dipendenza lineare tra le righe a seguito di una inversione. Mi spiego: la matrice $I_4$, in cui ci sono 4 meno sulla diagonale secondo la convenzione di prima, si può ridurre ad una matrice con 3 meno, quindi la l'indipendenza tra righe (colonne) della matrice di partenza non conta. Mentre è ovvio che invertendo una qualsiasi riga (colonna) della matrice $I_4$ ottengo una riga (colonna) che è combinazione lineare delle altre, ad esempio invertendo la riga (1,0,0,0) ottengo (0,1,1,1) che è palesemente combinazione delle altre tre.

Un'altra versione? Vediamo quella di ***Alberto R.***:

***1) Cinque sacchi di riso***

Detti P1, P2, ... P5 i pesi crescenti dei cinque sacchi abbiamo, ovviamente:

P1 + P2 = 72

P4 + P5 = 87

P1 + P3 = 73

P3 + P5 = 84

Per la quinta equazione che ci occorre basta considerare che ogni sacco è stato pesato 4 volte, quindi:

4(P1 + P2 + ...+ P5) = 792 (dove 792 è la somma delle 10 pesate)

La soluzione del sistema è 34, 38, 39, 42, 45.

***2) Cancellate 60 cifre ....***

Per scrivere i numeri da 1 a 40 (non è che intendevate da 0 a 39?) occorrono 71 cifre. cancellandone 60 ne restano 11. Conviene quindi ragionare sulle 11 da prendere anziché sulle 60 da cancellare.

Prendo lo 0 del 10, lo 0 del 20, lo 0 del 30, l'1 del 31, il 2 del 32, poi cinque 3 comunque scelti tra le cifre che seguono e lo 0 del 40. Trascurando i tre zeri a sinistra ottengo 12333330.

***3)*** $10^{2004} - 2004$ = duemilavolte9 seguito da 7996. Somma cifre = 18031

***4) Biglie colorate.***

Se sono più sfortunato di un cane in chiesa, con le prime 74 prese beccherò tutte le bianche, nere, gialle e blu, più 14 verdi e 14 rosse (Alice, qual è la probabilità che ciò accada?), ma, alla $75_{esima}$ presa, anche Murphy si deve arrendere.

***5) I due quadrati***

La strada più semplice è osservare che la distanza CE misurata "in verticale" è 24+2 e quella "in orizzontale" è 24–2 . La somma pitagorica fa 34

***6) Numeri in sequenza***

Semplice, basta contare. La cifra cercata è il 7 proveniente dal numero 43579, se... non ho sbagliato a contare!

***7) $P = 1002 \cdot 1003 \cdot 1004 \cdot \ldots \cdot 2004$***

Si parla del "numero 2", non della "cifra 2" quindi ritengo che la domanda debba essere così intesa: Qual è il massimo K tale che $2^K$ divide P ?

Risposta: K = 1003, ma ho ottenuto il risultato con calcoli noiosi e banali. Una soluzione più generale, ma purtroppo approssimata, è la seguente:

Dati N (N grande) numeri consecutivi, circa 1/2 di essi è divisibile per 2, circa 1/4 è divisibile per 4, circa 1/8 è divisibile per 8 etc. Quindi il prodotto degli N numeri contiene il fattore 2 un numero di volte pari a N/2 + N/4 + N/8 + ...=□N.

In questo caso il metodo fornirebbe il valore esatto ( tra 1002 e 2004,estremi compresi, ci sono 1003 numeri), ma non è sempre così, specialmente se N è piccolo.

***8) Un quadrato di 16 caselle...***

Questo è di gran lunga il più bello degli otto quesiti. Le possibili *caratteristiche* della tabella sono: 0, 1, 2, 3, 4. Però, porcaccia la miseria! non riesco a trovare una dimostrazione decente di quanto affermo.

Sembra che a tutti sia particolarmente piaciuto l'ultimo problema, però in generale le risposte sono state brevi e concise, per esempio ***Camillo***:

Vi sparo le risposte di gran carriera:

1) 34 38 39 42 45

2) 00012333330

3) 18032

4) 75

5) 34

6) 7

7) 1003

8) da 0 a 4

Spostando l'attenzione a quest'anno:

3) 18104 (2 alla 2012 – 2012)=(2012–3)·9+7+8·2

7) il prodotto di 1006....2012 contiene 1007 2 se invece si va da 1 a 2012 i 2 sono 2004 (bella coincidenza).

A questo punto i quiz inerenti al 2004 sono finiti però:

1) i sacchi di riso stanno diventando pesanti

(2004) 192 194 195 196 202 203 204 205 206 207

(2012) 188 194 196 198 200 202 204 208 210 212 il peso dei sacchi singoli è dispari un peso manualmente intrattabile

(8048) 799 800 801 803 805 806 808 807 809 810.

Carichi di riso, ci fermiamo qui.

### 4.4.3 Probabilità al contrario

Che paura che mi fanno questi problemi in cui non si capisce di cosa si parla, ma già il titolo dice tutto: comincia con probabilità e continua identificando tutte le caratteristiche da Cappellaio Matto del nostro Grande Capo... ma questa è solo la mia opinione, lasciatemi copincollare il problema contorto:

> *Si tira un dado (da sei). Se esce "1" o "2" si tira una moneta. Se esce "3" si tirano due monete. Per altre uscite, si tirano tre monete. In tavola, nessuna moneta indica "croce"; quali sono le probabilità che sul dado siano usciti "1" o "2"?*

Più contorto di così... ma almeno ha ispirato tanti solutori e tra tutti diamo il benvenuto a ***Claudio***:

> Per calcolarci la probabilità al contrario per prima cosa mi calcolo le varie probabilità alla dritta: indico con
>
> N1 la probabilita che venga lanciata una moneta(cioè esca 1,2) = 1/3
>
> N2 la probabilità che vengano lanciate 2 monete(cioè esca 3) = 1/6
>
> N3 la probabilità che vengano lanciate 3 monete(esce 4,5,6) = 1/2
>
> ora indico T la probabilità che in tutte le monete sul tavolo sia uscito testa, la probabilita di T è:
>
> - se è uscito N1 sarà 1/2·P(N1) = 1/6
> - se è uscito N2 (1/2)·(1/2)·P(N2) = 1/24
> - se è uscito N3 (1/2)·(1/2)·(1/2)·P(N3) = 1/16
>
> quindi la probabilità ci siano solo teste sul tavolo è 1/6 + 1/24 + 1/16 = 13/48 questa probabilità indica tutti i "casi possibili".
>
> Ora voglio risalire alla probabilità di N1 sapendo che tutte le monete sul tavolo indicano testa, questa sarà: (probabilità che sia uscito testa sapendo che è uscito N1 per la probabilità che esca N1) diviso la probabilità che siano uscite tutte croci, cioè (1/18)/(13/48) = 8/39 cioè circa il 20%.

Niente male per una prima soluzione... soprattutto quando il veterano ***.mau.***, con la solita velocità fulminea, scrive:

> la risposta al problema 2 (avevo un par di minuti di tempo, ma potrei aver sbagliato i conti)
>
> il caso 1,2 dà come probabilità 1/6 per T e 1/6 per C
>
> il caso 3 dà 1/24 TT, 1/12 TC, 1/24 CC
>
> il caso 4,5,6 dà 1/16 TTT, 3/16 TTC, 3/16 TCC, 1/16 CCC
>
> i casi senza C sono 1/6 T, 1/24 TT, 1/16 TTT; da lì calcoli le probabilità relative.

La mail si intitolava 8/13, che dovrebbe essere il risultato, stesso risultato del procedimento che ci ha inviato ***MBG***. Ma ci sono anche altre scuole di pensiero: per esempio ***Tesctassa*** propone una vista alternativa:

> Il quesito in questione è quello delle probabilità al contrario e la richiesta è quella di stabilire quali siano le probabilità che sul dado siano usciti "1" o "2". Beh, spontaneamente mi viene da dire 1/3, poiché la configurazione di monete sul tavolo è ininfluente, mentre ciò che conta è il numero. Mi spiego: se sul tavolo c'è una sola moneta, che segni "testa" o "croce" poco importa, perché vuol dire che comunque è uscito "1" o "2" sul dado. Stesso dicasi per gli altri casi: qualunque sia la configurazione di monete, se ci sono due o tre monete comunque sia non sono usciti i risultati richiesti!
>
> L'unica possibilità perché la richiesta sia ragionevole è che le monete sul tavolo si lasciano così come sono cadute e si procede a più lanci. Quindi, dopo n lanci, se le monete segnano tutte "testa", quali sono le probabilità che siano usciti "1" o "2" dopo gli *n* lanci?

Beh, potrebbe essere una diversa interpretazione. Anche se il Capo non pareva convinto e farfugliava "Bayes... Bayes". Io non lo ascolto quando fa così, ma ***Alberto R.*** ha scritto qualcosa di evocativo

> L'evento *TT* = "Tutte Teste" può verificarsi nei seguenti modi:
>
> *Dado →1,2* moneta →testa prob 2/6 · 1/2 = 1/6
>
> *Dado →3* monete →testa,testa prob 1/6 · 1/4 = 1/24
>
> *Dado →4,5,6* monete →testa,testa,testa prob 3/6 · 1/8 = 1/16
>
> Poiché i tre eventi sono a due a due incompatibili, la prob che si verifichi uno qualunque di essi è la somma della prob di ciascuno. Dunque prob(*TT*) = 13/48.
>
> Per il teorema di Bayes, la prob che, essendosi verificato l'evento *TT*, abbia agito la causa *Dado→1,2* è uguale alla prob a priori della causa (2/6) per la probabilità che detta causa generi l'evento (1/2) diviso la prob totale dell'evento per qualunque causa (13/48).
>
> In conclusione la prob cercata è 2/6 · 1/2 · 48/13 = 8/13 e il teorema di Bayes, noto come *teorema della probabilità delle cause*, d'ora in poi, in omaggio a RM, sarà chiamato *teorema delle probabilità al contrario.*

Ecco, l'ha sempre vinta lui, il Capo. Grazie anche a tutti gli altri che hanno risposto (il ***Panurgo***, ***Rub***, ***Actarus***, ***Camillo***), io mi fermo qui perché il problema mi è proprio indigesto. Alla prossima!

## 5. Quick & Dirty

Rudy: "È pronto il caffè!"

Paola: "Lo prendo tra cinque minuti! Non aggiungere il latte freddo! Lo aggiungo poi io, così resta più caldo"

Secondo voi, ha ragione?

> *Il latte sottrae in entrambi i casi la stessa quantità di calore; però un oggetto caldo perde calore proporzionalmente alla sua temperatura e se aggiungo il latte adesso abbasso la sua temperatura e quindi disperderà meno calore rispetto ad un caffè "lasciato lì". E sarà più caldo se aggiungo il latte subito.*

# 6. Zugzwang!

Forse.

Non ne siamo sicuri, ma ci sembra analizzabile. Non va come problema perchè non abbiamo la soluzione, ma se volete provvedere a questa grave lacuna fate pure.

## 6.1 Croquet Aritmetico

Sapete le regole generali del *croquet*, vero? Veloce riassunto.

Avete una palla di legno e una mazza dello stesso colore; partite da un piolo, dovete arrivare ad un altro piolo (e tornare indietro) passando attraverso una serie determinata di archetti in un verso ben preciso; se passate un archetto correttamente o colpite il piolo di mezza via, avete diritto ad un ulteriore tiro. Il campo, secondo gli inglesi, è di *circa*[18] 36 per 27 metri.

Bene, parlando di aritmetica, e quindi di un ramo della matematica, diamo il via all'astrazione.

Il ***campo di gioco*** è quello dei numeri naturali da 1 a 100. Quindi, al più vi servono carta e matita.

Gli ***archetti*** sono le decine (10, 20, 30,...,90: 100 fa il paletto finale).

A ogni ***turno*** il giocatore sceglie (sottostando ad alcune regole che vi diciamo dopo) un numero compreso tra 1 e 8 (estremi inclusi) e lo somma a quelli scelti da lui nei giri prima (insomma, tiene il conto di dove è arrivato); ***vince*** chi arriva esattamente a 100.

Come vi dicevamo, vanno rispettate alcune ***regole***:

1. È vietato scegliere il numero appena scelto dall'avversario o il suo complemento a 9: insomma, se l'avversario ha appena scelto il 3, sono vietati il 3 e il 6.
2. Si supera un archetto (la decina) solo se si usa un numero che equivale al doppio della distanza necessaria per raggiungerlo; in alternativa, si può arrivare esattamente sotto l'archetto, ma al turno successivo si è costretti a giocare lo stesso numero: per intenderci, se siete a 36 e quindi a distanza 4 dall'archetto, dovete giocare 4 x 2 = 8 per superarlo (e andate a 44), oppure potete giocare 4 e fermarvi esattamente sotto, ma al giro dopo siete obbligati a giocare 4.
3. Il paletto finale si raggiunge arrivando esattamente a 100: se lo si supera, ai turni successivi anziché sommare si sottrae, ma se si supera di nuovo il paletto (nella direzione opposta, questa volta) si perde la partita.
4. Se un giocatore è fermo sotto un archetto o se ha superato 90 e il suo avversario no, la regola 1 viene temporaneamente abrogata per l'avversario: questo, quindi, lo può tenere fermo sotto un archetto utilizzando il numero che serve al giocatore per uscire o il suo complemento a 9, purché non venga giocato lo stesso numero due volte di fila. Per capirci, se io sono sotto l'archetto e ho bisogno di un 4 per

[18] Parola introdotta da noi per evidenti motivi: vi risulta che quando gioca un inglese usi una cosa tipo i *metri?*

uscire, voi potete giocare una sequenza lunga quanto volete di 4 e di 5, purché siano alternati tra di loro, e io sto fermo.

Adesso, indovinate l'inventore, di un aggeggio del genere.

Esatto, il buon caro vecchio CLD[19].

## 7. Pagina 46

Sia $r$ il raggio del cerchio, sia la lunghezza (nota) $\overline{OM} = a$ e la lunghezza (incognita) $\overline{ON} = x$ , come indicato in figura.

Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\overline{MN} &= x - a,\\ \overline{NQ} &= \sqrt{r^2 - x^2}.\end{aligned}$$

Di conseguenza, il quadrato dell'area del rettangolo è pari a:

$$4(x-a)^2\left(r^2 - x^2\right).$$

Determineremo ora per quale valore di $x$ questa espressione è massimale.

Riscriviamo il prodotto nella forma:

$$\frac{4}{\alpha\beta}\left[(x-a)\cdot(x-a)\cdot\alpha(r-x)\cdot\beta(r+x)\right], \qquad \texttt{[1]}$$

dove $\alpha$ e $\beta$ sono tali che la somma dei fattori tra parentesi quadre, ossia

$$\begin{aligned}&(x-a)+(x-a)+\alpha(r-x)+\beta(r+x)\\ &=(2-\alpha+\beta)x+(\alpha+\beta)r-2a,\end{aligned}$$

sia indipendente da $x$ (ossia, qui, $\alpha - \beta = 2$ ).

Il prodotto `[1]` raggiunge il suo massimo quando[20] sono uguali tra loro tutti i fattori tra parentesi, ossia quando:

$$\alpha(r-x) = \beta(r+x) = x - a$$

Ma l'equazione $\alpha(r-x) = \beta(r+x)$ implica che sia:

$$\alpha + \beta = \frac{(\alpha+\beta)r}{x} = \frac{2r}{x}.$$

Da questo e dalla condizione $\alpha - \beta = 2$ si ricava che:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{r}{x} + 1\\ &= \frac{r+x}{x}\\ \beta &= \frac{r-x}{x}\end{aligned}$$

[19] Sappiamo da fonte sicura (Alice) che il Reverendo si arrabbia da matti, se lo chiamano "CLauDe".

[20] Si veda, come indicato nel problema, BJ133

Sostituendo questo valore di $\alpha$ nell'equazione $\alpha(r-x)=x-a$, otteniamo:

$$\frac{r^2-x^2}{x}=x-a \quad \Rightarrow \quad 2x^2-ax-r^2=0$$

da cui (tenendo la sola soluzione positiva, visto che deve essere $x>0$):

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2+8r^2}}{4}.$$

Si noti che il segmento $x$ e, di conseguenza, il rettangolo richiesto, possono essere costruiti via riga e compasso.

# 8. Paraphernalia Mathematica

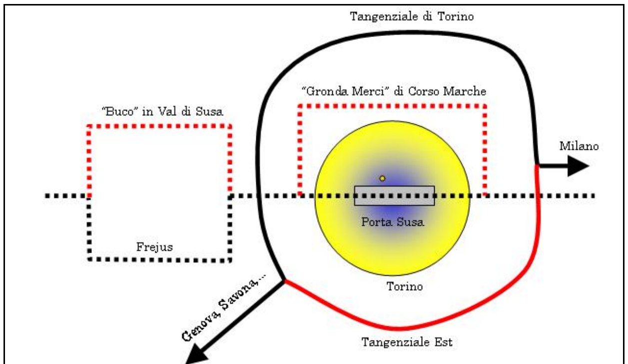
## 8.1 Always on the move

Tranquilli, non abbiamo intenzione di tirare in ballo per l'ennesima volta il trasloco di Rudy. Il titolo non è altro che la traduzione inglese dello (slogan? motto?) attribuito alla città natale di RM dal 2004, quando è cominciata la buriana delle Olimpiadi Invernali: "Torino – non sta mai ferma[21]"

Come ben dovreste sapere, la cosa che lo scrivente queste note ama di più è parlare di sé stesso. E dovreste anche sapere che, quando si tratta di prendere una posizione, almeno su queste pagine cerca di nascondere la propria scelta di campo[22]. Questa volta, comunque ci vuole, anche perchè il resto di questo pezzo potrebbe dimostrare che ha torto.

Rudy è un "*Forse-TAV*". Seguite il ragionamento, con riferimento alla figura a fianco.

1. La TAV sposterà principalmente merci, permettendo un incremento di questa tipologia di traffico.
2. Qualsiasi treno che passi da Torino al momento *deve* passare da Porta Susa




11 *Torino, disegnata da Rudy. In nero la situazione attuale, in rosso le opere previste, in continuo le strade, nelle quali (Tangenziale Est) si presenta probabilmente un problema simile, in tratteggiato le ferrovie. Il puntino giallo è casa di Rudy (inserito per non essere accusato di "Sindrome NIMBY")*

Considerate ora che Porta Susa è in sotterranea (dentro un bel tunnelone che si fa più di quattro chilometri), che al momento ci sono quattro binari (diventeranno sei, ma non di più) e che all'inizio ogni volta che passava un diesel il sistema antincendio partiva a sparare acqua da tutte le parti[23].

Adesso, considerate che i lavori per la "Gronda Merci" devono ancora cominciare, e cominceranno molto tardi (sicuramente dopo l'inizio del tunnel). E che i lavori della TAV sono stati "fasati", quindi si fa una cosa per volta, e solo se (secondo alcuni: niente polemiche, please) serve sul serio; ci sentiamo di dire, da quel poco di Teoria del Traffico che conosciamo, che Porta Susa diventerà un grazioso collo di bottiglia, e prima di fare buchi nei monti forse sarebbe meglio fare le gronde, e farci passare quello che passa adesso dal Frejus, tanto per cominciare[24].

Giusto? Beh, secondo ***Dietrich Braess***, mica tanto: Rudy potrebbe avere torto.

Quanto *costa* fare una certa strada? Partiamo dal caso "Porta Susa/Gronda Merci", e facciamo qualche ipotesi.

[21] E se non state attenti, vi raccontiamo per l'ennesima volta come mai i torinesi sono fieri del soprannome "*bôgianen*", che si può tradurre come "Le Termopili erano Disneyland, al confronto".

[22] Quanti pezzi abbiamo scritto sulla matematica delle elezioni?

[23] E a Torino abbiamo un Procuratore che su queste cose si arrabbia molto facilmente. Soluzione: niente diesel nella sotterranea. E per andare ad Aosta ci vuole un diesel, visto che oltre Ivrea la linea non è elettrificata.

[24] Stiamo semplificando molto: ma vorremmo arrivare a parlare di matematica, non di trasporto ferroviario *[punto notoriamente dolente: Rudy ha ricominciato ad andare a Ivrea in treno. Cambio a Chivasso].*

Supponiamo che il flusso totale $\Phi$ di treni dalla Francia (sulla sinistra del disegno guardando). Arrivato al bivio, posso scegliere tra due strade: passare da Porta Susa, con pochi binari a disposizione dei merci, implica un ritardo proporzionale al flusso di merci; passare dalla Gronda Merci implica un ritardo costante, pari al tempo di percorrenza, in formule

$$L_{PS}(\varphi_{PS}) = \varphi_{PS};$$
$$L_{GM}(\varphi_{GM}) = 10.$$

dove $\varphi_{PS(GM)}$ è il flusso su Porta Susa (Gronda Merci).

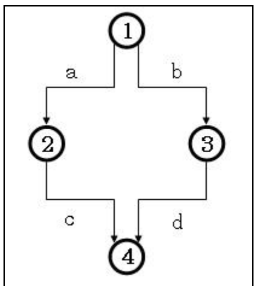
A questo punto, possiamo definire una *funzione costo*:

$$C(\Phi) = L_{PS}(\varphi_{PS}) \cdot \varphi_{PS} + L_{GM}(\varphi_{GM}) \cdot \varphi_{GM}.$$

Essendo $\varphi_{GM} = \Phi - \varphi_{PS}$, si vede che, se $\Phi \geq 5$, la nostra funzione di costo raggiunge il minimo quando $\varphi_{PS} = 5$, ossia, se ad esempio $\Phi = 10$, quando la metà dei treni si piazzano su Porta Susa e l'altra metà sulla Gronda Merci. E questo porta ad un costo $C = 75$.

Ma un attimo: se il ritardo (che poi è il costo) sulla Gronda Merci è 10 e il costo medio è 75, significa che il percorso Porta Susa è vantaggioso! Se passo da Porta Susa, riduco il mio costo da 10 a 6, quindi mi conviene passare da Porta Susa[25]!

Tutto ciò è noto come ***Paradosso di Braess***, ed è il motivo del dubbio di Rudy sulla TAV; non solo, ma lo stesso dubbio (per gli identici motivi) gli sorge in merito al "buco in val di Susa" e alla "Tangenziale Est" (nel caso vi foste chiesti per quale motivo li abbia disegnati); e se il tutto vi pare la solita sbruffonata matematica, esistono una serie di casi reali a comprova[26]. Adesso che vi abbiamo mostrato che esiste nel mondo reale, vediamo come nasce la cosa dal punto di vista più matematico, con un altro esempietto.



12 *Prima della cura*

Consideriamo il percorso indicato in figura qui di fianco: nostro scopo è partire dal punto **1** e arrivare al punto **4**, e per farlo abbiamo a disposizione due diverse strade: $\overline{1a2c4}$ e $\overline{1b3d4}$: imponiamo anche un ***costo*** e supponiamolo, in modi diversi, funzione del flusso: per i singoli tratti, decidiamo che è:

$$C_a(\varphi_a) = 10\varphi_a; \qquad C_c(\varphi_c) = \varphi_c + 50;$$
$$C_b(\varphi_b) = \varphi_b + 50; \qquad C_d(\varphi_d) = 10\varphi_d.$$

(Se vi chiedete come mai le espressioni su *b* e *c* abbiano quella forma strana, provate a pensare ad una tangenziale intasabile sulla quale si paga un pedaggio). A questo punto, se la domanda di flusso da **1** a **4** è ad esempio **6**, risulta immediato che il sistema si stabilizza quando abbiamo:

$$\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = \varphi_d = \frac{6}{2} = 3.$$

[25] Se a qualcuno questo ricorda la Toria dei Giochi (di Nash), ha perfettamente ragione: per quelli che non ci stanno capendo nulla, consigliamo la lettura di *Rudi Ludi*: le ultime copie disponibili sono in nostro possesso e in vendita al prezzo di affezione di 2450 euro a copia, spese di spedizione escluse, corposi sconti (dalle parti del 99%) a chiunque riesca a dimostrare di aver letto questa nota sino alla fine.

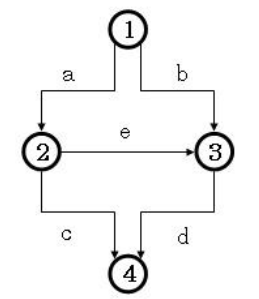
[26] Li mettiamo in nota, se vi interessano cercate ulteriori dati: quando a New York City è stata chiusa la Quarantaduesima Strada, tutti si aspettavano un ingorgo storico, in realtà, il traffico è diventato più scorrevole; e quando a Stuttgart, in Germania, è stato costruito un nuovo svincolo, il traffico nel centro città è peggiorato.

Con un costo per viaggiatore su ognuno dei due cammini pari a $C = 10 \cdot 3 + 3 + 50 = 53$.E siccome i costi dei due cammini sono identici, nessun viaggiatore riterrà necessario passare all'altro percorso.

Supponiamo adesso che *Grissino* (è il sindaco di Torino: ve lo abbiamo già presentato in un problema) decida di costruire il percorso $\overline{2e3}$, come indicato nella prossima figura, e che sia $C_e(\varphi_e) = \varphi_e + 10$. A questo punto, la rete potrebbe non essere più in equilibrio, quindi dobbiamo rifare i conti: i cammini possibili sono a questo punto ***tre*** ($\overline{1a2c4}$, $\overline{1b3d4}$, $\overline{1a2e3d4}$), e mentre i primi due mantengono il loro costo di **83**, il terzo ha un costo pari a **70**, *e quindi sarà il preferito!*

Se ricalcoliamo l'equilibrio, avendo tre percorsi possibili, il flusso ottimale su ciascuno dei cammini dovrà essere pari a $6/3 = 2$, ossia, andando a vedere i singoli archi del percorso, dovrà essere:

$$\varphi_a = \varphi_d = 4;$$
$$\varphi_b = \varphi_c = \varphi_e = 2.$$



13 *Vantaggio o guaio?*

E a questo punto, avendo ottenuto i flussi ottimali, possiamo calcolare il costo, che deve (situazione di equilibrio) risultare identico per ognuno dei tre percorsi, e arriviamo al risultato $C = 92$. Che è ***maggiore*** del valore $C = 83$ quando non era presente il percorso $\overline{2e3}$, e quindi ***costruire la nuova strada porta ad un peggioramento del traffico***.

E, come abbiamo visto, situazioni del genere accadono spesso anche nel mondo reale: usando l'inverso di quanto appena enunciato, possiamo dire che, in qualche caso, bloccare l'accesso al centro città potrebbe migliorare il traffico anche nelle zone limitrofe, contrariamente a quanto sostengono per assioma alcune persone[27].

"Ma *io* voglio andare in centro in macchina!" Dovendo tenere conto dell'egoismo (sia detto in senso buono, ma non troppo) degli utenti, forse è meglio se ci avviciniamo alla Teoria dei Giochi. Infatti, un'estensione del Paradosso di Braes, con interessanti applicazioni al mercato, è stata portata avanti da ***Elias Koutsopias*** e ***Christos Papadimitriou***[28]**:** la loro idea era di misurare quanto potesse essere svantaggiosa, per un individuo, una situazione competitiva quando tutti i giocatori agiscono razionalmente ma solo nel proprio interesse rispetto ad una condizione nella quale i partecipanti fossero in un modo o nell'altro forzati a coordinarsi per prendere una decisione che potrebbe essere svantaggiosa per il singolo ma rappresentasse un guadagno per la collettività. All'inizio i nostri due eroi avevano deciso di chiamare tutto questo *guadagno del coordinamento* ma, con un intelligente colpo di marketing, hanno optato poi per un altro termine, considerandolo di ben maggiore impatto; adesso cerchiamo di dare una definizione più formale, siccome è un filino noiosa, non vi anticipiamo il bellissimo termine che hanno trovato.

Consideriamo un gioco (nel senso di Nash) con un certo numero di risultati possibili, e per ogni giocatore calcoliamo il ricavo totale quando si ha un dato risultato. Calcoliamo poi il ricavo della *società*. Infine, calcoliamo quale risultato fornisce il massimo ricavo ai giocatori, sia esso o no un equilibrio di Nash.

[27] Non diciamo che hanno torto: diciamo che *potrebbero averlo*.

[28] Evitate le facili battute sulla situazione economica greca: il loro lavoro è coetaneo del primo numero di RM.

Sia $G$ l'insieme dei giocatori e $R$ l'insieme dei possibili risultati (visti come singoli elementi, non come somma totale), e sia $B$ il benessere raggiunto; per un dato risultato $r$, allora,

$$B(r) = \sum_{g \in G} u_g(r), \qquad \texttt{[1]}$$

ossia ogni giocatore $g$ avrà un determinato risultato e il benessere totale sarà dato dalla somma di tutti i risultati: all'insieme dei risultati dovrà evidentemente appartenere l'equilibrio (o gli equilibri) di Nash[29] $N$. Possiamo a questo punto definire "quanto ci costa" il fatto che ciascuno si faccia i fatti suoi, ossia il ***Prezzo dell'Anarchia***:

$$P_a = \frac{\max_{r \in R}\{B(r)\}}{\min_{r \in N}\{B(r)\}}.$$

Ossia, il fare ciascuno quel che gli pare è il rapporto tra la miglior soluzione con delle regole e la peggior soluzione di equilibrio[30]: attenzione che il denominatore è sull'insieme $N$, e la cosa è importante.

Se vi sembra che tutto questo ragionamento non abbia importanza dal punto di vista pratico (visto che convincere il proprietario di un SUV a usare una Smart per andare in centro può sembrare utopistico), provate a pensare ad una rete (basata su un protocollo IP) che debba trasmettere pacchetti dati: qualcuno di questi, "egoisticamente", vuole andare più veloce (ad esempio i pacchetti voce, per i quali minimizzare il ritardo è importante), mentre per altri, anche se i loro utenti vogliono farli andare veloci un rallentamento è tollerabile ("Cribbio, arriva 'sto film? Voglio vederlo prima di cena!").

L'importanza di questo concetto nasce dal fatto che, contrariamente a quanto accadeva nei Giochi di Nash, potremmo in certi casi decidere che il costo dell'anarchia è talmente basso da non valere l'emissione di una nuova regolamentazione (o la costruzione di un qualcosa). Il che porta a pensare ad un nuovo concetto (con il nome decisamente meno *appealing*), quello di ***Costo della Stabilità***: se, con un'espressione simile alla `[1]`, calcoliamo i *costi*, allora possiamo calcolare:

$$P_s = \frac{\max_{r \in N}\{C(r)\}}{\min_{r \in R}\{C(r)\}}.$$

e quindi verificare se la cosa ci convenga o no.

Se solo riuscissimo a spiegarle i conti, forse potremmo addirittura convincere la moglie di Rudy dell'utilità delle rotonde alla francese...

*Rudy d'Alembert*
*Alice Riddle*
*Piotr R. Silverbrahms*

[29] L'affermazione sul benessere totale può sembrare ovvia, ma non lo è: esistono altri modi per considerare il benessere totale, ad esempio scegliendo il *minimo* risultato. E, in base alle medesime considerazioni filosofiche, potete scegliere equilibri diversi da quello di Nash.

[30] Ricordate vero, che il guaio del Dilemma del Prigioniero è che ci sono ***troppe*** condizioni di equilibrio?