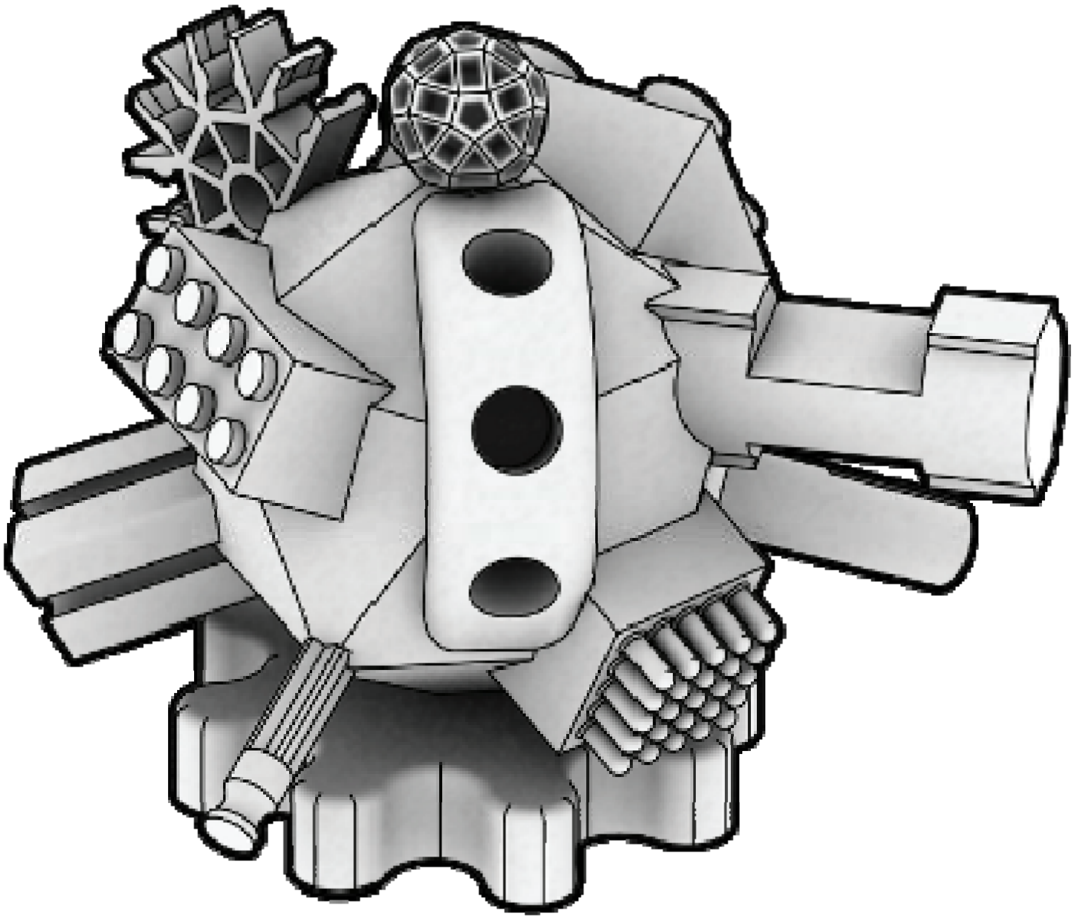
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 159 – Aprile 2012 – Anno Quattordicesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM158 ha diffuso 2'885 copie e il 01/04/2012 per Google eravamo in 77'800 pagine.

A stima, l'aggeggio in copertina viola una cinquantina di brevetti: è un'invenzione del ***Sy-lab***, e sono disponibili in internet i file STL che permettono di stamparlo con una stampante 3D, e non siamo sicuri che la cosa sia legale (per questo non vi diamo l'URL). Il motivo per cui un mucchio di gente lo stamperà ugualmente è che permette l'interoperabilità tra praticamente qualsiasi mattoncino LEGO, Thinkertoys, e quant'altro: il kit completo è composto da un'ottantina di pezzi.

1. Collegio Matematico numero 18

L'educazione dovrebbe inculcare l'idea che l'umanità è una sola famiglia con interessi comuni: che di conseguenza la collaborazione è più importante della competizione.
(Bertrand Russell)

L'uomo è nato libero e ovunque si trova in catene. Anche chi si crede il padrone degli altri non è meno schiavo di loro.
(Incipit de «*Il contratto sociale*», Jean-Jacques Rousseau)

Più che dare risposte sensate, una mente scientifica formula domande sensate.
(Claude Lévi-Strauss)

Se v'è per l'umanità una speranza di salvezza e di aiuto, questo aiuto non potrà venire che dal bambino, perché in lui si costruisce l'uomo.
(Maria Montessori)

Per una rivista di matematica ricreativa, che come tale dovrebbe coniugare soprattutto numeri e formule, è impressionante quanto siamo sempre stati attratti dalle parole e dal loro significato. È certo una delle nostre fascinazioni più grandi; e una parola, la sua etimologia, è il punto di partenza di molti nostri articoli. E da quel punto di partenza finiamo col parlare di mille altre cose che non forse non c'entrano molto col tema vero e proprio ma, ovviamente e non di meno, sono certo tutte collegate, perché le parole sono ponti. Questo deve avere a che fare con la nostra educazione, sì, con il modo in cui siamo stati tirati su: tutti e tre[1] con un serio rispetto della cultura classica e della Cultura in sé, con la maiuscola, come entità. Del resto "educazione" (ecco che arriva l'etimologia) deriva da *educĕre* (cioè "trarre fuori, "tirar fuori" o "tirar fuori ciò che sta dentro"), derivante dall'unione di *ē-* ("da, fuori da") e *dūcĕre* ("condurre"), verbo che in qualche modo implica un preciso significato del termine: secondo Socrate e Platone l'uomo aveva già in sé la conoscenza, e il processo di educazione consisteva proprio nell'estrarla dal proprio essere.

In italiano la parola assume anche altri significati, quali l'aderenza ad alcune specifiche convenzioni sociali; ma nella maggior parte delle altre lingue, stranamente, è rimasto un termine che determina esclusivamente un certo livello di studio: se in inglese qualcuno possiede una *education*, l'espressione implica proprio un grado universitario, o almeno un college. Anche il termine "studio", per esempio in tedesco, è usato per indicare lo studio a livello universitario: tutti coloro che non sono iscritti ad una università "imparano", non "studiano".

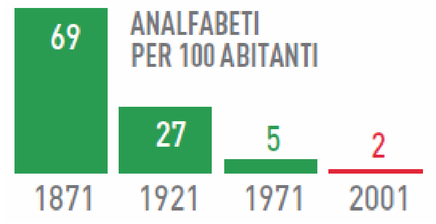
Però, chissà perché, noi italiani abbiamo ancora un senso più totale di educazione, come se ad ognuno dovesse essere insegnato un po' di tutto: dalla buona abitudine a non mettersi le dita nel naso, alla matematica, alla storia e alla filosofia, fino – perché no – alla scienza stessa dell'imparare, la pedagogia. Parola anche questa, come sempre, piena di significato: deriva dal greco *παιδαγογια*, composta da *παιδος* (*paidos*, bambino) e *αγω* (*ago*, guidare, condurre, accompagnare), perché il pedagogo era uno schiavo la cui occupazione era quella di accompagnare i bambini a scuola o in palestra. Con il passare del tempo lo schiavo è diventato insegnante[2] e la pratica dell' "accompagnamento" una vera e propria scienza, che tenta di determinare il modo migliore per trasmettere la

[1] La prima persona plurale che governa quest'articolo e il magico numero "tre" citato stanno ovviamente a ratificare che l'oggetto della narrazione sono i tre redattori di RM.

[2] Anche se non dubitiamo che alcuni insegnanti si ritengano tuttora soggetti a schiavitù…

conoscenza ai bambini, e non solo a loro. Insomma, si occupa di capire il metodo migliore per aiutare i bambini a crescere e introdurli alla realtà degli adulti.

Impressiona il fatto che tale scienza sia piuttosto recente, nella storia dell'uomo: malgrado l'etimologia faccia riferimento agli antichi greci, l'idea che ai "piccoli di uomo" debba essere garantita una infanzia di giochi e di studio è piuttosto recente: l'istituzione di vere e proprie scuole nazionali in Italia risale ai primi anni dell'unificazione, ed erano ben lungi dall'essere aperte a tutti. L'obbligo scolastico diventa una realtà solo nel secolo scorso, e fu peraltro disattesa per molti anni; per non parlare del fatto che l'analfabetismo è piaga non ancora del tutto debellata, nemmeno in Italia: secondo l'ISTAT[3] nel 2001 c'erano ancora il 1,5% di analfabeti, che su sessanta milioni di abitanti non sono pochi (novecentomila). La situazione mondiale è ancora più preoccupante, soprattutto perché tra coloro che non hanno accesso ad un'educazione i due terzi (in media) sono donne[4]: quel che peggio, questa percentuale negli anni di monitoraggio non sembra aver intenzione progredire, anche se gli indici di alfabetizzazione mondiale stanno migliorando ovunque. Come spiegare un obbrobrio del genere?



1 *L'alfabetizzazione in Italia*

Region / Country or territory	Reference year	Adults (15 years and older) Literacy rate MF	M	F	GPI	Illiterate population MF (000)	% F	Youth (15 to 24 years) Literacy rate MF	M	F	GPI	Illiterate population MF (000)	% F
WORLD		83.4	88.2	78.9	0.90	796,165	64.1	89.0	91.7	86.4	0.94	130,584	60.7
Arab States		72.4	81.2	63.1	0.78	60,181	65.2	87.4	91.0	83.7	0.92	8,650	63.4
Central and Eastern Europe		97.6	99.0	96.4	0.97	7,960	79.9	98.8	99.2	98.4	0.99	729	66.0
Central Asia		99.4	99.6	99.2	1.00	362	66.7	99.7	99.6	99.7	1.00	59	39.0
East Asia and the Pacific		93.7	96.3	91.0	0.94	105,681	70.7	98.3	98.4	98.1	1.00	6,444	52.5
Latin America and the Caribbean		91.0	91.9	90.3	0.98	36,056	55.8	96.9	96.7	97.2	1.01	3,181	45.0
North America and Western Europe		99.0	99.1	98.9	1.00	6,292	57.2	99.7	99.7	99.7	1.00	297	44.2
South and West Asia		61.9	73.2	50.9	0.70	412,432	63.5	79.3	85.7	73.3	0.86	66,115	63.5
Sub-Saharan Africa		62.1	71.2	53.3	0.75	167,200	62.5	71.2	76.2	66.3	0.87	45,109	58.5

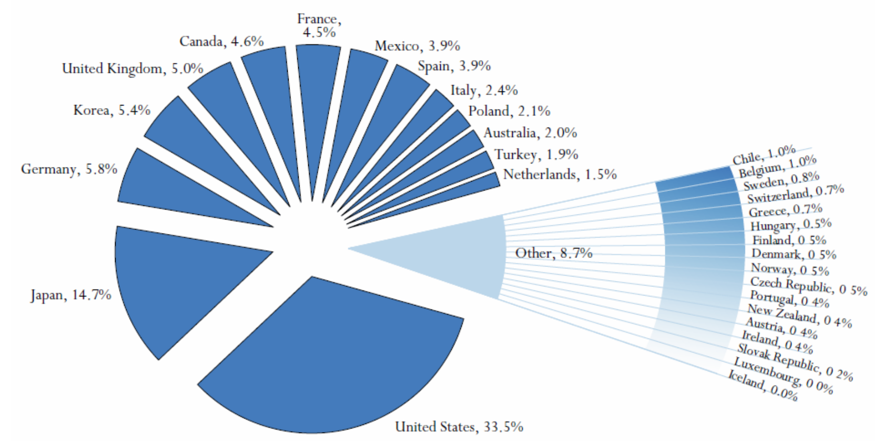
2 *Statistiche mondiali di analfabetismo secondo l'UNESCO*

Perché la capacità di leggere e scrivere è considerata uno dei diritti fondamentali dell'uomo? Perché tutte le ricerche compiute provano che l'accesso all'educazione ha come diretta conseguenza una migliore capacità di affrontare la vita, di trovare un lavoro, di essere una parte integrante della società. Ogni statistica che si rispetti sul livello culturale di una nazione usa come indice di evoluzione la percentuale della popolazione che ha completato livelli di istruzione superiore: maggiore è il numero di dottori, professori, filosofi, tanto maggiori sono la ricerca e lo sviluppo della nazione stessa. Come dire che una nazione che riesce a laureare ingegneri e letterati è più avanzata di una che produce solo manovali, coltivatori diretti e militari. Beh, dev'essere vero, no? Facciamo un rapido controllo, statistiche[5] alla mano.

[3] Il dato è preso dalla pubblicazione "L'Italia in cifre", emessa dall'ISTAT in occasione delle celebrazioni per i 150 anni dall'unificazione, così come il grafico sull'alfabetizzazione.

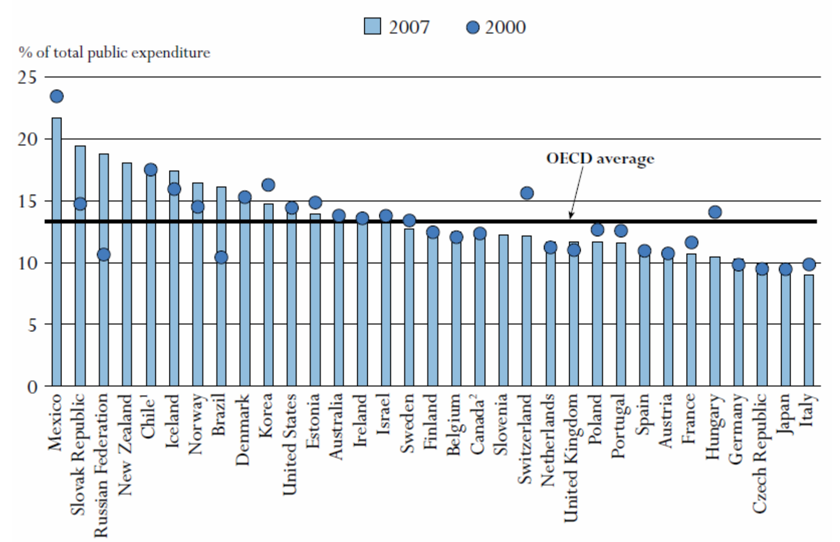
[4] I dati sono dell'UNESCO, del 2010, anche quelli nella tabella più sotto.

[5] Anche queste dal sito dell'UNESCO.



3 *Nazionalità dei cittadini OECD con educazione a livello universitario*

Dalle statistiche si scopre che la nazione tra quelle nell'OECD[6] con la maggior parte di laureati (tra i 25 e i 64 anni di età) è il Canada (49%), seguito non da lontano dagli Stati Uniti (41%); il valore più basso è quello della Turchia (12%), ma certo non è poi troppo distante da quello di Italia, Portogallo e Repubblica Ceca, che condividono un 14%. La media OECD[7] si attesta sul 28%. E si può scoprire anche il diverso il grado di investimento che ogni stato è disposto a fare nell'ambito scolastico: in generale questo è maggiore per la scuola primaria e secondaria. Per le università, molte nazioni confidano spesso nell'apporto di fondi privati.



4 *Percentuale della spesa pubblica dedicata all'istruzione nel 2007 e 2000*

Il modello è diverso da paese a paese, e questo rende piuttosto difficile giungere ad una chiara visione di quale sia il modo migliore di educare una nazione: è però evidente, almeno secondo l'UNESCO, che la libertà di ogni popolazione e la sua abilità di affrontare i problemi e la vita è incrementata e alimentata dall'alfabetizzazione (a tutti i livelli) e mediante un continuo miglioramento del livello educativo.

[6] OECD sta per *Organisation for Economic Co-operation and Development*, Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico.

[7] I dati pubblicati sono anche interessantissimi per il pregresso, per capire come si sono sviluppati i diversi paesi negli ultimi anni. In ogni stato la tendenza è quella di una diminuzione della percentuale di coloro che hanno completato solo un livello elementare, ed una corrispondente crescita del livello secondario superiore o professionale e quello universitario. In alcuni Paesi il livello secondario è molto pronunciato (76% nella Repubblica Ceca, 60% in Austria, Germania e Ungheria) mentre in altri è simile a quello universitario, ma sempre con una crescita inferiore; in Italia siamo al 39% (valore medio OECD 44%), che purtroppo indica che il 49% degli adulti trai i 25 e i 64 anni si limita ad avere appena un'istruzione di base (valore medio OECD 29%).

Ma, dicevamo, come educare i giovani virgulti di una nazione è un problema ancora molto aperto: ne sono ben consci i governi che si sono alternati al potere in Italia, i quali – oltre contenere la spesa pubblica dedicata all'istruzione, sola cosa in cui si sono trovati quasi tutti d'accordo – hanno dovuto decidere di volta in volta quali fossero gli argomenti, le tecnologie necessarie e i metodi di verifica più opportuni. E viene da chiedersi su quale metodo scientifico si siano basate le riforme scolastiche introdotte nel nostro Bel Paese fin dalla sua creazione, visto il numero spettacolare in cui si sono succedute: spendendo solo pochi secondi su Wikipedia si trovano

- Per la scuola nel Regno d'Italia: Legge Casati (1859), Legge Coppino (1877), Programmi della scuola elementare (1888), Primo Novecento, Legge Orlando (1904), Legge Daneo-Credaro, Riforma Gentile (1923), Istituzione della scuola di avviamento professionale (1928), Carta della Scuola (1939).
- Per la scuola nell'Italia repubblicana: Programmi della scuola elementare (1945), Scuola nella Costituzione (1948), Progetto Gonella di Riforma, Proposte di legge (1959), Riforma della Scuola Media (1962), Istituzione della Scuola Materna Statale, Liberalizzazione degli Accessi all'Università, Modifiche dell'Esame di Maturità (negli Anni Settanta, Anni Ottanta e Anni Novanta), Riforma Berlinguer
- Anni Duemila: Riforma Moratti (2006-2007), Riforma Gelmini (in corso).

Abbastanza da credere che ogni governo abbia attivato una banda di esperti in pedagogia e creato una scuola perfetta se non altro per approssimazioni successive. Peccato che una scuola perfetta dovrebbe non solo preparare i giovani al lavoro, ma migliorare l'economia e lo stato di una nazione, ed è difficile credere che sia proprio quello che è successo in Italia.

Una rivista che si occupa di matematica, per quanto ricreativa, non può che essere costituita da persone che credono nel metodo scientifico: e ci è stato facile notare che, tra tutti i nomi dei Ministri dell'Istruzione scorsi nella storia, abbiamo trovato soprattutto avvocati, letterati, storici e filosofi. Quest'assenza di specialisti, comunque, non è di per sé eccessivamente significativa: in fondo, si tratta pur sempre di persone che sono passate attraverso proprio quel sistema educativo che dovrebbero migliorare, e ne dovrebbero pertanto sapere qualcosa, cosa che non si può dire per tutti i Ministeri.

5 *Maria Montessori (1870-1952)*

È comunque bene ricordare che ci sono stati in Italia dei grandi scienziati dell'educazione, di cui la più famosa è senz'altro Maria Montessori: dopo aver passato molti anni in studi di medicina e psicologia infantile, sviluppò un metodo di insegnamento che ancora oggi è molto usato e sostenuto soprattutto all'estero: ma si sa, *nemo propheta in patria*. L'impegno di Maria era cominciato proprio dall'idea di un approccio scientifico (lei stessa lo chiamava "pedagogia scientifica"): inizialmente aveva studiato i bambini con problemi psichici e i metodi per la loro reintroduzione nella società; poi ha continuato a studiare quale avrebbe potuto essere il metodo migliore di insegnamento per i bambini minori di tre anni, quindi per quelli dai tre ai sei, e successivamente fino a quelli di dodici anni. Dalla sua sperimentazione sono cresciute scuole in tutto il mondo, al punto che il paese in cui se ne trovano meno forse è proprio l'Italia, da dove è stata più o meno cacciata durante il periodo fascista. Certo, indipendentemente dal personaggio Montessori, quello che è rimasto è il metodo, che non poteva non avere almeno delle blande basi scientifiche, se i fondatori di tre tra i più grandi protagonisti della scena di Internet di oggi, Google, Amazon e Wikipedia, affermano di dovere la loro straordinaria creatività proprio al metodo Montessori. Il creatore di Amazon Jeff Bezos, "il dittatore benevolo" di Wikipedia Jimmy Wales, i due padri di Google Larry Page e Sergey Brin: sono tutti accomunati dall'aver frequentato scuole montessoriane. Gli ultimi due hanno a loro volta trasformato la loro azienda in un edificio montessoriano, con motti quasi fanciulleschi, come "*Don't be evil*[8]".

Se ci è capitato spesso di celebrare sia grandi teorici e sperimentatori, sia grandi divulgatori è perché noi crediamo che siano importanti sia la creazione sia la distribuzione della scienza, ma talvolta fa impressione vedere come le basi per lo sviluppo e la crescita siano completamente avulse dal metodo scientifico: quello montessoriano è, nell'ambito della storia italiana dell'educazione, l'unico esempio di metodo pedagogico scientificamente definito. Perfino le varie "sperimentazioni" create negli anni '80-'90 (rapidamente scomparse) non avevano nulla a che fare con il concetto scientifico di esperimento: nessuna misura di confronto, nessuno può dire che cosa ne sia stato degli studenti "sperimentali", né che cosa si voleva ottenere con l'esperimento, né se quel che si voleva si sia ottenuto o meno.

Se applicassimo lo stesso modello di sviluppo del sistema scolastico alla medicina, non c'è dubbio che assisteremmo a delle forme assai creative di terapia. Dovessimo fare un ipotetico parallelo tra i tentativi di ottimizzazione dell'educazione scolastica e un'ipotetica ricerca per la cura del cancro, ci ritroveremmo a considerare, tanto per cominciare, che l'aria fresca fa certo bene, e manderemmo allora un po' di malati in montagna e un po' al mare. Magari qualcuno potrebbe guarire, chissà. Forti del fatto che fumare fa certo molto male, si potrebbe convincere qualcuno a togliersi il vizio, certi che questo potrebbe rimuovere il tumore in parecchi casi. E siccome si è sentito dire che intensa attività fisica sviluppa ormoni positivi, allora sì, si potrebbe aprire una sperimentazione, una clinica per curare il cancro in cui i pazienti sono sottoposti a diverse ore di palestra ogni giorno. E così via, qualcosa servirà pure, qualcuno lo cureremo pure, in questo modo… e comunque i soldi dei contribuenti bisogna anche salvaguardarli, mica possiamo spendere grosse somme di denaro per scoprire come curare il cancro, che si aggiustino i cittadini per conto loro, o magari che ci pensino quelli del prossimo governo.

Il metodo scientifico non è la panacea: ha dei vantaggi, e certamente anche degli svantaggi, o quantomeno delle difficoltà di applicazione in alcuni campi specifici. Però ha quantomeno il pregio di operare in modo da ottenere dei risultati misurabili e confrontabili: non garantisce quasi mai delle certezze, ma quasi sempre fornisce, come minimo, un progressivo avvicinamento alla soluzione.

C'è un famoso metodo mnemonico per ricordare le quattro relazioni fondamentali di Maxwell della Termodinamica: "*Good Physiscist Have Studied Under Very Fine Teachers*[9]". Come spesso accade, i metodi mnemonici che funzionano hanno una buona dose di verità anche nell'esposizione che è creata solo come appiglio per la memoria: perché è indubbio che, quasi sempre, i grandi rivoluzionari della scienza sono debitori a grandi insegnanti. E, nonostante esistano molti aneddoti spietati volti a dimostrare che ad insegnare si riducono solo coloro che non hanno successo come ricercatori, e anche nonostante il fatto indubbio che la capacità didattica è del tutto ortogonale e indipendente dalla creatività della ricerca, è tutt'altro che infrequente il caso in cui dei

[8] Che – non letteralmente – si può tradurre come "*non fare il cattivo*..."

[9] "*I buoni fisici hanno studiato sotto insegnanti molto bravi*". Il metodo mnemonico è quello noto come "quadrato di Born", perché sembra sia stato inventato da Max Born. Non è il caso di riportarlo in nota (del resto, è facilmente reperibile in rete): basti sapere che la frase ricorda, tramite le sue iniziali, come sistemare opportunamente le grandezze fondamentali (G=Energia libera di Gibbs; P=Pressione; H=Entalpia; S=Entropia; U=Energia Interna; V=Volume; F=Energia libera di Hemholtz; T=Temperatura) in forma differenziale.

geniali innovatori sia al tempo stesso anche dei fantastici insegnanti. Ne abbiamo grandi esempi anche in Italia, ma questa duplice dote si ritrova ovunque, per fortuna; piuttosto, è frequente che un grande della scienza, riconosciuto come tale, venga ricordato e celebrato soprattutto per le sue scoperte e innovazioni, tralasciando le sue eventuali doti di insegnamento. E forse questo è un piccolo tradimento che si ripete troppo spesso, nei confronti di maestri che erano invece molto orgogliosi proprio dell'implicita connotazione educativa che proprio la parola "maestro" comporta.


6 *Andrei Nikolaevich Kolmogorov*

Andrei Nikolaevich Kolmogorov nasce il 25 aprile del 1903 a Tambov, in Russia. A meno di vent'anni d'età e senza ancora aver acquisito il titolo universitario, aveva già prodotto risultati originali.

Malgrado inizi non fortunati (i genitori non erano sposati, la madre morì alla sua nascita e fu cresciuto da una zia e dal nonno materno, da cui prese il nome), la sua carriera scolastica iniziò senza specifiche propensioni per la matematica. Cominciò a lavorare molto presto: prima di ottenere la possibilità di affrontare gli studi accademici fu conduttore di treni, e approdò all'università nel 1920. Tra i suoi interessi c'era la storia, tanto che scrisse una tesi approfondita sulla proprietà privata nel quindicesimo e sedicesimo secolo, e in seguito continuò a confrontarsi su diversi concetti di storiografia. Entro il 1929 aveva ottenuto il suo dottorato, e per allora aveva scritto almeno 18 risultati originali da cui in seguito furono sviluppate (da lui stesso o da altri) teorie matematiche essenziali. È a questo punto della sua vita che incontrò Pavel Sergeivic Aleksandrov: la loro amicizia durò tutto il resto delle loro vite e fu incredibilmente prolifica di risultati scientifici.

I due amici e colleghi si incontrarono durante la vacanza estiva, quando entrambi avevano ottenuto un posto in una escursione organizzata dalla "Società per il Turismo e le Escursioni del Proletariato". Ottenuto il necessario per il campeggio e una barca per discendere il Volga con un gruppo di studenti, si attrezzarono con materiale di studio: una copia dell'Odissea e un tavolino pieghevole. Alternarono studio e lavoro, bagni di sole e bagni nel Volga, che discesero per 1300 chilometri di fiume. Dopo il nuoto, passarono a scalare montagne (per esempio l'Alagez, di 4100 m), poi si separarono per rincontrarsi dalle parti del Mar Nero. Dopodiché decisero di trasferirsi nello stesso appartamento, insieme con la zia di Andrei, e infine trovarono una casa a Komarovka, grande abbastanza per contenere una fornita biblioteca matematica e poter ricevere un numero sufficiente di ospiti, che divenne presto il posto dove le menti matematiche russe del tempo si incontravano per creare matematica. Nomi come Hadamard, Fréchet, Banach, Hopf, Kuratowski, Gnedenko cominciarono a frequentare quell'appartamento abitato da due delle più grandi menti matematiche del secolo. Per capire l'amicizia tra loro possiamo leggere cosa ne dissero i protagonisti stessi: per esempio, Aleksandrov dice

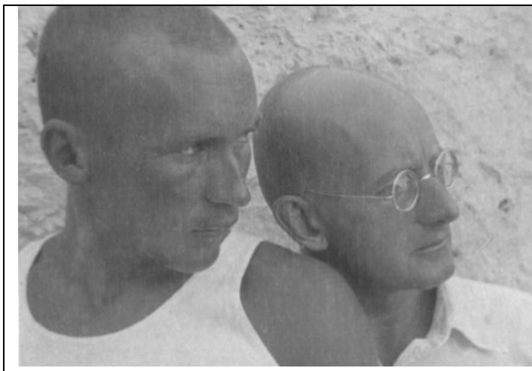
> *"Nel 1979 questa amicizia* [con Kolmogorov] *ha celebrato il suo cinquantesimo anniversario e durante l'intero mezzo secolo non solo non c'è mai stata un'interruzione, ma non ci sono mai stati battibecchi. In tutto questo tempo non ci fu mai un'incomprensione tra noi su alcun problema, non importa quanto*

> *importante per le nostre vite e filosofie; anche quando le nostre opinioni su uno di questi argomenti non era la stessa, dimostravamo completa comprensione e simpatia per il parere dell'altro."*

Mentre Kolmogorov dichiara:

> *"Per me questi 53 anni di amicizia indissolubile sono stati la ragione per cui la mia vita è stata piena e felice, e la base di questa felicità è dovuta all'incessante gentilezza da parte di Aleksandrov."*

I due continuarono a trascorrere molte ore a fare sport, entrambi credevano in una sana attività fisica. Durante le giornate a Komarovka la routine è ben descritta dallo stesso Andrei:



7 A. N. Kolmogorov e P. S. Aleksandrov

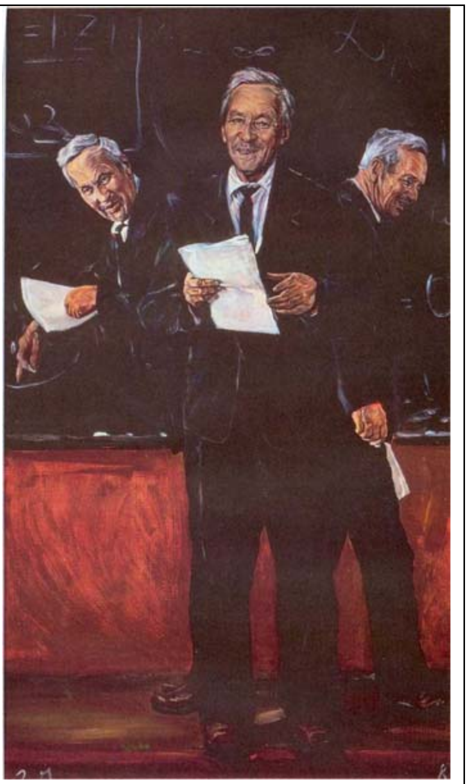
> *"Normalmente, dei sette giorni di una settimana, quattro li passavamo a Komarovka, uno dei quali era interamente dedicato alla ricreazione fisica – sci, canottaggio, lunghe escursioni a piedi (queste camminate coprivano di solito dai 30 ai 50 chilometri) – nei giorni di Marzo con il sole uscivamo sugli sci vestiti solo con i calzoncini, restando fuori fino a 4 ore. Gli altri giorni, l'esercizio mattutino era obbligatorio, con l'aggiunta in inverno di una corsa di 10 km sugli sci… Specialmente ci piaceva nuotare nel fiume non appena il ghiaccio cominciava a sciogliersi… io nuotavo solo poco nell'acqua ghiacciata, ma Aleksandrov molto di più. D'altra parte ero io che sciavo nudo per distanze molto più lunghe."*

E non si può dire che esagerasse nel lodare le proprie abilità sugli sci, visto che per la festa dei suoi settant'anni, vestito solo con un paio di calzoncini, lasciò indietro tutti gli altri partecipanti alla sciata.

Andrei Nikolaevich fu un grande matematico, e gli oggetti matematici che contengono il suo nome lo testimoniano: Assiomi di Kolmogorov, Equazioni di K. (note anche come Equazioni di Fokker-Planck), Dimensione di K., Teorema di Continuità di K., Criterio di K., Teorema di Estensione di K., Diseguaglianza di K., Diseguaglianza di Landau-Kolmogorov, Integrale di K., Interpretazione di Brouwer-Heyting-Kolmogorov, Spazio di K., Complessità di K., Test di Kolmogorov-Smirnov, Legge Zero-Uno di K., Caratterizzazione della Diffusione Reversibile di K., Paradosso di Borel-Kolmogorov, Equazione di Chapman-Kolmogorov, Casualità di Chaitin-Kolmogorov, Teorema di Hahn-Kolmogorov, Legge della Turbolenza di K., Funzioni Strutturali di K. Per non parlare dell'enorme quantità di campi in cui fu attivo: probabilità e statistica, logica, analisi differenziale, teoria dei fluidi, cristallografia, cosmologia, algoritmi e informatica…

In occasione del suo centenario[10], nel 2003, eventi per la celebrazione del suo genio e della sua poliedricità furono organizzati in tutto il mondo; conferenze ed eventi in cui i suoi risultati in alcune delle tante discipline venivano presentati da alcuni dei suoi studenti più famosi. Conferenze tenute ovviamente a Mosca, ma anche in Inghilterra, in Germania, negli Stati Uniti e anche all'università La Sapienza di Roma, a Trieste, solo per nominarne alcune.

[10] Ed è anche grazie a questo sito http://kolmogorov.com/, che molte delle informazioni e delle figure per questo articolo sono state raccolte.



8 *Dima Gordeyev. Insegnante (A. N. Kolmogorov). 100x60 cm. Olio su tela, 1980. Komarovka, Mosca.*

La sua carriera fu talmente brillante che non basterebbero le poche pagine a nostra disposizione per descrivere quasi settant'anni di attività di ricerca in ambito matematico, storico e pedagogico, per cui vorremmo concentrare la nostra attenzione sulla sua attività come insegnante e pedagogo, un interesse che lo occupò già molto giovane. Kolmogorov cominciò ad insegnare già nel 1922[11], alla scuola sperimentale modello del Commissariato per l'Educazione del Popolo, dove rimase fino al '25, quando incominciò ad insegnare all'università. Il suo interesse principale era proprio come trasmettere conoscenze e interesse negli studenti di diverse età, da molto piccoli fino agli anni accademici. Secondo lui, quando i ragazzi giungono verso i 14-15 anni, hanno già sviluppato un interesse per una o l'altra disciplina, e solo da questo punto in poi possono essere diretti verso conoscenze avanzate, perché a quel punto hanno già sviluppato la loro curiosità e saranno più propensi a concentrarsi sulle materie di loro interesse. Ed è particolarmente importante, proprio tra i 14 e i 18 anni, permettere agli studenti di realizzare la loro forza, di essere messi in condizione di produrre risultati originali: secondo Kolmogorov è essenziale proporre agli studenti problemi che siano alla loro portata e allo stesso tempo richiedano tutta la loro concentrazione e sforzo, e che riescano a stimolare il loro sviluppo più che ottenere risultati utili in sé. Scrisse anche un libello di riferimento "*Matematica come professione*", ed organizzò Olimpiadi di Matematica nelle scuole, contribuì negli anni a sviluppare i programmi scolastici di scuole medie e superiori, producendo libri di testo, programmi, definizioni didattiche. Sono più di 60 i ricercatori che ottennero un dottorato sotto di lui, e questi sono solo quelli per cui fu relatore in via diretta.

Il Collegio Matematico n.18, che poi divenne "la Scuola di Kolmogorov", fu uno dei suoi impegni più intensi, e non smise mai di contribuirvi con ore di insegnamento, non solo in matematica, ma anche arte, letteratura, musica e storia. Kolmogorov pensava che lo sviluppo di uno studente dovesse essere equamente bilanciato e che niente dovesse essere lasciato da parte, e per questo continuava ad organizzare gite all'aperto con gli studenti, ore di camminate o sciate o altri sport.

9 *Kolmogorov con alcuni suoi studenti*

Gli studenti che escono da questa scuola sono ancora oggi tra quelli con il maggior successo nelle olimpiadi di matematica e negli studi superiori.

[11] Vi aiutiamo a fare la sottrazione: 1922-1903=19. Ovvero, ha cominciato ad insegnare a meno di vent'anni di età.

Uno dei suoi studenti, V.I. Arnol'd[12], racconta:

> *"Kolmogorov non spiegava mai niente: poneva problemi. E non li espandeva nemmeno: dava agli studenti completa indipendenza e non forzava nessuno a fare nulla, sempre aspettando di ascoltare dagli studenti qualcosa di eccezionale. Brillava tra i professori che ho incontrato per il suo completo rispetto della personalità dello studente."*

E questa è probabilmente l'essenza vera della pedagogia, più ancora che della matematica. Rispettare la personalità, le inclinazioni, riuscire a stimolare e ad incuriosire senza costringere e senza forzare, ottenendo così risultati migliori e più duraturi di un immagazzinamento di nozioni ottenuto per forza o per autorità. È un approccio, si dirà, che ci si può permettere solo di fronte ad una platea di studenti già selezionata, educata, ben disposta: e forse è vero. Però Maria Montessori, più di un secolo fa, usava le parole "rispetto della personalità" anche per una platea di treenni, anche per bambini con problemi psichici: ed è allora curioso ritrovare gli stessi termini, gli stessi criteri fondamentali per l'insegnamento sia all'inizio sia alla fine del percorso pedagogico.

Forse, il segreto sta tutto in queste parole, semplici al punto da sembrare quasi banali: rispettare e incuriosire la persona che sta imparando. E forse, proprio nella semplicità di queste parole sta nascosta tutta l'enorme difficoltà del bellissimo mestiere dell'insegnante.

[12] Arnol'd è scomparso giusto un paio d'anni fa, ed è stato un grande lutto per il mondo matematico. Vincitore di un Premio Wolf, di un Premio Lenin (guarda caso, condiviso con Kolmogorov), reso famoso dal Teorema di stabilità dei sistemi hamiltoniani integrabili (detto anche – riguarda il caso – Teorema di Arnol'd-Kolmogorov-Moser), era apprezzatissimo per la sua amabile prosa di divulgatore e come abilissimo didatta. Merita certo un compleanno a parte, ma solo fra un po' di tempo, visto che sarebbe davvero molto simile a questo…

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Eastern Contest?			
Probabilità al contrario			

2.1 Eastern Contest?

Abbiamo un paio di dubbi e una certezza, in merito a questo pezzo.

Tanto per cominciare, la valutazione: sono problemi facili (e anche piuttosto carini: le due opzioni sono difficili, da trovare congiunte), ma sono *otto*: ognuno vale suppergiù una pipa (anche meno, qualcuno), ma tutti assieme ci pare assurdo valutarli otto pipe. Fate voi, noi ve l'abbiamo detto.

L'altro dubbio è se riusciremo a uscire per tempo, vista la certezza.

La certezza è che questo mese, a Pasqua, ci sarà di sicuro un tempo migliore di quello che c'è mentre scriviamo, quindi si presumono uscite più o meno mangiatorie e non potrete portarvi dietro quintalate di carta per impegnare il tempo tra gli agnolotti e l'abbacchio[13]: vi abbiamo quindi preparato una sfilza di problemi che potrete portarvi dietro su un foglio volante di minime dimensioni e risolverli agilmente tra una portata e l'altra.

Bene, andiamo a cominciare.

1. Cinque sacchi di riso sono stati pesati a coppie, e sono stati ottenuti i seguenti risultati: 72, 73, 76, 77, 79, 80, 81, 83, 84 e 87. Quanto pesavano i singoli sacchi?
2. Cancellate 60 cifre dal numero formato dai primi 40 numeri scritti di seguito in modo tale che il risultato sia il più piccolo possibile.
3. Trovate la somma delle cifre di $10^{2004} - 2004$.
4. In un sacchetto ci sono 100 biglie di colori diversi: 10 bianche, 10 nere, 12 gialle, 14 blu, 24 verdi, 30 rosse. Quante biglie dovete estrarre senza guardarne il colore per avere la certezza di avere almeno 15 biglie dello stesso colore?
5. Il quadrato *ABCD* ha lato 24 cm.: viene costruito il quadrato *AEFG* di lato 2 cm con la diagonale *AF* su *AB* e l'angolo *E* all'esterno del quadrato *ABCD*. Quanto vale *CE*?

[13] Abbiamo sempre apprezzato la battuta di Franco Neri: "...ci si siede a mangiare all'una, alle sei e mezza, finito il dolce, ci si alza per una passeggiata e arriva la voce dalla cucina: 'Non andate lontano, che tra mezz'ora si cena!'".

6. Se scrivo tutti i numeri in sequenza (come nel P.2), che cifra trovo nella posizione 206.788 da sinistra?
7. Quante volte appare il numero 2 quando il prodotto $1002 \cdot 1003 \cdot 1004 \cdot \ldots \cdot 2004$ viene scomposto in fattori primi?
8. Un quadrato di 16 caselle contiene, per ogni casella, un segno più o un segno meno. Invertiamo i segni di una riga (o di una colonna) sin quando otteniamo il numero minimo di segni meno: una tabella per la quale effettuando questa operazione non si possa ridurre ulteriormente il numero dei segni meno è detta "tabella minimale", e il numero dei segni meno è detta *caratteristica* della tabella. Trovate tutti i possibili valori della caratteristica.

Come avrete facilmente intuito dai valori presentati, trattasi di una serie di problemi nati nel 2004, quindi se volete cambiare qualche valore fate pure.

...e buona Pasqua!

2.2 Probabilità al contrario

Vi abbiamo abituati (con la sbuffante tolleranza di Alice) al calcolo di probabilità in giochi particolarmente assurdi, e vi siete adattati senza neanche lamentarvi troppo, giudicando con un sorriso di sufficienza la pragmatica affermazione riddliana che "per sapere cosa è uscito, basta aspettare che esca". Ci chiediamo cosa ne penserete dell'ultima proposta della Lepre Marzolina, che una volta tanto non vi chiede di scommettere su quello che succederà, ma di puntare su *quello che è successo*.

Si tira un dado (da sei). Se esce "1" o "2" si tira una moneta. Se esce "3" si tirano due monete. Per altre uscite, si tirano tre monete.

In tavola, nessuna moneta indica "croce"; quali sono le probabilità che sul dado siano usciti "1" o "2"?

Lo scrivente (Rudy) è convinto che le probabilità "al contrario" ad Alice piacciano ancora meno delle probabilità "per dritto".

3. Bungee Jumpers

1) Dimostrare che il prodotto di quattro interi positivi consecutivi differisce di 1 da un quadrato perfetto.

2) Sono dati $4n$ interi positivi tali che se ne vengono scelti quattro qualsiasi distinti tra loro, è possibile costruire una proporzione. Provate che almeno n di questi numeri sono uguali tra loro.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Aprile.

Prima di partire con una tirata sul mese crudele, o il dolce dormire o, peggio, sulle condizioni meteorologiche, soprassiedo e passo subito a parlare d'altro. Anche a marzo la sezione più affascinante e maschile dei Rudi si è esibita in una rivisitazione della conferenza sul calendario, davanti a qualche centinaio di studenti del liceo Gramsci di Ivrea. Purtroppo non vi posso dare dettagli, perché ancora una volta io non c'ero, ma resto orgogliosa della loro performance perché sono sicura che se la sono cavata benissimo. Scrivetemi se avete più dettagli.

Per il resto marzo non ha portato molto altro che gli auguri per il Capo, anche la nostra serie di tentativi di costruire una versione epub della rivista è fallita miseramente: non è che non ci riusciamo, è solo che ci vogliono molti passaggi ed il risultato è di molto peggiore del pdf che conosciamo. Però non demordiamo, e come se non bastasse abbiamo tanti grandissimi lettori che di sicuro prima o poi provvederanno una soluzione a cui noi non avevamo ancora pensato.

Tra gli eventi di uno dei mesi più matematici che ci sono (non per niente è il mese della consapevolezza matematica), ci fa piacere segnalare (grazie ***Ant***!) la Festa della Matematica a Firenze: trovate il programma con tutti gli eventi a questo link http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/festadellamatematica.php, e tra i conferenzieri ci sono personaggi che sono apparsi nelle pagine di RM più di una volta. Noi non sappiamo se riusciremo ad andarci, ma sicuramente lo vorremmo fare. E ancora, ***Zar*** ci segnala un evento per giugno chiamandolo "ritrovo di vecchi amici": vi passiamo semplicemente il link http://www.turing100.manchester.ac.uk/, perché i "vecchi amici" non hanno bisogno di presentazione.

Infine, vi segnaliamo l'Osservatorio sulla Comunicazione della Scienza Online (http://www.sciencepages.it/), un'iniziativa che si propone di organizzare le risorse di comunicazione della scienza disponibili su internet esclusivamente in lingua italiana. L'iniziativa ci sembra stia avendo un notevole successo, e contiene (certo) una voce per i Rudi Mathematici e una per i Rudi Matematici, l'intervista ai protagonisti e perfino un'intervista di persona al nostro eccellente Postino.

Prima di passare alle soluzioni, vi proponiamo un quesito proposto da ***Marco L.***, che abbiamo trovato parecchio interessante:

> Su una scacchiera standard da 8x8 caselle, è possibile disporre pedine che hanno quattro diversi valori e precisamente 1, 2, 3 e 4. La pedina di valore 1 può essere posata su una qualsiasi casella, quella di valore 2 può essere posata solo di fianco (non in diagonale) ad una di valore 1. La pedina di valore 3 può essere collocata solo di fianco ad una di valore 1 e ad una di valore 2. Infine la pedina di valore 4 può essere posata solo di fianco a pedine di valore 1, 2 e 3. Qual è la migliore distribuzione possibile delle pedine per massimizzare il totale ottenuto dalla somma di tutte le pedine presenti sulla scacchiera?

Marco ci dice di aver provato numerose simulazioni con una scacchiera ridotta, ma di non essere riuscito a trovare una soluzione matematica in forma chiusa. Voi ci riuscite? Mandateci soluzioni e commenti, pubblicheremo. Come del resto anche per il problema proposto da ***Actarus***:

> *Qual è la probabilità che una persona qualsiasi nata N anni fa sia un mio diretto antenato?*
>
> *Osservazioni*: Risulta evidente che inizialmente la probabilità aumenta in modo esponenziale al crescere di N, infatti ogni persona ha: 2 genitori, 4 nonni, 8 bisnonni, ecc... Chiaramente la probabilità non cresce come $2k$ perché esiste la possibilità che si sposino tra loro due persone che hanno un antenato in comune (ad esempio: se due cugini si sposano tra loro, i loro figli non avranno 8 bisnonni). Inoltre, oltre alla probabilità che si sposino tra loro due persone con un antenato in comune, occorre considerare anche che la probabilità che si sposino tra loro due persone della stessa nazione è maggiore della probabilità che si sposino tra loro due persone nate in nazioni differenti o persino in continenti differenti. Tenendo conto di queste variabili (e di eventuali altre) si può trovare un risultato in funzione di queste variabili oppure un risultato in cui queste variabili siano stimate o statisticamente o tramite opportuni ragionamenti. Ciò porta a tantissimi modi differenti di affrontare lo stesso problema. In ogni caso, per valori di N abbastanza alti, la soluzione risulta essere molto interessante.

Anche per questo, scriveteci!

Ed ora avanti, con le vostre soluzioni. Cominciamo con quelle calendaristiche.

4.1 [Calendario 2007]

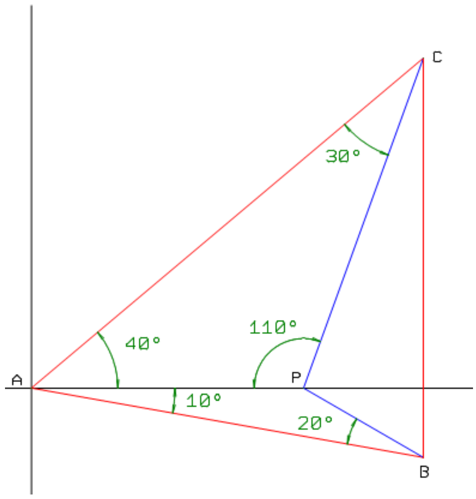
4.1.1 Settembre 2007: 25° USAMO – 1996

Sawdust sta procedendo alla soluzione di tutti i Sangaku che trova nei calendari. Ecco il testo di questo quesito settembrino:

> *Il triangolo ABC gode della proprietà che esiste un punto P interno al triangolo per cui <PAB=10°, <PBA=20°, <PCA=30° e <PAC=40°. Provare che il triangolo ABC è isoscele.*

Vediamo una soluzione di ***Sawdust***:

Posto A nell'origine e P in (k, 0), tracciare da A una retta inclinata di 10° sotto l'asse delle ascisse, e da P una retta inclinata di 30° nella stessa direzione. Si incontrano nel punto B.



Sempre da A tracciare una retta inclinata di 40° sopra l'asse delle ascisse, e da P una retta inclinata di 110° nella stessa direzione. Si incontrano nel punto C.

L'equazione di una retta passante per l'origine e inclinata di 40° è

$y = \tan(40°) \cdot x$

L'equazione di una retta passante per P e inclinata di 110° è

$y = \tan(70°) \cdot x - k \cdot \tan(70°)$

e si incontrano nel punto C di coordinate

$$x = k \cdot \frac{sen(70°) \cdot \cos(40°)}{sen(70°) \cdot \cos(40°) - sen(40°) \cdot \cos(70°)}$$

$$y = k \cdot \frac{sen(40°) \cdot sen(70°)}{sen(70°) \cdot \cos(40°) - sen(40°) \cdot \cos(70°)}$$

L'equazione di una retta passante per l'origine e inclinata di 10° è

$y = -\tan(10°) \cdot x$

L'equazione di una retta passante per P e inclinata di 150° è

$y = -\tan(30°) \cdot x + k \cdot \tan(30°)$

e si incontrano nel punto B di coordinate

$$x = \frac{k \cdot \sqrt{3} \cdot \cos(10°)}{\sqrt{3} \cdot \cos(10°) - 3 \cdot sen(10°)} = k \cdot \frac{\cos(10°)}{\cos(10°) - \sqrt{3} \cdot sen(10°)}$$

$$y = k \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot sen(10°)}{-\sqrt{3} \cdot \cos(10°) + 3 \cdot sen(10°)} = -k \cdot \frac{sen(10°)}{\cos(10°) - \sqrt{3} \cdot sen(10°)}$$

A noi interessano solo i valori di x e, posto k = 1, abbiamo (con Excel)

$$\frac{sen(70°) \cdot \cos(40°)}{sen(70°) \cdot \cos(40°) - sen(40°) \cdot \cos(70°)} = 1{,}4397$$

$$\frac{\cos(10°)}{\cos(10°)-\sqrt{3}\cdot sen(10°)}=1{,}4397$$

Volendo avere una precisione maggiore, con PowerToys Calculator di zio Bill si ha una differenza trai due valori pari a 2,7 · 10^{-532} (forse è proprio zero!). Quindi i punti B e C sono su una retta parallela all'asse Y e l'angolo PCB è di 20°. Ma allora gli angoli BAC e BCA sono entrambi di 50°! (q.e.d.)

Che ne dite? No, non ha smesso di risolvere, ce n'è ancora uno.

4.2 [Calendario 2010]

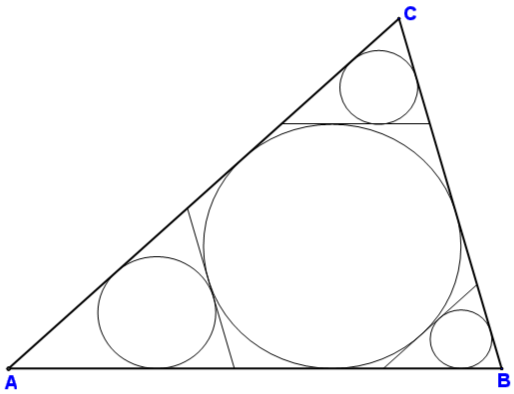
4.2.1 Settembre 2010: 6th IMO (1964) – 3

Anche questo problema è di settembre, risolto durante il mese di marzo:

Il triangolo ABC ha lati a, b, c. Sono costruite le tangenti al cerchio inscritto parallele ai tre lati. Ogni tangente forma un triangolo con gli altri due lati del triangolo originale, e in ognuno di questi triangoli viene inscritto un cerchio. Trovate l'area totale dei quattro cerchi.

E ora la soluzione (multipla) di ***Sawdust***:

I tre triangoli piccoli sono simili al triangolo di partenza e formano all'interno di questo un esagono irregolare ma con tre coppie di lati uguali.



Poiché la somma dei tre lati piccoli corrispondenti è uguale al lato grande corrispondente la somma dei raggi piccoli è uguale al raggio grande e di conseguenza anche le 3 cfr piccole sommate sono pari alla prima.

Ma le aree sono proporzionali al quadrato del raggio, e quindi le cose cambiano un po'.

L'area del triangolo ABC è $A=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$, e il raggio del cerchio inscritto è pari all'area del triangolo divisa dal semiperimetro. Se il triangolo di partenza fosse equilatero

$$A=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-a)\cdot(p-a)}$$

$$A=\sqrt{\frac{3a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}=\sqrt{\frac{3a^4}{16}}=a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Il raggio del cerchio inscritto sarebbe $r=\dfrac{a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{2}a}=a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2}{3a}=a\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}$

la sua area $A_{C1}=\dfrac{\pi\cdot a^2}{12}$

e l'area dei 4 cerchi $A_{tot}=\dfrac{4}{3}A_{C1}=\pi\cdot\dfrac{a^2}{9}.$

La somma dei perimetri dei 3 triangoli piccoli è uguale al perimetro del triangolo originario e il semiperimetro di ognuno di essi è uguale al semiperimetro di ABC meno il lato che non gli appartiene. In formule, detto T il triangolo originario con lati a, b e c, T_1, T_2 e T_3 i triangoli piccoli con lati rispettivamente a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 e c_3, abbiamo i corrispondenti semiperimetri p, p_1, p_2 e p_3, da cui

$p_1 = p - a$

$p_2 = p - b$

$p_3 = p - c$

$a_1 : a = p_1 : p$

$a_2 : a = p_2 : p$

……

$c_3 : c = p_3 : p$

La somma dei raggi dei tre cerchi inscritti è pari al raggio del cerchio inscritto in T e sono proporzionali ai rispettivi semiperimetri, per cui

$r : r_1 = (p_1 + p_2 + p_3) : p_1$

$r_1 = (r \cdot p_1) / (p_1 + p_2 + p_3)$

ma $(p_1 + p_2 + p_3) = p$ e quindi $r_1 = r \cdot p_1 / p = r \cdot (p–a) / p$

E adesso

$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2p}$ e l'area del primo cerchio è $SC = \pi\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{4p}$

$r_1 = r \cdot (p–a) / p$ e l'area del secondo cerchio è $SC_1 = \pi\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{4p}\cdot\left(\frac{p-a}{p}\right)^2$

$r_2 = r \cdot (p–b) / p$ e l'area del terzo cerchio è $SC_2 = \pi\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{4p}\cdot\left(\frac{p-b}{p}\right)^2$

$r_3 = r \cdot (p–c) / p$ e l'area del quarto cerchio è $SC_3 = \pi\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{4p}\cdot\left(\frac{p-c}{p}\right)^2$

per cui l'area totale dei quattro cerchi è

$$SC_{Tot} = \pi\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{4p}\cdot\left[1+\left(\frac{p-a}{p}\right)^2+\left(\frac{p-b}{p}\right)^2+\left(\frac{p-c}{p}\right)^2\right]$$

$$SC_{Tot} = \pi\frac{(p-a)(p-b)(p-c)\left(4p^2+a^2+b^2+c^2-2p(a+b+c)\right)}{4p^3}.$$

Bene, un ottimo risultato, ne aspettiamo ancora altri...

4.3 [158]

4.3.1 Prima dare cammello, dopo riprendere cammello

Ecco, quando si dice un classico, questo è proprio il vero e proprio problema di applicazione di equazioni diofantee care al Capo... vediamo il testo:

> *Leggenda vuole che ci fosse da dividere una mandria di N cammelli tra tre fratelli: al più anziano doveva andare la u-esima parte della mandria, all'intermedio*

spettava la v-esima, mentre il più giovane doveva accontentarsi della w-esima parte. N+1 era un multiplo di tutti e tre i numeri (u,v,w), mentre non lo era N.

Il Grande Problemista, recatosi sul luogo a dorso di cammello, aggiunge il proprio mezzo di locomozione alla mandria e provvede alla divisione secondo le frazioni indicate, avanza un cammello (il suo) che viene utilizzato per il viaggio di ritorno.

1. *Individuare tutte le quadruple (u,v,w,N) che permettono di porre il problema in questo modo*
2. *Dividere una mandria tra quattro fratelli: per quali quintuple è possibile il medesimo giochetto?*
3. *Se ci troviamo con k fratelli, riuscite a definire per ogni k il valore massimo che potrebbe avere N per permettere la soluzione del problema?*

Ora i classici sono proprio classici, e non possono che creare dipendenza: quasi tutti quelli che hanno attaccato il problema lo hanno fatto a più riprese, tranne ***Gnugnu***, che ci ha inviato una risposta veloce:

Come diceva il saggio cominciamo dall'inizio e, visto che *N*+1 deve essere il *mcm* di tutti gli altri, riporto nella soluzione il suo valore *M*: l'ultimo numero che compare in ciascuna *n*-pla è il totale dei cammelli, incluso quello sdrucito del problemista. Con un solo erede c'è una sola soluzione (2,2). Con due ce ne sono tre (3,3,3) , (2,4,4) e (2,3,6) . Con tre fratelli ve ne sono dodici.

Poffarbacco! ***Gnugnu*** sta dando i numeri: dice che le soluzioni sono 12 e poi ne scrive 14. Beh! Senza voler aggiungere alcunché sulla verità dell'affermazione precedente, posso spiegare la contraddizione. Sono state riportate tutte le quaterne di naturali con somma dei loro reciproci uguale ad 1. Due di queste, la seconda e l'undicesima, non sono una soluzione al problema, perché l'ultimo numero (*M*) non è multiplo di tutti gli altri. Quelle buone sono contrassegnate con una "*C*" in quinta colonna. La presenza di una "*E*" indica che i numeri sono tutti distinti, cioè che le quaterne corrispondono ad una scomposizione di 1 come somma di frazioni egizie.

4	4	4	4	*C*
3	4	4	6	
3	3	6	6	*C*
3	3	4	12	*C*
2	6	6	6	*C*
2	5	5	10	*C*
2	4	8	8	*C*
2	4	6	12	*CE*
2	4	5	20	*CE*
2	3	12	12	*C*
2	3	10	15	*E*
2	3	9	18	*CE*
2	3	8	24	*CE*
2	3	7	42	*CE*

Quel bricconcello del GC chiede di esaminare anche il caso di quattro eredi e, da allievo secchione, ho affrontato, a rate e con tanta pazienza, la questione, aiutandomi con un foglio elettronico per controllare l'esattezza della somma dei reciproci.

Poi però, non avendo alcuna sicurezza sull'esito della disinfestazione, ho messo all'opera *Derive*, apprendendo che avevo dimenticato una sola soluzione cammellata, ma ben 34 appiedate.

Faicam(5) produce 147 cinquine di cui 97 (riportate nella tabella seguente, da leggersi per colonne) sono soluzione del problema con 4 fratelli.

[5,5,5,5,5],	[3,3,5,8,120],	[2,5,5,12,60],	[2,4,5,25,100],	[2,3,9,24,72],
[4,4,4,8,8],	[3,3,4,24,24],	[2,5,5,11,110],	[2,4,5,24,120],	[2,3,9,21,126],
[4,4,4,6,12],	[3,3,4,18,36],	[2,4,12,12,12],	[2,4,5,22,220],	[2,3,9,20,180],
[4,4,4,5,20],	[3,3,4,16,48],	[2,4,10,10,20],	[2,4,5,21,420],	[2,3,9,19,342],

[3,6,6,6,6],	[3,3,4,15,60],	[2,4,9,9,36],	[2,3,18,18,18],	[2,3,8,48,48],
[3,5,5,5,15],	[3,3,4,14,84],	[2,4,8,16,16],	[2,3,15,15,30],	[2,3,8,36,72],
[3,4,6,6,12],	[3,3,4,13,156],	[2,4,8,12,24],	[2,3,14,14,42],	[2,3,8,32,96],
[3,4,5,5,60],	[2,8,8,8,8],	[2,4,8,10,40],	[2,3,13,13,78],	[2,3,8,30,120],
[3,4,4,12,12],	[2,7,7,7,14],	[2,4,8,9,72],	[2,3,12,24,24],	[2,3,8,28,168],
[3,4,4,8,24],	[2,6,6,12,12],	[2,4,7,14,28],	[2,3,12,18,36],	[2,3,8,27,216],
[3,3,9,9,9],	[2,6,6,9,18],	[2,4,7,10,140],	[2,3,12,16,48],	[2,3,8,26,312],
[3,3,7,7,21],	[2,6,6,8,24],	[2,4,6,24,24],	[2,3,12,15,60],	[2,3,8,25,600],
[3,3,6,12,12],	[2,6,6,7,42],	[2,4,6,18,36],	[2,3,12,14,84],	[2,3,7,84,84],
[3,3,6,9,18],	[2,5,10,10,10],	[2,4,6,16,48],	[2,3,12,13,156],	[2,3,7,63,126],
[3,3,6,8,24],	[2,5,7,7,70],	[2,4,6,15,60],	[2,3,10,30,30],	[2,3,7,56,168],
[3,3,6,7,42],	[2,5,6,10,30],	[2,4,6,14,84],	[2,3,10,20,60],	[2,3,7,49,294],
[3,3,5,15,15],	[2,5,6,8,120],	[2,4,6,13,156],	[2,3,10,18,90],	[2,3,7,48,336],
[3,3,5,10,30],	[2,5,5,20,20],	[2,4,5,40,40],	[2,3,10,16,240],	[2,3,7,45,630],
[3,3,5,9,45],	[2,5,5,15,30],	[2,4,5,30,60],	[2,3,9,36,36],	[2,3,7,44,924],
			[2,3,9,27,54],	[2,3,7,43,1806]

Nel caso di 5 eredi risultano 3462 sestine, di cui 1568 buone.

Le due procedure, semplici ma per nulla ottimizzate rispetto alla durata dell'esecuzione, non consentono di ottenere ulteriori risultati in tempi ragionevoli.

```
Cammelli(n, p, s, v, i_):=
  Prog
  i_ := FLOOR(n/s)
  If n = 2
  Loop
  If NUMERATOR(s - 1/i_) = 1
  w := APPEND(w, [APPEND(v, [i_, DENOMINATOR(s - 1/i_)])])
  i_ :- 1
  If i_ < p exit
  Loop
  Cammelli(n - 1, i_, s - 1/i_, APPEND(v, [i_]))
  i_ :- 1
  If i_ < p OR s·i_ ≤ 1 exit
Faicam(n) :=
  Prog
  w := []
  j := n
  Loop
  Cammelli(n - 1, j, 1 - 1/j, [j])
  j :- 1
  If j < 2
  RETURN w
```

Con teutonica risolutezza la procedura *Cammelli* esamina tutti gli interi possibili per produrre n-ple formate con interi non decrescenti. Le n-ple sono invece generate in ordine decrescente. Particolarmente interessante è la successione dell'ultima n-pla al variare di n:

[2, 2], [2, 3, 6], [2, 3, 7, 42], [2, 3, 7, 43, 1806], [2, 3, 7, 43, 1807, 3263442], …

Per tutte e sole queste *n*-ple, *M* non è solo il *mcm* degli altri valori. Essendo questi sempre primi fra loro, *M* è il loro prodotto. Indicando con x_i i numeri precedenti l'ultimo otteniamo una relazione non priva di eleganza: $\sum_i \frac{1}{x_i} + \prod_i \frac{1}{x_i} = 1$. La somma dei reciproci uguale ad 1 viene ottenuta, avvicinandosi all'unità nella maniera più rapida possibile, scegliendo per denominatore sempre il successivo di quello che porterebbe a raggiungere esattamente 1. Con una paccata di disuguaglianze si può dimostrare che nessun'altra scelta potrebbe approssimare meglio (per difetto) l'unità con la stessa quantità di reciproci di interi.

Gli *M* corrispondenti: 2, 6, 42, 1806, 3263442, … rispondono alla seconda domanda, sono cioè il massimo numero di cammelli che possono essere suddivisi, rispettando le volontà testamentarie, fra gli *n* eredi, permettendo al problemista di recuperare il proprio mezzo di locomozione.

A parte il primo, ogni *M* si può pensare ottenuto dal precedente in base all'identità: $\frac{1}{M_i} = \frac{1}{M_i + 1} + \frac{1}{M_i(M_i + 1)}$. Il denominatore dell'ultima frazione sarà M_{i+1}, mentre la frazione precedente è la quota di eredità spettante al fratello aggiunto.

Sarà allora $N_n = M_n - 1 = 1,\ \ 5,\ \ 41,\ \ 1805,\ \ 3263441, \ldots$, valori che si possono ottenere ponendo: $N_1 = 1;\ N_{i+1} = (N_i + 1)^2 + N_i \quad \forall i > 0$. Credo che forme ricorsive di questo tipo corrispondano a termini approssimabili con potenze di base costante ed esponenti, quasi, in progressione geometrica di ragione 2.

Si capisce perché abbiamo incominciato con ***Gnugnu***? No, non è stato l'unico ad attaccare il problema cammelloso: ci sono anche ***Tartaruga***, ***Gabriel***, ***Mirhonf***, ***trentatre***, ***Sawdust*** e ***Camillo***. Di quest'ultimo riportiamo le considerazioni finali, ahimè piuttosto sconsolate:

Un Camillo che va a cammello scopre che per 3 fratelli vi sono 12 possibili divisioni tra gli eredi, con un valore massimo di 41 cammelli. Mentre per 4 eredi le possibili divisioni sono 97 con un valore massimo di 1805. Il povero Camillo a cui tocca fare tutte queste divisioni va a vedere cosa succede con 5 fratelli e dopo 1499 divisioni non ce la fa più ed abbandona, l'ultima delle quali recita che 64553 si dividono così: 2, 3, 7, 53 e 203. (...) Essendo il Camillo un emerito ignorante e non è in grado di scrivere una formula per quello sopra e tanto meno per la soluzione del valore massimo con *k* fratelli. Noto che i divisori si ripetono e ad ogni fratello aggiunto si inserisce un valore che è l'*N* precedente + 2:

*N*3=41, 2, 3, 7 per cui *N*3+1=42.

*N*4=1805, 2, 3, 7, 43. Guarda te che 42·43 =1806 che sarebbe *N*4+1.

Forse che 1806·1807=3263442 possa essere *N*5+1.

*N*5=3263441, 2, 3, 7, 43, 1807 verifico la cosa che combacia perfettamente. Ritengo quindi molto probabile che si possa proseguire così (lascio ai matematici l'onere di ricavarne la formula).

*N*6 sarebbe 10650056950806–1 un numero di 14 cifre.

*N*7 ha 27 cifre, N8 53, via via fino a 16 fratelli con un numero di cammelli lungo 13341 cifre, alla faccia del googol al quadrato di cammelli. Non sono andato oltre per farlo dovrei modificare il programma di calcolo; ma a chi serve?

Ma no ***Camillo***, potrebbe sempre servire. ***Mirhonf*** ci scrive:

<u>Prima domanda</u>: trovare tutte le quadruple *(u, v, w, N)* tali che (N+1) è multiplo di u, v, e w, mentre N non lo è.

Dobbiamo trovare $u=(N+1)/x_1$; $v=(N+1)/x_2$; $w=(N+1)/x_3$, interi, tali che $u+v+w=N$.

Se $x_1=2$, $x_2\neq 2$, in particolare deve essere $x_2>2$. Se $x_2=3$, poiché $\frac{N+1}{2}+\frac{N+1}{3}=\frac{5}{6}(N+1)$, deve essere $w=N-\frac{5}{6}(N+1)=\frac{N-5}{6}$. Ora ($N$+1) deve essere multiplo di w, quindi deve esistere un k tale che $kw=N+1$ cioè: $k\frac{N-5}{6}=N+1 \Rightarrow N=\frac{5k+6}{k-6}$.

Ora, la funzione a secondo membro è strettamente decrescente, per cui il massimo lo si avrà per k=7 (per k<7, N sarebbe negativo).

Per $k=7$, $N=41$, $N+1=42$, $u=42/2=21$, $v=42/3=14$, $w=(41–5)/6=6$.

Per $k=8$, $N=23$, $N+1=24$, $u=12$, $v=8$, $w=3$.

Per $k=9$, $N=17$, $N+1=18$, $u=9$, $v=6$, $w=2$.

Per $k=10$, $N=14$, $N+1=15$, ma u non sarebbe intero. Quindi per k=10 non ci sono soluzioni valide. Così per ogni k>9.

Se $x_1=2$, e $x_2=4$, poiché $\frac{N+1}{2}+\frac{N+1}{4}=\frac{3}{4}(N+1)$, deve essere $w=N-\frac{3}{4}(N+1)=\frac{N-3}{4}$. Analogamente a quanto visto sopra, $k\frac{N-3}{4}=N+1 \Rightarrow N=\frac{3k+4}{k-4}$. La funzione a secondo membro è strettamente decrescente con massimo in k=5.

Per $k=5$, $N=19$, $N+1=20$, $u=20/2=10$, $v=20/4=5$, $w=(19–3)/4=4$.

Per $k=6$, $N=11$, $N+1=12$, $u=6$, $v=3$, $w=2$.

Per k>6 non ci sono altre soluzioni valide.

Se $x_1=3$, e $x_2=3$, poiché $\frac{N+1}{3}+\frac{N+1}{3}=\frac{2}{3}(N+1)$, deve essere $w=N-\frac{2}{3}(N+1)=\frac{N-2}{3}$. Con lo stesso ragionamento di sopra, $k\frac{N-2}{3}=N+1 \Rightarrow N=\frac{2k+3}{k-3}$. La funzione a secondo membro è strettamente decrescente con massimo in k=4.

Per $k=4$, $N=11$, $N+1=12$, $u=12/3=4$, $v=12/3=4$, $w=(11–2)/3=3$.

Per k>4 non ci sono soluzioni valide.

Quindi tutte le soluzioni del problema sono le seguenti quadruple:

N	*N*+1	*u*	*v*	*w*
11	12	6	3	2
11	12	4	4	3
17	18	9	6	2
19	20	10	5	4
23	24	12	8	3
41	42	21	14	6

Seconda domanda:

Per quali quintuple è possibile lo stesso giochetto?

Dobbiamo trovare $u_1=(N+1)/x_1$; $u_2=(N+1)/x_2$; $u_3=(N+1)/x_3$, $u_4=(N+1)/x_4$ interi, tali che $u_1+u_2+u_3+u_4=N$.

Se $x_1=2$, $x_2=3$, x_3 deve essere maggiore di 6, perché $\frac{N+1}{2}+\frac{N+1}{3}+\frac{N+1}{6}=(N+1)\cdot$

Consideriamo $x_3=7$: $\frac{N+1}{2}+\frac{N+1}{3}+\frac{N+1}{7}=\frac{41}{42}(N+1)$. Risulta che $u_4=N-\frac{41}{42}(N+1)=\frac{N-41}{42}$.

Ora (N+1) deve essere multiplo di u_4 quindi deve esistere un k tale che $ku_4=N+1$ cioè: $k\frac{N-41}{42}=N+1\Rightarrow N=\frac{41k+42}{k-42}$.

Ora, la funzione a secondo membro è strettamente decrescente, per cui il massimo lo si avrà per k=43.

Per k=43, N=1.805, u_1=1.806/2=903, u_2=1.806/3=602, u_3= 1.806/7=258, u_4= (1.805–41)/42=42.

Per k=44, N=923, u_1=924/2=462, u_2=924/3=308, u_3= 924/7=132, u_4= (923–41)/42=21.

Per k=45, N=629, u_1=630/2=315, u_2=630/3=210, u_3= 630/7=90, u_4= (629–41)/42=14.

Per k>45, alcuni k portano a numeri non interi, altri k invece a soluzioni corrette, con N però sempre più piccolo (ad esempio per k=48 N=335, per k=56 N=167).

Se x_1=2, x_2=3, x_3=8, $\frac{N+1}{2}+\frac{N+1}{3}+\frac{N+1}{8}=\frac{23}{24}(N+1)$. $u_4=N-\frac{23}{24}(N+1)=\frac{N-23}{24}$.

Ora (N+1) deve essere multiplo di u_4 quindi deve esistere un k tale che $ku_4=N+1$ cioè: $k\frac{N-23}{24}=N+1\Rightarrow N=\frac{23k+24}{k-24}$. La funzione a secondo membro è strettamente decrescente, per cui il massimo lo si avrà per k=25.

Per k=25, N=599, u_1=600/2=300, u_2=600/3=200, u_3= 600/8=75, u_4= (599–23)/24=24.

Per k=26, N=311; per k=27, N=215; per k=28, N=167; per k>28 alcuni k portano a numeri non interi, altri k invece a soluzioni corrette, con N però sempre più piccolo (ad esempio per k=30 N=119, per k=32 N=95, ecc).

Se x_1=2, x_2=3, x_3=9, $\frac{N+1}{2}+\frac{N+1}{3}+\frac{N+1}{9}=\frac{17}{18}(N+1)$. $u_4=N-\frac{17}{18}(N+1)=\frac{N-17}{18}$

$$k\frac{N-17}{18}=N+1\Rightarrow N=\frac{17k+18}{k-18}$$

che assume valore massimo per k=19, N=341 (u_1=171, u_2=114, u_3=38, u_4=18). Per k crescente si ottengono i seguenti di N: 179, 125, 71, ecc.

Analogamente, se x_1=2, x_2=4, x_3=5, $\frac{N+1}{2}+\frac{N+1}{4}+\frac{N+1}{5}=\frac{19}{20}(N+1)$, $u_4=\frac{N-19}{20}$, $N=\frac{19k+20}{k-20}$; il massimo di N in questo caso è 419 (per k=21). Altri valori sono 219, 119, 99, 69, ecc.

Se x_1=3, x_2=3, x_3=4, $\frac{N+1}{3}+\frac{N+1}{3}+\frac{N+1}{4}=\frac{11}{12}(N+1)$, $u_4=\frac{N-11}{12}$, $N=\frac{11k+12}{k-12}$; il massimo N in questo caso è 155.

Quindi, anche per le quintuple si può fare lo stesso giochetto. Inoltre, si ottiene un N tanto più grande, quanto più la somma dei primi tre numeri $s=\frac{N+1}{x_1}+\frac{N+1}{x_2}+\frac{N+1}{x_3}$ si avvicina a N, cioè quanto più $S=\frac{n}{d}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$ tende a 1. Ma S non può mai diventare 1, quindi potrà essere al più $n=d-1$, con d che tende ad essere il più grande possibile.

In questo caso, diventa $u_4=N-\frac{d-1}{d}(N+1)=\frac{dN-dN-d+N+1}{d}=\frac{N-d+1}{d}=\frac{N-n}{d}$.

$k\frac{N-n}{d}=N+1\Rightarrow N=\frac{kn+d}{k-d}$ che per $k=d+1$ diventa $N=d^2+d-1$.

Lo stesso ragionamento può essere ripetuto per ogni k-pla.

Se k=3, $S=\frac{1}{2}$, max(N)=5.

Se k=4, $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$, max($N$)=41.

Se k=5, $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{41}{42}$, max($N$)=1805.

Se k=6, $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}=\frac{1805}{1806}$, max($N$)= 3263441.

Se k=7, $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1807}=\frac{3263441}{3263442}$, max($N$)= 10.650.056.950.805.

N	$U1=(N+1)/2$	$U2=(N+1)/3$	$U3=(N+1)/7$	$U4=(N+1)/43$	$U5=(N+1)/1807$	$U6=(N+1)/3263443$
10650056950805	5325028475403	3550018983602	1521436707258	247675743042	5893778058	3263442

Se k=8, max(N)= 113.423.713.055.421.844.361.000.441.

U_1= (N+1)/2= 56711856527710922180500221

U_2= (N+1)/3= 37807904351807281453666814

U_3= (N+1)/7= 16203387579345977765857206

U_4= (N+1)/43 = 2637760768730740566534894

U_5= (N+1)/1807 = 62769071973116681992806

U_6= (N+1)/3263443 = 34755843155655497694

U_7= (N+1)/ 10650056950807 = 10650056950806

Per k=9, max(N)=12864938683278671740537145998360961546653259485195805.

Il massimo N_k per ogni k, si ottiene ricorsivamente:

$N_k=(N_{k-1}+1)(N_{k-1}+2)-1=N_{k-1}^2+3N_{k-1}+1$, noto N_3=5.

Bene, se non siete ancora abbastanza spaventati, vediamo ancora cosa dice ***trentatre***:

Il problema canonico è dividere N cammelli fra 3 fratelli, in parti proporzionali a certe frazioni. Indichiamo con $(N;p_1,\, p_2,\ldots p_K)$ il problema con N cammelli iniziali, K fratelli e p_n le frazioni (cioè i denominatori). Esistono varie versioni del problema, in cui le parti sono sempre divisori di N+1 :

$(7;2,4,8)$, $(11;2,3,12\equiv 2,4,6)$ – 2 soluzioni equivalenti

$(17;2,3,9)$, $(19;2,4,5)$, $(23;2,3,8)$, $(41;2,3,7)$.

Alcuni di questi casi danno soluzioni anche per un numero K di fratelli > 3 p.es. per N = 23 si ha $(23;2,3,12,24\equiv 2,4,6,24\equiv 2,4,8,12)$ – 3 soluzioni con K=4 ma anche $(23;3,4,6,8,12)$ – una soluzione con K = 5

$(41;2,3,14,21,42)$ – K = 5.

Si dà anche il caso $(35;2,3,9)$ in cui viene prestato 1 cammello e ne restano 2.

Mi attengo al problema standard: le frazioni sono unitarie e diverse fra loro; viene prestato un cammello e ne resta uno. Valgono per definizione le

[1] i p_n sono divisori di (N+1) e si possono ordinare con

[2] $$2 \le p_1 < p_2 < \ldots p_K \le N+1$$

[3] $$\frac{N}{N+1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots \frac{1}{p_K} < 1.$$

Indichiamo con ***N***(K) l'insieme degli N che risolvono il problema K.

I numeri N che si possono suddividere in un numero K qualsiasi di divisori diversi di N+1 sono presenti in *OEIS* nella sequenza $\boldsymbol{A} \equiv$ *A085493* definita con "numeri n con partizioni in divisori di (n+1)". I primi valori sono

$$1,3,5,7,11,15,17,19,23,27,29,31,35,39,41,47,53,55,59,63,65,69,71,77,79,83,87,89,95,99\ .$$

La sequenza è interessante per due ragioni :

– ***A*** è l'unione di tutti gli insiemi ***N***(K): cioè tutti gli $N \in$ ***N***(K) appartengono ad ***A***, e inversamente ogni $N \in$ ***A*** appartiene a qualche ***N***(K);

– ***A*** è connessa (debolmente) ad un famoso problema: un numero è *perfetto* – secondo i pitagorici – se uguale alla somma dei suoi divisori propri (p.es. 6=1+2+3). Se N+1 è perfetto allora la somma dei divisori escluso 1 è uguale a N ; quindi $N \in$ ***A***, cioè ***A*** comprende tutti i numeri perfetti, diminuiti di 1.

La sequenza ***A*** *sembra* contenere solo dispari; se questo fosse vero in generale allora i numeri perfetti sarebbero tutti pari e non esisterebbero numeri perfetti dispari (e questo non è stato mai dimostrato).

Ma naturalmente non è così. Ogni $N \in$ ***N***(K) è certamente dispari se K è dispari (infatti se N pari, N+1 e tutti i suoi divisori sono dispari, la somma di un numero K dispari di essi è ancora dispari e non può essere N). Ma per K pari ***A*** contiene anche numeri pari – il primo è $(944;3,5,7,9,15,21,27,35,45,105)$ con K=10 divisori (ovviamente dispari).

Torniamo ai cammelli. Facendo lavorare il PC ho trovato

K= 2 (2 valori) N = 3, 5

K= 3 (6 valori) N = 7, 11, 17, 19, 23, 41

K= 4 (32 valori) N =15, 23, 27, 29, 35, 39, 47, 53, 59, 71, 83, 89, 95, 99, 119, 125, 139, 155, 167, 179, 215, 219, 239, 311, 335, 341, 419, 599, 629, 923, 1805

K= 5 : (? valori) N = 23, 29, 31, 35, 39, 41, 7, 55, 59, 65, …, 3263441.

Per K = 3, le 6 soluzioni citate all'inizio sono dunque le uniche possibili.

La semplice simulazione numerica è forse inelegante, se non scorretta, ma vedere come "ballano" i numeri (cioè i cammelli), può essere utile. Ho trovato gli stessi risultati (per K basso) con la seguente procedura algebrica, che filtra gli N senza controllarli tutti.

Per la [2] vale la $p_2 \ge p_1 + 1,\ p_3 \ge p_2 + 1 \ge p_1 + 2 \ldots$ da cui, con $x \equiv p_1$

[4] $$\frac{N}{N+1} \le \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \ldots + \frac{1}{x+K-1} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$ con P , Q : polinomi in x

I polinomi P, Q sono sempre positivi e si può scrivere $1/N \ge (Q-P)/Q$.

Se $Q \le P$ allora $x \equiv p_1$ è consentito per ogni N, se $Q > P$ allora $x \equiv p_1$ è consentito solo per $N \le Q/(Q-P)$.

Per ogni valore consentito di p_1 si imposta di nuovo la [4] con quel valore e si cerca p_2 ecc.

Alla fine si ha una relazione fra N e p_K di cui si cercano le soluzioni intere.

Riporto il procedimento per K=3. Con $x \equiv p_1$ si ha

$$\frac{N}{N+1} \le \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3x^2+6x+2}{x^3+3x^2+2x}$$

$\rightarrow\ Q(2) < P(2) \rightarrow x = 2$ per ogni N

$\rightarrow\ Q(3) > P(3) \rightarrow x = 3$ solo per $N \le 3$ (non ci sono soluzioni)

l'unico valore possibile è $x \equiv p_1 = 2$.

Con $x \equiv p_2$

$$\frac{N}{N+1} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2+5x+2}{2x^2+2x}$$

$\rightarrow\ Q(3) < P(3) \rightarrow x = 3$ per ogni N

$\rightarrow\ Q(4) > P(4) \rightarrow x = 4$ solo per $N \le 19$

$\rightarrow\ Q(5) > P(5) \rightarrow x = 5$ solo per $N \le 6$ (non si hanno soluzioni)

gli unici valori possibili sono $x \equiv p_2 = 3, 4$

(nb. i valori N devono essere divisibili per i p_k).

Caso $p_1 = 2$, $p_2 = 3 \rightarrow \dfrac{N}{N+1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{p_3} < 1 \rightarrow N = \dfrac{5p_3+6}{p_3-6}$ con $7 \le p_3 \le N+1$

uniche soluzioni intere (con N divisibile per i p_k) : : N = 41, 23, 17, 11 con p_3 = 7, 8, 9, 12.

Caso $p_1 = 2$, $p_2 = 4 \rightarrow \dfrac{N}{N+1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{p_3} < 1 \rightarrow N = \dfrac{3p_3+4}{p_3-4}$ con $5 \le p_3 \le N+1$

uniche soluzioni : N = 19, 11, 7 con p_3 = 5, 6, 8.

Il metodo fornisce per ogni N anche l'elenco delle frazioni.

Si hanno di nuovo per K = 3 esattamente i 6 casi già trovati, con la soluzione doppia N = 11.

Applicando lo stesso metodo a K = 4 ho ricavato (il processo è piuttosto laborioso) i 32 valori già elencati, con i casi multipli e le relative frazioni, che riporto in tabella.

N	frazioni				*N*	frazioni	
15	2,4,8,16				**139**	2,4,7,10	
23	2,4,6,24	2,4,8,12			**155**	2,3,12,13	2,4,6,13
27	2,4,7,14				**167**	2,3,7,56	2,3,8,28
29	2,5,6,10	2,3,10,30			**179**	2,3,9,20	
35	2,3,12,18	2,4,6,18			**215**	2,3,8,27	
39	2,4,5,40	2,4,8,10			**219**	2,4,5,22	
47	2,3,12,16	2,4,6,16			**239**	2,3,10,16	
53	2,3,9,27				**293**	2,3,7,49	
59	2,3,10,20	2,3,12,15	2,4,5,30	2,4,6,15	**311**	2,3,8,26	
71	2,3,8,36	2,3,9,24	2,4,8,9		**335**	2,3,7,48	
83	2,3,12,14	2,4,6,14			**341**	2,3,9,19	
89	2,3,10,18				**419**	2,4,5,21	
95	2,3,8,32				**599**	2,3,8,25	
99	2,4,5,25				**629**	2,3,7,45	
119	2,3,8,30	2,4,5,24	2,5,6,8		**923**	2,3,7,44	
125	2,3,7,63	2,3,9,21			**1805**	2,3,7,43	

Il *massimo* valore N_K della sequenza $N(K)$ si ottiene scegliendo gli N con il valore minimo di p_1, fra questi quelli con il valore minimo p_2, ecc.

Per N+1 pari il valore p_1 = 2 esiste sempre ed è il minimo; p_2 deve soddisfare a

$1/2+1/p_2<1\rightarrow$ valore minimo $p_2=3$ e (per la [3]) $N_2 = 5$

$1/2+1/3+1/p_3<1\rightarrow$ valore minimo $p_3=7$ e $N_3 = 41$ ecc.

Dati i primi K termini, p_{K+1} è il valore minimo che soddisfa

$$p_{K+1}>\frac{1}{1-(1/p_1+1/p_2+\ldots 1/p_K)}=N_K+1 \text{ da cui } p_{K+1}=N_K+2$$

e sempre dalla [3] $\frac{N_{K+1}}{N_{K+1}+1}=\frac{N_K}{N_K+1}+\frac{1}{p_{K+1}}=\frac{N_K}{N_K+1}+\frac{1}{N_K+2}=\frac{N_K{}^2+3N_K+1}{(N_K{}^2+3N_K+1)+1}$

cioè la formula di ricorrenza

[5] $N_1=1,\ N_{K+1}=N_K{}^2+3N_K+1$ equivalente alla

$p_1=2,\ p_{K+1}=p_K{}^2-p_K+1$.

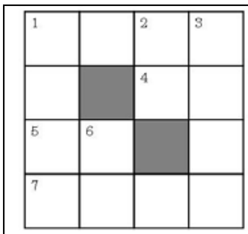
Le sequenze terminano quindi con i valori $N_K=5, 41, 1805, 3263441,\ldots$ già trovati.

Si può anche cercare il valore *minimo* $N°_K$ di ogni sequenza $\boldsymbol{N}(K)$ – cioè avendo K fratelli, la dimensione minima della mandria. $N°$ corrisponde al valore massimo di p_1, seguito dal massimo di p_2, ecc. ma non ho trovato una formula finita. Vale però che, per $K \geq 4$, $N°_K$ è sempre contenuto in $\boldsymbol{N}(K–1)$ e a volte i valori minimi sono uguali (la sequenza $N°$ è solo non decrescente). P.es. $N°_7 = N°_8 = 59$, $N°_{20} = N°_{21} = N°_{22} = N°_{23} = 719$ ecc. Il problema coinvolge la comparsa dello stesso N in diverse sequenze $\boldsymbol{N}(K)$, cioè la intersezione degli insiemi $\boldsymbol{N}(K)$ (p.es. $\boldsymbol{N}(3)\cap\boldsymbol{N}(4)=\{23\}$) ma qui andiamo nel difficile.

E con questo basta, con questo problema. Andiamo avanti.

4.3.2 Questo ve lo ambientate voi

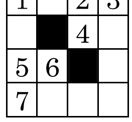
OK, questo problema era proprio facile. Si trattava di risolvere i Numeri Crociati che si vedono qui a lato con le definizioni qui sotto.



10 *Numeri Crociati*

Orizzontali	Verticali
1 Il cubo di un primo	1 Il quadrato di un primo
4 Quadrato	2 Il triplo della radice cubica dell'1 Orizzontale
5 Quadrato	3 Il quadrato di un primo
7 Cubo	6 Il doppio della radice cubica del 7 Orizzontale

La cosa triste è che tanti hanno inviato la soluzione, ma nessuno ha nemmeno tentato di inventarsi un'ambientazione. Comunque, delle tante soluzioni di ***Alberto R.***, ***Camillo***, ***Tartaruga***, ***Ant***, ***Mirhonf***, ***Gabriel***, ***Actarus***, ***Sawdust*** e ***Gnugnu***, ne pubblichiamo solo una, che ci perdonino tutti gli altri, si tratta di ***Mirhonf (Μιρηονφ)***:



1 orizzontale (cubo di un numero primo) e **2 verticale** (triplo della radice cubica dell'1 orizzontale) hanno una cifra in comune (la casella contrassegnata con il numero 2).

Il primo numero primo il cui cubo ha quattro cifre è 11, il cui cubo è 1331 e il cui triplo è 33; questi due valori si incastrano proprio bene:

4 orizzontale (un quadrato): l'unico quadrato di due cifre che comincia con 3 è 36.

1	3	3	1
	■	3	
5	6	■	
7			

3 verticale (quadrato di un numero primo): il quadrato, di quattro cifre, deve cominciare con 16; il primo numero primo il cui quadrato comincia con quelle cifre è 41, che al quadrato fa 1681.

1 verticale (quadrato di un numero primo): il primo numero primo il cui quadrato sia di quattro cifre e cominci per 1 è 37, il cui quadrato è 1369.

1	3	3	1
	■	3	6
5	6	■	8
7			1

5 orizzontale (un quadrato): poiché nella casella contrassegnata con il 5 c'è un 6, l'unico quadrato i due cifre che comincia con 6 è 64.

6 verticale (doppio della radice cubica del 7): nella casella contrassegnata con 6 c'è il numero 4; 40 diviso 2 al cubo comincia con 8; 42 diviso 2 al cubo fa 9261, che si incastra benissimo sia con il 6 verticale che con il 3 verticale.

1	3	3	1
3	■	3	6
6	4	■	8
9			1

Trovata questa soluzione, mi chiedo: è unica?

Ragiono a partire dall'1 orizzontale. Dopo l'11, c'è il 13, ma al cubo fa 2.197, la cui terza cifra è avrebbe dovuto essere 3, perché al 2 verticale ci sarebbe dovuto essere 3x13=39. Quindi il 13 non va bene e, per lo stesso motivo neanche il 17.

1	3	3	1
3	■	3	6
6	4	■	8
9	2	6	1

Considerando il 19, al cubo fa 6.859 che si incastra bene con 3x19=57; però il 4 orizzontale deve essere un quadrato, e nessun quadrato di due cifre comincia per 7. Quindi il 19 non va bene.

Il numero primo successivo è 23 il cui cubo è però formato da 5 cifre e quindi non va bene.

Poiché non ci sono altre possibilità, la soluzione trovata sopra è unica.

E qui ci fermiamo. Buona primavera, buon aprile e buon lavoro con i nuovi problemi del mese. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Rudy: "È pronto il caffè!"

Paola: "Lo prendo tra cinque minuti! Non aggiungere il latte freddo! Lo aggiungo poi io, così resta più caldo!"

Secondo voi, ha ragione?

6. Pagina 46

Per quanto riguarda la ***prima parte***, se indichiamo i quattro numeri come n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, aggiungendo 1 al loro prodotto otteniamo:

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= [n(n+3)][(n+1)(n+2)]+1 \\ &= (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 \\ &= (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1 \\ &= (n^2+3n+1)^2. \end{aligned}$$

Per la ***seconda parte***, mostriamo che l'insieme in oggetto può contenere al più quattro valori distinti.

Supponiamo vero il contrario, ossia che esistano *cinque* interi a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 distinti tra loro, e sia $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$.

Consideriamo i primi quattro tra questi, a_1, a_2, a_3, a_4: dalle condizioni del problema è possibile formare una proporzione tra questi quattro interi, e quindi il prodotto dei termini medi deve essere uguale al prodotto degli estremi; questo però è possibile solo se[14]:

$$a_1 a_4 = a_2 a_3.$$

Ora consideriamo gli interi a_1, a_2, a_3, a_5: attraverso un ragionamento sostanzialmente identico a quello visto sopra, si ricava la condizione:

$$a_1 a_5 = a_2 a_3.$$

Questo porta alla condizione:

$$a_1 a_4 = a_1 a_5 \Rightarrow a_1 = a_5,$$

Che è una contraddizione, in quanto $a_1 \neq a_5$ per ipotesi: quindi, non possono esistere cinque valori distinti nell'insieme dato.

[14] Il caso $a_1 a_3 = a_2 a_4$ è impossibile in quanto $a_1 < a_2$ e $a_3 < a_4$; per ragioni simili, è impossibile anche il caso $a_1 a_2 = a_3 a_4$.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 La vita, l'universo e tutto quanto: [2] – L'universo e il resto

Sull'universo non c'è molto da dire.
Martin Gardner

A meno di scendere nei dettagli.
Rudy d'Alembert

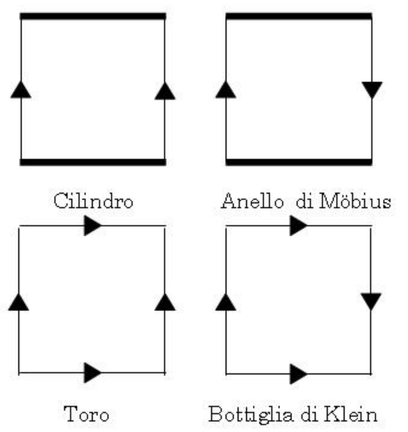
Più che i dettagli, le condizioni al contorno (ma non mi stava la frase).

Su "Vita" di Conway l'altra volta non vi abbiamo detto una cosa: il piano sul quale fate riprodurre le vostre cellule è come ogni piano che si rispetti, *infinito*. E il concetto di infinito, oltre che con il senso comune, fa a pugni anche con qualsiasi sano principio di programmazione.

Insomma, bisogna decidere *come è fatto* il nostro universo, e qui esiste un modo per descriverlo che allo scrivente (Rudy) è sempre piaciuto molto, anche se non è mai riuscito a scoprire chi lo abbia inventato (principali sospettati i due "prezzemoli", Eulero e Gauss: ma solo perché hanno fatto tutto loro, non per ragioni specifiche).

Allora, per costruire il vostro universo:

1. Chiedete a un fisico un foglio di gomma infinitamente sottile e infinitamente deformabile[15]
2. Seguite una delle quattro istruzioni a scelta della figura a fianco.



11 *Costruttori di Universi!*

Tranquilli, vi spieghiamo come funzionano: si tratta di incurvare il foglio e di far coincidere i lati opposti in modo tale che le frecce di questi lati indichino lo stesso verso (se non ci sono frecce, lasciate i lati svolazzanti): se la cosa sembra poco chiara, partite dal cilindro che è banale. Se passate all'anello di Möbius, vi accorgete che dovete "dare un (mezzo) giro" per riuscire a far coincidere le frecce: il che è esattamente quello che dovete fare con un foglio di carta per ottenere l'anello.

Fin dalla più tenera età[16] questi disegni mi hanno lasciato piuttosto perplesso, e sono dovuti arrivare i primi *arcade games* per capire a cosa servissero. Me lo ha chiarito un articolo su un giornale di informatica che spiegava come progettare un videogioco, con queste parole: "prendete un mondo, per semplicità toroidale...". Come sarebbe a dire, "per semplicità toroidale"?

Supponete di dover disegnare l'universo di un videogioco, limitato evidentemente dalle dimensioni dello schermo, ma "infinito", nel senso che se una cosa sparisce da una parte, riappare dall'altra: come lo realizzate, se volete semplificare al massimo i calcoli?

[15] Ne sono fornitissimi, soprattutto quelli del primo anno: non esiste lo scritto di Fisica I, senza di essi.

[16] Quasi. Aneddoto? Aneddoto. In terza liceo (scientifico) me la cavavo ragionevolmente bene con le derivate (grazie, papà!), ma ero un asino già solo con la terza declinazione: una ragazza di quinta (pagata molto poco e in nero, possiamo dirlo, è caduto in prescrizione), appurato che era inutile spiegarmi latino, preferiva parlarmi di matematica e mi ha spiegato la cosa (IMHO) più bella di tutta la matematica delle superiori e, appurato che stavo leggendo il "Courant & Robbins", mi ha spiegato anche cosa cavolo significavano quei disegni. *[Nota alla nota: la "cosa più bella" della matematica del liceo è lo studio di funzioni. Ancora adesso mi ci appassiono]*. Nota alla nota alla nota: lei è finita alla Normale; grazie, Daniela!

Due minuti di pensata (se siete lenti come me) vi portano alla risposta "Azzero la coordinata che sfora e tengo la stessa coordinata per l'altra". Bene, adesso prendete le frecce del disegnino in basso a sinistra come direzione delle coordinate, e vi accorgete che funziona esattamente come il vostro videogioco: e se prendete il modello e lo arrotolate, ottenete giustappunto un toro. Ecco perché è semplice un mondo toroidale!

Date le possibilità di calcolo dei microprocessori odierni, come compito a casa vi lasciamo quello di progettare il *primo videogioco su una Bottiglia di Klein*, ma vogliamo il nome tra i *contributors*.

A questo punto, dovrebbero sorgere spontanee un paio di domande:

1. "Rudy, e se io voglio fare un gioco su un mondo sferico?"

Qui, secondo me, siete nelle grane: direi che il sistema non funziona, visto che dovete chiudere l'intera superficie su un unico punto (quello agli antipodi del centro del quadrato, per intenderci); l'unico consiglio che posso darvi è quello di andarvi a rivedere il PM di RM_083 (Dicembre 2005, "Era meglio se era piatta"), dove parlavamo del *Theorema Egregium* di Gauss.

2. "Direi che sono possibili altri casi, di mescolamento delle frecce"

Vero, ma quelle ve le provate voi. Dovrebbe esserci il piano proiettivo da quelle parti, ma non garantisco.

Bene, finito di parlare dell'universo. Visto, che ce la siamo cavata con poco?

Adesso torniamo a Mirek's Cellebrations[17].

L'aggeggio con il quale abbiamo giocato sinora è chiaramente *bidimensionale*; fermo restando che i casi n-dimensionali per n>2 ve li smazzate voi, il "resto" del titolo che vorremmo esaminare (in modo molto teorico) è il caso n=1. Qui, per fortuna, non si è partiti in quarta a fare disegnini ma è stato fatto un po' di lavoro teorico dietro.

Per prima cosa, definiamo l'universo: partite dalla prima riga, con un po' di cellule (inserite casualmente, ad esempio), e poi applicate la "Regola" di costruzione del grafico; ottenuta la nuova riga, ricominciate.

Qui, per quanto riguarda l'universo, le cose sono più semplici che con gli automi cellulari bidimensionali: o giocate sul quadrato, o giocate sul cilindro o sul toro: l'Anello di Möbius e la Bottiglia di Klein ci sembrano decisamente sconsigliabili.

Buona notizia: esiste un modo standard per definire le regole. Cattiva notizia: secondo noi l'ultimo passaggio è una complicazione inutile (anzi dannosa), quindi vorremmo saltarlo.

"Ti decidi a spiegarci come funziona la Regola?"

Molto semplice: per prima cosa, decidete come *interagiscono* le varie possibili strutture cellulari, ossia, decidete cosa generano nel punto centrale rispetto alla struttura della prossima riga. Se ad esempio avete una cella, un vuoto, una cella (lavoriamo con il caso di strutture a tre elementi, ma nulla vieta che siano di più), decidete se questa struttura genera una cella o un vuoto. E fatelo per tutte le strutture possibili, raccogliendo il tutto in una tabellina: una cosa del tipo di quella che vi forniamo in figura. In pratica, per qualsiasi configurazione incontriate (riga superiore), sapete cosa scrivere nell'equivalente casella

111	**110**	**101**	**100**	**011**	**010**	**001**	**000**
0	0	1	0	0	1	0	0

12 *La Regola 36, ma noi la chiamiamo Regola 24*

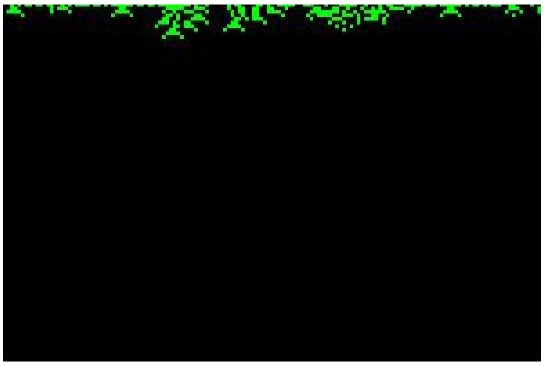
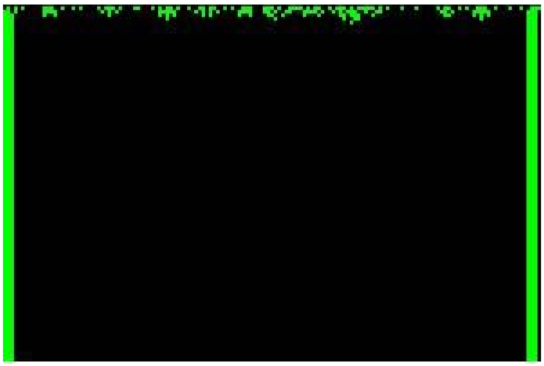
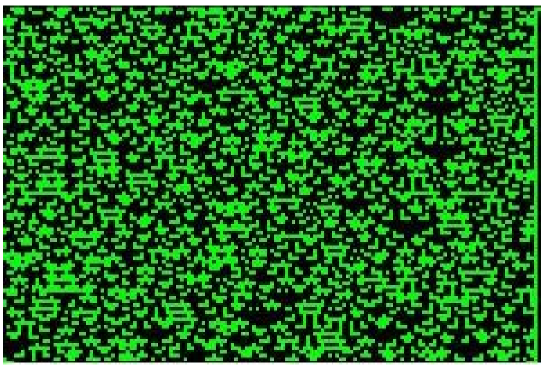
[17] Forti delle nostre nuove conoscenze sull'universo, mettiamo una nota a tutto il lavoro precedente e successivo. Attenzione, che MC decide un po' lui in che mondo vivere, e la cosa sovente causa complicazioni: controllate i settaggi in merito.

centrale rispetto alla configurazione della riga successiva, quindi potete partire e far girare l'automa.

"...e se ho più di tre cellule che devono interagire?" Procuratevi un foglio più largo per scrivere la tabella, semplice.

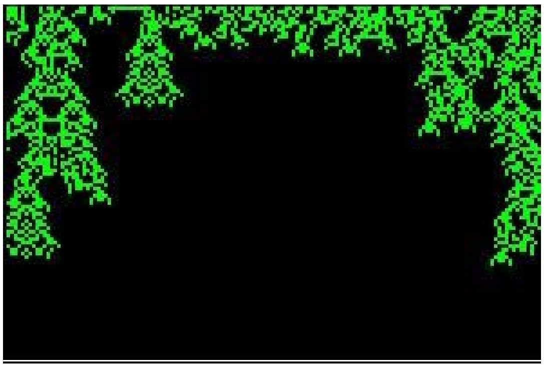
Grande, a questo punto, grande è la tentazione di leggere la seconda riga come un numero binario, vista la regolarità della prima riga: e infatti è esattamente quello che si fa: il numero della "Regola" non è altro che la trasformazione in base 10 del numero che avete nella seconda riga, da cui il nome di "Regola 36"[18]. Nel caso vi chiediate chi è il genio che ha inventato una cosa così semplice per descrivere un sistema così complesso, sappiate che si tratta di ***Stephen Wolfram***.

Non solo, ma il Nostro ha anche stabilito una (passateci il termine) "Tassonomia degli Automi", in funzione del loro comportamento: proviamo a metterle in una tabellona, per chiarirci i concetti.

Gli automi di ***Classe I*** portano a uno stato omogeneo. L'esempio è la ***Regola*** ***24_{16}***.	
Gli automi di ***Classe II*** portano a strutture semplici o periodiche. L'esempio è la ***Regola*** ***28_{16}***.	
Gli automi di ***Classe III*** portano a delle strutture caotiche. L'esempio è la ***Regola*** ***12_{16}***.	

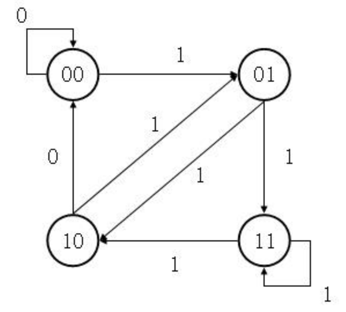
[18] Vi abbiamo detto che l'ultimo passaggio non ci piace: da anziani e pigri smanettoni informatici, dovendo tradurre un binario in un'altra base per portarcelo dietro più facilmente, preferiamo ampiamente l'esadecimale: da cui, la Regola 36 per noi diventa la Regola 24_{16} (facciamo i bravi e vi mettiamo i pedici, contenti?).

Gli automi di ***Classe IV*** portano a delle strutture complesse globali sull'universo. L'esempio è la ***Regola 14$_{16}$***



Restiamo, per avere un esempio concreto, sugli automi che considerano solo tre valori della prima riga per calcolare il valore nella seconda riga. È evidente che se dovete calcolare il valore della quinta cella della seconda riga, nel nostro caso prendete il valore della quarta, della quinta e della sesta cella della prima riga; la sesta cella della seconda riga la calcolare prendendo i valori della quinta, sesta e settima cella della prima riga, e avanti così; insomma, ci sono delle "sovrapposizioni" e ogni cella la utilizzate in tre calcoli diversi; questo, da visualizzare, rischia di non essere facilissimo.

Per fortuna, esiste un oggetto in grado di fare tutto questo: lo tratteremo prima in modo piuttosto informale (anzi, in un caso estremamente particolare), ma vi diciamo subito che se qualcuno vuole scriverci un PM trattando l'argomento in modo generale, ben venga. Prendiamo l'aggeggio della figura a fianco, e cerchiamo di lavorarci sopra.



13 *Cosa strana*

Tanto per cominciare, il grafo è ***incompleto***: sono uniti tra di loro solo i nodi che hanno in comune il carattere finale per il nodo di origine e il carattere iniziale per il nodo di fine: ad esempio, "10" è unito a "01" e a "00", visto che lo "0" finale del primo è carattere iniziale del secondo e del terzo; o, per dirla meglio, le differenze tra il nodo di inizio e il nodo di fine sono il ***primo carattere del primo*** e l'***ultimo carattere*** del secondo; inoltre, su ogni arco c'è un valore "0" o "1". E qui, vediamo un comportamento che è identico a quello del nostro calcolo sugli automi: facciamo il conto per tre celle (quarta-quinta-sesta), scriviamo il risultato (una cella sola), buttiamo via il valore della prima cella (la quarta) e ne prendiamo una nuova (la settima) mettendola sulla destra.

Esempio? Esempio. Vi ritrovate con la sequenza "1011100": avete due celle "10", quindi siete nell'angolo in basso a sinistra; la cella successiva è un "1", e da in basso a sinistra l'unico oggetto raggiungibile con un "1" alla fine è l'angolo in alto a destra; sull'arco vedete un "1", quindi sotto lo "0" del gruppo "101" scrivete "1"[19]. A questo punto, buttate il primo "1", ritrovandovi con "01" (che è il contenuto dell'angolo in alto a destra: bene, stiamo facendo i conti giusti) e prendete il carattere successivo, che vi porta alla sequenza "011", e quindi all'angolo in basso a destra, generando un "1" (che va scritto sotto il primo "1" di "001")... e avanti in questo modo. In pratica vi muovete lungo il grafo, lasciando ogni volta il carattere sulla sinistra, aggiungendone uno sulla destra e scrivendo (sulla seconda riga) il carattere associato all'arco. Semplice vero? Ormai dovreste essere abbastanza scafati da riuscire a ricostruire la tabella di Wolfram del nostro aggeggio; siccome non lo farete mai vi diciamo che si tratta della ***Regola 6E$_{16}$***, che qualcuno preferisce chiamare Regola 110 (visto che non l'avete calcolata, ve la generate voi).

La generalizzazione, a questo punto, è ragionevolmente semplice, quindi ve ne diamo la definizione formale, partendo da zero.

[19] Sorvoliamo su quale valore abbiate scritto sotto il primo "1": dipende dalla struttura dell'universo.

Un ***grafo diretto*** è formato da un insieme finito V di ***vertici*** o ***nodi*** e da un altro insieme finito E di ***archi***. Le funzioni $t: E \to V$ e $h: E \to V$ forniscono la ***coda*** $t(e)$ e la ***testa*** $h(e)$ di un arco $e \in E$, e se $t(e) = h(e)$ l'arco è detto ***anello***. Un ***cammino*** è una sequenza $e_1 e_2 \ldots e_k$ per cui $h(e_i) = t(e_{i+1})$ per ogni $i = 1,2,\ldots k$. Un grafo è ***etichettato*** se esiste una funzione $l: E \to \Sigma$ in grado di associare a ogni arco un simbolo da un insieme finito Σ di etichette; l'etichetta di un cammino è data dalla sequenze di etichette degli archi che lo compongono.

Siano $m \in N$ e S un insieme finito. il ***Grafo di deBruijn*** di larghezza m sull'alfabeto S è il grafo diretto per cui:

$$
\begin{aligned}
&V = S^{m-1},\\
&E = S^m,\\
&t(s_1, s_2, \ldots s_m) = s_1 s_2 \ldots s_{m-1},\\
&h(s_1, s_2, \ldots s_m) = s_2 s_3 \ldots s_m.
\end{aligned}
$$

In altre parole, esiste sempre un arco tra il nodo su e il nodo ut per qualsiasi $s,t \in S, u \in S^{m-2}$.

Vi siete accorti, che l'ultima parte significa esattamente "butta il primo simbolo, tieni il resto, aggiungi dietro un altro simbolo?

Rudy è convinto che i Grafi di deBruijn siano una parte ingiustamente poco considerata della matematica (quantomeno quella ricreativa) e, visto che è riuscito ad introdurli, ha intenzione in futuro di parlarne ancora[20].

Quindi, per adesso non vi dice più niente.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[20] In realtà, anche se nessuno se ne è accorto, avreste potuto tirarli in ballo con un vecchio problema... No, non vi diciamo quale. Poi, forse, quando ne riparleremo.