Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 158 – Marzo 2012 – Anno Quattordicesimo

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell’altro millennio da
Rudy d’Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM157 ha diffuso 2’875 copie e il 01/03/2012 per Google eravamo in 18’000 pagine.

C’è dietro una storia, anzi due: tanto per cominciare, lo scorso numero di RM era il 50π. L’anno scorso, il 14 marzo, non siamo riusciti a fare il nostro abituale tour matematico mattutino in Internet. E quindi l’abbiamo scoperta il 16. E quindi l’abbiamo accuratamente conservata per quest’anno. Golosi come siamo, comprendiamo benissimo la scritta “choking hazard”, che per noi dovrebbe comparire su ogni torta. Ci lascia però perplessi la misura: come sarebbe a dire, 8” *x* 8”. 81 *pieces*? Non si era detto che la quadratura...

1. Simboli e capitomboli (in moto browniano)

«La recherche d'une formule qui l'exprime
ne parait pas jusqu'à ce jour avoir
été publiée; elle sera l'objet de ce travail[1]*.»*
(Introduzione della Tesi di Laurea
"Théorie de la Spéculation", 29 Marzo 1900)

Due tra le più belle etimologie della lingua italiana[2] appartengono a parole che si ritrovano spesso accoppiate. Lo si vede certo in tutti gli stadi, quando entrano in campo i colori della squadra del cuore e le curve urlano la loro felicità; o mentre si assiste compunti ad una cerimonia d'alzabandiera; ma anche, più banalmente, quando si riconosce la marca preferita di biscotti sugli scaffali, o quando si legge la targa di una vettura della propria città quando ci si trova distanti da essa.

Ci sono segni speciali, il mondo ne è pieno: segni che non sono solo parole o immagini, ma precise dichiarazioni di identità, di appartenenza. E questi segni sono pertanto un'affermazione (quando non, più tragicamente, addirittura un'imposizione) e intendono proprio raccogliere intorno a loro tutti coloro che in quel segno ritrovano parte di sé stessi. Per dirla più brevemente e con le parole giuste, i simboli servono a suscitare entusiasmi.

La parola "entusiasmo" ha un'etimologia così diretta e pregnante che sembra quasi impossibile trovare una descrizione migliore del concetto di quanto già espresso dal suo remoto significato etimologico. Viene infatti[3] da "*en-theos*", che si può tradurre come "avere un dio dentro", "essere pieno di un dio". In effetti, lo stato di autentico entusiasmo è davvero particolare, fuori standard, eccezionale: raccoglie tutte le emozioni a disposizione e le convoglia verso un unico obiettivo, moltiplicando così il potenziale del soggetto, che sembra affetto da una transitoria e fattiva follia. La quasi totalità delle grandi conquiste dell'uomo sono state rese possibili da qualche forma di entusiasmo, che – abbastanza curiosamente – è in qualche maniera associato alla "passione[4]" che è un'altra parola intensa e duplice, perché porta con sé sia il significato diretto di "sentire" che quello traslato di "soffrire", quasi a ricordare che il sentire supremo si sperimenta quando si sente dolore.

Gli entusiasmi sono quasi sempre sensazioni sociali, condivisibili, connotate proprio dal principio di molteplicità, mentre le passioni sono spesso relegate in un contesto più individuale e privato. Ed è forse per questo che, mentre le passioni non hanno quasi mai bisogno di segni particolari per esprimersi e riassumersi, gli entusiasmi si condividono meglio per mezzo di segnali che si possono scambiare, passare l'un l'altro, in una sorta di grammatica elementare e direttissima: i simboli, appunto.

L'etimologia di simbolo è forse meno evocativa, ma non meno sorprendente: discende dal verbo greco "συνβαλλω"("*sunballo*") che significa "metto insieme". E in questo caso il significato antico stupisce, perché ricorda un'azione pragmatica, fisica, che però col passare del tempo ha acquisito un significato parimenti calzante anche nel suo senso

[1] "*La ricerca di una formula che la esprima non sembra sia ancora stata pubblicata: questa sarà l'oggetto di questo lavoro*". La parte più importante della citazione è probabilmente la data.

[2] Ma non solo di quella italiana, visto che entrambe le parole sono costruite su radici greche: e la Grecia, con buona pace delle disavventure finanziarie dei tempi nostri, è genitrice linguistica e culturale di tutta l'Europa.

[3] Come spesso accade, la radice etimologica non è sicura: ma in questo caso è molto probabile, non solo poetica.

[4] "*Nel mondo nulla di grande è stato fatto senza la passione*". La frase è stata di recente usata come slogan in qualche annuncio pubblicitario, ma a dirla è stato Hegel.

traslato. L'azione che il verbo greco descrive sembra infatti discendere dal metodo di riconoscimento della "*tessera hospitalitatis*", ovvero di quell'oggetto che veniva inizialmente diviso in due parti e dato a persone diverse, perché potessero riconoscersi e aiutarsi vicendevolmente. Queste, incontrandosi, potevano garantire l'uno all'altro la propria identità mostrando la propria metà della *tessera*: se le due parti combaciavano, il riconoscimento era assicurato. Il "mettere insieme" consisteva quindi proprio nell'atto di far combaciare le due parti, e il "simbolo" era quindi l'oggetto prima diviso e poi ricostituito, "rimesso insieme", appunto.

1 *Tessera Hospitalitatis Celtibera (in caratteri greci) – Museo Archeologico Regionale di Madrid*

Era quindi evidentemente un segno di riconoscimento, e col tempo è diventato un simbolo qualsiasi cosa riassumesse in sé un significato preciso e identitario. Ed è davvero curioso che quell'etimologia antica si sia rivelata così generosa e densa di significato: un simbolo, in fondo, serve sia a "mettere insieme" tutte le cose che hanno in comune coloro che vi si riconoscono, sia, allo stesso tempo, proprio ad unire, a "mettere insieme" tutti i suoi seguaci, come fa una bandiera che sventola mentre tutto un popolo canta il suo inno nazionale.

Proprio per la sua caratteristica di "segno di riconoscimento", praticamente ogni cosa può essere eletta a simbolo: le bandiere sono spesso abitate da immagini di animali o disegni geometrici, zeppe di stelle, ma possono anche contentarsi di colori. La religione più diffusa nelle nostre latitudini si riconosce nell'icona di un atroce supplizio dell'antica Roma, a memoria della tragedia vissuta dal suo fondatore; e si può andare avanti davvero all'infinito, perché forse esistono più possibilità di simboleggiare cose e concetti di quanti siano le cose e i concetti stessi. Abbastanza curiosamente, però, i simboli sono quasi sempre "statici": proprio per la loro caratteristica di simboleggiare in via astratta qualcosa che può anche non avere una relazione diretta con l'immagine del simbolo stesso, è assai difficile che si preoccupino di mostrare un'azione in divenire. Alcuni hanno certo bisogno d'una lettura: la bandiera degli Stati Uniti d'America ha una sua certa complessità, ad esempio, le cinquanta stelle rappresentano i cinquanta stati della federazione, le strisce orizzontali bianche e rosse sono tredici per ricordare le prime tredici colonie del New England, e così via. Il tricolore italiano ha un indice di complessità sicuramente inferiore, anche se un tempo, almeno alle elementari, si insegnava ai bambini che ogni colore rappresentava qualche nobile caratteristica della patria. Di solito i simboli riassumono o ricordano un elemento fondante del concetto che intendono rappresentare, ma proprio per questo non hanno bisogno d'altro che, al più, un'immagine ferma e spesso stilizzata.

Esistono però delle eccezioni: una delle ragioni che segnano la profonda distanza tra l'uomo della strada e il mondo della finanza sta probabilmente nel fatto che, nella vita di tutti i giorni, si tende ad avere una visione tutto sommato statica dei valori: una strada ha una certa lunghezza, una città un determinato numero di abitanti, un bene ha un certo prezzo. Naturalmente, anche in questa visione ingenua si sa bene che le strade si fanno e si disfano, che gli abitanti d'una città crescono e diminuiscono, e soprattutto che i beni hanno una dannata predisposizione all'aumento, ma l'approccio fondamentale permane quello della misurazione statica, fissa. Nell'economia capitalistica, invece, più che i valori assoluti contano le tendenze: è più importante capire come varia il prezzo d'un bene o di un servizio che il suo valore di listino. A volerla mettere in termini matematici, l'occhio degli economisti si punta assai più sulla derivata della funzione "valore" che sulla funzione stessa.

È evidente che anche queste osservazioni sono in realtà del tutto ingenue: nel mondo mobilissimo dell'economia persino la derivata prima d'una funzione è una grandezza troppo lenta e poco indicativa. Non molto tempo fa si arrivò a citare perfino nelle cronache dei giornali non specializzati la "derivata seconda" che aveva rallegrato l'allora Ministro dell'Economia; tanta era l'attesa di un cedimento della crisi economica in atto che si celebrò con soddisfazione non la crescita dell'economia nazionale e neppure la cessazione della decrescita, ma solo il fatto che si continuava a peggiorare, ma in maniera un po' meno tragicamente di prima[5]. Ed è proprio per questa attenzione alle "variazioni" che nel linguaggio di borsa che si ritrovano due animali a simboleggiare l'andamento azionario. A Wall Street come a Piazza Affari, le bestie che più spesso vengono ricordate non sono quelle che, al pari di ogni altro bene materiale del pianeta, vengono rapidissimamente scambiate sui mercati specializzati, ma due grossi mammiferi che a prima vista non si capisce per quale ragione dovrebbero essere accomunati: l'Orso e il Toro. Quando regna l'Orso, nelle borse, si vedono in giro musi lunghi e preoccupati, perché il plantigrado è il simbolo del Ribasso: gli indici rallentano, e i broker (non tutti, certo, per alcuni anche il Ribasso è una manna) aspettano che torni a farsi vedere il Toro, dacché il muscoloso ruminante rappresenta l'atteso Rialzo.


2 *Orso e Toro in lotta, con Borsa sullo sfondo*

La ragione per la quale sono proprio questi due gli animali eletti a simbolo degli andamenti di borsa sta tutta nel modo caratteristico che hanno di attaccare i nemici: l'Orso, quando deve venire alle mani, si rizza sulle zampe posteriori, alza quelle anteriori e si avventa sulla preda smanacciando dall'alto verso il basso. Al contrario il Toro punta il muso e le corna appuntite verso il basso, corre verso il bersaglio e gli sferra la tremenda cornata scagliandolo in aria, con un movimento di carica che va quindi dal basso verso l'alto. Da su a giù, l'Orso; da giù a su il Toro. Simboli dinamici, per una volta[6].

Il rapporto tra Matematica ed Economia è sempre stato tanto scontato quanto conflittuale. Nel senso più immediato e ingenuo, la matematica è vista come linguaggio essenziale e strumento naturale dell'economia: in fondo, gli elementi fondamentali dell'educazione erano un tempo riassunti nel trittico "leggere, scrivere e far di conto", e in quel "far di conto" si riepilogava praticamente tutta la missione della matematica: i conti che si facevano erano naturalmente conteggi monetari, somme e sottrazioni di quattrini, calcoli di spese, di incassi e di guadagni. Ancora fino a pochi anni fa, nell'Italia semirurale del Novecento, l'unica professione che nell'immaginario collettivo doveva aver a che fare con i numeri era quella del ragioniere; gli ingegneri costruivano ponti e navi, i geometri le case, e i ragionieri erano forti in matematica. I matematici e i fisici, semplicemente, non erano considerate professioni, ma al più qualifiche buone per le didascalie sotto il nome dei tizi ai quali venivano intestate alcune vie cittadine[7].

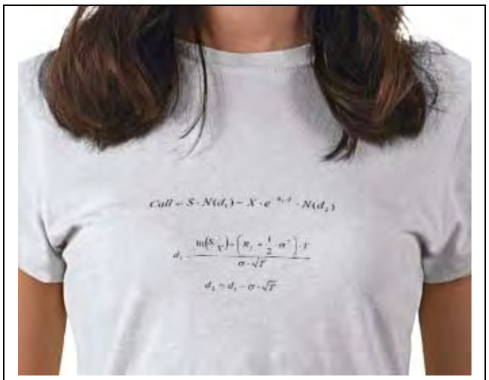
Ciò non di meno, tra gli addetti ai lavori delle due discipline la separazione di intenti e di interessi è abbastanza palese; e perfino caratterizzata da una sorta di asimmetria. La gran parte dei matematici professionisti ha scarsissimo interesse verso i terremoti di

[5] "*Penso che metterò sul comodino l'immagine di Santa Derivata Seconda*". Il ministro Giulio Tremonti ai giornalisti, 21 Maggio 2009.

[6] Anche in questo caso, esistono teorie diverse sull'origine del simbolismo Orso-Toro; alcuni sostengono che tutto sia dipeso dalle strategie di vendita dei cacciatori di pelli d'orso, altri da una barbara abitudine in voga nell'Inghilterra del XVI secolo che vedeva orsi e tori fatti combattere per divertimento.

[7] Non che le cose al giorno d'oggi siano poi cambiate in maniera profonda: siamo pronti a scommettere che se un istituto demoscopico facesse un sondaggio chiedendo quale sia lo strumento di lavoro degli astrologi, una buona parte degli intervistati risponderebbe "il telescopio".

borsa e la gestione della spesa pubblica, anche se molti non disdegnano la possibilità di rimediare un lavoro fisso ben retribuito in aziende che proprio a certi argomenti sono interessate; dall'altro lato, gli economisti sembrano ragionevolmente attenti alle evoluzioni delle teorie matematiche, nella speranza di poter trovare, tra le pieghe di qualche nuovo teorema o metodologia, nuove maniere per trattare quelle spinose ed irrequiete variabili che sono i soldi. È indubbio che le grandi istituzioni economiche di tutto il mondo tendono a favorire lo sviluppo delle scienze matematiche; le università orientate all'economia sono spesso sponsor di gare di matematica, per non parlare del fatto che, con buona pace della Medaglia Fields, del Premio Wolf e del Premio Abel, è proprio il Premio Nobel per l'Economia che spesso ha portato ai massimi allori famosi matematici.



3 *L'equazione di Black-Scholes, popolare al punto di finire sulle T-shirt*

Una delle sinergie più famose tra matematica ed economia si materializzò nel 1973, quando Fischer Black e Myron Scholes pubblicarono la loro famosa equazione sui derivati. I derivati sono prodotti finanziari, ma se il nome vi ricorda il concetto matematico di derivata non siete lontani dalla giusta sensazione, anzi. Per quanto i meandri dell'economia e della finanza (specie quella creativa) siano lontanissimi dalla capacità di reale comprensione da parte di chi scrive, ci pare di capire che in qualche modo si possa davvero associare il concetto di "funzione derivata" proprio dell'analisi matematica a quello di "derivati" finanziari. Nella solita visione ingenua chi non conosce l'economia come noi, pare lecita l'idea di considerare i "prezzi" come una sorta di variabile dipendente dalla variabile indipendente "beni e servizi". In fondo, questo è quanto viene ripetuto nell'unico principio di economia che viene insegnato fin dalle scuole elementari: per un qualsiasi bene ci sono la Domanda e l'Offerta, e a seconda di come queste due fanciulle interagiscono si determina il prezzo del bene medesimo. Per i derivati, è invece il prezzo ad essere considerato la variabile indipendente, e tutto il mercato di questi prodotti finanziari sembra basarsi su accorte speculazioni – giocate ovviamente in anticipo, in una sorta di scommessa sul futuro – che cercano di prevedere l'andamento dei prezzi e quindi sfruttare il trend in maniera opportuna. In questo complicato gioco di previsioni sulle previsioni (perché bisogna prevedere la disponibilità dei beni, da questa prevedere il loro prezzo, e quindi prevedere come i prezzi possano variare) l'equazione di Black-Scholes arrivò nel mondo dell'Economia come il *deus ex machina* liberatore degli affanni. La formula consentiva infatti a chi sapeva leggerla di regolare gli investimenti con un'ottima garanzia di successo, e presto divenne patrimonio condiviso e indiscusso di tutti gli operatori finanziari[8]. Questo condusse ad una crescita iperbolica[9] del mercato dei derivati arricchendo in maniera imbarazzante un bel numero di persone.

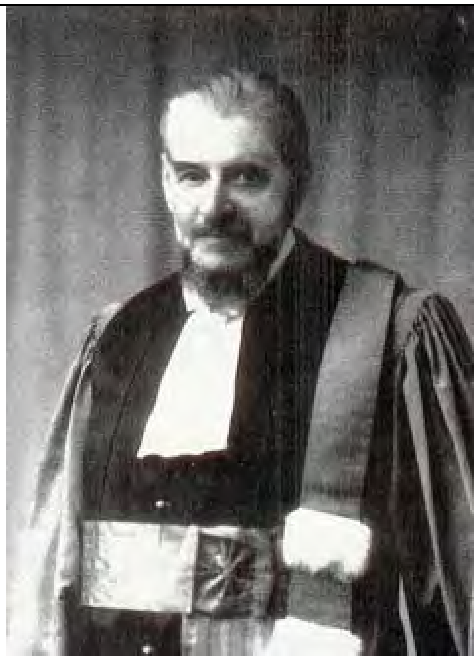
Ai giorni nostri però, la finanza non evoca allegre sensazioni di ricchezza, quanto piuttosto l'immagine scura e tetra d'una crisi economica lunga e perdurante, con capitomboli frequenti e continui quanto quelli delle tessere del domino messe in fila. Nazioni intere sull'orlo del fallimento, valute comunitarie sotto attacco, e tutto quanto

[8] Il mondo economico riconobbe agli autori il dovuto merito, tributando loro il massimo riconoscimento: il Premio Nobel per l'Economia, nel 1997. A dire il vero, Fischer Black non fece in tempo ad ottenerlo, perché morì nel 1995: Myron Scholes lo divise con Robert Merton, che era giunto, contemporaneamente e indipendentemente, agli stessi risultati. C'è chi sostiene che sarebbe più giusto che la formula si chiamasse "*Equazione di Black-Merton-Scholes*".

[9] A quanto ci è parso di capire – anche se il condizionale è d'obbligo, vista l'enormità delle cifre in ballo – nel 2007 il Mercato dei Derivati scambiava una quantità di denaro pari a dieci volte il totale della ricchezza del pianeta.

giornali e televisioni ci raccontano ogni giorno. E, nella ricerca di una soluzione alla crisi peggiore del dopoguerra, c'è anche chi è risalito a quel 1973 e ha posto sotto accusa la formula di Black-Scholes. Un'equazione, però, resta sostanzialmente un'equazione: in estrema sintesi, quando è correttamente formata ed esatta, non è altro che uno strepitoso riassunto di un insieme di conoscenze che, partendo da ben precisi presupposti, riepiloga i risultati logici e quantitativi che da quei presupposti discendono. In questi termini, l'equazione di Black-Scholes è assolutamente congruente: quel che può capitare – e infatti è immancabilmente capitato – è che venga usata al di fuori del suo campo di applicabilità. Tra i diversi requisiti che l'equazione richiede, quello probabilmente più importante è che le oscillazioni dei prezzi siano relativamente piccole e costanti. Quando, per ragioni non del tutto infrequenti nei mercati del mondo reale, questi requisiti non sono rispettati, l'equazione semplicemente non dovrebbe essere applicata: ma l'allevatore della gallina dalle uova d'oro rinuncia assai difficilmente all'idea di non poterla lasciarla covare. Applicarla anche in condizioni di alta volatilità dei prezzi significa amplificare in maniera inaccettabile i rischi: ed è proprio quello che è di fatto accaduto.

Black e Scholes non dovrebbero pertanto essere accusati di aver contribuito al crollo finanziario di cui siamo testimoni: per quanto la nostra simpatia verso gli economisti non sia particolarmente accesa, non ci pare che la corretta compilazione di un'equazione alle derivate parziali debba essere considerata un'azione maligna. Ma, del resto, è anche vero che gli autori hanno ricevuto dalla loro formula assai più benefici che danni: fama, ricchezza, premi e perfino un posticino nella storia, probabilmente. Se il nostro senso di compassione ha davvero bisogno d'essere espresso, forse ha più senso rivolgerlo verso un altro personaggio, certo non meno interessante, e sicuramente meno glorificato, almeno finché è rimasto in vita. Il modello matematico-finanziario che Black e Scholes (e Merton) presero inizialmente in esame, quando si misero all'opera, si basava su principi già sviluppati nell'opera di un matematico a quel tempo assai poco noto: oggi i suoi meriti pioneristici sono certo rivalutati, e il suo nome è assai più noto, almeno fra gli addetti ai lavori. Quel che è meno noto è che colui che adesso è da molti riconosciuto come il padre fondatore della matematica finanziaria creò un modello che aveva impatti e relazioni non solo con la finanza, ma anche con la teoria delle probabilità, con la teoria dei giochi e perfino con la fisica quantistica.

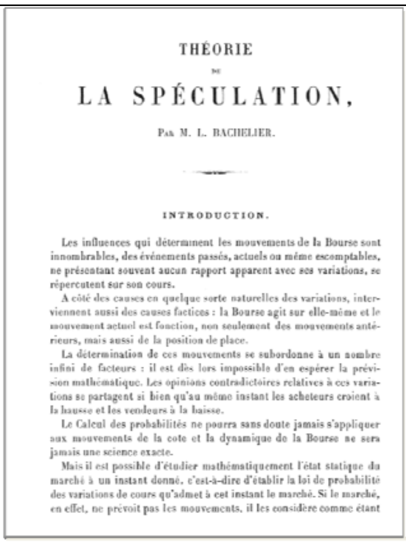

4 *Louis Bachelier*

Louis Bachelier nacque a Le Havre l'undici Marzo del 1870. Non fu uno di quei bambini particolarmente precoci; frequentò il liceo a Caen, perse in giovane età entrambi i genitori, e dovette industriarsi a lavorare. Lo fece presso l'azienda di famiglia, che era nel campo degli affari commerciali e bancari. Sembra che proprio per questa ragione cominciò a interessarsi agli aspetti finanziari della matematica. Solo dopo il compimento dei ventidue anni d'età arrivò a Parigi, dove cominciò a frequentare la Sorbona. Qui sappiamo che dopo otto anni completa la sua tesi di laurea, che vede la luce nel Marzo del 1900: pur raccogliendo gli elogi del suo relatore, (che era, nientepopodimeno, il sommo Poincaré[10]), la tesi viene giudicata con il titolo di "onorevole", che potrebbe suonare niente male, ma che in realtà gli impedisce di tentare la carriera accademica alla Sorbona, perché per farlo la tesi avrebbe dovuto essere stata

[10] Protagonista di "Matematica per porcini", in RM075.

giudicata “onorevolissima”. Dopo di che, di lui si perdono quasi del tutto le tracce fino agli Anni Venti. È vero che quelli sono anni complicati, e di mezzo c’è anche una Guerra Mondiale, ma esistono solo notizie saltuarie di sue collaborazioni occasionali con alcune università francesi, anche se riesce a trovare il tempo di pubblicare dei libri sulla teoria della probabilità e sugli aspetti matematici del gioco d’azzardo.

Di fatto, è solo nel 1927 che Bachelier riesce ad ottenere finalmente una cattedra ordinaria, un posto fisso da matematico insomma, a Besançon. E, come si vede nella foto che lo ritrae con la toga d’ordinanza, è già un giovanotto di 57 anni. Nonostante la carica accademica, non si può certo dire che il nostro fosse considerato un astro nel firmamento della matematica francese: Paul Levy, tra i più importanti matematici francesi del periodo, dette parere negativo quando Louis cercò di ottenere una cattedra all’università di Digione, ed è probabile che di lui avesse sentito parlare pochissimo. Rimase anzi davvero stupito quando ricevette una lettera da Kolmogorov che citava le opere di Bachelier; in fondo gli interessi professionali di Levy erano gli stessi di Bachelier, ed era imbarazzante sentir citare da un grande matematico russo lavori di un collega francese che non aveva mai preso in considerazione. Levy si informò, probabilmente lesse[11] – seppur con notevole ritardo – i lavori di Louis, e gli inviò una lettera di scuse nel 1931.



THÉORIE

DE

LA SPÉCULATION,

PAR M. L. BACHELIER.

INTRODUCTION.

Les influences qui déterminent les mouvements de la Bourse sont innombrables, des événements passés, actuels ou même escomptables, ne présentant souvent aucun rapport apparent avec ses variations, se répercutent sur son cours.

A côté des causes en quelque sorte naturelles des variations, interviennent aussi des causes factices : la Bourse agit sur elle-même et le mouvement actuel est fonction, non seulement des mouvements antérieurs, mais aussi de la position de place.

La détermination de ces mouvements se subordonne à un nombre infini de facteurs : il est dès lors impossible d'en espérer la prévision mathématique. Les opinions contradictoires relatives à ces variations se partagent si bien qu'au même instant les acheteurs croient à la hausse et les vendeurs à la baisse.

Le Calcul des probabilités ne pourra sans doute jamais s'appliquer aux mouvements de la cote et la dynamique de la Bourse ne sera jamais une science exacte.

Mais il est possible d'étudier mathématiquement l'état statique du marché à un instant donné, c'est-à-dire d'établir la loi de probabilité des variations de cours qu'admet à cet instant le marché. Si le marché, en effet, ne prévoit pas les mouvements, il les considère comme étant

5 *La “Teoria della Speculazione”*

Ma probabilmente Luis Bachelier, ormai più che sessantenne, aveva cominciato a fare il callo al suo strano destino di misconosciuto. Era certo un matematico insolito, specialmente ai suoi tempi: probabilmente non padroneggiava al pari dei suoi colleghi più celebri gli strumenti di calcolo e analisi, ma è oggi del tutto evidente che in molti aspetti era assolutamente all’avanguardia. Il suo destino, oltre a quello di non vedersi in vita riconosciuto nessun merito particolare e sparire dalla scena nel 1946 senza lasciare apparentemente nessuna traccia permanente nella storia della matematica, è probabilmente quello di essere stato precursore e sviluppatore di concetti e teorie che oggi sono noti con nomi diversi dal suo. Si è già visto il caso forse più evidente: il modello matematico finanziario alla base di quasi tutta la matematica finanziaria moderna parte dalla sua (ormai famosissima) tesi di laurea del Marzo 1900, che si intitola semplicemente “Teoria della Speculazione”; ma in quella tesi – e nei suoi lavori successivi – si ritrovano anche altri tesori.

Partendo da zero, scopre ciò che poi andrà sotto il nome di “Proprietà di Markov” e quella che poi sarà chiamata “Equazione di Chapman-Kolmogorov”. Sarà il primo a vedere l’equivalenza formale tra l’equazione del calore[12] e quella del moto Browniano; anticiperà gran parte del lavoro di Ito[13] e – naturalmente – gran parte dei risultati di Paul Levy.

Soprattutto, nella sua tesi del 1900 Luis Bachelier formalizza le equazioni del moto browniano. All’orecchio di un economista questo può forse risultare poco significativo, ma

[11] A possibile parziale discolpa di Levy, va riportato che, a quanto sembra, trovasse davvero faticoso (anzi “doloroso”, secondo le sue precise parole) leggere le opere matematiche degli altri.

[12] Non disdegniamo mai di autocitarci, come ben sanno i nostri affezionati lettori: ma in questo caso il rimando ad un paio di fondamentali PM del GC è davvero irrinunciabile. Il suo secondo PM “finanziario”, dal titolo “Make Money Fast [2] – Teoria” (http://www.rudimathematici.com/archivio/118.pdf#page=29) vi porterà per mano in cotanta uguaglianza, se non lo avete ancora mai provato. E forse, per capire un po’ meglio quanto siano maledettamente complessi (e perversi) i derivati, potrebbe essere utile ripassare un po’ di principi “Basics”, leggendo anche la parte prima (http://www.rudimathematici.com/archivio/116.pdf#page=23).

[13] Mai sentito nominare Kiyoshi Ito? Male! Questo significa che non seguite i buoni consigli, perché se foste andati subito a guardarvi i link della nota precedente, allora lo avreste riconosciuto!

a quelle di un fisico suona del tutto rivoluzionario. La più celebre memoria sul Moto Browniano è quella scritta da Albert Einstein[14] nel suo anno mirabile, quando produsse, oltre a quella, anche le memorie sull'Effetto Fotoelettrico e sulla Relatività Ristretta; e l'*annus mirabilis* di Einstein è il 1905. Luis Bachelier lo precede di cinque anni.

Non ci sono molti commenti possibili. Un uomo può laurearsi a trent'anni, trovare il primo posto fisso della sua vita a cinquantasette, precedere il più famoso e celebrato genio del secolo di un lustro abbondante, gettare le basi di un'equazione che cavalca e sconvolge l'economia mondiale, aprire la strada a intere discipline nuove o quasi, quali l'analisi stocastica e il calcolo delle probabilità, e andarsene dal pianeta in silenzio, misconosciuto da tutti. Il minimo che si può fare, in segno di pentimento e rispetto, è quantomeno tenere bene da conto le parole che ha scritto. E se la sua tesi inizia con la pagina che abbiamo riprodotto e con le parole riportate nella citazione iniziale, forse è ancora più importante rammentare con quali parole essa si concluda:

> "*Un'ultima considerazione potrebbe non essere inutile: se, in merito alle diverse questioni trattate in questo studio, ho messo a confronto i risultati dell'osservazione con quelli della teoria, non è stato per verificare delle formule derivate da metodi matematici, ma per mostrare soltanto che il Mercato, per propria natura, obbedisce a una sola legge che lo domina: la legge della probabilità.*"

Ci sembra una conclusione che dovremmo tenere a mente tutti, specialmente coloro che vedono nel Mercato la panacea a tutti i mali, e che pensano che una sorta di magico, se non proprio divino, autogoverno riesca a sanare le transitorie magagne. Coloro che si sbracciano nelle sale della borsa e che si perdono nei grafici appuntiti dei monitor, o che concionano serissimi nelle seguitissime conferenze dall'esito delle quali dipende spesso la vita di milioni di persone.

Alla base di tutto non c'è una sacra missione, né una magia in grado di auto-ripararsi, ma soltanto il solito, vecchio lancio d'una moneta. Orso o Toro, cioè Testa o Croce.

[14] Di lui e del suo *anno mirabilis* parliamo in RM074 "Varianti e Invarianti".

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Prima dare cammello, dopo riprendere cammello			
Questo ve lo ambientate voi			

2.1 Prima dare cammello, dopo riprendere cammello

Che poi sarebbe il vecchio problema della divisione della mandria di cammelli, che ci vuole un cammello in più che avanza alla fine e quindi me lo riprendo. Di recente, ci è capitata sotto il naso la versione generalizzata, alla quale si sono aggiunte un paio di domande piuttosto toste: ci affrettiamo a riproporvela, evitando in questo modo di darvi la vecchia versione.

Leggenda vuole che ci fosse da dividere una mandria di *N* cammelli tra tre fratelli: al più anziano doveva andare la *u*-esima parte della mandria, all'intermedio spettava la *v*-esima, mentre il più giovane doveva accontentarsi della *w*-esima parte.

Come tutti sapevano, *N*+1 era un multiplo di tutti e tre i numeri (u,v,w), mentre non lo era *N*; in ambasce, i tre fratelli si sono rivolti a una Prestigiosa Rubrica di Matematica Ricreativa per trovare un modo di dividere la mandria senza lasciare imbarazzanti frattaglie di cammello in giro.

Il Grande Problemista, recatosi sul luogo a dorso di cammello (piuttosto malandato, per la verità, anche se pienamente compreso nel proprio compito), aggiunge il proprio mezzo di locomozione alla mandria (che lo guarda piuttosto schifata, come una Panda di terza mano ad un raduno di Ferrari); il Problemista provvede quindi alla divisione secondo le frazioni indicate e si vede che avanza un cammello (il suo, con indubbio sollievo del resto della mandria) che viene utilizzato per il viaggio di ritorno.

Ora, la prima domanda (piuttosto facile) è quella di individuare *tutte* le quadruple (u,v,w,N) che permettono di porre il problema in questo modo.

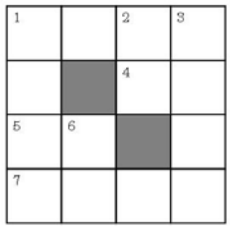
Il guaio (e qui diventa dura) è che la notizia si è diffusa, e pare ci sia il problema di dividere una mandria tra *quattro* fratelli: non ci hanno ancora detto in che parti, ma vorremmo arrivare preparati: qui, per quali quintuple è possibile il medesimo giochetto?

Supponendo di uscire vittoriosi anche da questo certame, non pretendiamo la risoluzione del problema generale, ma almeno un indizio... Se ci troviamo con *k* fratelli, riuscite a definire per ogni *k* il valore massimo che potrebbe avere *N* per permettere la soluzione del problema?

Veloci, che il cammello si diverte da matti, a fare l'allocco con quelli della mandria e a uscirne vincitore: vuole partire per un altro giro al più presto!

2.2 Questo ve lo ambientate voi

Ci siamo sempre fatti punto d'onore, per quanto possibile, di ambientare i problemi in un ambito reale, ma qui ci pare piuttosto difficile. Se volete provarci, si tratta di risolvere i *Numeri Crociati* che trovate in figura: seguono le definizioni.



6 *Numeri Crociati*

Orizzontali	Verticali
1 Il cubo di un primo	1 Il quadrato di un primo
4 Quadrato	2 Il triplo della radice cubica dell'1 Orizzontale
5 Quadrato	3 Il quadrato di un primo
7 Cubo	6 Il doppio della radice cubica del 7 Orizzontale

3. Bungee Jumpers

Provate che, se gli interi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono tutti distinti, allora il polinomio

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2+1$$

non può essere scritto come prodotto di altri due polinomi a coefficienti interi.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Marzo.

Arriva la primavera, finalmente! Non so voi, ma qui in Redazione questa stagione di compleanni e allegria è particolarmente gradita, e siamo sempre pronti a segnalarci tra noi i piccoli segni del suo arrivo: un fiorellino giallo, un abbassamento di pressione, il primo cambio giacca. Ma anche se cambiano le stagioni, noi siamo sempre qui. Ho passato qualche giorno a controllare e ripulire il sito, compresa la pagina che chiamiamo "RemoMabilia", e mi sono accorta che la lista degli eventi è fuori controllo. All'inizio registravamo informazioni del tipo "ci ha scritto qualcuno dall'Argentina!" mentre adesso ci ritroviamo a scrivere "le pagine di rivista di RM raggiungono la vertiginosa cifra 4'000", insomma, un evento assolutamente impressionante. E continuano ad accadere cose impreviste, per esempio abbiamo recentemente ricevuto soluzioni ai problemi del Calendario: e non intendo la soluzione dell'equazione iniziale[15], proprio i problemi difficili di ogni mese... ne pubblicheremo di certo qualcuno, non si sa mai che ad altri venga voglia di cimentarsi.

Questo spazio dovrebbe essere dedicato alle novità e ai pettegolezzi del mese, ma ultimamente sono stata piuttosto parca di informazioni. Resta il fatto che, insieme alle grandi e felici notizie che riportiamo nei nostri memorabilia, siamo confrontati con grandi perdite: la nostra libreria e casa editrice – CS (http://www.arpnet.it/cs/) – sta chiudendo i battenti. Ne abbiamo parlato nell'ultima newsletter, e forse ne parleremo ancora… ma siamo già lenti come tartarughe nel concepire progetti e portare avanti quelli vecchi, che il nostro ambizioso progetto di un terzo libro (oggigiorno tutto arriva in multipli di tre, dalle uova alle trilogie) si è fermato prima ancora di cominciare. Come se non bastasse abbiamo scoperto che il nostro primo libro – *Rudi Simmetrie*, vincitore del Peanino

[15] Questa la scriviamo in nota, perché ormai l'hanno scoperto in parecchi: le quattro soluzioni sono proprio i quattro anni in cui il Capo spera di riutilizzare il calendario in questione.

minore – è tutto esaurito, insomma, non esiste più. Abbiamo però raccolto qualche copia rimasta di *Rudi Ludi*, se qualcuno vuole contattarci in proposito, saranno presto una rarità per collezionisti.

Ed è tutto qui, come vedete. Prima di passare alle soluzioni, mi raccomando: marzo è tempo di inizio della primavera e inizio della serie dei compleanni redazionali. Controllate il Calendario, e ricordatevi di fare gli auguri al nostro Grande Capo, Bel Soggetto e Famoso Generatore di Problemi, che li apprezza tantissimo. E adesso basta, vediamo le vostre soluzioni.

4.1 [Calendario 2002]

4.1.1 Marzo 2002: 18º USAMO (1990) – 5

Come dicevamo, c'è un temerario che sta giocando con tutti i problemi dei calendari di RM: il suo allonimo è ***Sawdust***, e vediamo qui sotto la soluzione al problema pubblicato sul calendario del 2002 a marzo. Siccome probabilmente non avete tutti i calendari a portata di mano (com'è possibile? Sono tutti scaricabili dal sito!) vi riportiamo il testo qui:

> *È dato un triangolo acutangolo ABC. Il cerchio di diametro AB interseca l'altezza CC' e la sua estensione nei punti M e N e il cerchio di diametro AC interseca l'altezza BB' e la sua estensione nei punti P e Q. Provare che M, N, P e Q sono conciclici.*

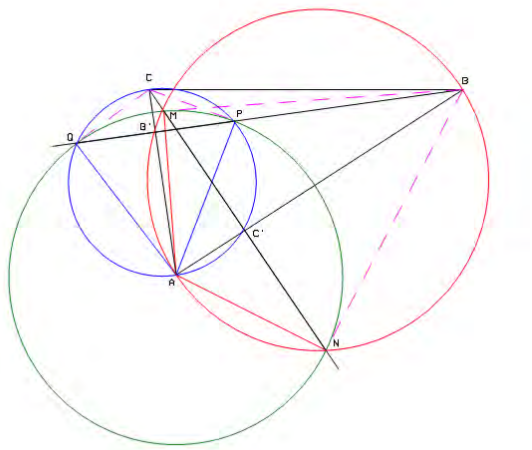
Chiaro, no? Vediamo la soluzione di ***Sawdust***:

I triangoli AC'C e AB'B sono simili per costruzione. **(1)**

Utilizzando la notazione >AMB per indicare l'angolo AMB:

>AMB = >CPA = 90° per costruzione (in semicirconferenza).

Le coppie di rette BM:BN e CP:CQ sono tangenti a due circonferenze i cui centri si trovano rispettivamente sulle rette BA e CA che sono le bisettrici degli angoli MBN (o MAN) e PCQ (o QAP).



I centri delle 2 circonferenze sono entrambi nel punto A, perché è il punto a cui convergono i raggi che vanno ai punti di tangenza.

Per cui il problema è solo più dimostrare che AM (o AN) = AP (o AQ).

I segmenti MC' e PB' sono le altezze relative all'ipotenusa dei triangoli AMB e APC per cui valgono le proporzioni B'C:PB'=PB':AB' e AC':MC'=MC': C'B, da cui

$$(PB')^2 = AB' \cdot B'C \text{ e } (MC')^2 = AC' \cdot C'B$$

Ma $(AM)^2 = (AC')^2+(AC' \cdot C'B)$ e $(AP)^2 = (AB')^2+(AB' \cdot B'C)$, e raccogliendo

$$(AM)^2 = AC' \cdot (AC' + C'B) \text{ e } (AP)^2 = AB' \cdot (AB'+B'C)$$

che poi è lo stesso che dire che in un triangolo rettangolo un cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la sua proiezione sull'ipotenusa stessa, però così abbiamo evitato di scomodare Euclide!

Ma ora

$$(AM)^2 = AC' \cdot AB \text{ e } (AP)^2 = AB' \cdot AC$$

Ma dalla **(1)** AB' : AB=AC' : AC da cui AC' · AB = AB' · AC, e quindi

AM = AP (q.e.d.)

Che ne dite? No, non ha smesso di risolvere, ce n'è ancora uno.

4.2 [Calendario 2012]

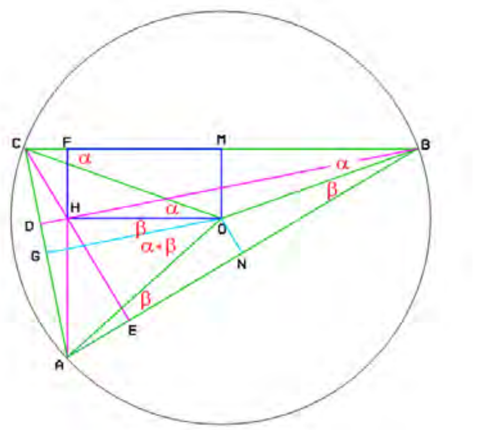
4.2.1 Gennaio 2012: Putnam 1997–A1

Anche qui, visto che avrete già girato pagina del calendario che grandeggia di fronte a voi, copiamo il testo:

Un rettangolo HOMF ha lati HO=11 *e OM*=5*. Un triangolo ABC ha H come intersezione delle altezze, O come circocentro, M come punto medio di BC e F come piede dell'altezza da A. Quanto vale la lunghezza BC?*

E ora la soluzione (multipla) di ***Sawdust***:

Attacco con trigonometria



Il problema sta nel trovare i 3 punti A, B e C equidistanti da O tali che

AO = BO = CO = r

e (utilizzando la notazione >CBO per indicare l'angolo CBO), posto >CBO = α, >OBA = β, CF = x e BF = 22+x abbiamo che

$r \cdot \text{sen}\ \alpha = 5$

$(22+x) \cdot \tan\beta = 5$

Per cui si tratta di stabilire qualche relazione tra gli angoli α e β

>AOG = >COG = >ABC = α + β

>COH = α

>HOG = β

>HOA = 2β+α

Quanto sopra ci permette di risolverlo mettendo a sistema le seguenti equazioni

$r \cdot \text{sen}\ \alpha = 5$

$(22 + x) \cdot \tan\beta = 5$

$r \cdot \cos(2\beta+\alpha) = 11$

$r^2=(11+x)^2 + 5^2$

e le soluzioni sono

x=3 (per cui BC = 28)

r = 14,866... (radice quadrata di 221)

α = 19,654...

β = 11,310...

Attacco con geometria analitica

Posto il rettangolo nel secondo quadrante e con il vertice O nell'origine degli assi, si deve trovare una retta generica passante per H che intercetti la retta y=5 in un punto B tale che la sua perpendicolare passante per il punto C (simmetrico di B rispetto a M) incontri la retta $x=-11$ in un punto A cosicché si abbia AO = BO.

In formule

retta generica per H $y = m(x+11)$

punto B sistema tra $y = m(x+11)$ e $y = 5$

che ha come soluzione parametrica B = $(-11+5/m, 5)$, e quindi C = $(+11-5/m, 5)$. La retta per C perpendicolare ad HB ha equazione $y-5=\frac{1}{m}\left(x-11+\frac{5}{m}\right)$, e incrocia la retta per F di equazione $x = -11$ nel punto A di coordinate $A\equiv\left(-11, 5+\frac{22}{m}-\frac{5}{m^2}\right)$. Uguagliando le lunghezze AO e OB si ottiene $(-11)^2+\left(5+\frac{22}{m}-\frac{5}{m^2}\right)^2=5^2+\left(11-\frac{5}{m}\right)^2$, che ha come soluzioni

$m = -5/3$

$m = 1/5$

$m = 5/22$

Per $m = 5/22$ si ha B = (11, 5), C = (−11, 5) e A = (−11, 5), quindi A e C coincidono e il triangolo non c'è più.

Per $m = 1/5$ si ha B = (14, 5), C = (−14, 5) e A = (−11, 5+110−125) = (−11, −10) ed è quella che risolve il problema.

Per $m = -5/3$ si ha B = (−14, 5), C = (14, 5) e A = (−11, 5+22·3/5−5·9/25) = (−11, −10) che inverte le posizioni di C e B.

Bene, ora sapete che i problemi sui calendari si possono risolvere... speriamo di ricevere ancora molte di queste soluzioni. Tenete presente che non pubblicheremo le soluzioni dei mesi successivi a quello in corso, ma ne avete ancora tanti, da scegliere!

4.3 [151]

4.3.1 Non mi piace il Master Mind

Riepilogo delle puntate precedenti, a cominciare dal testo del problema:

> *Alberto e Fred hanno scelto* 6 *numeri diversi tra loro compresi tra* 1 *e* 49, *estremi inclusi. Il Capo può fare delle ipotesi, scegliendo un sottoinsieme dei numeri e proponendoli, i VAdLdRM diranno quanti (non quali) sono quelli giusti. Quale strategia permette di indovinare i* 6 *numeri con il minimo di tentativi?*

Avevamo ricevuto (RM152) le risposte di ***Franco57*** ("25 domande") e di ***Fabrizio*** ("23 domande"); a gennaio (RM156) il Capo si era divertito a fornire la sua soluzione ufficiale ("24 domande"). Poi (RM157) sono arrivati ***Trentatrè***, che ha verificato il tutto, ma ci ha mandato un miglioramento e ***Franco57*** con altre considerazioni, ed una promessa di una soluzione finale e meravigliosa dell'amico ***Gratin***, che come promesso è veramente arrivata:

> Ecco la strategia dell'amico ***Gratin*** per scoprire in al più 18 domande dove si trovano 6 elementi su 49. Servono le seguenti due proprietà:
>
> <u>Proposizione 1</u>: per trovare i 4 elementi in un insieme di 4 righe x 2 colonne contenente un elemento in ogni riga sono sufficienti 3 domande.

Proposizione 2: per trovare i 6 elementi in un insieme di 6 righe x 2 colonne contenente un elemento in ogni riga sono sufficienti 4 domande.

Osservazione: se all'incrocio di righe per colonne delle proposizioni 1 e 2 ci sono insiemi invece che singoli elementi, gli stessi metodi sono in grado di trovare quali di questi insiemi contengono gli elementi da cercare. Ciò è giustificato dal fatto che ciascun insieme posto all'incrocio dello schema 4x2 o 6x2 può contenere al massimo uno degli elementi cercati.

Lasciamo la prova delle proposizioni in fondo e andiamo subito a dimostrare quanto affermato, anzi per comodità un fatto più generale:

per scoprire dove si trovano 6 elementi in un insieme di $n = 7 \cdot 2^k$ sono sufficienti $6 + 4 \cdot k$ domande.

Per $k = 3$ avremmo che 18 domande sono sufficienti per scoprire 6 elementi su 56, quindi a maggior ragione 6 su 49. L'amico *Gratin* mi ha anche mostrato che con alcune variazioni al metodo le domande possono essere scorciate a 17, ma non l'ho metabolizzato abbastanza bene.

Partizioniamo l'insieme di $n = 7 \cdot 2^k$ elementi in 7 sottoinsiemi di 2^k elementi e chiediamo quanti elementi da trovare ci sono in 6 di essi (per il 7mo saranno automaticamente determinati). Almeno uno dei sottoinsiemi non ne conterrà, quindi l'insieme dove possono trovarsi si è ridotto $6 \cdot 2^k$ elementi.

Se $k = 0$ ho trovato i miei elementi in $6 = 6 + 4 \cdot k$ domande (in realtà le ho sprecate).

Se $k > 0$, con ulteriori 4 domande, riesco limitare la ricerca dei 6 elementi da trovare ad al più 6 insiemi ma di dimensione dimezzata, cioè 2^{k-1}, di ognuno dei quali ancora conosco quanti ne contiene.

Infatti si presenta una di queste 3 situazioni:

a) il caso *peggiore*: 1 elemento in 6 dei sottoinsiemi, e nessuno nel settimo (6=1+1+1+1+1+1+0);

b) il secondo caso *peggiore*: in 1 dei sottoinsiemi vi sono 2 elementi e in altri 4 1 elemento (6=2+1+1+1+1+0+0);

c) tutte le altre possibilità, nelle quali gli elementi da cercare sono in 4 sottoinsiemi o meno (6=2+2+1+1; 6=2+2+2; 6= 3+1+1+1; 6=3+2+1; ecc) .

In tutti e tre i casi disponiamo gli insiemi di 2^k elementi per riga e creiamo 2 colonne spezzando ciascuno di essi in 2 sottoinsiemi di cardinalità 2^{k-1}.

Nel caso a), applicando la proposizione 2, con 4 domande determino 6 insiemi di 2^{k-1} elementi ciascuno dei quali contiene 1 elemento da cercare.

Nel caso b), applicando la proposizione 1 alle 4 righe contenenti 1 elemento da cercare, impiego 3 domande per scoprire tra loro i 4 insiemi di cardinalità 2^{k-1} che contengono 1 elemento da cercare. In più chiedo quanti elementi nascosti ci sono in uno dei due semi-insiemi *A* e *B* dell'insieme nella riga che ne contiene 2: se la risposta è 1, sia *A* che *B* contengono 1 elemento, quindi con i 4 già trovati, come nel caso a), ho 6 sottoinsiemi di cardinalità 2^{k-1} ciascuno dei quali ha 1 elemento da trovare; se la risposta è 2 o 0 ottengo ancora un partizionamento del tipo b) cioè 6=2+1+1+1+1 ma tutta con insiemi di cardinalità 2^{k-1}.

Nel caso c) basta che per ciascuna delle 4 (o meno) righe faccia la domanda relativa ad uno dei due sottoinsiemi di 2^{k-1} elementi e ciò mi dice automaticamente anche quanti elementi da trovare ce ne sono nell'altro. Ovviamente solo 6 di questi insiemi da 2^{k-1} elementi saranno non vuoti.

In tutti e tre i casi ottengo (al più) 6 insiemi di cardinalità 2^{k-1} che contengono elementi da cercare e so ciascuno di essi quanti ne contiene.

Posso quindi applicare ricorsivamente la casistica a), b) o c) fino a quando determino i 6 elementi da trovare perché gli insiemi avranno $2^0 = 1$ elemento. In totale ho quindi impiegato al più $6 + 4 \cdot k$ domande.

Già per valori modesti di *n* questa stratega risulta migliore di quella dicotomica per la ricerca di 6 elementi. Tuttavia usando la formula di *Trentaré* si vede che il numero *M* di domande (continuiamo a chiamarlo *M* anche se il *Minimo* è sconosciuto) è in entrambi i casi logaritmico rispetto alla cardinalità *n* dell'insieme:

$$M_D = \lceil log_2 n \rceil + \left\lceil log_2 \frac{n}{3} \right\rceil + \left\lceil log_2 \frac{n}{5} \right\rceil + \left\lceil log_2 \frac{n}{7} \right\rceil + \left\lceil log_2 \frac{n}{9} \right\rceil + \left\lceil log_2 \frac{n}{11} \right\rceil$$ del dicotomico

contro $M_G = 6 + 4 \cdot \left\lceil log_2 \frac{n}{7} \right\rceil$ di questo, che quindi, a tendere, risparmia $\frac{1}{3}$ delle domande rispetto al dicotomico, poiché $\frac{M_G}{M_D} \to \frac{2}{3}$.

<u>Dimostrazione della proposizione 1</u>:

Abbiamo la tabellina $\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \\ 31 & 32 \\ 41 & 42 \end{pmatrix}$ con un elemento sconosciuto per ogni riga.

Una premessa abbastanza ovvia: quando rimangono solo due combinazioni è sempre possibile individuare quella giusta con una domanda ulteriore.

Domanda 1: quante sulla prima colonna (11, 21, 31, 41) ?

Se Risposta = 0 o 4 ho risolto.

Se Risposta = 1 (per 3 che è il complementare è tutto simmetrico) faccio la Domanda 2: quante sulla prima semi-colonna (11, 21) ? La Risposta può essere 0 o 1 ma in entrambi i casi ho due possibilità per l'unico l'elemento sulla prima colonna, perciò risolvo sempre con una Domanda 3.

Se Risposta = 2 formulo la Domanda 2: quante in (11, 22) ?

La Risposta 0 o 2 sono determinate le prime due righe e rimangono le combinazioni (31, 42) e (32, 41) per le righe 3 e 4, che disambiguo con una Domanda 3;

Se invece la Risposta è 1, ancora ho due sole combinazioni: (11, 21, 32, 42) e (12, 22, 31, 41) , quindi basta una ulteriore Domanda 3.

<u>Dimostrazione della proposizione 2</u>:

Abbiamo la tabellina $\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \\ 31 & 32 \\ 41 & 42 \\ 51 & 52 \\ 61 & 62 \end{pmatrix}$ con un elemento sconosciuto per ogni riga.

Domanda 1: quante sulla prima colonna (11, 21, 31, 41, 51, 61) ?

Se Risposta = 0 o 6, ho risolto

Se Risposta = 1 (per 5 che è il complementare è tutto simmetrico) bastano altre 3 domande per scovarlo tra i 6 della prima colonna.

Se Risposta = 2 (per 4 che è il complementare è tutto simmetrico) faccio ancora la stessa Domanda 2: (11, 21, 32, 42)

Con la Risposta = 0 o 4 ho subito l'insieme cercato

Se Risposta = 1 (ma il ragionamento vale anche se la Risposta = 3 perché è equivalente a rispondere 1 alla domanda simmetrica (12, 22, 31, 41)) nel cercare i 2 elementi sulla prima colonna si vede che non possono stare nelle prime due righe perciò ho determinato le prime due righe in 12, 22; con una Domanda 3 determino quale tra la riga 3 e la riga 4 sta nella colonna 1 e con una Domanda 4 quale tra la riga 5 e la riga 6 sta l'altro.

La Risposta = 2 lascia 5 combinazioni possibili che alla ulteriore Domanda 3 (11, 21, 31) rispondono con lo stesso valore al massimo a coppie:

(12, 22, 32, 42, 51, 61) dà Risposta = 0

(11, 22, 31, 42, 52, 62) dà Risposta = 2

(12, 21, 31, 42, 52, 62) dà Risposta = 2

(11, 22, 32, 41, 52, 62) dà Risposta = 1

(12, 21, 32, 41, 52, 62) dà Risposta = 1

perciò in ogni caso basta una ulteriore Domanda 4.

Se Risposta = 3 si fa ancora la Domanda 2 (11, 21, 32, 42)

Se Risposta = 0 o 4, con una ulteriore domanda si trovano quelle alle righe 5 e 6.

Se Risposta = 1 (o 3 che al solito è il caso simmetrico), con 2 domande si trova qual è tra le quattro quella buona. Notare che a questo punto le carte sono tutte determinate (ad esempio, se è 11 quella buona, allora lo è anche 22, 31, 41, 52, 62)

Se Risposta = 2, notare che devono essercene una a destra e una a sinistra (le combinazioni possibili sono (11 22 31 42) (11 22 32 41) (12 21 31 42) (12 21 32 41)) che disambiguiamo con Domanda 3 = (11, 22, 31). Infine con una Domanda 4, troviamo quelle giuste alle righe 5 e 6.

Franco57 aggiunge sconsolato:

per il metodo minimale richiesto temo che siamo ancora lontani...

Sarà veramente l'ultima parola su questo problema? Noi speriamo di no, ovviamente.

4.4 [157]

4.4.1 UGO: Unidentified "Golosi" Objects

Problema che il Capo aveva pensato difficilissimo, ma abbiamo ricevuto almeno una soluzione... ma prima vediamo il testo:

In una bomba atomica è caduto un bombolone, per cui quando viene fatta scoppiare, anziché il solito "fungo" dà origine ad un'enorme ciambella. Per distruggere il risultato viene interpellata una impavida squadra di cinque bambini che decidono di procedere in modo organizzato, scavando con fameliche mandibole dei tunnel esplorativi (ognuno perfettamente circolare e giacente su un piano secante il ciambellone). Siamo a conoscenza dei seguenti fatti:

- *Giggi ha scavato un tunnel lungo* 30π *metri.*

- *Aggnese ha scavato un tunnel più lungo di quello di Giggi, ma non l'ha mai incrociato*
- *Cesare ha scavato un tunnel di* 50π *metri, incrociando quello di Aggnese.*
- *Arvaro ha scavato un tunnel di* 60π *metri, incrociando anche lui il tunnel di Aggnese.*
- *Debborah ha scavato il tunnel più lungo.*

Quanto era lungo il tunnel di Debborah?

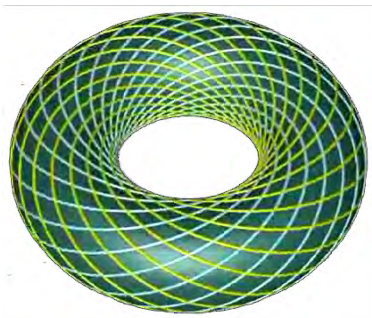
Ebbene, come detto, una sola soluzione, e di chi poteva essere? Il grandissimo ***Gnugnu***, il castigatore. Godetevela:

Non ricordo un altro problema così intrigante; tutte le seguenti affermazioni, incompatibili fra loro, si possono ritenere *vere*: esiste una sola soluzione *esatta*, il problema è *impossibile*, vi sono infinite soluzioni *migliori* di quella *esatta* , tutte le soluzioni portano al *risultato* 110π metri.

L'esplosione nucleare dovrebbe aver prodotto un gran dolce a forma di toro. La superficie di questa ciambellona è generata dalla rivoluzione di una circonferenza di raggio r attorno ad una retta complanare distante R dal suo centro, con $R > r$ (per soddisfare il pignolo pasticcere). L'equazione cartesiana di questa superficie è, con l'asse z coincidente con quello di rivoluzione della circonferenza, il cui centro appartiene al piano xy: $\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2=r^2$.

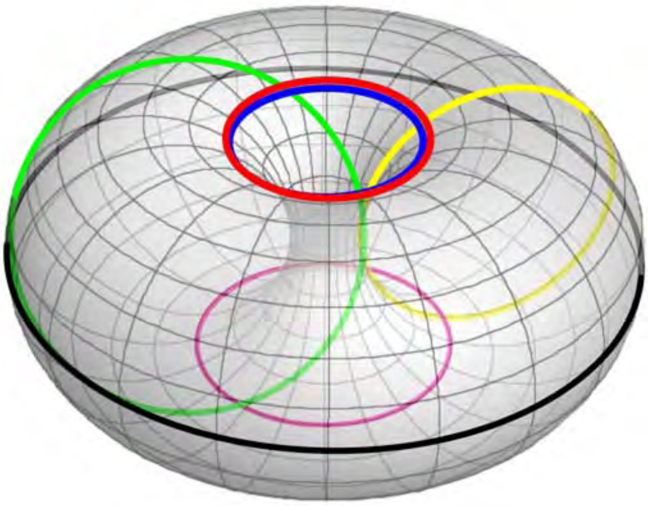
Vi sono tre tipi di piani che secano questa superficie lungo circonferenze di raggio positivo:

- i piani $z=h$, perpendicolari all'asse z, con $-r \le h \le r$; l'intersezione è costituita da due circonferenze concentriche di raggi $R \pm \sqrt{r^2-h^2}$: i paralleli P del toro;
- i piani $ax+by=0$ con $a^2+b^2>0$, passanti per l'asse z, che producono due copie della circonferenza generatrice, dunque di raggio r: i meridiani M del toro;
- i piani bitangenti alla superficie del toro, la cui intersezione è costituita da due circonferenze fra loro secanti nei punti di tangenza del piano, di raggio R e distinguibili: le circonferenze di Villarceau destre Vd e sinistre Vs.



Per classificare le circonferenze di Villarceau basta notare che un osservatore, impalato dall'asse z, con i piedi sul piano xy, che guardi verso il punto di tangenza più vicino ai suoi occhi, avrà i centri delle circonferenze uno a destra del punto d'appoggio e uno a sinistra. Mentre stavo pensando a come disegnarle con GeoGebra, i Rudi hanno pubblicato il 46° carnevale della matematica. Qui uno dei tanti contributi di Annarita Ruberto presenta lo stupendo filmato "DIMENSIONS … une promenade mathématique". La figura a fianco è un fotogramma rubato al cap. 8: in azzurro le Vd ed in giallo le Vs. Per non appesantire troppo il discorso, la misura del raggio con una dimostrazione dell'esistenza di queste curve, belle e un po' schive, l'ho spostata alla fine.

Disponiamo di quattro insiemi di circonferenze: *P*, *M*, *Vd* e *Vs*, ognuno dei quali ricopre il toro. Ogni circonferenza interseca tutte quelle di tipo diverso e non incontra le sue consanguinee. Per un punto della superficie toroidale passano quattro circonferenze, una per ogni insieme.



Usando i colori olimpici, Giggi (blu) e Aggnese (rosso), che lo nasconde in parte, scavano due gallerie di lunghezza diversa che non si intersecano. Non possono, perciò, che essere due paralleli e, visto la tresca in corso, saranno l'uno accanto all'altro. In violetto ho riportato anche lo scavo di Aggnese nel caso di un'eventuale fase litigarella.

Cesare (giallo) e Arvaro (verde) si pappano due tunnel di lunghezza diversa che intersecano quello di Aggnese. Il più corto sarà un meridiano, e quindi r =25 m. L'altro una ***V*** (nel disegno, arbitrariamente, una *Vs*), che fornisce R = 30 m.

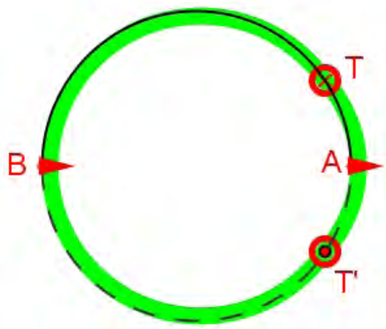
Debborah (nero) scaverà nuovamente un parallelo il cui raggio sarà al massimo $\boldsymbol{R} +$ r = 55 m, per una lunghezza di 110π m.

Tutto a posto. Ringraziamo i programmatori che hanno reso disponibile 3D-XplorMath-J, con cui è stato un gioco ottenere la prospettiva, in scala esatta, del ciambellone con relative luci e trasparenze; salutiamo e … alla prossima?

Oh, ragassi! Siamo mica qui a progettare tunnel per neutrini?!

La soluzione è perfetta per il giovin rampollo della nobiltà papalina che, al più, ostentando noia e disinteresse, scalfirebbe con l'unghia ben curata la glassa, per apprezzarne poi il profumo.

I borgatari, com'è indicato nel problema, scavano tunnel appena sotto la dolce superficie. Novelli donutworms mangeranno la fragrante pasta (di densità ignota, ma di notevole volume) lasciandosi alle spalle un anello da hulahoop di purissima aria. La pressante richiesta di una curva piana e perfettamente circolare credo si debba riferire alla linea descritta dal centro del tubo.



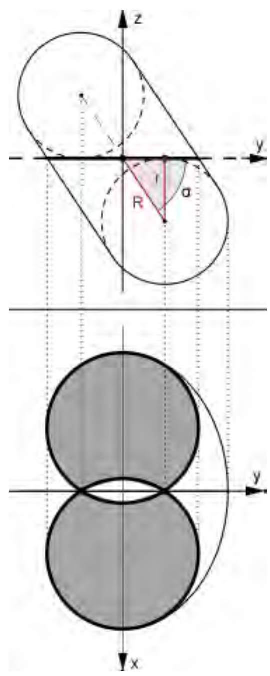
Questa condizione non crea problemi per meridiani e paralleli, ma non può essere rispettata da Arvaro. Se proviamo a seguirlo nel suo appagante lavoro, partendo ad esempio dal punto *A* con verso antiorario, notiamo che il tunnel verde inizia a destra della circonferenza nera, per portarsi rapidamente esattamente sotto a questa nel punto *T* (quello in cui il piano bitangente tocca, da sopra, la superficie del toro), quindi, sempre più lentamente, la torsione continua portandosi nuovamente a destra nel punto *B*. L'altra metà del percorso vede aumentare la velocità di torsione: nel secondo punto di tangenza *T'* il tubo è sopra alla circonferenza di Villarceau, e quando il giro termina nuovamente a destra. Durante la costruzione del tubo, se Arvaro mantiene la propria spina dorsale a contatto della superficie zuccherina, avrà compiuto una rotazione destrorsa di 360° attorno alla congiungente piedi-testa. Il tubo si avvolge attorno alla circonferenza, e non esiste alcun piano che contenga i centri delle sue sezioni: il piano passante per il centro del tubo in A, T, B e T' non interseca neppure lo scavo nei punti più lontani dalla retta AB. Quindi il problema è privo di soluzioni.

Vabbè! Forse non è il caso di essere eccessivamente rigorosi, in fin dei conti la ciambella lievitata dall'esplosione non avrà mica una forma geometrica perfetta. Se siamo tolleranti troviamo però infinite altre possibilità.

Supponiamo che Giggi scavi lungo un meridiano (r = 15 m), Aggnese, accanto a lui scava seguendo un piano parallelo non passante per l'asse del toro. L'intersezione di questo con la superficie toroidale non è una circonferenza, ma ne scosta talmente poco che risulta impossibile apprezzare, con un disegno, la differenza. Nella figura a fianco, tanto per darne un'idea, compaiono, su un toro con r = 15 m e R = 40 m, visti perpendicolarmente, in nero il meridiano e in rosso la curva sul piano parallelo a questo, solo che la distanza è stata decisamente aumentata: anziché 50 cm (possibile diametro del tunnel) 10 m. A 50 cm la distanza fra la curva e la miglior circonferenza che l'approssima risulta al massimo di 1 mm. Questa discrepanza può inoltre diminuire a piacere: avvicinando il secondo piano all'asse z. La curva si scosterà sempre meno da un meridiano. Il tunnel di Aggnese sarà sempre più lungo di quello di Giggi, le due gallerie non saranno più parallele, se sono accostate dal lato interno del toro risulteranno più distanti dall'altra parte, ma è noto che i dolci leniscono le pene d'amore.

Resta da calcolare quale sia la massima lunghezza del tunnel di Debborah. Possiamo fare a meno delle V, per intersecare Agnese bastano tre paralleli, la ciambella più grande è quella che ha la galleria di Cesare come meridiano più corto, dunque $R - r$ = 25 m, da cui R = 25 + 15 = 40 m ed allora $R + r$ = 55 m, il medesimo risultato della prima soluzione!

Notando che nella prima soluzione la lunghezza del tunnel di Giggi non è stata utilizzata ed in queste non serve quella di Arvaro, mi nasce un dubbio malizioso: vuoi vedere che chi ha proposto il problema lo ha congegnato appositamente per ottenere questa coincidenza?



Non poteva mancare un'appendice:

<u>Appendice: le circonferenze di Villarceau sono rotonde ed hanno raggio R.</u>

Sviluppando l'equazione $\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2=r^2$ della superficie toroidale otteniamo:

$$R^2+x^2+y^2-2R\sqrt{x^2+y^2}+z^2=r^2.$$

Da cui, isolando il radicale ed elevando al quadrato:

$$\left(x^2+y^2+z^2+R^2-r^2\right)^2=4R^2\left(x^2+y^2\right)$$

Ruotiamo il toro di un angolo α attorno all'asse x (diretto verso l'osservatore nella prima proiezione ortogonale) in modo che il piano $z=0$ risulti bitangente.

Si può fare a meno delle equazioni della rotazione: il primo membro è un invariante e basterà nel secondo sostituire *y* con $y\cos\alpha$, o meglio y^2 con $y^2\cos^2\alpha$, tanto i termini contenti *z* spariranno facendo l'intersezione col piano $z=0$. Così mi risparmio i dubbi sui segni del seno. Il valore del coseno di *α* si ottiene dal triangolo in rosso: $\cos^2\alpha = \frac{R^2-r^2}{R^2}$, ed allora l'equazione della sezione del toro ruotato è:

$$\left(x^2+y^2+R^2-r^2\right)^2 = 4R^2\left(x^2+\frac{R^2-r^2}{R^2}y^2\right).$$

Che diventa, sviluppando, parzialmente, il quadrato a primo membro e la moltiplicazione al secondo:

$$\left(x^2+y^2\right)^2+2\left(R^2-r^2\right)\left(x^2+y^2\right)+\left(R^2-r^2\right)^2 = 4R^2x^2+4\left(R^2-r^2\right)y^2.$$

Il secondo membro è quasi il doppio del doppio prodotto che compare nel primo, volendo semplificare lo possiamo correggere aggiungendo, dalle due parti il monomio mancante: $-4r^2x^2$

$$\left(x^2+y^2\right)^2+2\left(R^2-r^2\right)\left(x^2+y^2\right)+\left(R^2-r^2\right)^2-4r^2x^2 = 4R^2x^2+4\left(R^2-r^2\right)y^2-4r^2x^2$$

$$\left(x^2+y^2\right)^2-2\left(R^2-r^2\right)\left(x^2+y^2\right)+\left(R^2-r^2\right)^2-4r^2x^2 = 0$$

$\left(x^2+y^2-R^2+r^2\right)^2-4r^2x^2=0$, scomponibile come differenza di quadrati in:

$$\left(x^2+y^2-R^2+r^2+2rx\right)\cdot\left(x^2+y^2-R^2+r^2-2rx\right)=0.$$

$$\left((x+r)^2+y^2-R^2\right)\cdot\left((x-r)^2+y^2-R^2\right)=0$$

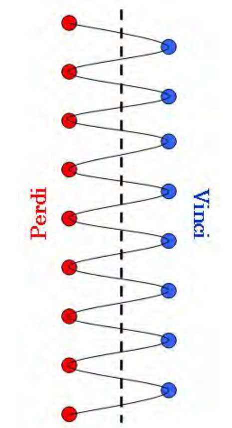
Due circonferenze di raggio *R*, di centri, rispettivamente, *(-r,0)* e *(r,0)*.

Se non ci fosse ***Gnugnu***... bene, visto che non abbiamo ricevuto altro, passiamo al secondo problema.

4.4.2 Il mese scorso, a sciare

Allora, prima di scrivere niente altro sul problema stesso, vi rivelo una sottigliezza che altrimenti il Capo vi fa impazzire, prima di dirvela. Questo gioco, ha una parentela con il Nim, e questo voleva essere il contenuto dell'*aiutino* perverso nel titolo che (solo nella mente malata del Capo) richiamava "L'anno scorso, a Marienbad", e da lì sareste dovuti risalire al Nim. Non intendo commentare ulteriormente sulla cripticità del nostro massimo generatore di problemi, vi passo in fretta il testo di quello di cui parliamo ora:

Il Capo ha tracciato un percorso (in figura) di slalom e propone una gara, con l'avversario che parte dalla cima e lui dal fondo. Ognuno dei giocatori al suo turno può, a scelta, passare una, due o tre porte (fermandosi sopra), ma è vietato scontrarsi o saltare l'avversario: quando non possono più muovere, perde quello che è dalla parte del 'Perdi'. Qual è la strategia vincente?



7 La pista da slalom

Per questo problema abbiamo un sacco di soluzioni: ***Alberto R.***, ***Tesctassa***, ***Franco57***, ***Tartaruga***, ***Mirhonf***, ***Gnugnu***. Cominciamo da quella di ***Alberto***, che è velocissima:

Sicché uno dei due sciatori dovrebbe fare lo slalom ... in salita! Improba fatica. Ma siccome siamo più interessati all'aspetto logico che a quello sportivo del gioco, propongo di sostituirlo con un altro equivalente ma atleticamente meno impegnativo.

15 fagioli sul tavolo. Due contendenti, comodamente seduti attorno al tavolo, ne prendono a turno 1, 2, o 3. Vince chi, alla fine, ne ha un numero dispari. (N.B. 15, non 17 perché nell'isomorfismo i fagioli corrispondono alle porte da raggiungere; quelle di partenza non contano).

Chi muove per primo ha questa strategia vincente:

- 1^ mossa: Prende 2 fagioli quindi ne lascia 13
- 2^mossa: Ne prende 1 o 3 in modo che ne restino 8 o 9
- 3^mossa: Ne prende 1 o 3 in modo che ne restino 4 o 5
- 4^mossa: Ne prende 1 o 3 in modo che ne restino 0 o 1

La strategia si estende a un numero iniziale qualunque (dispari naturalmente, se no è sempre pareggio).

Un giocatore ottiene una posizione vincente se, dopo aver eseguito la sua presa,

a) lascia sul tavolo $4N$ *oppure* $4N+1$ fagioli;

b) la parità dei fagioli accumulati è diversa dalla parità di N;

L'*oppure* che compare in a) non è una scelta indifferente, ma è il grado di libertà necessario per soddisfare la condizione b).

È facile verificare che chi per primo raggiunge una posizione vincente ha sempre la possibilità di passare alla successiva posizione vincente fino alla vittoria finale. Faccio notare che in ogni passaggio N diminuisce di 1 e la sua parità cambia, quindi deve cambiare anche la parità dei fagioli accumulati; ciò spiega perché, dopo la prima mossa, occorre prendere sempre 1 o 3 fagioli e mai 2.

Un esempio: Iniziando con 29 fagioli, chi gioca per primo soddisfa la condizione a) solo se prende 1 fagiolo lasciandone 28 ($4N$ con $N=7$), ma non rispetta la b) poiché 1 e 7 hanno la stessa parità. Dunque chi gioca per primo è destinato a perdere; infatti, qualunque mossa faccia, l'avversario, prendendo 1 o 3 fagioli, ne lascerà 24 o 25 ($N=6$) rispettando entrambe le condizioni ed entrando così nel percorso virtuoso delle posizioni vincenti.

Ebbene, qui ci pare che il Nostro abbia colto l'aiutino. ***Tesctassa*** ci scrive:

(...) In ogni caso, per trovare una strategia ho generalizzato il problema considerando delle piste che fossero formate anche da un numero pari di porte, quindi in cui se la prima porta che il primo giocatore incontra è ROSSA ("perdi") la prima che incontra il suo avversario è BLU ("vinci"), e ho considerato inoltre le versioni a "porte invertite", cioè quelle in cui la porta iniziale del primo giocatore non è ROSSA ma BLU. Il risultato di queste considerazioni è la tabella qui a fianco.

	Prima porta è ROSSA	Prima porta è BLU
#porte	#porte da saltare alla prima mossa	#porte da saltare alla prima mossa
1	-	1
2	2	1
3	2	3
4	-	3
5	1	-
6	1	2
7	3	2
8	3	-
9	-	1
10	2	1
11	2	3
12	-	3
13	1	-
14	1	2
15	3	2
16	3	-
17	-	1

La prima colonna riporta il numero totale di porte nella pista, mentre le successive riportano il numero di porte da saltare alla prima mossa per avere la vittoria garantita rispettivamente nel caso in cui la prima porta sia ROSSA e nel caso in cui sia BLU; se c'è un trattino significa che nessuna mossa garantisce la vittoria. Per costruirla dal caso più semplice: se la pista ha una porta solamente, essendo costretti (ho dato per scontato che lo fosse) a saltare 1, 2 o 3 porte, chiaramente se è ROSSA si perde, se è BLU si vince.

Per piste più grandi, si può notare che dopo la prima mossa della partita, il giocatore che muove per secondo si troverà nella situazione di "muovere per primo, su una pista più piccola". Perciò, per sapere quante porte il primo giocatore deve saltare alla prima mossa, su una pista con *i* porte, basta trovare, partendo dalla *i*-esima riga, una pista con *i* – *n* porte che non permetta la vittoria, dove *n* è ovviamente il numero di porte da saltare per vincere.

Perciò il secondo passo si svolge considerano separatamente i casi in cui il numero totale di porte è dispari e quelli in cui è pari. Nel caso pari bisogna notare che le porte iniziali per i due giocatori sono invertite, quindi per sapere quante porte "lasciare" all'avversario bisogna controllare nella tabella la colonna relativa alla porta di colore opposto al nostro. Per esempio se la nostra prima porta è ROSSA, la prima porta dell'avversario sarà BLU e quindi la configurazione perdente va cercata in quella colonna. Nel caso dispari invece si consulterà la stessa colonna.

Quindi per sapere se su una pista con 18 porte la cui prima è ROSSA il primo giocatore può vincere, bisogna controllare nella colonna opposta se c'è almeno una delle piste con 17, 16 o 15 porte impone la sconfitta e poiché c'è (quella con 16), sappiamo che la prima mossa sarà di saltare 2 porte.

Ovviamente c'è una periodicità in tutto ciò ma non mi sono impegnato a cercare di capirla. E sicuramente è anche possibile trovare una formula che permetta di calcolare se, dato il numero di porte in pista e il colore della prima porta, sia possibile vincere o meno e saltando quante porte… ma ho fatto così tanta fatica saltando tutte quelle porte che ho desistito subito.

Ecco. Vediamo la strategia di ***Mirhonf***:

Ridisegno la scacchiera/campo:

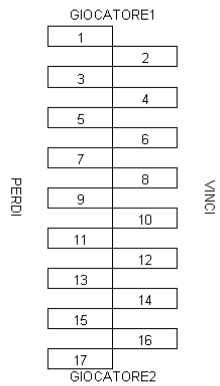


Figura 1

All'inizio del gioco giocatore1 è nella casella 0 e giocatore 2 nella casella 18 (non rappresentate in figura 1). Può iniziare l'uno o l'altro, e si possono spostare di una, due o tre caselle di seguito.

Sia d la distanza tra i due giocatori (posizione giocatore2 meno posizione giocatore1).

Inizialmente d=18.

Parto subito con due casi particolari:

1. Il giocatore2 si trova nella colonna PERDI e il giocatore1 si piazza a distanza d=6 dalla casella dell'altro giocatore (stessa colonna). Ad esempio se giocatore2 è nella casella 11, giocatore1 si piazza nella casella 11 – 6 = 5. **In questa situazione, il giocatore1 VINCE sicuramente**. Infatti, facendo riferimento al caso in cui giocatore1 sia nella casella n° 5 e giocatore2 in quella n° 11, se giocatore2 decide di muoversi in 10, giocatore1 si sposta di tre caselle, giungendo in 8 e vince (vedi figura 2); se giocatore2 decidesse di muoversi in 9, giocatore1 si sposterebbe ancora in 8 e vince (vedi figura 3); se, infine, giocatore2 si spostasse in 8, giocatore1 si piazzerebbe in 6 e vince ancora (vedi figura 4).

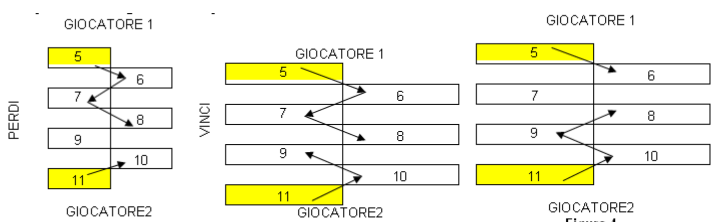


Figura 2 **Figura 3** **Figura 4**

2. Il giocatore2 è nella colonna VINCI e giocatore1 si piazza a distanza d=5 da lui (colonna PERDI). Ad esempio, se giocatore2 è nella casella 10, giocatore1 si piazza nella casella 10 – 5 = 5. Anche **in questa situazione, il giocatore1 VINCE sicuramente**. Infatti, se giocatore2 decide di spostarsi in 9, giocatore1 si mette in 8 e vince (vedi figura 5); se giocatore2 si sposta in 8, giocatore1 si piazza in 6 e vince (vedi figura 6) ; se, infine, giocatore2 si sposta in 7, giocatore1 si sposta in 6 e vince (vedi figura 7).

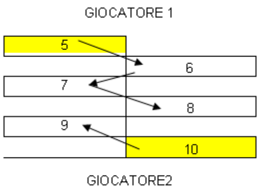


Figura 5

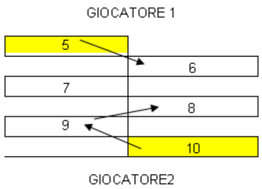


Figura 6

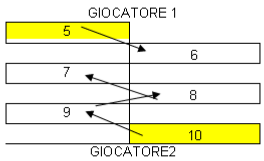


Figura 7

Premesso ciò, la strategia di vittoria da parte di un giocatore, consiste nel posizionarsi, non appena le posizioni dei due giocatori si avvicinano, a distanza 6 dall'altro giocatore, se questi è nella colonna PERDI, a distanza 5 dall'altro giocatore, se questi si trovasse nella colonna VINCI.

Ma è sempre possibile fare questo?

Supponiamo, per fissare le idee, di seguire il giocatore1.

Se dopo le prime mosse, il giocatore2 si porta a distanza d=7 oppure d=8, sarà immediato per lui decidere di piazzarsi in modo da rendere d=5 oppure d=6 a seconda della posizione di giocatore2 nella colonna VINCI o nella colonna PERDI. Se d=9, invece dovrà adottare una strategia in modo che giocatore2 si ritrovi in una delle casistiche viste sopra.

In particolare, se giocatore2 è nella colonna PERDI, a giocatore1 basterà avanzare di 3 caselle, per trovarsi a distanza d=6 esattamente come nel caso 1 visto sopra. Se invece, giocatore2 si trova nella colonna VINCI, giocatore1 deve ancora una volta avanzare di 2 caselle e portarsi a distanza 7 da giocatore2; a questo punto i casi possibili sono 3:

1. giocatore2 avanza di una casella; così facendo si porta nella colonna PERDI a distanza 6 dal giocatore1 che, quindi, come detto al precedente punto 1, vince;
2. giocatore2 avanza di due caselle; così facendo si porta nella colonna VINCI a distanza 5 dal giocatore1 che, quindi, come detto al precedente punto 2, vince;

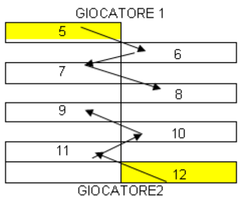


Figura 8

3. giocatore2 avanza di tre caselle, portandosi nella colonna PERDI a distanza 4 dal giocatore1 che, avanzando a sua volta di 3 caselle, vincerà ancora (vedi figura 8)!

Quindi, se giocatore2 arriva a distanza 7, 8 o 9 da giocatore1, quest'ultimo sicuramente vince. Ciò significa che, se giocatore1 riesce a portarsi a distanza d=10, questi vince sicuramente!

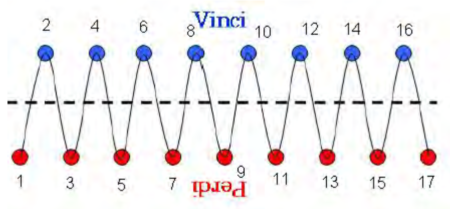
Analogamente se si porta a distanza d=14, infatti giocatore2 si sposterebbe in 11, 12 o 13, da cui giocatore1 può spostarsi a d=10.

Allo stesso modo se d=18... Cosa significa? Chi comincia perde!

Infatti, se comincia a giocare giocatore2, dopo la prima mossa si troverà a d=15, d=16 o d=17; sicuramente giocatore1 si sposta in modo da essere a d=14; giocatore2 potrà spostarsi di una, due o tre caselle e si troverà a d=13, d=12 oppure d=11; quindi giocatore1 si sposterà in modo da trovarsi sicuramente a d=10; giocatore2 si sposterà a d=9, d=8 ovvero d=7; quindi come detto sopra, sicuramente giocatore1 vincerà.

Prima di chiudere, la soluzione di ***Tartaruga***, che sta risolvendo problemi antichissimi e riprendendo RM dalle origini ad oggi:

Per la spiegazione, fare riferimento al disegno della pista qui sotto:



Andrea (A) parte da 1, il padre (P) parte da 17 e parte per primo.

P va in 15.

Se A va in 2, P va in 12

Se A va in 3, P va in 9

Se A va in 4, P va in 6, A deve andare in 5 e perde.

Se A va in 5, P va in 6 e vince.

Se A va in 6, P va in 8, A deve andare in 7 e perde.

Se A va in 4, P va in 9 (*)

Se A va in 5, P va in 6 e vince.

Se A va in 6, P va in 8, A deve andare in 7 e perde.

Se A va in 7, P va in 8 e vince.

Se A va in 5, P va in 11 (**)

Se A va in 6, P va in 8, A deve andare in 7 e perde.

Se A va in 7, P va in 8 e vince.

Se A va in 8, P va in 10, A deve andare in 9 e perde.

Se A va in 3, P va in 12

Se A va in 4, P va in 9 (vedi *)

Se A va in 5, P va in 11 (vedi **)

Se A va in 6, P va in 11 (***)

Se A va in 7, P va in 8 e vince.

Se A va in 8, P va in 10, A deve andare in 9 e perde.

Se A va in 9, P va in 10 e vince.

Se A va in 4, P va in 14

Se A va in 5, P va in 11 (vedi **)

Se A va in 6, P va in 11 (vedi ***)

Se A va in 7, P va in 13

Se A va in 8, P va in 10, A deve andare in 9 e perde.

Se A va in 9, P va in 10 e vince.

Se A va in 10, P va in 12, A deve andare in 11 e perde.

Il tutto si basa sul fatto che ci sono alcune posizioni che sono perdenti per A quando deve muovere, che sono le seguenti:

1. A si trova su un rosso, P si trova su un blu a distanza 1 (questa è ovvia, non ci sono più mosse);

2. A si trova su un blu, P si trova su un blu a distanza 2 (anche questa è ovvia, A è obbligato ad andare su un rosso a distanza 1 dal blu dove è P, non ci sono più mosse e siccome A è sul rosso ha perso);
3. A si trova su un blu, P si trova su un rosso a distanza 5 (comunque A si muova, P può muoversi in modo da ricadere in uno dei casi 1 e 2);
4. A si trova su un rosso, P si trova su un rosso a distanza 6 (comunque A si muova, P può muoversi in modo da ricadere in uno dei casi 1 e 2);
5. A si trova su un rosso, P si trova su un blu a distanza 9 (comunque A si muova, P può muoversi in modo da ricadere in uno dei casi 3 e 4);
6. A si trova su un blu, P si trova su un blu a distanza 10 (comunque A si muova, P può muoversi in modo da ricadere in uno dei casi 3 e 4);
7. A si trova su un blu, P si trova su un rosso a distanza 13 (comunque A si muova, P può muoversi in modo da ricadere in uno dei casi 5 e 6);
8. A si trova su un rosso, P si trova su un rosso a distanza 14 (comunque A si muova, P può muoversi in modo da ricadere in uno dei casi 5 e 6).

All'inizio della partita, A è su un rosso (1), e P può andare su un rosso a distanza 14, cioè il 15. Da lì in poi può forzare la posizione 5 o la 6, da cui può forzare la posizione 3 o la 4, da cui può forzare la posizione 1 o la 2.

Ovviamente lo schema si può estendere a qualunque lunghezza di pista. Le posizioni perdenti per il secondo giocatore se deve muovere sono:

- A su rosso, P su blu a distanza $8n+1$;
- A su blu, P su blu a distanza $8n+2$;
- A su blu, P su rosso a distanza $8n+5$;
- A su rosso, P su blu a distanza $8n+6$.

E qui ci fermiamo, non senza notare che nessuno ha degnato di uno sguardo il terzo problemino, estratto direttamente dal nostro libro. Il Capo sarà triste per mesi, sentitevi in colpa e scriveteci in proposito! Buona primavera, non dimenticateci e continuate a risolvere problemi anche in marzo!

5. Quick & Dirty

Siete davanti ad un tavolo, bendati. Sapete che sul tavolo ci sono N monete, e vi dicono che K indicano "testa". Il vostro scopo (sempre bendati) è quello di ottenere due sottogruppi per cui in ognuno di essi *ci sia un ugual numero di "teste"*. La formulazione è "cattiva", ma il metodo deve essere serio: non vale sbirciare o cose del genere...

> *Allora, sul tavolo ci sono $N=(K,N-K)$ monete. Dividete il mucchio in due gruppi, di K e $N-K$ monete. A questo punto, la composizione è $K=(K_1,K-K_1)$ e per l'altro gruppo $N\text{-}K=(K-K_1, N-2K+K_1)$. Capovolgiamo ora tutte le monete del primo gruppo. La sua composizione diventerà $K=(K-K_1,K_1)$, ossia avremo lo stesso numero di teste che nel secondo gruppo. "Cattiva" perché non avete la più pallida idea di quanto valga K_1.*

6. Pagina 46

Supponiamo sia:

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_n)^2+1=p(x)q(x), \qquad [1]$$

dove $p(x)$ e $q(x)$ sono due polinomi con coefficienti interi e che in entrambi il coefficiente del termine più significativo sia pari a 1. In questo caso, per ognuno dei valori $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_n$ deve essere valida una delle due ipotesi:

1. $p(x) = 1$ e $q(x) = 1$;
2. $p(x) = -1$ e $q(x) = -1$.

....

Se, ad esempio, il polinomio $p(x)$ assume il valore 1 per $x = a_i$ ma assume il valore –1 per $x = a_j$ (con $i \neq j$), allora per qualche valore compreso tra a_i e a_j, essendo $p(x)$ una funzione continua, dovrà assumere il valore 0; però questo è impossibile, in quanto il primo membro della **[1]** è sempre positivo.

Assumiamo ora che $p(x)$ e $q(x)$ assumano entrambe il valore 1 per i valori $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_n$; in questo caso, sia $p(x)-1$ che $q(x)-1$ devono assumere il valore 0 per $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_n$, e quindi sia $p(x)-1$ che $q(x)-1$ sono divisibili per il prodotto $(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)$. Siccome la somma dei gradi dei polinomi $p(x)$ e $q(x)$ deve essere uguale al grado di $(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2+1$, ne segue che $p(x)-1 = (x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)$ e che $q(x)-1 = (x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)$.

Inoltre, considerando l'identità:

$$\begin{aligned}(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2 &= p(x)q(x)\\ &= [(x-a_1)\ldots(x-a_n)+1][(x-a_1)\ldots(x-a_n)+1]\\ &= (x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2 + 2(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)+1,\end{aligned}$$

Si conclude che deve essere:

$$(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n) = 0.$$

Ma questo è impossibile; da cui, si conclude che né $p(x)$ né $q(x)$ possono assumere il valore 1 per tutti gli $x = a_i$.

Esattamente nello stesso modo si mostra che né $p(x)$ né $q(x)$ possono assumere il valore -1 per tutti gli $x = a_i$.

Quindi, la fattorizzazione proposta per $(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2+1$ come prodotto di due polinomi a coefficienti interi è impossibile.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 La Vita, l'Universo e Tutto Quanto – [001] La Vita

Il titolo millanta un articolo in tre parti che non siamo sicuri di scrivere: per il momento, ci accontentiamo di affrontare la prima, e già è un guaio notevole. Non lamentatevi, sempre meglio di "Addio, e grazie per tutto quel pesce".

Cominciamo con una domanda da serata estiva (qui sembra cominciata la bella stagione) scevra da preoccupazioni di esaurimento degli alcolici: secondo voi quanto ha contribuito la *velocità* dell'evoluzione tecnologica al *mancato* sviluppo di buone idee? OK, è un'asinata, ma abbiamo trovato un esempio. Un bellissimo (e semplicissimo) concetto matematico ha ricevuto impulsi solo da un gruppo estremamente ristretto di ricercatori; quando la Legge di Moore[16] ha fatto sì che anche il verduriere all'angolo avesse capacità di calcolo comparabili con *Deep Blue*, ci si è interessati più all'aspetto grafico che al "calcolo" soggiacente: suppergiù la stessa cosa che è successa con i frattali, solo che questi ultimi, a quanto pare, hanno sotto una matematica più facile: tant'è che, se Lagrange si vantava di aver scritto un libro di geometria senza alcuna figura, noi alla fine dovremmo poterci vantare di aver scritto un pezzo di matematica senza alcuna formula (ma con un mucchio di figure, altrimenti la nostra Linotype si addormenta).

Al momento non ricordo (Rudy speaking) se la cosa sia stata pubblicizzata su queste pagine, ma qualche tempo fa ci era stato chiesto quale fosse l'espressione inglese preferita: gli altri due redattori si erano accordati sul verbo *"to belong"*, per la sua quasi completa intraducibilità; io, mi ero attaccato a *"...you are urged to..."*: la prima volta che l'ho trovato, con la mia scarsa conoscenza dell'inglese, ho dedotto di dover fare qualcosa con una certa *urgenza* e il risultato è di sicuro valsa la pena: se non avessi palesemente sbagliato traduzione, probabilmente oggi questa rivista non esisterebbe[17].

Allora, *you are urged to* (nel senso di Rudy) scaricarvi la ***Mirec Cellebration*** dal sito http://www.mirekw.com/ e non farci niente: perché proprio questo è il problema. Quella roba fa troppo, quindi forse meglio cominciare con un po' di teoria.

L'idea originale di ***John Horton Conway*** era di trovare un "gioco di simulazione" non troppo complesso in grado di partire da una configurazione semplice di "cellule" e, applicando alcune regole basilari di nascita, morte e sopravvivenza, simulare delle popolazioni di animali (dedite unicamente alla nascita, morte e sopravvivenza) per scoprire delle leggi soggiacenti a queste popolazioni di automi.

A titolo di premessa, specifichiamo che il tutto si svolge in un reticolo ortogonale, con il tempo quantizzato in "cicli". **FERMI**[18]!

Le prime leggi che ha trovato sono doppiamente ingannevolmente[19] semplici:

---

[16] No, non ve la citiamo. Ci limitiamo a dire che:

1. Non sappiamo se il Moore del quale parleremo è lo stesso tizio, siamo in ritardo e non abbiamo il tempo di cercarlo.
2. Nei giorni scorsi, la legge è stata **doppiamente** violata: hanno costruito un transistor in cui lo strato intermedio è formato da *un solo* atomo: quindi tanto per cominciare tra diciotto mesi non lo dimezzate; secondariamente questo risultato era atteso per il 2020. Quindi Moore aveva due volte torto, in due sensi diversi. Sondaggio: siete felici o tristi, che avesse torto?

[17] Me l'ha detto Martin Gardner.

[18] Diremo sovente questa parola, significa che non dovete distrarvi, per il momento, e non dovete pensare a reticoli isometrici, con varie simmetrie, quasi-regolari o cose del genere: prima arrivate alla fine, poi cominciate a fumare roba strana per inventarvi le variazioni sul tema.

[19] Tutti conoscete il mio disamore per gli avverbi di modo: il fatto che ne abbia usato due di seguito dovrebbe mostrarvi che la situazione è grave, dal mio punto di vista

1. **Sopravvivenza**: ogni cella con due o tre celle vicine sopravvive sino al prossimo ciclo
2. **Morte**: Ogni cella con quattro o più vicini muore per sovrappopolazione.
3. **Nascita**: Ogni cella vuota con esattamente tre vicini "vivi" genera una nuova cella

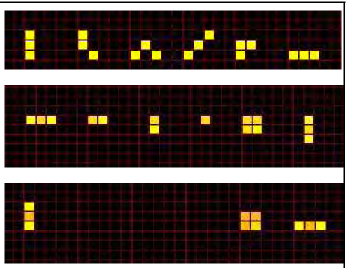
Dicevamo, "doppiamente": e il primo inganno è quello (quando ero piccolo) che mi ha fermato: "vicini", in che senso?

La domanda ricorre sovente, in matematica ricreativa: quando lavorate su una scacchiera, i "vicini" possono essere quelli raggiungibili da una mossa di Re (ossia, ogni cella ha otto "vicini") o quelli raggiungibili da una "1-Torre" (ossia da una mossa di una casella di Torre)(FERMI[20]!); per fortuna, riusciamo ad inventarci una classificazione: si definisce "metrica di Moore" (quello di cui sopra, forse) quello che si trova in una posizione raggiungibile da una mossa di Re; quello raggiungibile da una mossa di "1-Torre" viene definita "metrica di von Neumann".

Il secondo inganno è che, quando hanno inventato questa roba, il computer più veloce era più lento del vostro orologio digitale (quello "vintage", con i numeri rossi).

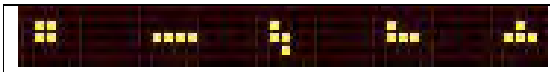
E questo è il motivo del "FERMI!" quando avrete scaricato il Mirek Cellebration: se cominciate a esplorarlo, rischiate di perdervi esattamente come un giovincello che, volendo capire i numeri complessi, scarica FractInt. Quindi, siete *urged* di finire di leggere il pezzo, prima di giocarci.

Se mettete ***una cellula***, con le regole date, in una metrica di Conway, è abbastanza evidente che al prossimo ciclo muore; la stessa cosa succede per ***due cellule*** (in qualsiasi disposizione); ma già per ***tre cellule*** succedono delle cose strane: se le mettete in diagonale spariscono al primo colpo, ma quelle in verticale (o in orizzontale) cominciano a saltellare; il che dovrebbe convincervi ad esplorare altre configurazioni: ben sapendo che non lo farete mai, lo abbiamo fatto noi per voi. Trovate il tutto nella figura a fianco. Scusate la grafica, ma trattasi di tre snapshot da MC.



8 *La sorte dei "trimini"*

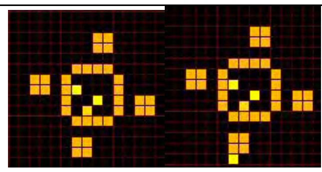
Siamo sicuri che, a questo punto, avete scaricato lo scaricabile e vorrete provare con ***quattro cellule***: bene, vi invitiamo a fare le prove con quelli indicati nella figura a fianco: se quella specie di "semaforo" dato dalle tre cellule in linea vi aveva interessato, provate a vedere questi.



9 *Qualcuno "fa lo strano"*

Per chi non ha provato: il primo "dorme", dal secondo al quarto si stabilizzano in una specie di esagono (ma il quarto ci mette un passo in più, perché al primo passaggio diventa il terzo), e l'ultimo riesce a diventare ben *quattro* "semafori". La cosa fa pensare che esistano delle forme "semplici" stabili (o, quantomeno, oscillanti): il che, dovrebbe far venire il sospetto che ci sia qualcosa sotto. Ma, come prima, FERMI!

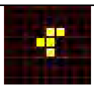
Adesso vi spieghiamo dove sta il guaio, e anziché complicate formule matematiche vi facciamo un esempio: prendete le due forme del disegno di fianco: una piccola differenza, ma provate a lanciarle... Visto? Qui, "caotico" è un eufemismo, e siamo sicuri che riuscirete a trovare casi più complicati.



10 *Per un punto, guai...*

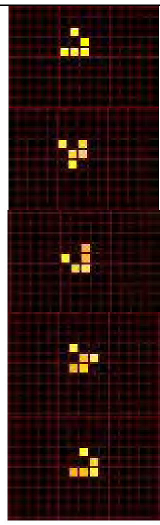
[20] Non cominciate a pensare agli n-Re o genericamente a n-Pezzi: non distraetevi. Concesso pensare agli "1-Alfieri", ma solo per accorgersi che è un'idea stupida.

Insomma, il motivo di tutti "FERMI!" è solo il fatto che qui, piuttosto che partire per la tangente a esaminare casi strani con diecimila punti, ci pare più interessante stare a guardare il comportamento "nel piccolo e semplice": se volete vedere come si fa a complicarsi la vita, provate a far girare una cosina semplice come l'aggeggio che trovate in figura qui a fianco, e preparatevi a vedere una forma di stabilizzazione (con molti bistabili) dalle parti del millesimo ciclo.



11 *Sembra semplice...*

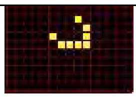
Bene, se avete provato, dalle parti della centesima generazione dovreste aver visto qualcosa di strano: probabilmente seccato dall'agitazione dei vicini (nel senso di Moore), un tizio ha deciso di andarsene, e lo ha fatto con notevole signorilità: vedete il suo strano movimento nella figura qui a fianco. Insomma, esistono degli oggetti che riescono a "spostarsi", rigenerando sé stessi in una qualche direzione. La cosa ha colpito talmente i "cellulatori" che tanto per cominciare hanno dato un nome (***gliders***[21]) a questi oggetti; secondariamente, essendo questo il *glider* più semplice, è stato proposto come logo della comunità hacker; infine, terminati i festeggiamenti, qualcuno ha cominciato a svilupparci sopra una teoria.



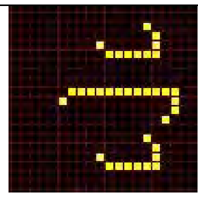
12 *Non gioco più!*

Il nostro hacker viaggia con relativa calma, nel senso che ci mette quattro tick per spostarsi (o meglio, ricostruirsi identico) di una casella (in diagonale); evidentemente, nessun oggetto può spostarsi più velocemente di una casella per ogni click, che rappresenta una velocità limite, e le velocità limiti nei sistemi vengono di solito indicate con il poetico nome di *velocità della luce*; possiamo, a questo punto, dire che l'hacker si muove a *un quarto della velocità della luce*.

Adesso, visto che qualche "divertissement" ve lo siete meritato, vediamo come sia facile complicare le cose: prendete l'hacker, aggiungete un puntino in alto a sinistra rispetto alla coda da tre e state a vedere cosa succede... comincia una buriana incredibile, con sei hacker che se ne vanno in tutte le direzioni! La via sembra scarsamente promettente, ma se portate la barra verticale da due a tre celle, allungate la barra orizzontale da tre a quattro celle e mettete la "codina" in alto a sinistra della barra orizzontale (disegno? OK, disegno) e lo lanciate, vi accorgete che questo aggeggio viaggia a *metà della velocità della luce!* La matematica ve la trovate voi, ma Conway ha dimostrato che questa è la massima velocità raggiungibile in orizzontale (in diagonale, a quanto ci risulta, il più veloce continua ad essere l'hacker). Se volete giocare con le astronavi, la cosa più facile da fare è allungare la base, ma non troppo: qui di fianco trovate una nave con una base da dodici celle che, per stare assieme e muoversi, ha bisogno di altre due navi di scorta: adesso provate a lanciarla e considerate che le due navi di scorta in inglese si chiamano *escort*; e che a me il movimento ha fatto l'impressione di una cosa che rimbalza sulle pareti di un tunnel. Propongo di chiamarlo "effetto Gelmini".



13 *Veloce, il ragazzino...*

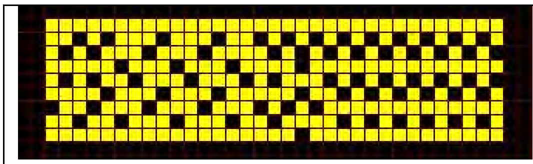


14 *DUE cattiverie.*

Bene, se avete finito di divertirvi, cominciamo con le cose un po' più serie; ***Edward Moore*** (sempre quello) si è posto un'interessante domanda, che è un po' il "contrario dei gliders": esiste il ***Giardino dell'Eden***? In questo ramo della matematica (in realtà, si direbbe, in tutti quelli nei quali ci mette lo zampino Conway) sembra che siano specialisti nell'inventare bei nomi agli oggetti, più che a dimostrare cose; comunque, si definisce "Giardino dell'Eden" una configurazione che *non può essere raggiunta da alcuna*

[21] Vi ricordiamo che in tempi storici avevamo avuto problemi con un termine simile, *glide reflection*, brillantemente tradotto da Zar con *glissoriflessioni*. Siccome "glissatore" ci pare bruttissimo, lo chiamiamo glider.

configurazione iniziale; c'è voluto un po' di tempo, ma alla fine ***Roger Banks*** ce l'ha fatta: sicuri di dirvi una cosa nota (sappiamo che vi siete precipitati a cercarlo, e avete dimostrato che esiste), trovate in figura qui a fianco lo schema: certi che lo copierete, non vi diciamo come va a finire, in questo caso.



15 *Il primo giardino dell'Eden*

...Ma vi siete accorti che siamo all'*ottava figura?* In effetti, una delle cose più seccanti di tutto ciò è che, a quanto pare, ancora nessuno si è inventato un modo semplice per *descrivere gli automi*!

Il Che Non È Bello. Sono state fatte delle proposte, ma non hanno mai raggiunto la classe degli standard: tant'è che il formato "mcu", utilizzato da MC, è pubblico, ma proprietario.

In effetti, se guardate, di cose da descrivere ce ne sono un mucchio, e un mucchio di gente (complicando l'ambiente prima che fosse stabilizzata quantomeno la base: è questo che ci secca) è partita in quarta ad inventarsi delle cose; per fare un esempio semplice, ***Brian Silverman*** (nessuna parentela con Doc) ha deciso che a lui servivano *tre* stati (vivo, morto, fantasma), e si è inventato il "Brian's Brain" (se proprio volete vederlo, lo trovate nei "Must See" di MC).

Inoltre, descrivere il *pattern* iniziale sembra quasi impossibile: a quanto pare, un "dimensioni della zona interessata e RLE del contenuto" a certa gente sembra una cosa troppo semplice.

Insomma, il gioco vale la connessione (e il tempo necessario per scaricarlo); e non abbiamo parlato ancora dell'Universo, che andrebbe quantomeno descritto. Ma su quello, c'è piuttosto poco da dire. Qualche riga (e qualche figura in powerpoint) in testa al prossimo pezzo in merito, se mai lo scriveremo.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms