Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 157 – Febbraio 2012 – Anno Quattordicesimo

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM156 ha diffuso 2863 copie e il 29/01/2012 per Google eravamo in 130'000 pagine.

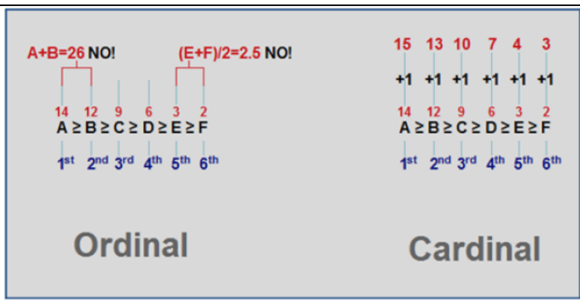
Michael Johansson (http://www.michaeljohansson.com/) ha un concetto di ordine che ci affascina. Considerato che il *Math Manor* copre un'area di 1,6 metri quadrati, Rudy ha alcune idee su chi debba occuparsi dell'arredamento.

1. Il Salto del Leone

«Dicovi che molte cose lasciai e non dissi,
benché fussino molto dilettevoli,
solo perché i' non vedea modo poterle
dire chiaro e aperto come cercavo dirle,
e in queste durai fatica non poca
ad esprimerle e farmi intendere.»

L'anno è acconcio al parlar di cardinali.

Detta così, sembrerebbe quasi un'invocazione a favore d'un nuovo concilio ecumenico o, ancor più foscamente, una tetra profezia auspicante conclavi. In realtà, nonostante l'accento aulico, quel che si vuol far notare è che l'anno multiplo di quattro (nonché bisestile) offre il destro per parlare della differenza tra numeri ordinali e numeri cardinali[1]. Differenza tanto semplice quanto spesso fraintesa.



1 *Ordinali e Cardinali (da un manuale americano per Product Managers)*

L'uso confuso (se ci passate la rima), più frequente e comune è quello regolarmente perpetrato dai telecronisti sportivi. Quando il centravanti in acrobatica rovesciata mette la palla in rete, se il cronometro (peraltro ormai sempre bene in vista sul video) segna 23:35, il tele-giornalista non mancherà mai di registrare l'evento comunicando agli spettatori che il prode calciatore ha fatto goal al *ventitreesimo* minuto. Del resto, è proprio quel numero "23" che vede a video che lo attrarre fatalmente, e non c'è niente di più naturale che trasformare un 23 in un ventitreesimo. La cosa è viepiù frustrante perché una simile abitudine ha un evidente punto debole, anche se bisogna attendere un po' prima che si manifesti: punto debole dato dal fatto che può capitare, talvolta, che il centrattacco di cui sopra (o l'ala sinistra, o lo stopper, o il centromediano metodista) possa far gonfiare la rete e mandare in deliquio le gradinate abbastanza rapidamente, ad esempio quando il cronometro segna solo 0:48. L'evento dovrebbe mettere in crisi l'inveterato processo di evirazione del cardinale per ottenere l'ordinale richiesto: neanche il più inesperto dei telecronisti cadrà nella trappola di dichiarare la rete come avvenuta allo *zeresimo* minuto, e probabilmente dovrà, vista la situazione eccezionale e contorta, costringersi a dichiarare come *primo* anche quello strano minuto che sul cronometro inizia per "0", palesando la contraddizione, o quantomeno l'assenza di biunivocità. E invece no, non è così facile incastrare i telecronisti: quella rete passerà nell'etere come un "incredibile goal al *quarantottesimo* secondo".

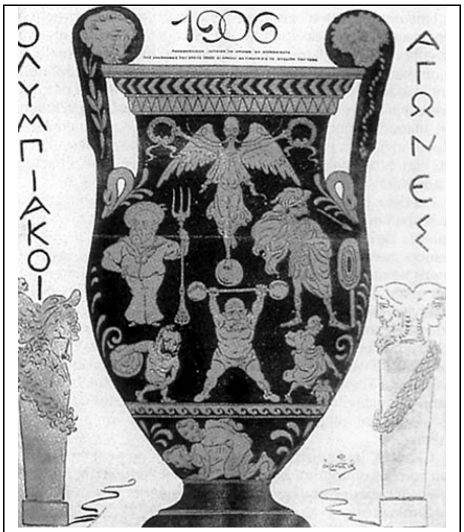
Esistono però altre situazioni un po' meno banali che tendono trappole impreviste: siamo testimoni diretti di un "mistero da ufficio" che ha tenuto in imbarazzo per una mezza giornata alcuni solerti impiegati d'una biblioteca pubblica. Era necessario, quel dì, svolgere un noioso lavoro di catalogazione, che consisteva nel redigere delle schede

[1] A costo di far assurgere a livello di monomania quel che è ormai un tormentone ipernoto ai lettori di RM (sì, ci riferiamo alle puntigliose notiziole sui calendari), ci pregiamo ricordare che "anno multiplo di 4" e "bisestile" non sono sinonimi. Chiedetelo al 1900, se non ci credete, oppure diamoci appuntamento fra ottantotto anni.

(fisiche, su cartoncino, non virtuali ed elettroniche come ormai è d'uso) per un certo numero di libri; il lavoro era già iniziato in precedenza, e la solerte dattilografa, alla ripresa mattutina del lavoro, si era ben appuntata che la prima scheda lavorata aveva il numero identificativo 50. Al momento d'interrompere il lavoro, dopo ore di solerte digitazione, si accorge soddisfatta d'aver completato la scheda numero 100, che marcava con autorità di cifra tonda il momento giusto per la pausa: con disciplinata attenzione, prima di staccare esegue il controllo di rito, e si mette a contare le schede lavorate che, ovviamente, si aspettava fossero 100–50=50. Trovandone 51, è iniziata la caccia alla fantomatica scheda doppia, che si rivelava davvero difficile da scovare, nonostante l'intervento dei colleghi d'ufficio.

Forse l'aneddoto non è perfettamente calzante per discutere della differenza tra ordinali e cardinali, ma il sospetto che il fraintendimento di fondo abbia dato un suo ragionevole contributo[2] è forte. E comunque, la sottile differenza tra cardine e ordine a volte si nasconde nei posti più impensati. Come si diceva all'inizio, il 2012 è anno multiplo di 4, e da più di un secolo a questa parte ciò significa che è anno di Olimpiadi. Londra freme da molti mesi, in attesa dell'estate[3], e l'evento, come forse qualche lettore ricorda, è uno di quelli che solitamente appassiona anche noi[4]. Ciò nonostante, non possiamo fare a meno di rilevare che la frase appena da noi sottoscritta, ovvero quella che dichiara che "il 2012 […] è anno di Olimpiadi", è una frase formalmente scorretta.

La giusta espressione dovrebbe essere "il 2012 è anno di Giochi Olimpici", per la buona ragione che per "olimpiade" si intende non i giochi in sé, e neppure l'anno in cui i giochi olimpici si tengono, ma il periodo di quattro anni che intercorre tra una celebrazione di giochi e l'altra. Non sono però l'accendersi o lo spegnersi del sacro fuoco di Olimpia negli stadi a definire l'inizio o la fine delle Olimpiadi. A ben vedere, il termine è puntualmente definito dal CIO, il Comitato Olimpico Internazionale: un'Olimpiade inizia il 1° Gennaio dell'anno in cui si tengono i Giochi Olimpici Estivi; ergo, anche se a Londra non ci sono ancora atleti che corrono e saltano, siamo già nel bel mezzo della Trentesima Olimpiade. La maniera migliore, anche se un po' triste, per ricordarsi della differenza che intercorre tra Olimpiadi e Giochi Olimpici è forse proprio rammentare che ben tre Olimpiadi sono rimaste orfane dei rispettivi giochi: sono la Sesta, che aveva programmato i suoi Giochi a Berlino, nel 1916, ma che la Grande Guerra cancellò impietosamente; la Dodicesima, assegnata inizialmente a Tokio, poi ad Helsinki, ma che comunque non vide atleti gareggiare nel 1940, a causa della Seconda Guerra Mondiale; e della sua consorella Tredicesima, che ebbe per la medesima causa i suoi Giochi cancellati, e la cui sede prevista era proprio la capitale britannica. Londra ebbe comunque i Giochi successivi, quelli della Quattordicesima Olimpiade, nel 1948: e siccome aveva avuti già anche quelli della Quarta, nel 1908, in quest'inizio di XXI secolo si guadagna il primato assoluto di città ospite di ben tre edizioni dei Giochi.



2 *I «Giochi Intercalari» di Atene nel 1906*

---

[2] Del resto, confessatelo: siete o non siete anche voi caduti nel tranello la prima volta che vi hanno proposto il classico quiz: "State correndo una maratona, e siete in forte rimonta: ad un certo punto riuscite a superare il secondo. In che posizione vi trovate?"

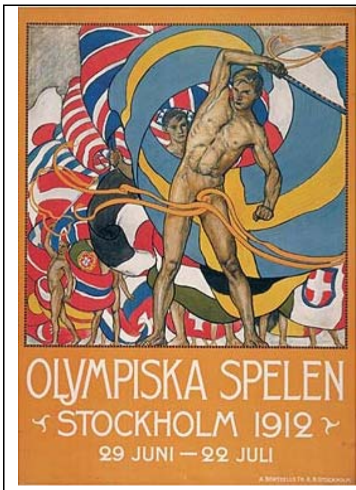
[3] Dal 27 luglio al 12 agosto. Preparatevi, o quantomeno preparate i telecomandi.

[4] Parlammo diffusamente di Olimpiadi anche nell'agosto 2008, su RM115, in occasione del compleanno di Kac: "La Ventinovesima e la Tredicesima Olimpiade", e un po' anche in RM063, "Una Vita da Mediano", celebrando Harald Bohr.

A complicare ulteriormente la relazione tra "Giochi Olimpici" e "Olimpiadi" intervengono anche i Giochi Intercalari del 1906. Nonostante il buon successo dei primi giochi del 1896, le edizioni subito successive, quella del 1900 a Parigi e soprattutto quella del 1904 a St. Louis, furono ampiamente oscurate dalle coincidenti Esposizioni Universali, che le inglobarono togliendogli visibilità. Come ulteriore disdetta, anche Roma – che era inizialmente stata designata come città ospite dei Giochi del 1908 – aveva in programma per quell'anno una grandiosa Esposizione Universale. Il CIO e lo stesso De Coubertin erano molto preoccupati della cosa, e si studiò il modo per "recuperare lo spirito del 1896". Si giunse pertanto all'idea di organizzare dei giochi intermedi (o Intercalari, appunto) già nel 1902, ma il tempo per organizzarli era davvero troppo poco. Ci si riuscì invece nel 1906, in occorrenza del decennale dei giochi della Prima Olimpiade, e la città organizzatrice fu infatti di nuovo Atene. Si disputarono gare e vennero assegnate 21 medaglie, ma poiché i Giochi Intercalari non si ripeterono mai più, l'edizione del 1906 (la "treemezzesima"?) è usualmente (e ufficialmente) non considerata nel medagliere dei Giochi Olimpici[5].

Sempre giocando con Olimpiadi e numeri, grazie al fatto che un secolo è composto di cento anni e che 100 è un multiplo di 4, si può da qualche tempo fare dei confronti tra Giochi che hanno lo stesso cardinale (modulo 100). Sia Atlanta che Atene possono fregiarsi del numerale '96, mentre Sydney e Parigi sono affratellate da tondo '00, e così via… St.Louis è gemellata anch'essa con Atene (che pare volersi imparentare solo con città degli USA), mentre Pechino divide lo '08 con Londra. E, forse proprio per evitare che Atene sia la sola ad avere due gemellaggi, quest'anno Londra si coniugherà anche con Stoccolma, città ospite dei Giochi del 1912.

I giochi di Stoccolma dettero nuovo lustro al concetto di Olimpiade Moderna: gli svedesi fecero un ottimo lavoro d'organizzazione, vennero introdotte novità altamente tecnologiche come il fotofinish, furono finalmente ammesse ufficialmente[6] alle gare le donne, e comparvero i primi atleti russi. Fu introdotto il pentathlon moderno, ma fu proprio nelle gare di pentathlon[7] classico e di decathlon che apparve l'eroe di quell'edizione, Jim Thorpe, pellerossa che il re di Svezia chiamò "il più grande atleta del mondo", e che venne poi denunciato per "*professionismo*" dalla stessa federazione USA, perché in precedenza aveva guadagnato ben sessanta dollari giocando in una squadra di football americano. Thorpe finì preda dello scandalo e morì praticamente in miseria; perfino De Coubertin, rigorosissimo assertore del principio del dilettantismo, ritenne eccessiva la punizione che colpì l'atleta pellerossa.



3 *Stoccolma 1912*

Ma ci fu chi a Stoccolma non riuscì a qualificarsi. E se apparentemente una non-qualificazione non dovrebbe fare notizia, in questo caso particolare l'assenza segnava davvero la fine di un'epoca. Se si sfoglia un medagliere generale di tutti i Giochi Olimpici finora disputati, l'atleta più medagliato risulta essere Michael Phelps, con la bellezza di 14 medaglie d'oro[8]. Dietro di lui ci sono quattro atleti[9]

[5] Ed è anche per questo che Londra rimane – sempre che non succeda qualche imprevisto da qui a luglio (sono autorizzati gli opportuni gesti apotropaici) – la sola città con tre edizioni dei Giochi (1908, 1948, 2012); altrimenti dovrebbe condividere il primato con Atene (1896, 1906, 2004).

[6] Atlete si erano già viste sporadicamente nelle edizioni precedenti, specialmente nel tennis, ma in via sostanzialmente ufficiosa.

[7] Gara che non esiste più nei Giochi.

[8] E, visto che continua a nuotare come un dannato, non è affatto detto che il computo sia definitivo, anzi.

[9] Si tratta di Paavo Nurmi, Larisa Latynina, Mark Spitz e Carl Lewis.

con 9 ori: senza voler minimamente sminuire né Phelps né gli altri, è però inevitabile registrare che buona parte di quegli ori derivano da gare a squadre: staffette per gli atleti e i nuotatori, gare di squadra per i ginnasti. Ma prima di loro (se si considerano validi i Giochi del 1906), o subito dietro di loro (se non li si vuole tenere in conto), svetta l'assoluta individualità di Ray Ewry, che da solo si guadagnò 10 od 8 ori del tutto individuali.


4 *Ray Ewry*

Ewry, da bambino, era stato colpito da poliomielite. Costretto a letto per buona parte della prima infanzia, riuscì piano piano a rimettersi. Raccontano che quando riuscì con fatica a restare in piedi, in equilibrio, da solo, stese un filo di lana lungo il pavimento della sua stanza, per esercitarsi a saltarlo. Mese dopo mese, settimana dopo settimana, giorno dopo giorno il filo di lana veniva alzato un po', così Ray poteva provare a saltarlo e a prendere familiarità con le sue gambe e il suo equilibrio. Con l'andare del tempo, Ewry sviluppò una capacità del tutto unica di saltare quel filo anche all'aperto, così come faceva nella sua stanza, senza nessuna rincorsa.

Dal 1900 al 1912 i "salti da fermo" sono stati una disciplina olimpica dell'atletica leggera. Erano suddivisi in salto in alto, salto in lungo e salto triplo[10], tutti da effettuarsi senza la minima rincorsa, appunto "da fermo". Ray Ewry vinse la medaglia d'oro in tutti e tre i titoli nel 1900 e nel 1904, e in tutte e due le gare residue del 1908. Un totale di otto allori olimpici, ai quali si possono – anzi, obiettivamente si devono – aggiungere anche le due medaglie d'oro ai Giochi Intercalari del 1906, che portano a dieci il totale dei titoli. Tutti individuali e, almeno fino all'assenza del 1912, quando il salto in alto e il salto in lungo vennero comunque disputati senza di lui, si trattava semplicemente di *tutti* i titoli olimpici fino a quel momento assegnati nei salti da fermo.

È passato così tanto tempo – più di un secolo, appunto – che al giorno d'oggi è difficile considerare vere e proprie discipline sportive quei salti dal sapore così antico. Quando se ne parla, sono più i sorrisi di sufficienza che le espressioni di ammirazione che si disegnano sui volti degli astanti; eppure i meri numeri dovrebbero suscitare ben più che rispetto. Ray Ewry segnò un record di 10,58 metri nel salto triplo; di 3,47 nel salto in lungo e di 1,65 nel salto in alto. Centosessantacinque centimetri saltati con lo stile che si usava anche nel normale salto in alto con rincorsa in quegli anni[11], con una sorta di sforbiciata delle gambe e il busto ben dritto sopra il bacino; sono una quota superiore all'altezza di molti esseri umani, che quindi potevano essere facilmente "saltati" da un'atleta come Ewry[12].

[10] Il "salto triplo da fermo" si gareggiò solo a Parigi 1900 e St.Louis 1904.

[11] Il salto in alto con stile "ventrale", quello più efficiente fino all'arrivo nel 1968 della rivoluzione del Fosbury, cominciò ad apparire seriamente proprio alle Olimpiadi del 1912, per merito di George Horine.

[12] Si parla di più di un secolo fa, quando l'altezza media degli uomini era abbastanza più bassa dell'attuale. In ogni caso, anche se non è più disciplina olimpica, il "salto in alto da fermo" viene comunque occasionalmente praticato, e se eseguito con la variante Fosbury (sostanzialmente partendo con le spalle rivolte all'asticella, facendo un tuffo all'indietro) fa ottenere dei risultati ancora più strabilianti. Il record mondiale attuale è di uno svedese, Rune Almén, ed è pari a 1,90 centimetri. Il che dimostra che quasi tutta la popolazione della Terra può essere "saltata a piè pari" da certi atleti.

L'accenno a "saltare" persone intere può apparire peregrino, come pietra di paragone; ma in realtà serve a mostrare come l'accenno ad una caratteristica riportata nelle biografie di un antico personaggio possa non essere del tutto una perdonabile sbruffonata, come alcuni critici sembrano ritenere. Del resto, il personaggio in questione era talmente geniale, creativo, poliedrico e imprevedibile che, una volta ripercorsa la sua vita, l'idea che potesse, come Ray Ewry, saltare a piè pari una persona all'impiedi non dovrebbe stupire più di tanto.

L'autore del salto leonino era appunto un Leone, anche se il nome felino se lo dette da sé, a riprova del suo carattere davvero effervescente e apertamente privo di false modestie. Quello che gli dettero i genitori era invece un più placido Battista; e lui certo non vi rinunciò, tenendoselo caro tanto quanto quello che si era scelto da solo, ed è quindi con entrambi i nomi accoppiati che è passato alla storia.

5 *Leon Battista Alberti*

Leon Battista Alberti nacque a Genova il 18 Febbraio 1404, ma la sua famiglia era d'origine fiorentina. A dire il vero, il termine stesso di "famiglia" si adatta solo parzialmente al piccolo Battista, del quale si sa con certezza solo che fosse figlio di Lorenzo Alberti, mentre della madre non si sa nulla, e si ritiene perlopiù che fosse un figlio illegittimo cresciuto dal solo padre. Padre che, del resto, ebbe anch'esso una vita intensa e movimentata: gli Alberti erano fiorentini assai benestanti, mercanti e banchieri. Avevano filiali della loro attività in molte città dell'Italia settentrionale, e la fama e la ricchezza indusse Lorenzo a tentare anche la carriera politica. Gli intrighi che sempre sono necessari per una simile avventura erano probabilmente troppo complicati per lui, che finì bandito dalla città nel 1402: si rifugiò per questo a Genova, dove vide la luce Leon Battista.

Genovese d'origini fiorentine, Battista sarà destinato comunque a girare e a vivere per molte delle città più importanti della penisola. Da Genova a Venezia, da Venezia a Padova, e poi Mantova, Rimini, Firenze, Roma, Ferrara… la varietà delle città che lo hanno visto ospite fa il pari solo con le attività in cui in vita dimostrò di eccellere: architetto, matematico, scrittore, crittografo, umanista, linguista, filosofo, archeologo, musicista e, a quanto pare, anche valente atleta.

La sua caratteristica migliore sembra pertanto essere proprio quella dell'universalità: non a caso Francesco de Sanctis, nella sua celeberrima *Storia della Letteratura Italiana*, gli riserva delle frasi particolarmente lusinghiere:

> «*Un gran mutamento era però avvenuto nella letteratura volgare. Il mondo ascetico-mistico-scolastico del secolo passato non era più potuto risorgere di sotto a' colpi del Petrarca e del Boccaccio, ed era tenuto rozzo e barbaro, e continuava la sua vita come un mondo fatto abituale e convenzionale, a cui è straniera l'anima. Al contrario era in uno stato di produzione e di sviluppo il mondo profano, la "gaia scienza", e dava i suoi colori anche alle cose sacre. Le laude erano intonate come i rispetti, e i misteri acquistavano la tinta romanzesca delle novelle e i romanzi allora in voga […]. Il Pulci, il Boiardo, il Poliziano, il Pontano e tutti gli eruditi e i rimatori di quell'età non sono che frammenti di questo mondo letterario, ancora nello stato di preparazione senza sintesi. Ci è un uomo che per la sua universalità parrebbe volesse abbracciare tutto il Quattrocento: dico Leon Battista Alberti, pittore, architetto, poeta, erudito, filosofo e letterato; fiorentino di origine,*

> *nato a Venezia*[13]*, educato a Bologna, cresciuto a Roma e a Ferrara, vivuto lungamente a Firenze accanto al Ficino, al Landino, al Filelfo; caro a' papi, a Giovan Francesco signore di Mantova, a Lionello d'Este, a Federigo di Montefeltro, celebrato da' contemporanei come "uomo dottissimo e di miracoloso ingegno": "*vir ingenii elegantis, acerrimi iudicii exquisitissimaeque doctrinae*", dice il Poliziano. Destrissimo nelle arti cavalleresche, compì i suoi studi a Bologna dalle lettere sino alle leggi, datosi poi con ardore alle matematiche e alla fisica.*»

Non certo un uomo comune, insomma. La chiave per interpretare una mente abitata da così vasti e profondi interessi sta verosimilmente proprio in ciò che accomuna quasi tutte le discipline umane: il metodo, la metrica, la ricerca delle regole. In quasi tutte le sue opere, pur se dedicate ad argomenti diversi, si riesce a riconoscere una passione intensa verso "ciò che sta sotto", la sostanza stessa dell'arte, a patto che questa possa essere tradotta e riepilogata in un insieme canonico di regole. I "canoni" sono infatti le sue opere più caratteristiche: scrisse trattati su quasi tutti gli argomenti che più lo interessavano: "De Statua" sull'arte di scolpire, "De Pictura", "De re aedificatoria", che forse non chiamò "De Architectura" per rispetto all'omonimo trattato di Vitruvio, che molto rispettava. Del resto, è soprattutto come architetto che ancor oggi viene ricordato: ma scrisse anche "De Componendis Cifris", ove illustrava i metodi per la crittografia, "De Lunularum Quadratura", sulla quadratura delle aree delle lunule, che a dispetto della quadratura del cerchio erano note anche agli antichi[14]; e perfino un saggio sul cavallo, "De Equo Animante" e un inevitabile "De Amore".

6 *Particolare della facciata di Santa Maria Novella, Firenze*

Le sue opere architettoniche rimangono impresse in tutti i libri di storia dell'arte: già al liceo si studiano i tre livelli diversi di bugnato di Palazzo Rucellai e la facciata di Santa Maria Novella a Firenze; il tempio malatestiano di Rimini, la chiesa di Sant'Andrea a Mantova. Quando il divieto di ritornare a Firenze decadde, Leon Battista Alberti si affiancò al Brunelleschi, e ne condivise fin dal primo momento l'intenzione di recuperare e rimodernare l'arte classica degli antichi, senza soluzione di continuità.

Ma, ogni tanto dobbiamo ricordarlo a noi stessi, questa non è una rivista d'arte, e tanto meno un periodico sportivo. L'aspetto che ci porta a celebrare la ricorrenza dell'anniversario della nascita di Leon Battista Alberti dobbiamo ricercarlo più nelle sue doti di scienziato, e soprattutto di matematico, che nella sua abilità suprema di erigere edifici maestosi o nella sua imprevedibile capacità di saltare a piè pari oltre un uomo in piedi.

E invero ci sarebbero cose da dire, sulla sua predisposizione e sull'amore che riservava alla matematica e ai numeri. Fu tra i primi a capire l'importanza, sia dal punto di vista

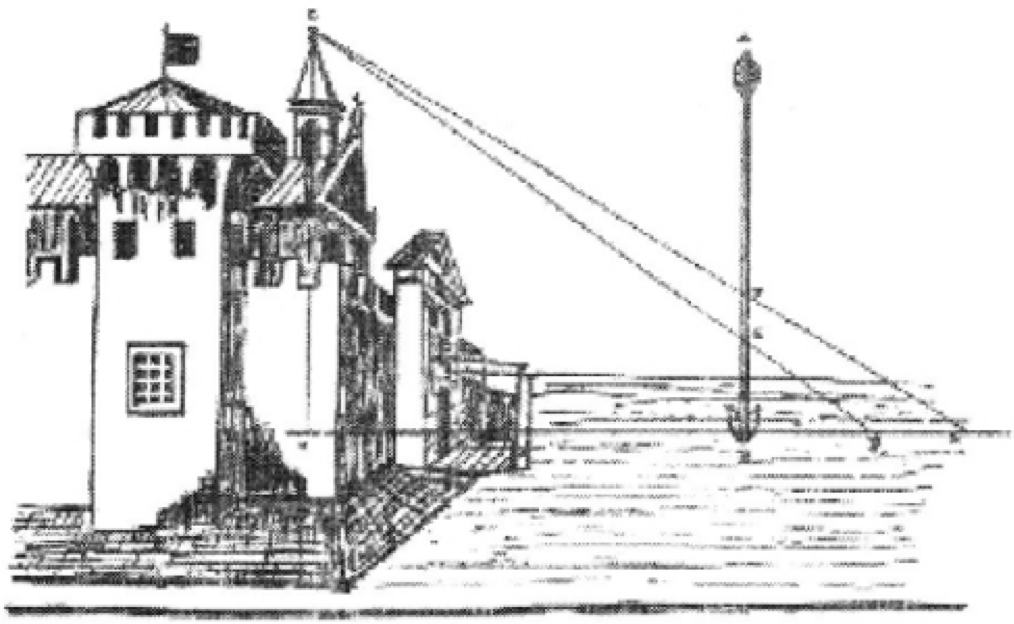
[13] Per qualche tempo, e di certo fino al tempo di De Sanctis (la sua Storia della Letteratura Italiana è del 1870), sia il luogo sia la data di nascita di Leon Battista Alberti erano poco certi, e una delle città candidate ad avergli dato i natali era considerata Venezia.

[14] Abbiamo parlato delle cinque lunule quadrabili nel PM "Sotto il segno delle cinque lune" (RM052, maggio 2003).

artistico sia da quello matematico, della prospettiva; applicò le sue innate doti di geometra nella compilazione di mappe accurate, al punto che si ritiene che abbia contribuito alla stesura delle carte geografiche di Paolo da Pozzo Toscanelli, il cartografo che esortò Cristoforo Colombo a tentare di raggiungere le Indie andando verso Occidente; ebbe familiarità con la meccanica fino al punto di costruire una macchina in grado di applicare – decodificare – automaticamente il suo sistema di cifratura.

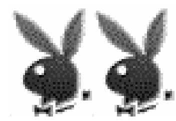
Ma noi non siamo solo una rivista di matematica ricreativa; siamo una ben precisa rivista, con un nome ben definito e ormai stabile, e in questo nome rinnoviamo il nostro debito a Leon Battista Alberti. Il poliedrico genio figlio di Genova e di Firenze, infatti è anche – e per noi soprattutto – l'autore dei "***Ludi Matematici***[15]", il libello che scrisse attorno al 1450, dedicandolo a Meliaduse D'Este.

Era una pubblicazione che conteneva giochi e problemi matematici, ed era scritta da un matematico non professionista, animato da moltissimi interessi diversi. La voglia di imitarla, tredici anni fa, è stata quasi irresistibile.



[15] O, più precisamente, "*Ludi Rerum Mathematicarum*". Il titolo/dedica suona infatti "LEONIS BAP. ALB. AD ILLUSTRISSIMUM PRINCIPEM D.MELIADUSUM MARCHIONEM ESTENSEM EX LUDIS RERUM MATHEMATICARUM", e termina con la frase riportata sotto il titolo di quest'articolo.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
UGO: Unidentified "Golosi" Objects			
Il mese scorso, a sciare			

2.1 UGO: Unidentified "Golosi" Objects

Da piccolo (Rudy speaking) nessun parente mi ha mai letto una favola.

Adesso non vorrei pensaste ad un'infanzia difficile e travagliata che porta evidentemente ad attività decisamente *borderline* come lo scrivere problemi di matematica: l'unico risultato della pseudotragica affermazione della prima riga è stato che le favole me le leggevo da solo[16]: arrivavano in regalo un paio di libri l'anno, portati da un gentile conoscente del miei genitori che rispondeva al nome di *Gianni Rodari* che li aveva anche scritti: capite che non c'era storia, da parte dei parenti, a competere in affabulazione con uno del genere. No, lui non me ne ha mai letta nessuna, ma ho un paio di ricordi, probabilmente costruiti dalla fantasia di un quasi-cinquenne, durante i quali aveva l'aria pensosa.

Recentemente (prima di Natale) ho recuperato un problema piuttosto carino, ma l'ambientazione era terrificante, e così come era presentato era assolutamente improponibile: nello stesso periodo, mi trovavo ad arzigogolare su cosa regalare a due cuginetti di età opportuna e, individuando come regalo ottimale la ristampa di un ben preciso libro di Rodari, il solito cortocircuito tra due idee diverse ha permesso di risolvere entrambi i problemi.

Ve la ricordate, "La torta in cielo", di Rodari? Cade un pasticcino nella nuova bomba atomica che, quando viene fatta scoppiare, anziché il solito "fungo" dà origine ad un'enorme torta (volante): dovendo far sparire questo imbarazzante pasticcio, dopo alterne vicende si decide di farla mangiare ai bambini del Trullo (un quartiere popolare di Roma), permettendo l'assoluta distruzione di tutte le prove.

Esattamente quello che mi serviva.

Nella nostra bomba atomica questa volta è caduto un bombolone, di quelli a forma di ciambella, ed è successo l'abituale guaio (dal punto di vista dei generali e dei dietologi): trattandosi di bomba atomica "tattica" il ciambelliforme risultato non ha dimensioni eccessive e l'assalto iniziale, anziché da tutti i bambini del Trullo, parte da una impavida squadra di cinque bambini che, apprezzando i dolci appena un po' più della matematica, decidono di procedere in modo organizzato, scavando con fameliche mandibole dei tunnel

[16] Forse nasce da questo la sconfinata bibliofilia che ancora mi perseguita.

esplorativi (ognuno perfettamente circolare e giacente su un piano secante il ciambellone) appena sotto lo zucchero che ricopre il bombo-lone. Siamo a conoscenza dei seguenti fatti:

- Giggi (er fijio der norcino) ha scavato un tunnel lungo 30π metri.
- Aggnese ('a nipote de Arvaro) ha scavato un tunnel più lungo di quello di Giggi, ma non l'ha mai incrociato ("...ce sta 'na mezza tresca, tra quej due...").
- Cesare (er cuggino de Giggi) ha scavato un tunnel di 50π metri, incrociando quello di Aggnese.
- Arvaro ("noo! Non quello! Er fijo d'a Sora Bice!") ha scavato un tunnel di 60π metri, incrociando anche lui il tunnel di Aggnese.
- Debborah ("quella c'ajiuta alla fioraja, piccina") ha scavato il tunnel più lungo.

Quanto era lungo il tunnel di Debborah?

Eh? I ricordi di Rodari? Ve ne racconto uno, ma non so se sia vero o se me lo sono sognato. Una volta, gli è caduto un *pasticcino nella borsa*.

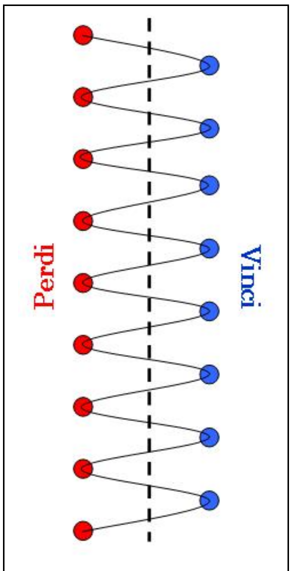
2.2 Il mese scorso, a sciare

Tutti invecchiano, anche i VAdLdRM... Davanti alla proposta di tre giorni in montagna, nella casa del cugino (quello della barca di Cervinia, ve l'avevamo raccontato), si sono ricevute le seguenti risposte:

"No, che tra quindici giorni ho un esame"

"No, che tra nonsoquanto ho nonsocosa".

La seconda risposta (di Fred, evidentemente, Alberto aveva l'esame di Biologia), nasce dal fatto che i due cugini (Andrea & Alessandro... e voglio vedervi, questa volta, con le iniziali) hanno deciso che Fred è un ottimo compromesso tra la responsabilità preoccupata di un maggiorenne e la tollerante irresponsabilità di un minorenne con quasi il doppio degli anni (l'*irresponsabilità* conquista il premio di maggioranza, mi pare evidente); essendo nell'*età di mezzo*, Fred ha preferito glissare e accampare scuse completamente ingiustificabili per evitare di presentarsi, optando per una (meno) sana dieta a base di *junk food* in compagnia di coetane(e/i) per i giorni dedicati dai genitori allo sci.



7 *La pista da slalom*

Uno dei quali genitori (lo scrivente) si è ritrovato a gestire i due neo-VAdLdRM (A&A) che, completamente scaricate le pile dei vari videogiochi (dimenticati accesi nella prima mattina per tutta la durata della giornata sulle piste...) ma non le loro (visto che alla sicurezza provvedevano Rudy e suo cugino, completamente spossati), bramivano e bramavano un gioco. Il supporto di qualche pedina (monetine dal portamonete), di qualche foglio di carta e di una matita supplivano, almeno per qualche istante, alla bisogna.

"Giovine *[sarebbe Andrea]*, ho tracciato un percorso di slalom: adesso, facciamo una gara, ma tu parti dalla cima e io parto dal fondo. Ognuno di noi può, a scelta, passare una, due o tre porte (fermandosi sopra), ma è vietato scontrarsi o saltare l'avversario: quando non possiamo più muovere, perde quello che è dalla parte del 'Perdi'. Comincio io".

Trovate la scacchiera/campo da sci in figura: secondo il metodo classico (da vecchia volpe dei giochi) ho fatto vincere Andrea qualche volta, e poi ho cominciato a pensarci. Risultato, dopo qualche "batosta", Andrea ha cominciato a sfidare Alessandro, ma nella cosa "non c'è sugo" (insomma! Ale ha quattro anni!), e quindi sta pensando di sfidare il padre (*aka* mio cugino, altrimenti noto come il padrone di casa) il quale non vorrebbe perdere l'austera aria da *Pater Familias* così duramente conquistata e quindi sta facendo segni verso il sottoscritto per chiedergli una strategia...

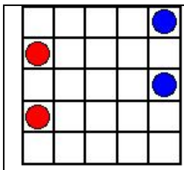
Siccome però io sto caricando gli sci per tornare a casa (durano sempre troppo poco, le vacanze), forse è meglio se gli date una mano voi... Qualcuno ha un'idea?

Un'ultima notazione: nel solito modo criptico e trasverso, il titolo è un *aiutino*.

2.3 Tre per due

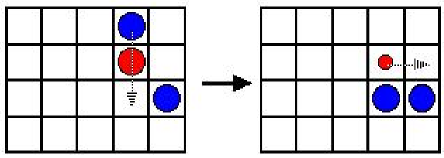
...nel senso che a noi non costa niente, neanche leggere la soluzione che *non abbiamo*. Ma il problema precedente ci ha fatto venire in mente un vecchio (e *non facile*) problema, visto che parliamo di sci. Qualcuno probabilmente lo conosce, ma non ci risultano pubblicate analisi (e noi non l'abbiamo fatta, quindi ve lo diamo gratis).

La premessa è che saremmo felici se riusciste a dimostrare l'equivalenza con qualche gioco analizzato, ma anche se fate tutto da zero, per divertirvi, va bene lo stesso: ve lo descriviamo in modo stringato, che questa rubrica sta già usando troppe pagine.


8 *Partenza della gara*

Materiale: Una scacchiera (quadrata), 2 gettoni blu grandi, 2 blu piccoli, 2 gettoni rossi grandi, 2 rossi piccoli.
Inizio: decidere la dimensione della scacchiera e la sistemazione delle pedine grandi. Ad esempio, con la posizione in figura, decidete che muove per primo il blu, verso sinistra, poi il rosso, verso destra.
Mosse: a scelta, una tra queste:

- Spostare una pedina di almeno uno spazio nella direzione consentita.
- Saltare una pedina avversaria atterrando nella casella libera immediatamente oltre; una pedina saltata non può più saltare altre pedine, e questo si indica sostituendo la pedina grande con una piccola


9 *Saltare!*

Trovate un esempio di salto nella figura a fianco: prima la mossa del blu, poi quella del rosso. Quando una pedina esce dalla scacchiera (come la rossa piccola alla prossima mossa dell'ultimo diagramma, ad esempio) non rientra e non può più muovere.
Scopo del gioco: Vincere, mi pare chiaro. Perde chi non ha mosse valide, quindi le pedine devono restare in campo più tempo possibile.

Un "grazie" (per aver comprato il libro) a quelli che lo conoscono. E adesso datevi da fare, che la soluzione non l'abbiamo.

3. Bungee Jumpers

Valutate l'espressione:

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)$$

sapendo che $a+b+c=0$.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Febbraio.

Mese corto per tradizione, anche quest'anno che è un po' più lungo. A dirla tutta, per i solutori di RM è stato molto corto anche gennaio, visto che siamo usciti talmente in ritardo da dar loro ben poco tempo per inviarci le soluzioni...

Quindi facciamo così: non ve la raccontiamo a lungo – anche perché sarebbe soprattutto un blaterare sul compleanno di RM – e passiamo direttamente alle soluzioni.

4.1 [151]

4.1.1 Non mi piace il Master Mind

Riepilogo delle puntate precedenti, a cominciare dal testo del problema:

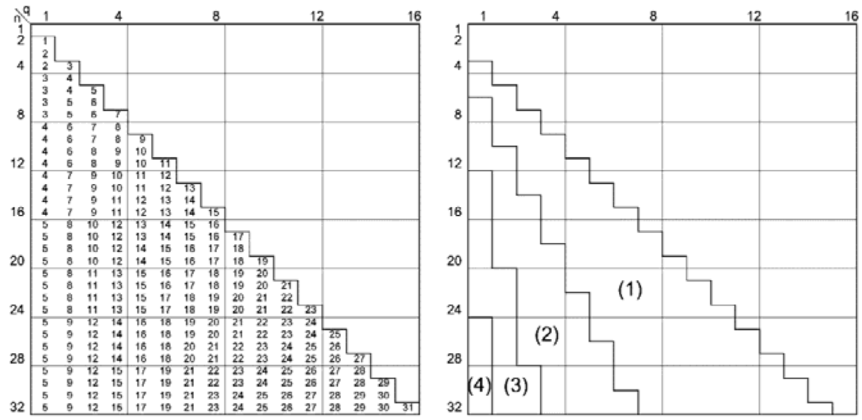
> *Alberto e Fred hanno scelto* 6 *numeri diversi tra loro compresi tra* 1 *e* 49, *estremi inclusi. Il Capo può fare delle ipotesi, scegliendo un sottoinsieme dei numeri e proponendoli, i VAdLdRM diranno quanti (non quali) sono quelli giusti. Quale strategia permette di indovinare i* 6 *numeri con il minimo di tentativi?*

Avevamo ricevuto le risposte di ***Franco57*** ("25 domande") e di ***Fabrizio*** ("23 domande"); il mese scorso il Capo si era divertito a fornire la sua soluzione ufficiale ("24 domande"). Poi è arrivato ***Trentatrè***, che non solo ha verificato il tutto, ma ci ha mandato un miglioramento:

> Ho provato a seguire il calcolo della funzione $M(q, n)$ riportato in RM 156. Mi sembra del tutto corretto. Riscrivo le formule essenziali
>
> [1] $M(1,n) = 1 + M\left(1, \lceil n/2 \rceil\right)$
>
> [2] $M(1,n) = \lceil \ln n / \ln 2 \rceil = \lceil \log_2 n \rceil$
>
> [3] $M(q,n) = 1 + \min\left(L(q,n,p),\ p = 1 \ldots \lfloor n/2 \rfloor\right)$
>
> con $L(q,n,p) = \max\left(M(b,p) + M(q-b, n-p),\ b = 0 \ldots \min(p,q)\right)$. Il passaggio dalla [1] alla [2] può essere abbreviato. Definendo gli intervalli di interi $I_0 = [1],\ I_1 = [2],\ I_2 = [3,4] \ldots I_K = \left[(1+2^{K-1}) \ldots 2^K\right]$ si ha
>
> $n \in I_K \Rightarrow \lceil n/2 \rceil \in I_{K-1},\ K = \lceil \log_2 n \rceil$ e dalla [1] per $M(1,1) = 0$
>
> $M(1, n \in I_K) = 1 + M(1, n \in I_{K-1}) = 2 + M(1, n \in I_{K-2}) = \ldots = K + M(1, n \in I_0) = K = \lceil \log_2 n \rceil$.
>
> Assumendo $M(q,n) = 0$ per $q = 0$, $q \geq n$ la [3] vale anche per $M(1,n)$ – cioè include la [1].
>
> Come già notato cercare p numeri fra n equivale a cercarne $(n - p)$: il problema $G(q, n)$ è equivalente a $G(n - q, n)$ e vale quindi la $M(q,n) = M(n-q,n)$. Il calcolo di $M(q,n)$ si può limitare a $1 \leq q \leq \lfloor n/2 \rfloor$; per questi valori $M(q,n)$ è monotona crescente in ognuno degli indici q, n. Ho trovato che vale, per tutti i valori $n \geq 2$, $1 \leq q \leq \lfloor n/2 \rfloor$, la formula finita
>
> [4] $\boxed{M(q,n) = f(n) + f(n/3) + f(n/5) + \ldots f\left(n/(2q-1)\right)}$
>
> dove $f(x) = \lceil \ln x / \ln 2 \rceil = \lceil \log_2 x \rceil$
>
> La [4] comprende la [2] ed è di fatto una sua estensione.
>
> Per il problema originale

$$M(6,49) = f(49) + f(49/3) + f(49/5) + \ldots f(49/11) = 6+5+4+3+3+3 = 24\,.$$

Effettuando i calcoli, la [4] e la [3] danno gli stessi valori per ogni $q \le 200$, $n \le 400$. La [4] si può *ricavare* – ma non *dimostrare* – a partire dalla tabella di $M(q,n)$. La figura riporta (a sinistra) i primi valori di $M(q,n)$ – calcolati con la [3] – e (a destra) le differenze $D(q,n) = M(q+1,n) - M(q,n)$. Sono disegnati solo i campi (*D*) con tutte le differenze uguali a *D*.



Per quanto la procedura [3] sia complicata, la tabella delle differenze ha una struttura semplice. I limiti dei campi sono completamente definiti dalle due proprietà (verificate su una tabella più grande)

a) la separazione destra di ogni campo (*D*) è un zig-zag con tratti larghi 1 e alti 2^D

b) ogni campo (*D*) inizia sulla prima colonna della tabella in $n = 1 + 3 \cdot 2^{D-1}$.

Questo basta a definire tutte le differenze e di conseguenza, a partire da $M(1,n)$, tutti i valori. Basta considerare, per ogni colonna, gli intervalli di *n* corrispondenti ad ogni campo (*D*). P. es. per la prima colonna si hanno (per la b) gli intervalli

$$I_1 = [4,5,6],\ I_2 = [7\ldots12],\ I_3 = [13\ldots24]\ldots I_D = \left[(1+3\cdot 2^{D-1})\ldots(3\cdot 2^D)\right]$$

$n \in I_D \Rightarrow n = 3\cdot 2^{D-x}$, $0 \le x < 1 \Rightarrow f(n/3) = \lceil \log_2(n/3) \rceil = \lceil D - x \rceil = D \equiv D(1,n)$ da cui

$M(2,n) = M(1,n) + D(1,n) = f(n) + f(n/3)$ e così via per le altre colonne.

Il Nostro aggiunge anche due note:

nota 1 – la [3] fornisce una effettiva strategia – cioè i numeri *p* per le domande da fare in ogni fase di gioco – mentre la [4] calcola il numero ottimale di mosse ma non fornisce i *p*

nota 2 – la [4] è troppo precisa (e semplice) per non essere corretta, ma manca di una vera dimostrazione (ho provato a partire dalla [3] o direttamente dal problema, ma non ci sono arrivato).

Sarà finita qui? No, perché in extremis ci arriva una missiva proprio di ***Franco57***:

Devo dire che aspettavo con ansia la "soluzione ufficiale" perché io non avevo (e non ho tuttora!) alcuna buona idea di come risolvere questo quesito. Anche *MBG* che era giustamente uscito dalla logica del *metodo dicotomico*, come pure *Riccardo* e *Maurizio* nei numeri successivi, aveva detto che il problema era ancora aperto.

Fabrizio, che era giunto a 23 e non a 25 solo per un banale errore di calcolo sicuramente imputabile alle frenesie balneari della consorte (era il numero di settembre), come me aveva proposto il *metodo dicotomico* cioè quello di partizionare l'insieme in due parti e chiedere separatamente e ricorsivamente su ciascuna di esse fino ad ottenere una certezza.

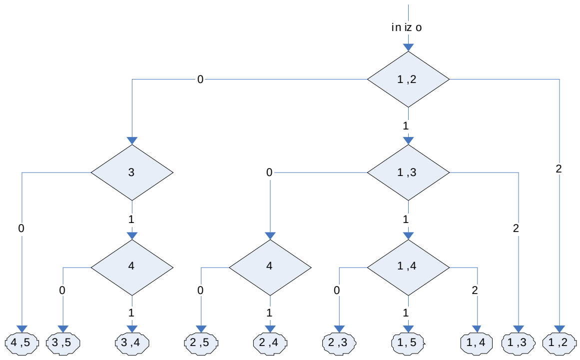
Senza averlo dimostrato, pensavo che il miglior modo di farlo fosse di dividere l'insieme in due parti il più possibile vicine per cardinalità, e questo conduce a 25. Ma mi sbagliavo. Ad esempio il miglior modo di cercare 2 elementi in un gruppo di 12 - il problema $G(2,12)$ nel formalismo della soluzione ufficiale - non è quello di dividere l'insieme in due gruppi da 6, ma in gruppo da 4 ed uno da 8 (poiché sono entrambi potenze del 2), infatti nel caso peggiore di 1 elemento in ciascuno dei due sottoinsiemi si hanno 2 tentativi per il gruppo da 4 e 3 per quello da 8 per un totale di $1 + 2 + 3 = 6$ domande e non 7 come si ottiene dividendo in due gruppi da 6.

Ecco l'albero della soluzione dicotomica ottimale per $G(6,49)$ generato con un programma, che conferma il valore 24 della soluzione ufficiale. Compare anche $G(2,12)$ accennato sopra. M è il valore cercato, cioè il minimo numero di domande necessario, D la domanda migliore da fare (o meglio una delle migliori e io ho scelto la massima minore o uguale alla metà del numero di elementi totali), R la risposta nel caso peggiore (o meglio una di quelle e anche qui ho scelto la maggiore). Penso che la grafica di rappresentazione dell'albero sia chiara, cioè $G(6,49)$ richiede di calcolare $G(3,24)$ e $G(3,25)$ e così via. Ovviamente i valori di M, D, R il programma li ha già calcolati dal basso all'alto in una prima fase.

```
G(6,49): M=24 D=24 R=3
+---G(3,24): M=11 D=12 R=2
|   +---G(2,12): M=6 D=4 R=1
|   |   +---G(1,4): M=2 D=2 R=1
|   |   |   +---G(1,2): M=1 D=1 R=1
|   |   |   |   +---G(1,1): M=0
|   |   |   |   +---G(0,1): M=0
|   |   |   +---G(0,2): M=0
|   |   +---G(1,8): M=3 D=4 R=1
|   |       +---G(1,4): M=2 D=2 R=1
|   |       |   +---G(1,2): M=1 D=1 R=1
|   |       |   +---G(0,2): M=0
|   |       +---G(0,4): M=0
|   +---G(1,12): M=4 D=6 R=1
|       +---G(1,6): M=3 D=3 R=1
|       |   +---G(1,3): M=2 D=1 R=0
|       |   |   +---G(0,1): M=0
|       |   |   +---G(1,2): M=1 D=1 R=1
|       |   +---G(0,3): M=0
|       +---G(0,6): M=0
+---G(3,25): M=12 D=12 R=1
    +---G(1,12): M=4 D=6 R=1
    +---G(2,13): M=7 D=6 R=1
        +---G(1,6): M=3 D=3 R=1
```

```
+---G(1,7): M=3 D=3 R=1
    +---G(1,3): M=2 D=1 R=0
    +---G(0,4): M=0
```

Ora vengo ahimè al punto dolente. L'affermazione contenuta nella soluzione ufficiale "*Rudy si trova quindi davanti a 2 problemi … Per risolverli, gli serviranno almeno M (b, p)+ M (q − b,n − p) domande*" è vera solo per il metodo dicotomico, ma è falsa in generale.



Come riportato in RM152, che il metodo dicotomico non fosse ottimale me ne ero accorto fin dall'inizio.

Il contro-esempio più semplice credo che sia $G(2,5)$, per il quale esso fornisce 4 domande[17], mentre ne bastano 3 con l'algoritmo della figura, dove l'insieme è formato dai primi 5 naturali, nei rombi ci sono le domande e nelle uscite le risposte.

Ho sviluppato anche un contro-esempio più elaborato basato sui vertici di un cubo che con al più 5 domande risolve $G(4,8)$ mentre il metodo dicotomico ottimale ne richiede 7.

Ma il capolavoro lo ha fatto il mio amico *Gratin* che ha elaborato una dapprima strategia che risolve l'originale $G(6,49)$ in 21 domande, e la ha via via affinato fino alla versione attuale che ne richiede solo 18, e non sono esclusi ulteriori miglioramenti. Il metodo tuttavia non sembra generalizzabile per $G(q,n)$, né si intuisce come si possa eventualmente dimostrarne l'ottimalità.

Collezionare in un documento questa strategia richiede un po' di tempo e spero di riuscirci per il mese prossimo.

Non vorrei che questo quesito fosse da classificare tra la categoria dei più ardui, il livello 4 che Clifford Pickover ne "*La matematica di Oz*" definisce "*Esageratamente difficile: probabilmente impossibile da risolvere per Dorothy e qualsiasi altro Homo sapiens*".

Ecco, noi in Redazione pensiamo che il Capo sia incorreggibile e cattivissimo, e voi? Sì, se ***Franco57***, o ***Gratin***, si fanno sentire, ne riparleremo il mese prossimo.

4.2 [155]

4.2.1 Goodbye, Mr. Chips!

Un addendum sul problema/regalo di Natale del Capo! Il testo diceva:

> *Se* α,β,γ *sono gli angoli interni di un triangolo, per quali valori è massimo il valore dell'espressione* $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ *?*

Il mese scorso vi abbiamo proposto le soluzioni di ***MBG*** e ***Alberto R.***, nonché quelle di Mr. Chips in persona! ***Alberto R.***, che inizialmente sembrava deluso dal quesito, ci ha riscritto per passarci il suo risultato senza calcoli:

[17] Infatti $M(2,4) = 1 + \min(\max(M(0,1)+M(2,3),\ M(1,1)+M(1,3),\ \max(M(0,2)+M(2,2),\ M(1,2)+M(1,2))) = 1 + \min(\max(2,\ 2),\ \max(0,\ 2)) = 3$, da cui $M(2,5) = 1 + \min(\max(M(0,1)+M(2,4),\ M(1,1)+M(1,4)),\ \max(M(0,2)+M(2,3),\ M(1,2)+M(1,3),\ M(2,2)+M(0,3))) = 1 + \min(\max(3,\ 3),\ \max(2,\ 3,\ 0)) = 4$.

> (...) ***MBG*** osserva che il problema si riduce a trovare, tra i triangoli iscritti nello stesso cerchio, quello col perimetro massimo. L'osservazione è conseguenza immediata del noto teorema che, in qualunque triangolo, i lati sono il prodotto dei seni degli angoli opposti per il diametro del cerchio circoscritto. Grazie ***MBG***! Mi hai fornito il grimaldello per forzare la soluzione senza calcoli, cosa, per me, estremamente goduriosa.
>
> Tre palline A, B, C sono vincolate a restare su una circonferenza, ma libere di muoversi su di essa. Le palline si respingono con una forza costante e indipendente dalla distanza. Il sistema fisico così ipotizzato è in equilibrio quando la sua energia potenziale è minima, cioè quando è massima la somma delle distanze tra le palline (i.e. il perimetro del triangolo).
>
> Siano F1 ed F2 le forze di repulsione (uguali in modulo) che B e C esercitano su A. Se la distanza AB è minore della distanza AC, la componente di F1 secondo la tangente al cerchio in A è maggiore dell'analoga componente di F2. Quindi A si allontana da B avvicinandosi a C fino a rendere uguali le due distanze. Idem per le altre palline. Conclusione: il triangolo ABC di perimetro massimo è equilatero..

Bello, no? Passiamo ai problemi del mese scorso, finalmente.

4.3 [156]

4.3.1 Your computer is StOnEd!

Questo problema era un trucco del Capo per vedere se leggete i suoi PM, però non lo abbiamo detto a nessuno, e sono arrivate le ottime soluzioni di ***MBG*** e ***Franco57***, che vi passeremo subito dopo un riassunto del problema.

> *Dato un ambiente aziendale che fornisce antivirus per computer a richiesta, valutiamo in 5% la probabilità che l'antivirus vi schianti il computer e in 10% la probabilità che senza antivirus sia il virus a schiantare tutto. Supponiamo che la probabilità di prendersi il virus se una frazione f dei vostri colleghi (voi escluso, quindi) installa l'antivirus diventi* $(1-f)\cdot 10\%$.
>
> 0. *Se le policy aziendali richiedono che almeno il* 60% *installi l'antivirus, qual è il rischio medio per l'intera popolazione?*
> 1. *Quale deve essere la percentuale di persone che installano l'antivirus per minimizzare il rischio globale?*
> 2. *Supponiamo l'azienda non obblighi nessuno a installare l'antivirus, ce ne propone l'installazione, e se non siamo d'accordo la licenza che doveva essere utilizzata per noi torna sul mercato interno. Tutti conoscono le percentuali di rischio d'installazione o non installazione dell'antivirus, e ognuno lancerà l'installazione solo se gli conviene. In questo scenario, quante persone, secondo voi, installeranno l'antivirus?*
> 3. *Adesso, come Responsabili della Sicurezza Aziendale, pensiamo di comportarci (se ci passate l'ossimoro) "male a fin di bene"; pubblicizziamo il rischio d'infezione, nel caso di mancata installazione dell'antivirus, a un certo valore R maggiore del 10%: se non obblighiamo nessuno a installare l'antivirus, che valore dovremmo fissare per R per raggiungere il livello ottimale di vaccinazione che minimizza il rischio globale, come determinato nella domanda uno?*

Bene, vediamo come l'ha impostato ***MBG***:

Premetto che questo problema mi è subito piaciuto perché giustifica matematicamente quella che per anni è stato il mio rapporto con gli antivirus.

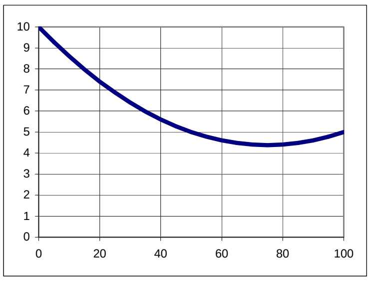
Dovete sapere che anche nel mio caso la policy aziendale raccomanda molto caldamente (dovrei dire impone) l'installazione di un certo antivirus, ma io, per conclamato odio verso gli antivirus, più che per un motivo basato su una corretta indagine statistica, ho sempre fatto finta di niente, svicolato o accampato scuse[18] e lasciato il mio pc in balia del malware circolante in rete.

Sta di fatto che dopo qualche anno di operatività dell'AV istituzionale, il mio pc è forse l'unico che non si sia mai schiantato e non abbia mai preso dei virus (sic! li hanno invece presi molti di quelli che avevano il rinomato AV!).

Ma veniamo al problema.

Dato che se installo l'AV ho una probabilità costante di crash $Pc = 5\%$ di avere problemi e se non lo installo ho una probabilità di infezione $Pi = (1-f)10\%$, posso definire il rischio medio dell'insieme di tutti gli utenti della rete con una media pesata in questo modo: $R = f \cdot Pc + (1-f) \cdot Pi$

Tracciando il grafico di R al variare della percentuale di utenti con AV, ottengo questo simpatico grafico che già dice tutto.



Sorpresa! La situazione ottimale non è quella in cui tutti gli utenti hanno l'AV, ma quando una percentuale di essi non lo usa. Con i nostri dati di partenza, il rischio globale minimo si ha per f = 75%, dove R = 4.375%.

Niente male direi. Ecco che ho a disposizione una nuova scusa da aggiungere al mio campionario antiantivirus; di più: passo da fuorilegge a eroe aziendale!

Quindi cosa succede se l'azienda lascia carta bianca ai dipendenti? Supponendo che l'azienda non operi in campo finanziario (dove le idee riguardo a statistica e probabilità sono notoriamente molte ma alquanto confuse), ci sarà una fase iniziale in cui l'AV andrà a ruba per abbassare il proprio singolo rischio dal 10% al 5%. Nel momento in cui $f>0.5$, alcuni utenti si accorgeranno che possono avere un beneficio maggiore non installando l'AV, per cui f idealmente dovrebbe stabilizzarsi a 0.5 dove è indifferente averlo o meno (indifferente un corno! preferisco che il mio computer si schianti per un virus serio che non per l'antivirus!!!).

Supponiamo ora di ragionare dal punto di vista dell'azienda, a cui interessa minimizzare il rischio globale e non quello di un gruppo di singoli. Direi che ci sono due strategie:

- imporre a esattamente al 75% dei dipendenti l'installazione dell'antivirus; in questo caso consiglierei di scegliere il 25% esente in base a chi ha le mansioni più critiche. Soluzione apparentemente paradossale: la parte dell'azienda più sensibile in caso di attacco da virus NON deve installare l'antivirus!
- lasciare libertà di scelta e millantare un tasso di rischio di infezione da virus più elevato di quello reale. Si calcola facilmente che se il rischio di infezione senza AV passa dal 10% al 20% il punto di equilibrio trovato sopra si attesta proprio a $f = 0.75$ e otteniamo l'effetto desiderato.

[18] Quelle tipiche sono "l'avevo installato ma poi non mi funzionava più il tal altro programma", "tanto non scarico mai niente dalla rete" oppure "allora mi comprate un pc serio un po' più potente che non mi rallenti tutto il resto appena installo l'antivirus". Quest'ultima è particolarmente efficace in quanto fa leva sulla nota taccagneria dell'amministrazione.

Generalizzare nel caso l'infettività dei virus e la probabilità di default dell'AV siano diverse dai 10% e 5% di partenza è abbastanza banale e in pratica lo abbiamo già fatto nel risolvere l'ultima parte. Quindi a meno di supporre procedure di installazione strane per l'AV, licenze limitate o altre variazioni sul tema, penso che posso concludere qui.

Ecco, ***MBG***, ci è sembrato piuttosto tranquillo in proposito. Per quanto riguarda ***Franco57***, non ci esprimiamo certo prima che possiate leggere la sua versione:

Chiamo con:

a la probabilità che l'antivirus schianti il computer che vale 5% nel testo;

v la probabilità che il computer schianti se nessuno installa l'antivirus che vale 10% nel testo;

f la frazione di antivirus installati che vale 60% nella domanda 0;

b il "rischio aziendale", cioè la percentuale media dei computer bloccati (o schiantati) a causa del virus o dell'antivirus.

Prima di tutto una considerazione che non mi pare banale: se r è il rischio che si blocchi un computer, su una popolazione di n si bloccheranno in media $n \cdot r$ computer se questi rischi sono indipendenti (questo lo assumiamo), quindi r è anche il rischio medio per l'intera popolazione. Questo deriva dalla proprietà che la speranza matematica di una somma di variabili aleatorie indipendenti è la somma delle loro speranze matematiche (per noi la variabile aleatoria è il computer si blocca = 1, sennò 0).

<u>risposta zero</u>: $\boxed{b = f \cdot a + (1-f)^2 \cdot v}$ perché $f \cdot a$ è la percentuale di computer bloccati a causa della installazione dell'antivirus e la percentuale di computer schiantati dai virus è $(1-f)$ della probabilità che il singolo computer non protetto sia bloccato dal virus, la quale vale $(1-f) \cdot v$.

Con i nostri dati abbiamo quindi $b = 60\% \cdot 5\% + 40\%^2 \cdot 10\% = 4.6\%$.

<u>risposta uno</u>:

Nella formula della *risposta zero*, b in funzione di f è una parabola che ha minimo per $\frac{db}{df} = a - 2(1-f) \cdot v = 0$ cioè per $\boxed{f = 1 - \frac{a}{2v}}$.

Questo valore è sicuramente ≤ 1 e quindi per essere una percentuale ammissibile deve anche essere positivo o nullo, cioè $2v \geq a$. Per $2v \leq a$ conviene che nessuno installi l'antivirus (è strano – vero? – non basta che l'antivirus sia più bloccante dei virus, lo deve essere almeno il doppio!).

Se f è una percentuale valida, il rischio aziendale vale $b = \left(1 - \frac{a}{2v}\right) \cdot a + \left(\frac{a}{2v}\right)^2 \cdot v = a - \frac{a^2}{4v}$.

Nel nostro caso la percentuale ottimale è $f = 1 - \frac{5\%}{2 \cdot 10\%} = 75\%$ e il rischio aziendale è $b = 5\% - \frac{5\%^2}{4 \cdot 10\%} = 5\% - 0.625\% = 4.375\%$.

<u>risposta due</u>:

Se si sa che una percentuale f ha installato l'antivirus, allora al singolo conviene installarlo fintantoché la probabilità di schianto da antivirus è inferiore alla probabilità di schianto da virus, cioè per $a < v \cdot (1 - f)$, che diventa $f < 1 - \frac{a}{v}$. Se è positivo, cioè se $a < v$, si arriva quindi al valore soglia $\boxed{f = 1 - \frac{a}{v}}$, che nel nostro caso vale $f = 1 - \frac{5\%}{10\%} = 50\%$ e dà un rischio $b = 50\% \cdot 5\% + 50\%^2 \cdot 10\% = 5\%$.

risposta tre:

Se il RSA rende pubblico che in assenza di antivirus il rischio di infezione e schianto è R invece che v, allora il valore soglia, per la *risposta due*, sarà $f = 1 - \frac{a}{R}$.

Per minimizzare il rischio, dalla *risposta uno* sappiamo che deve essere $f = 1 - \frac{a}{2v}$, quindi abbiamo l'equazione $1 - \frac{a}{R} = 1 - \frac{a}{2v}$ che fornisce $\boxed{R = 2v}$ indipendentemente da a.

Il RSA enfatizzerà quindi la probabilità di infezione in assenza di antivirus raddoppiandola. Nel nostro caso la porterà al 20% per raggiungere il già calcolato minimo di rischio medio del 4.375%.

A noi sembra che ***Franco*** abbia dato tutte le formule utili, voi che ne pensate? Noi stiamo ancora pensando alle castagne... come quali castagne? Quelle del problema speciale:

> ***Problema speciale per i medici*** *(e i biologi, i chimici, i botanici e i veterinari): Nella tradizione piemontese, tenere una "Castagna d'India" in tasca garantisce una certa (non totale) immunità dalle malattie da raffreddamento, quali mal di gola, raffreddore e influenza; riuscite a costruire un ragionamento per cui la cosa possa effettivamente avere un vago fondo di verità?*

Beh, credevamo che non l'avesse notato nessuno, ma una risposta è arrivata, quella di ***MBG***:

> Già che ci sono, approfitto anche per avanzare la mia ipotesi riguardo al dilemma delle castagne d'India di cui parla Rudy. Per inciso, c'è la stessa credenza anche da noi (Bergamo). Qui la chiamiamo anche castagna gengia ma non ho idea di quale sia l'etimologia del termine.
>
> Comunque, tornando al problema, supponiamo che ci sia un certo numero di persone N disposte a credere alla leggenda e che tengono in tasca la castagna per tutto l'inverno.
>
> Sia Pr la probabilità di prendere un raffreddore o affini. Supponendo che le castagne d'India non hanno nessun effetto preventivo né terapeutico, la percentuale di raffreddati sarà sempre Pr, però molti di questi non diffonderanno il dato statistico, per timore di essere presi in giro per cotanta creduloneria. Viceversa, la gran parte degli altri $N(1–Pr)$ propugneranno come valido il metodo. In questo modo otteniamo una stima di Pr inferiore al valore reale, ovvero quello in vigore per chi non usa le castagne. In questo modo la credenza sembra trovare una sua giustificazione scientifica. Insomma, la stessa cosa succede per oroscopi, medium e simili.

Giustificazione[19], se ce lo permettete, molto migliore di quella del Capo, che non vi raccontiamo, perché stiamo sperimentando con le castagne che ci ha rifilato quest'autunno...

4.3.2 Botte con ordine

Il secondo problemino del mese scorso era ambientato in un ambiente di karateki:

> *Stiamo organizzando un torneo: sul tatami della palestra è possibile tracciare tre campi di gara, sui quali svolgere in contemporanea i combattimenti. Sono iscritti al torneo nove atleti e, l'idea è che combattessero in due per ogni campo, totale sei, e gli altri che non stavano facendo niente facessero gli arbitri, uno per ogni campo. Con le seguenti condizioni:*
>
> 1. *Abbiamo bisogno di un torneo in dodici round in cui ogni atleta ha esattamente un incontro con ognuno degli altri partecipanti e fa l'arbitro nei restanti incontri.*
> 2. *Se possibile, vorremmo che ogni volta che un atleta fa l'arbitro, abbia due round di combattimento prima di fare nuovamente l'arbitro.*
>
> *Riuscite a generare lo schema di torneo soddisfacente entrambe queste richieste? O almeno una versione in cui la seconda regola è violata il meno possibile?*

Anche qui sono arrivati ***MBG*** e ***Franco57***, ma anche ***Camillo***, dal quale andiamo a cominciare:

> Pericolosi questi karateka ho fatto del mio meglio violando la seconda regola una sola volta e dubito fortemente che si possa fare di meglio.
>
> Per poter soddisfare la prima richiesta le tre terne arbitrali devono rimanere sempre le stesse alternandosi ternariamente.
>
> I 36 incontri singoli producono 12 incontri che ogni terna deve arbitrare.
>
> Questi 12 incontri generano 30 diversi schemi di possibili combinazioni arbitrali.
>
> Si deve scegliere una tra queste 30 combinazioni per ogni terna arbitrale facendo in modo che non vi siano duplicazioni di incontri, il compito è impossibile anche solo per 2 terne.
>
> Allego il file col mio schema di torneo.

```
AB G
CD H
EF I
DG  A
FH  B
EI  C
AG   D
BH   E
CI   F
AC    G
BE    H
DF    I
DE     A
FI     B
GH     C
AH      D
BC      E
GI      F
AD       G
BF       H
CE       I
DI        A
EH        B
FG        C
AI         D
BG         E
CH         F
AE          G
BD          H
CF          I
EG           A
DH           C
BI           F  ha fatto un solo combattimento
AF            B ha fatto tre combattimenti di fila
CG            D
HI            E
```

Lo schema di ***Camillo*** l'abbiamo messo qui a destra, sperando che si veda bene. La versione di ***Franco57*** è al solito molto precisa:

> Dimostro prima che uno schema di torneo soddisfacente entrambe le condizioni non esiste.

[19] Accompagnata comunque da una nota sulla salute di ferro della nonnina ultranovantenne portatrice di castagna…

Numerando gli atleti/arbitri da 1 a 9 inizierà ad arbitrare una terna che indichiamo con 1,2,3; a seguire, per rispettare la seconda condizione, una terna necessariamente diversa, diciamo 4,5,6 e a seguire sempre per lo stesso motivo la terna restante 7,8,9. Poi, essendo passati due turni tornerà ad arbitrare la terna 1,2,3 e così via in ciclo. In tutto ogni terna arbitrale arbitra quindi 4 dei 12 round, per un totale di 4·3=12 incontri.

Durante i 4 round di arbitraggio del gruppo 1,2,3, potranno evidentemente svolgersi solo con i restanti 4,5,6,7,8,9, che ammontano a 6·5/2 = 15. Tra questi distinguiamo gli incontri *intra-gruppo*, tra due atleti della terna 4,5,6 oppure della terna 7,8,9, dagli incontri *extra-gruppo* tra un atleta del gruppo 4,5,6 ed uno del gruppo 7,8,9.

Gli incontri *extra-gruppo*, che sono 3·3=9, devono evidentemente essere tutti combattuti sotto terna 1,2,3 perché altrimenti uno dei due combattenti dovrebbe fare anche l'arbitro durante lo stesso round, ad esempio l'incontro 4 vs 7 non può essere arbitrato né dal gruppo 4,5,6 né dal gruppo 7,8,9.

Quindi rimangono 12–9=3 incontri *intra-gruppo* sotto l'arbitraggio 1,2,3. Ma ciò è impossibile perché solo una partita *intra-gruppo* può esserci per ciascuno dei gruppi 4,5,6 e 7,8,9.

Vediamo perché: fissato un incontro *intra-gruppo*, ad esempio 4 vs 5, devono essere arbitrati da 1,2,3 anche gli incontri 4 vs 7, 4 vs 8 e 4 vs 9. L'atleta 4 ,quindi, già impegnato in 4 combattimenti sotto l'arbitraggio di 1,2,3, non può combatterne altri sotto la stessa terna arbitrale, cioè non può svolgersi il match 4 vs 6, né 5 vs 6.

Per la schedulazione alternativa con poche violazioni della seconda regola, per pigrizia mi rifaccio allo schema usato nella dimostrazione per assurdo. I primi 9 round faccio fare tutti gli incontri *extra-gruppo*. Negli ultimi 3 tutte gli *inter-gruppo*. Indico con "**`a:b-c`**" *a* che arbitra l'incontro *b* vs *c*; i match corrispondono ai blocchetti e sono nell'ordine consueto della scrittura.

Mi sono venute 6 violazioni alla seconda condizione segnalate in rosso e riferite all'arbitraggio successivo. Penso che qualcuno possa aver fatto di meglio.

```
1:4-7 4:7-1 7:1-4
2:5-8 5:8-2 8:2-5
3:6-9 6:9-3 9:3-6

1:4-9 4:7-3 7:1-6
2:5-7 5:8-1 8:2-4
3:6-8 6:9-2 9:3-5

1:4-8 4:7-2 7:1-5
2:5-9 5:8-3 8:2-6
3:6-7 6:9-1 9:3-4

1:2-3 2:3-1 3:1-2
4:5-6 5:6-4 6:4-5
7:8-9 8:9-7 9:7-8
```

E da ***MBG*** vi passiamo solo lo schema che ha ottenuto, con le istruzioni per comprenderlo, così decidete da soli chi ha fatto meglio:

Ognuna delle righe indica con chi combatte il karateka *N* in ciascuno degli incontri, indicati in cima alle colonne. Chiaramente, quando c'è lo zero, significa che il karateka in quell'incontro fa da arbitro.

		Incontri											
karateka		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		0	7	4	0	8	5	0	9	6	0	2	3
2		0	8	5	0	9	6	0	7	4	0	3	1
3		0	9	6	0	7	4	0	8	5	0	1	2
4		5	0	1	7	0	3	8	0	2	9	0	6
5		6	0	2	8	0	1	9	0	3	7	0	4
6		4	0	3	9	0	2	7	0	1	8	0	5
7		8	1	0	4	3	0	5	2	0	6	9	0
8		9	2	0	5	1	0	6	3	0	4	7	0
9		7	3	0	6	2	0	4	1	0	5	8	0

E con questo è tutto, vi aspettiamo il mese prossimo!

5. Quick & Dirty

Siete davanti ad un tavolo, bendati. Sapete che sul tavolo ci sono N monete, e vi dicono che K indicano "testa". Il vostro scopo (sempre bendati) è quello di ottenere due sottogruppi per cui in ognuno di essi *ci sia un ugual numero di "teste"*. La formulazione è "cattiva", ma il metodo deve essere serio: non vale sbirciare o cose del genere...

6. Pagina 46

Abbiamo:

$$\begin{aligned}\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c} &= \frac{b^2c-bc^2+ac^2-a^2c+a^2b-ab^2}{abc}\\ &= \frac{c^2(a-b)+ab(a-b)-(ac+bc)(a-b)}{abc}\\ &= \frac{(a-b)\left(c^2+ab-ac-bc\right)}{abc}\\ &= \frac{(a-b)[c(c-a)-b(c-a)]}{abc}\\ &= \frac{(a-b)(c-b)(c-a)}{abc}\\ &= -\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}.\end{aligned}$$

Elaboriamo ora il secondo membro. Sia:

$$\begin{aligned}a' &= b-c,\\ b' &= c-a,\\ c' &= a-b.\end{aligned}$$

Allora, $b'-c'=c-a-(a-b)=b+c-2a$. Dalla condizione $a+b+c=0$, abbiamo $b+c=-a$, da cui si ricava $b'-c'=-3a$, e quindi:

$$\begin{aligned}a &= -\frac{b'-c'}{3},\\ b &= -\frac{c'-a'}{3},\\ c &= -\frac{a'-b'}{3}.\end{aligned}$$

Da questo segue che:

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=-\frac{1}{3}\left(\frac{b'-c'}{a'}+\frac{c'-a'}{b'}+\frac{a'-b'}{c'}\right).$$

Da cui,

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=-\frac{1}{3}\left[-\frac{(a'-b')(b'-c')(c'-a')}{a'b'c'}\right]=$$
$$=\frac{1}{3}\frac{(-3c)(-3a)(-3b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=$$
$$=-9\frac{abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

Quindi, se $a+b+c=0$:

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=$$
$$=\left[-\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\right]\left[-9\frac{abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}\right]=9.$$

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 C'è mia nonna su feisbuc...

Se siete tra le sei persone al mondo che non la conoscono, filate a cercarla su YouTube.

Il FacciaLibro a Rudy non è molto simpatico: se cercate di farlo amico, è molto probabile che vi accetti, ma la sua attività in bacheca è leggermente inferiore a quella del bradipo imbalsamato del Museo di Storia Naturale: anche se lo scoprire che l'amico dell'amico dell'amico è tuo amico può divertire, la cosa seccante è che ti ritrovi ammucchiate assieme delle persone che non c'entrano niente tra di loro (per dirne una: l'altra settimana, Rudy è stato fatto amico da un *vigile*: amico d'infanzia, OK, ma c'è un limite a tutto...) e che se si incontrassero, probabilmente farebbero a botte entro i primi tre minuti; prima di dirvi cosa preferisce (anche qui, attività inferiore allo zero, se possibile), però, un po' di roba noiosa.

Questa volta partiamo subito con una definizione[20], che abbiamo già detto tutto.

> Un sottoinsieme S dei vertici V di un grafo G si definisce *insieme indipendente* di G se non esistono vertici di S adiacenti in G.

Ossia, per andare da un vertice di S a un altro vertice di S dovete passare per un vertice che non è in S, e quindi vi servono quantomeno un paio di archi.

La definizione, ingannevolmente semplice, si tirerà dietro un teorema mica da poco:

> Un insieme $S \subseteq V$ è un insieme indipendente di G se e solo se $V \setminus S$ è una copertura[21] di G.

Qualcuno vuole provare a dimostrarlo, prima di sbirciare le righe dopo il prossimo paragrafo?

A me (Rudy) questa dimostrazione piace pochissimo, per lo stesso motivo per cui mi piace pochissimo l'argomento di questo mese; mi sembra si riduca tutto ad una specie di giochino con le parole[22] che alla fine "non convince": vediamo se, per la fine, riesco ad appassionarmi all'argomento. Ma, dicevamo, la dimostrazione.

> Per definizione, S è un insieme indipendente di G se e solo se nessun arco di G ha entrambi i termini in S o, equivalentemente, se e solo se ogni arco ha almeno un termine in $V \setminus S$; ma questo accade se e solo se $V \setminus S$ è una copertura di G. Q.E.D.

Semplicissimo, ma in questi casi Rudy ha sempre paura di aver perso qualcosa per strada e di aver detto un'enorme idiozia.

Di insiemi indipendenti, in un grafo, possono essercene più di uno e quindi (se non andate a cercare casi patologici, ai quali non ho la minima intenzione di pensare, è già abbastanza complicato così) ce ne sarà uno (o più) più grande degli altri, contenente α vertici: questo viene detto *numero di indipendenza* di G; per tirare in ballo anche l'altro oggetto di cui abbiamo parlato, indichiamo con β il numero dei vertici della *copertura*

[20] Che quella che mettiamo in nota è *simbologia* (come vedrete, questo mese faremo guai enormi con le parole): G è un grafo, V sono i suoi vertici, in numero di V e variamente uniti da archi i quali hanno due termini; se S è un sottoinsieme dei vertici di G, $V \setminus S$ è quello che vi resta quando togliete S da V (chiediamo scusa ai matematici seri per questa ultima terribile definizione).

[21] Vi ricordiamo che si definisce *copertura* di G un sottoinsieme K di V per cui ogni arco di G ha almeno un termine in K. tutto più chiaro, ora, vero?

[22] Sul quale, di solito, sbaglio pure la traduzione: se (come molto probabile) trovate errori da qualche parte me ne assumo tranquillamente la paternità, fermo restando che gli altri due loschi figuri che correggono queste note non se ne sono accorti.

minima (ossia quella con meno vertici) di *G*: finalmente troviamo un teorema carino, statuente che:

$$\alpha + \beta = \nu.$$

...e questo ve lo dimostrate da soli, vista l'antipatia di Rudy per certi ragionamenti.

Abbiamo una buona e una cattiva notizia: prima quella cattiva.

Nonostante sovente si riescano a ottenere delle bellissime cose passando da un grafo al suo duale (ossia, scambiando i vertici con gli archi e gli archi con i vertici), qui la cosa non funziona così bene: quindi, tutti i teoremi di quest'area della matematica, prima di spostarli nel loro duale, conviene pensarci tre volte e poi ricominciare la dimostrazione da capo. Probabilmente proprio in questa non immediatezza sta il fatto che anche i matematici considerano quest'area piuttosto complicata.

Torniamo a noi, o meglio a me.

Dicevamo che Facebook non mi entusiasma: in fondo, le persone che conosco appartengono a gruppi abbastanza separati tra di loro: ci sono un paio di vigili (l'altro è sua moglie: pare sia questo, il metodo di riproduzione), un assessore alla cultura di un piccolo comune, quattro colleghi, due concorrenti, un cugino in secondo grado, due maestre, un prof del Poli, apprezzatori della matematica e bevitori di birra[23]... insomma, o vi inventate il "Numero di Rudy", o metterli assieme finisce in un mortorio. Fortunatamente, è nata un'alternativa a tutto questo: su Google+ potete suddividere i vostri amici in una serie di sottogruppi ragionevolmente stagni tra di loro e comunicare separatamente, tenendo la cosa ben organizzata: ci si aspetta, ad esempio, che la nascita di un figlio venga comunicata *urbi et orbi*, mentre la ricetta del Cinghiale alla Obelix forse non va postata nel gruppo *Vegan Jihad*.[24]. Questi aggeggi, più che "gruppi", dovrebbero chiamarsi in un altro modo: il guaio è che il termine italiano è bruttissimo, anche se quello inglese (o francese) è molto bello. E lo conoscete, ne abbiamo parlato a gennaio del 2010[25]: "cricca" è brutto almeno quanto è bello *clique*. Nelle definizioni cerchiamo di usare le lingue straniere il meno possibile, e quella volta è stata dura: il bello è che avevamo a portata di mano una bellissima alternativa e non ce ne siamo accorti.

Una *clique* di *n* elementi è il grafo completo K_n.

Dove i punti rappresentano le persone e gli archi il rapporto di amicizia. Punto e basta. Comunque, avendo reso chiara la cosa, d'ora in poi useremo *clique* nel parlato e il grafo completo nella matematica. Se mette assieme i concetti di *insieme indipendente* e *clique*, vi accorgete della complementarietà dei due termini: se su GooglePlus non avete delle grosse cliques, intuitivamente ci si aspetta che ci sia un grosso insieme indipendente, la cosa sembra ovvia.

Come diceva Hardy, "ovvio" è una parola pericolosa, in matematica: e infatti a dimostrare quanto sopra ci hanno messo un mucchio di tempo.

Infatti, il ***Teorema di Ramsey*** statuisce che:

[23] Questi ultimi due insiemi hanno un livello di sovrapposizione preoccupantemente alto.

[24] Mettiamo in nota due cose che non c'entrano niente.

1. So benissimo che questi gruppi si possono organizzare anche su Facebook, ma su Google+ è più semplice.
2. Una cosa che mi *perplime* è il fatto che FB sia oggi considerata una cosa "da vecchi" (non per niente, la nonna...), mentre sia molto più "gggiovane" G+. Ci si aspetta che, in giovane età, il gruppo degli amici sia una cosa ancora ragionevolmente compatta e condivisibile; al contrario, *anzianando*, dovrebbero nascere diversi ambiti che, se riescono a portare alcuni amici a fare le ore piccole, per altri causano solo uno slogamento di mandibole da sbadiglio.

Seguirà dibattito, come si diceva una volta.

[25] "Un paterno consiglio", PM di RM132.

Dati $z, l \in N^+$, esiste un minimo $r(z,l)$ tale che qualsiasi grafo con $r(z,l)$ vertici contiene **o** un K_z **o** un S_l.

Insomma, o avete una clique di *z* amici o *l* che non si conoscono direttamente (ma conoscono quantomeno voi, dove "voi" può essere uno qualunque del gruppo grosso.... ve l'avevo detto, che prima o poi mi annodavo con le parole).

Una volta afferrato il concetto, anche se difficile da esprimere a parole, si riescono a fare alcuni calcoli. È ovvio (e qui lo è sul serio) che:

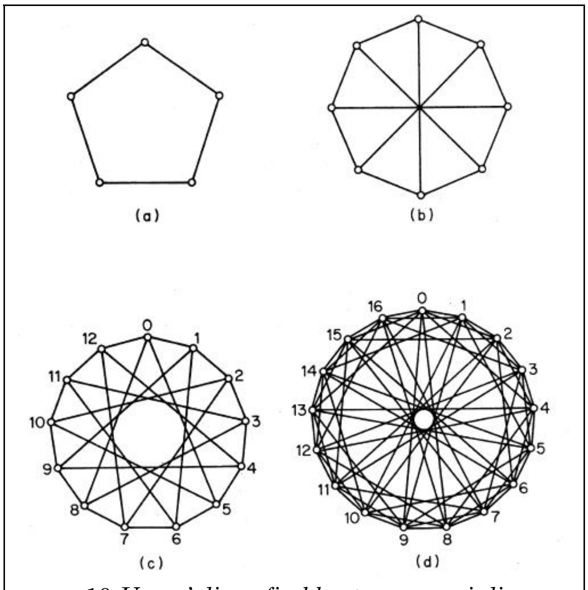
$$\begin{aligned} &r(1,s) = r(k,1) = 1;\\ &r(2,s) = s;\\ &r(k,2) = k. \end{aligned} \quad [1]$$

Un po' meno ovvio (tant'è che ci sono voluti ***Erdős*** e ***Szekeres***, per dimostrarlo) è il fatto che, per $k, s \geq 2$ si ha:

$$r(k,s) \leq r(k,s-1) + r(k-1,s). \quad [2]$$

E se entrambi i fattori a secondo membro sono pari, vale la diseguaglianza stretta.

Contrariamente a quanto fanno i matematici che lavorano in questo campo, adesso mettiamo un disegnino (Rubato a *J.A. Bondy*): quelle che vedete, sono le *pistole fumanti* del fatto che gli $r(k,s)$ sono dei valori piuttosto grandi.



10 *Un po' di grafi abbastanza speciali*

Nel disegno (a) si vede un caso in cui non esistono né *clique* da tre punti (K_3) né insiemi indipendenti da tre vertici (S_3); quindi, siccome siamo riusciti a costruire un grafico a cinque punti in cui non compaiono K_3 o S_3, possiamo affermare che è:

$$r(3,3) \geq 6.$$

Il che è quantomeno un primo risultato. Poi, dal fatto che (b) ha otto vertici, nessuna clique da tre vertici e nessun insieme indipendente da quattro vertici si ricava:

$$r(3,4) \geq 9.$$

A questo punto dovreste aver capito l'antifona e ricavare dalle altre due figure) che $r(3,5) \geq 14$ e che $r(4,4) \geq 18$. Il che è un bel passo avanti, ma come sapete i matematici preferiscono dei limiti *superiori*, non dei limiti inferiori; per fortuna, possiamo ricavare qualcosa da dei calcoli già fatti.

Infatti, da [2] e da [1] possiamo ricavare, per quanto riguarda la prima delle diseguaglianze:

$$r(3,3) \leq r(3,2) + r(2,3) = 6.$$

e, nello stesso modo, si ha:

$$r(3,4) \le r(3,3) + r(2,4) - 1 = 9 \quad \Rightarrow \quad r(3,4) = 9;$$
$$r(3,5) \le r(3,4) + r(2,5) = 14 \quad \Rightarrow \quad r(3,5) = 14;$$
$$r(4,4) \le r(4,3) + r(3,4) = 18 \quad \Rightarrow \quad r(4,4) = 18;$$

...e qui si ferma la festa; infatti, possiamo fare una tabellina di quelli noti *esattamente*, escludendo i casi triviali:

$\downarrow k \quad s \rightarrow$	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
3	3	9	14	18	23	28	36
4		18	25				

...e basta[26]! Capite, ciò non è bello, bisogna accontentarsi di *estremi* e, qui, per fortuna qualcosa si è riusciti a determinare: infatti, sempre secondo il solito Erdős

$$r(k,s) \le \binom{k+s-2}{k-1}.$$

La cosa si dimostra, ma lasciamo perdere. A questo punto, ogni Vero Matematico comincia a cercare i casi limite.

Infatti, si definisce ***grafo (k,s) di Ramsey*** un grafo con $r(k,s)-1$ vertici che ***non*** contenga né un grafo completo di ***k*** vertici né un insieme indipendente di ***s*** vertici: da quanto abbiamo visto, grafi del genere esistono di sicuro per $k,l \ge 2$; disegnarli può non essere semplicissimo, anche se in alcuni casi si può fare: in figura 10, tutti quelli che abbiamo disegnato sono grafi di questo tipo, e i casi più complicati (nella fattispecie, *(c)* e *(d)*) hanno un metodo.

> Il ***grafo* (3,5) *di Ramsey*** *(c)* si ricava vedendo i vertici come il campo degli interi modulo **13** e unendo tra di loro due vertici se la loro differenza è un ***residuo cubico*** di 13 (quindi appartenente all'insieme $\{1,5,8,12\}$).

> Il ***grafo* (4,4) *di Ramsey*** *(d)* si ricava vedendo i vertici come il campo degli interi modulo **17** e unendo tra loro due vertici se la differenza è un ***residuo quadratico*** di 17 (quindi appartenente all'insieme $\{1,2,4,8,9,13,15,16\}$).

Il motivo per cui una volta si usi il cubico e una volta il quadratico ci resta sconosciuto, ma non facciamo troppe domande perché qui siamo ai confini della matematica: ad esempio, si è congetturato che ***i grafi (k,k) di Ramsey siano sempre auto-complementari***: la cosa è dimostrata per $k \in \{2,3,4\}$, ma da qui all'infinito ce ne corre.

Vi capita mai di insospettirvi per un'enunciazione che sembra non c'entrare nulla? Bene, in questo caso potete avviare i motori (e prendere la scatola dei *Caran d'Ache*):

> Se $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ è una qualsiasi partizione degli interi $\{1,2,\ldots,r_n\}$, allora per qualche *i*, S_i contiene tre interi *x,y* e *z* per cui $x + y = z$.

Qui, quello che doveva insospettirvi è la presenza dell'n-esimo numero di Ramsey (simmetrico) $r_n = r(n,n)$: quanto sopra è noto come ***Teorema di Schur***, e il bello è che si dimostra in un attimo. Infatti, considerate il grafo $K_{r(n,n)}$ avente vertici $\{1,2,\ldots,r_n\}$, e cominciate a colorare gli archi con i colori $\{1,2,\ldots,n\}$ secondo la regola per la quale l'arco uv ha il colore *j* se e solo se $|u-v| \in S_j$. A questo punto, dal teorema di Ramsey potete

---

[26] Quasi: in realtà ne hanno trovato qualcun altro, ma ve lo andate a cercare da soli.

dedurre che esistono tre vertici *a,b* e *c* tali che $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ e $\overline{ca}$ hanno lo stesso colore; supponiamo, senza perdere in generalità, che sia $a > b > c$, e definiamo:

$$\begin{cases} x = a - b \\ y = b - c \\ z = a - c \end{cases}.$$

A questo punto, $x, y, z \in S_i$ e $x + y = z$. Q.E.D. Semplice, vero? E se vi sembra *troppo* semplice, potreste divertirvi a dimostrare il ***Teorema di Van der Waerden***: esiste un numero $V(r,k)$ tale che, comunque coloriate con *r* colori gli interi $\{1,2,\ldots,V(r,k)\}$, potete sempre trovare una *progressione aritmetica* di *k* termini tutta dello stesso colore.

Un ultimo teorema, poi vi lasciamo dormire. Trattando di matematica ricreativa, ci pare brutto non andare a esaminare qualche gioco, possibilmente che vi stia antipatico.

Infatti, adesso estendiamo il *filetto*: tutti sapete che anche un infante, dopo qualche partita, riesce comunque a pattare; meno chiaro è quello che succede quando lo estendete a più dimensioni e coinvolgete un numero di giocatori maggiore di due. Qui, viene in aiuto il ***Teorema di Hales-Jewett***:

> Per ogni $n,c \in N^+$, esiste $H(n,c)$ tale che se le celle di un ipercubo H-dimensionale $n \times n \times \ldots \times n$ sono colorate in qualsiasi modo con *c* colori diversi, esiste una riga, colonna o diagonale di lunghezza *n* le cui celle hanno tutte lo stesso colore.

Insomma, qualcuno vince di sicuro. Peccato che $H(2,2) = 2$, e il gioco in questo caso sia piuttosto stupido.

Rare volte, la filosofia riesce a essere più comprensibile della matematica, e forse questo è uno dei casi: tutto quello che abbiamo detto sinora, si può condensare nella frase "in un insieme disordinato abbastanza grande, compaiono comunque dei sottoinsiemi ordinati"; dato il grande amore di Rudy per la concisione e la parafrasi, la sua versione preferita è "Esiste un limite al disordine nella camera di un adolescente, anche senza l'intervento dei genitori".

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms