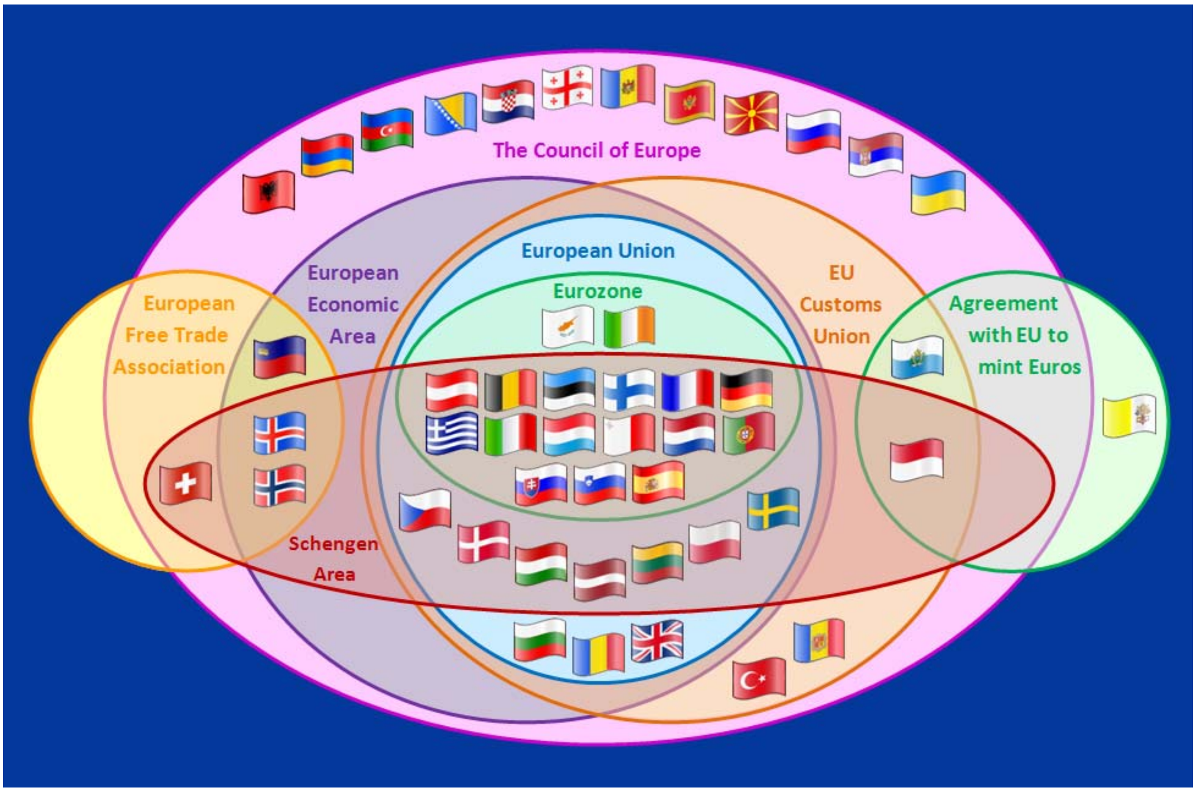
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 156 – Gennaio 2012 – Anno Quattordicesimo



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

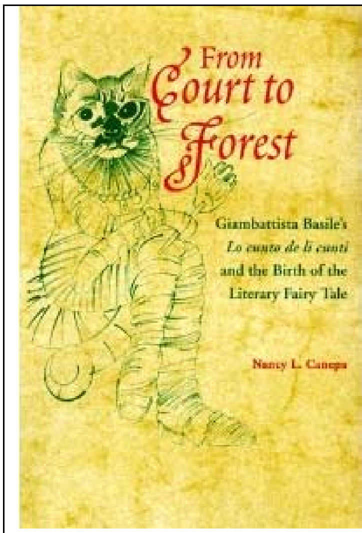
RM155 ha diffuso 2'843 copie e il 08/01/2012 per Google eravamo in 107'000 pagine.

Abbiamo preparato questa copertina ai primi di dicembre, prima che il primo ministro inglese Cameron desse origine alla famosa battuta ("La Gran Bretagna esce dall'Unione Monetaria Europea!" Gli inglesi, perplessi, si chiedono quando ci erano entrati), quindi forse dovremmo ridisegnare il grafico. Comunque, lasciateci dire che nonostante la nostra antipatia per Venn, di un oggetto del genere si sentiva la mancanza. La trovate (con le opportune spiegazioni) alla pagina ***Supernational European Bodies*** su Wikipedia.

1. Estetica del Sarchiapone

«La matematica può essere definita
come la disciplina nella quale
non si sa mai di cosa si stia parlando,
né se quanto si dica sia vero»[1]
(Bertrand Russell)

Il termine è davvero antico e con notevoli quarti di nobiltà, eppure viene sdegnosamente ignorato dai dizionari. Appare infatti attorno al 1635, anno di nascita che gli attribuisce pertanto quasi quattro secoli di vita; e di vera apparizione letteraria si tratta, dato che vede la luce nella notevole opera "*Lo cunto de li cunti*", di Giambattista Basile. Napoletano, quasi contemporaneo di Shakespeare, Basile è un onesto rappresentante del periodo barocco della letteratura italiana. Il suo "*Cunto*" è una raccolta di 50 novelle che ricalca la struttura del capolavoro di Boccaccio, tanto che è noto anche con il nome di *Pentamerone*: le novelle vengono infatti narrate in cinque giorni, al ritmo di dieci al giorno. Ma se la struttura è analoga alla raccolta boccaccesca, i temi, gli argomenti e i destinatari del racconto sono diversissimi: il sottotitolo[2] dichiara subito che si tratta di un'opera destinata prevalentemente ai bambini, e infatti gli elementi favolistici abbondano nelle cinquanta novelle del Basile.



1 *Un'edizione inglese del « Cunto » di G.Basile*

Quasi all'inizio del libro, appena al terzo capoverso della terza novella della Prima Giornata che ha per titolo "*Peruonto*", si trova questa inquietante descrizione del protagonista:

> *"Aveva na magna femmena de Casoria chiammata Ceccarella no figlio nommenato Peruonto, lo quale era lo chiù scuro cuorpo, lo chiù granne sarchiopio e lo chiù solenne sarchiapone c'avesse creiato la Natura. Pe la quale cosa la scura mamma ne steva co lo core chiù nigro de na mappina e iastemmava mille vote lo iuorno chillo denucchio che spaparanzaie la porta a sto scellavattolo…"*

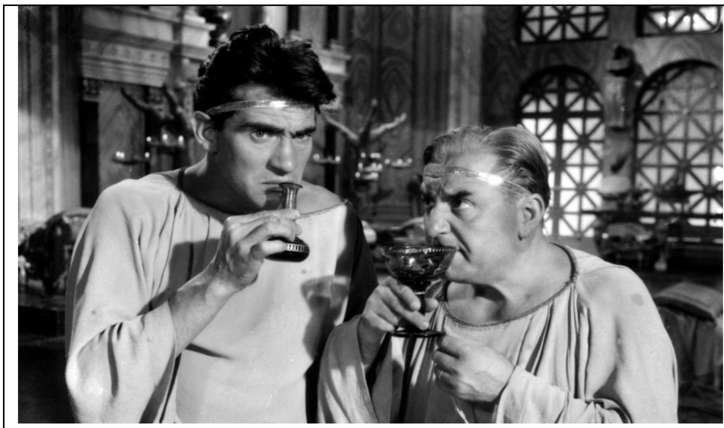
Abituati a considerare l'evoluzione del toscano come lingua nazionale di riferimento, ci ritroviamo impotenti nel giudicare se gli scugnizzi napoletani del Seicento, destinatari privilegiati del testo basiliano, avessero chiaro il significato di quella affascinante parola "sarchiapone" che entra, davvero solennemente, nel racconto come esplicito connotato di Peruonto. Non è neppure chiaro se si tratti solo di un accrescitivo del precedente "sarchiopio"; quello su cui siamo però disposti a giurare è che i bimbi napoletani del tempo non si siano preoccupati troppo del termine: puffi, stregatti, winx e uno stuolo di altri personaggi vengono accolti dalle fertili menti minorenni senza che queste si preoccupino neppure per un istante di interrompere il flusso narrativo con superflui interrogativi.

[1] Al solito, non ci fidiamo mai troppo delle nostre traduzioni, quindi vi sottoponiamo anche la frase in lingua originale: "*Mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true*". Bertrand Arthur William Russell, "Recent Work on the Principles of Mathematics", International Monthly, 1901.

[2] "*Lo cunto de li cunti overo lo trattenemiento de peccerille*"; non dovrebbe essere necessario ricorrere ad amici partenopei per capire che si tratta di un "racconto dei racconti, ovvero il divertimento dei piccini".

Altrettanto certo è che la parola, per pregnanza di significato o pura estetica fonetica, è sopravvissuta nonostante lo snobismo dei vocabolari. Carlo Campanini, attore che ebbe il privilegio di essere uno dei maggiori frequentatori di sarchiaponi del mondo, racconta che un giorno, sulla spiaggia di Fregene, un venditore ambulante di fischietti pubblicizzava la sua merce al grido di "*accattateve 'o sarchiapone napuletano*", con immediato successo di vendite tra i piccoli acquirenti della spiaggia. Sempre loro, i bambini, accettavano e arricchivano il vocabolo, promuovendolo perfino geograficamente da napoletano ad americano, e vantandosi senza ritegno del possesso e della loro – vera o presunta – esperienza e conoscenza dell'oggetto[3].

L'aneddoto raccontato da Campanini serviva da risposta a chi gli chiedeva come fosse nato un celeberrimo sketch che lui interpretava facendo da spalla alla straordinaria vis comica di Walter Chiari, autore e insuperato interprete della gag stessa: a sentire il suo partner, a Chiari occorsero giusto una decina di minuti, dopo aver assistito all'episodio della spiaggia di Fregene, per scrivere il canovaccio di quella che con ogni probabilità è la scenetta d'avanspettacolo più famosa.



2 *Walter Chiari e Carlo Campanini (senza sarchiapone)*

Anche se non strettamente indispensabile, è a questo punto fortemente consigliato investire dieci minuti di tempo per guardare lo sketch[4], se non lo si è mai visto: o per riguardarlo, nel caso si sia sufficientemente poco giovani da ricordarlo per esperienza diretta. È comicità che ha più di mezzo secolo, ma davvero divertente, oltre che di un'attualità impressionante.

In estrema sintesi, la scena è ambientata in un vagone ferroviario, e un passeggero (Campanini) ha un cesto coperto nella retina portabagagli che a suo dire contiene un animale, appunto il sarchiapone. Gli altri passeggeri per non mostrare la loro ignoranza fingono di conoscere il sarchiapone, e uno di essi (Chiari) si dichiara addirittura un esperto. Da qui nascono una serie di tensioni comiche, perché Chiari viene messo sempre più in difficoltà da Campanini nel tentare di dimostrare una conoscenza del tutto inesistente (come del resto è inesistente il sarchiapone stesso), fino alla rivelazione finale dove si palesa che il presunto animale è solo un trucco di Campanini per rimanere solo e viaggiare comodamente nello scompartimento del vagone. Gli elementi che concorrono a rendere divertente la scena sono da ricercarsi innanzitutto nella bravura degli interpreti, come sempre nei casi di scene brevi d'avanspettacolo; ma ci sono almeno un altro paio di fattori notevoli: uno di questi è probabilmente proprio il fascino evocativo della parola "sarchiapone", che ha la caratteristica di porsi nel giusto mezzo tra termine puramente comico e apparentemente scientifico, svolgendo così perfettamente il ruolo di denominazione di presunto animale esotico in una situazione dichiaratamente comica. Inoltre, per quanto tutta la forza della scenetta si basi sulla presa in giro

[3] A conferma del fatto che nel napoletano la parola è rimasta vitale, per quanto con significato non chiaramente esplicitato, si può citare la poesia di Totò "Sarchiapone e Ludovico", dove è usata come nome proprio di un cavallo purosangue, amico di Ludovico, un asino saggio e disilluso dagli uomini.

[4] È un'epoca particolarmente felice, dal punto di vista delle citazioni, quella in cui viviamo. Fino a non molto tempo fa era del tutto impossibile riferirsi a vecchie trasmissioni televisive senza fare appello ad altro che non fosse un debole riassunto scritto o alla memoria condivisa. Oggi invece basta mettere dei link a YouTube. La prima versione televisiva è del 1958, dura poco più di dieci minuti, ed è reperibile all'indirizzo http://www.youtube.com/watch?v=sm-a8Xm1oMU. Si trova facilmente anche una versione più lunga e recente (poco meno di un quarto d'ora, del 1974), al link http://www.youtube.com/watch?v=nywnVhPyiIg.

dell'atteggiamento (piuttosto comune, in verità) di chi è solito spacciarsi per esperto di cose che non conosce affatto – e in tal senso il ruolo dell'inesistente sarchiapone è fondamentale proprio in virtù della sua inesistenza – è comunque curioso che tutto l'episodio possa dipanarsi serenamente, senza particolari incongruenze o contraddizioni, girando proprio attorno al nulla.

In realtà qualcosa del genere è tutt'altro che insolito nelle narrazioni, specialmente quelle cinematografiche, al punto di avere un nome preciso nel mondo del cinema. Si tratta del cosiddetto MacGuffin, elemento topico di molti film e formalizzato, almeno per quanto riguarda la sua denominazione, da Alfred Hitchcock. Nel 1939 narrò che quasi ogni film del genere spy-story si affida ad un meccanismo che guida tutto lo svolgersi della trama, per quanto resti del tutto inessenziale nello sviluppo vero e proprio della finzione cinematografica; disse quindi che lui e i suoi collaboratori avevano anche dato un nome al marchingegno narrativo, e usavano riferirsi ad esso con il termine "MacGuffin". L'artificio del MacGuffin era quindi già utilizzato quando durante un'intervista a François Truffaut[5] il maestro inglese del thriller lo spiegò, metaforicamente, così:

> *«Si può immaginare una conversazione tra due uomini su un treno. L'uno dice all'altro: "Che cos'è quel pacco che ha messo sul portabagagli?". L'altro: "Ah quello… è un MacGuffin". Allora il primo: "Che cos'è un MacGuffin?" L'altro: "È un marchingegno che serve per prendere i leoni sulle montagne della Scozia". Il primo: "Ma non ci sono leoni sulle montagne della Scozia". Quindi l'altro conclude: "Bene, quindi non è un MacGuffin!". Come vedi, un MacGuffin non è niente».*[6]

È impressionante la coincidenza tra il vagone ferroviario di Chiari e Campanini e il treno evocato da Hitchcock, che rafforza ulteriormente l'identità di significato: il Sarchiapone è indubbiamente un caso di MacGuffin. Nella sua accezione più generale, comunque, il MacGuffin è un qualsiasi elemento narrativo che è apparentemente essenziale allo svolgimento del racconto, pur non essendo minimamente significativa la sua natura, che perlopiù rimane irrisolta per tutta la durata del film. Nei lungometraggi di Hitchcock i casi di MacGuffin naturalmente abbondano[7]: il primo caso palese è nel film "*Il club dei trentanove (The 39 Steps)*" del 1935, dove i famosi trentanove (scalini o personaggi che fossero) imperversano con la loro presenza/assenza per tutta la narrazione, senza essere mai definitivamente esplicitati.

3 *Alfred Hitchcock*

[5] Intervista che si ritrova all'interno d'un libro abbastanza significativo nella storia del cinema: "*Il cinema secondo Hitchcock*", di F.Truffaut, 1966. Edito in Italia da Net.

[6] Traduzione presa dalla voce corrispondente di Wikipedia, che è anche la fonte di quasi tutte le informazioni di base da cui abbiamo tratto questo articolo dacché, a differenza dei dizionari e delle enciclopedie ufficiali, la libera enciclopedia della Rete è dotata sia della voce "Sarchiapone" sia di quella relativa a "MacGuffin". Del resto, Wikipedia è, più o meno dalla sua nascita, un riferimento costante per la redazione dei compleanni di RM. Abbiamo pertanto un debito storico verso di essa, debito che proprio in questo mese di Gennaio 2012 è vertiginosamente cresciuto, poiché l'italica Wiki ha pubblicato una voce relativa a questo nostro giornalino (http://it.wikipedia.org/wiki/Rudi_Mathematici). La cosa ci commuove, emoziona, lusinga e, naturalmente, ci fa crescere una gigantesca coda di pavone.

[7] Inutile dire che c'è chi li ha cercati tutti: una lista (non sappiamo quanto completa), la potete trovare in questo sito dedicato: http://borgus.com/hitch/macguffins.htm.

4 *Famoso cercatore di MacGuffin*

I casi di MacGuffin, più o meno acuti e persistenti, si possono davvero ritrovare in gran parte dei film d'azione. Gli amanti del genere ricorderanno ad esempio che una misteriosa valigetta nera è il fil-rouge che lega insieme i diversi episodi di "*Pulp Fiction*" di Quentin Tarantino, ma gli esempi che possono riportarsi sono davvero troppi anche solo per provare un elenco parziale. Steven Spielberg dichiarò di odiare i MacGuffin, ma con ogni probabilità la sua era un'affermazione tardiva o sarcastica: il quarto film del suo ciclo di Indiana Jones (*Indiana Jones e il Regno del Teschio di Cristallo*) era un esempio eclatante del genere, con quel "crystal skull" la cui natura non è mai chiarita e il cui ruolo è volutamente mantenuto misterioso, e quasi certamente fu il (relativo) fiasco che il film ottenne a determinare la risentita dichiarazione. Anche perché, con piccole estensioni del concetto, la stessa Arca dell'Alleanza che guida la narrazione del suo trionfale "*I Predatori dell'Arca Perduta*" è sostanzialmente un MacGuffin[8].

Sia i bambini napoletani di Basile sia gli spettatori moderni delle produzioni hollywoodiane ci mostrano comunque come sia del tutto possibile, quando non addirittura naturale e normale, accettare un concetto vago e indefinito come guida di una struttura narrativa, purché la narrazione generata sia avvincente e coerente a sé stessa. E in verità basta fare un minimo di riesame critico delle proprie idee e convinzioni per scoprire un bel numero di conoscenze, opinioni, fedi e giudizi che abitano la nostra mente in serenità, pur essendo relative a concetti la cui definizione e natura non ci è affatto chiara. A ben vedere, la parola che probabilmente ogni uomo nomina più spesso nella sua vita è "io", e ci sono almeno due prestigiose attività intellettuali, la filosofia e la psicologia, che hanno come problema fondamentale la definizione esatta del concetto.

La disciplina più coerente di tutto lo scibile umano, in realtà, non dovrebbe essere affatto sorpresa o messa in imbarazzo né dai Sarchiaponi né dai MacGuffin. La coerenza interna è tanto cara alla matematica che essa è disposta a rinunciare serenamente alla verosimiglianza dei suoi assunti, a patto di poter poi sviluppare con il massimo rigore possibile proprio quelle assunzioni prese inizialmente; basta quindi considerare gli artifici narrativi alla stregua di "ipotesi", e i matematici seguiranno con piena convinzione lo sviluppo della disciplina, al pari degli scugnizzi napoletani e di Indiana Jones.

La celebre frase sulla natura della matematica di Bertrand Russell che abbiamo messo in apertura a queste righe ha solitamente uno strano effetto sui giovani studenti liceali che la sentono per la prima volta. Se ignorano l'identità dell'autore, sono propensi a credere che si tratti di una sorta di invettiva contro la matematica pronunciata da un umanista inveterato e fondamentalista, irritato e spietato contro tutto ciò che assomiglia ad un numero. Se invece conoscono Russell quel tanto che basta a classificarlo come un pezzo

[8] Ci è d'obbligo riportare che, a detta di qualche attento detrattore, perfino la struttura dei compleanni di RM si basa di fatto sulla logica dei MacGuffin, intendendo come tale lo sproloquio iniziale che solitamente affronta temi niente affatto matematici con la sola intenzione di condurre l'incauto lettore a ritrovarsi a leggere, ad un certo bel punto, la scarna biografia di un matematico. Se questa ipotesi fosse vera, ci ritroveremmo in questo caso ad usare il concetto di MacGuffin come MacGuffin di questo compleanno, mostrando una ragguardevole perversione logica. (Comunque no, non è vero che si tratta di un detrattore: è un matematico, e soprattutto è un amico…)

grosso della matematica, tendono ad immaginare che la frase sia da annoverare tra i commenti scherzosi e un po' sarcastici, una sorta di umorismo interno come quello dei fisici che sono soliti definire tra loro la fisica come "ciò che fanno i fisici la notte tardi". È solo dopo aver frequentato un po' più a fondo le ricchezze e le miseria della matematica che si riesce a comprendere che, pur riconoscendo una componente volutamente scherzosa e provocatoria del resto quasi sempre presente negli epigrammi del filosofo inglese, Russell intendeva dire esattamente quello che ha detto: l'interpretazione piana e letterale della sua frase è assolutamente realistica, e pregnante di significato sulla natura della matematica.

È però anche vero che, proprio per questa stessa ragione, domandarsi cosa effettivamente sia la matematica è una domanda che spesso si sono posti i matematici, e non solo loro. Come tutte le domande sulla natura ultima delle cose, le risposte possono essere diverse e spesso in contrasto fra loro; ma in una sorta di contrappasso logico è lecito osservare che anche le domande possono essere intese in maniera diversa e con finalità differenti. Un consesso di accademici può chiedersi "Che cos'è la matematica?" con intenti profondi, riformatori o addirittura definitori; ma esiste certo anche un contenuto più immediato e diretto – e non necessariamente più ingenuo – se la stessa domanda la formulano i giovani o i non esperti della disciplina. La decisione di porsi questa domanda in quest'ultimo significato e di rispondere in maniera completa e con un linguaggio destinato ad essere compreso da tutti fu l'opera meritoria che, più di settanta anni fa, intrapresero due matematici professionisti.

5 *Richard Courant*

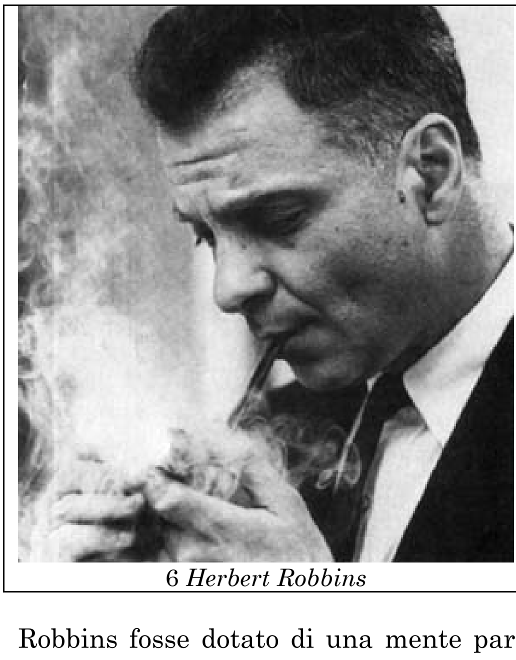
Richard Courant nacque a Lubliniec l'otto Gennaio 1888, in quella che a quel tempo era il Reich tedesco di Guglielmo I e di Bismarck, e che oggi è invece Polonia. Di famiglia ebrea, iniziò gli studi a Breslau, dove i genitori si erano trasferiti quando lui era ancora bambino. Non ebbe un'infanzia facile a causa di difficoltà economiche e tragedie familiari che sconvolsero la sua casa, e all'età di appena sedici anni dovette provvedere a sé stesso perché i genitori si trasferirono a Berlino, mentre lui, che già lavorava pur continuando a studiare, rimase a Breslau. Prima ancora di superare gli esami di ammissione cominciò a seguire i corsi di matematica e fisica nella locale università; non restò comunque entusiasta degli insegnanti di Breslau, e quando due suoi compagni di corso che si erano trasferiti a Göttingen gli scrissero entusiasticamente dei corsi che Hilbert vi teneva, si decise a trasferirsi nella somma università tedesca dopo un semestre interlocutorio passato a Zurigo. Era il 1907: Richard aveva diciannove anni.

A Göttingen seguì anche i corsi di fisica e di filosofia, oltre che ovviamente quelli di matematica tenuti da Minkowski e da Hilbert di cui, appena nel 1908, divenne assistente. Ottenne il dottorato nel 1910, dopo aver lavorato sotto la guida di Hilbert nel campo dell'analisi, con una tesi sulle applicazioni del principio di Dirichlet ai problemi delle mappature conformi. Tra il 1910 e l'inizio della Grande Guerra continuò a lavorare al principio di Dirichlet, ottenne un posto di professore associato a Göttingen e si sposò. La guerra, come al solito, cambiò tutto: fu mandato al fronte, vide metà dei suoi compagni morire in trincea, fu ferito egli stesso e rimandato a casa in convalescenza. Nel 1915 divorziò, e quando fu rimandato al fronte la sua vita fu salvata, con ogni probabilità, da uno strumento che aveva realizzato durante il suo primo periodo in trincea: si trattava di una specie di telegrafo senza fili che usava il terreno come conduttore, e che poteva pertanto essere di grande utilità sulle linee delle trincee. Quando fece ritorno sotto le armi fu incaricato di addestrare le unità combattenti all'utilizzo del suo sistema, e quindi non si ritrovò in prima linea, a fare da carne da cannone.

Dopo la guerra tornò a Göttingen, si sposò una seconda volta, cominciò la carriera da insegnante privato, finché non gli fu offerta una cattedra dall'Università di Münster; ma non restò a lungo nella città renana, perché Hilbert e Klein fecero in modo di farlo tornare a Göttingen, offrendogli il posto lasciato libero da Hecke. Qui fondò di fatto l'Istituto di Matematica dell'università, e continuò a collaborare con Hilbert, con il quale firmò anche un importante testo di Metodi Matematici per la Fisica[9]. Nel 1932 fece un viaggio negli Stati Uniti, dove era stato invitato a tenere alcune lezioni nelle maggiori università americane.

Poi arrivò il 1933, e con esso i nazisti al potere. Richard era ebreo, e come tale fu espulso dall'università: sebbene vi fosse una clausola che consentiva ai docenti ebrei che avessero preso parte attiva alla Prima Guerra Mondiale di restare al loro posto, questa non fu applicata nel suo caso, e in Maggio fu costretto a lasciare Göttingen. Neanche gli sforzi di Hermann Weyl, che era direttore di quell'Istituto di Matematica che lo stesso Courant aveva fondato, valsero a mantenergli la cattedra e il posto di lavoro. Dopo aver preso in considerazione l'ipotesi di trasferirsi in Turchia e aver passato un semestre a Cambridge, Richard Courant attraversò finalmente l'Atlantico, diretto all'Università di New York. Qui fondò, sul modello di quanto aveva già fatto a Göttingen, un centro di ricerca di matematica pura e applicata, dove tra gli altri trovarono riparo diversi altri matematici tedeschi fuoriusciti a causa delle leggi razziali.

Finita la guerra, tornò spesso in Germania, ma senza nessuna intenzione di stabilirvisi definitivamente: l'istituto che aveva fondato nell'Università di New York era adesso chiamato con il suo nome, e riempiva del tutto la sua vita che terminò, immaginiamo abbastanza serenamente, nel 1972.



6 *Herbert Robbins*

Herbert Ellis Robbins non era certo un coetaneo di Richard Courant; nato in Pennsylvania il 12 Gennaio 1915[10], era di quasi tre decadi più giovane, e poteva quindi esserne tranquillamente il figlio. Al pari di Courant, entrò nell'ambiente universitario assai giovane, varcando i cancelli di Harvard a soli sedici anni, ma a differenza di lui non aveva interessi troppo ben definiti: seguì corsi di letteratura e quasi per caso quelli di calcolo; si ritrovò nel club di matematica con sua stessa sorpresa, completò gli studi in topologia prendendone il corrispondente titolo accademico, ma senza particolare entusiasmo. Al termine della sua carriera finirà poi per essere considerato soprattutto uno statistico, ma anche quest'etichetta se la ritroverà addosso più per caso che per scelta.

Non v'è comunque dubbio che Herbert Robbins fosse dotato di una mente particolarmente dotata ed eclettica: anche se i suoi studi in topologia cominciarono quasi per caso (stava cercando un campo qualunque di

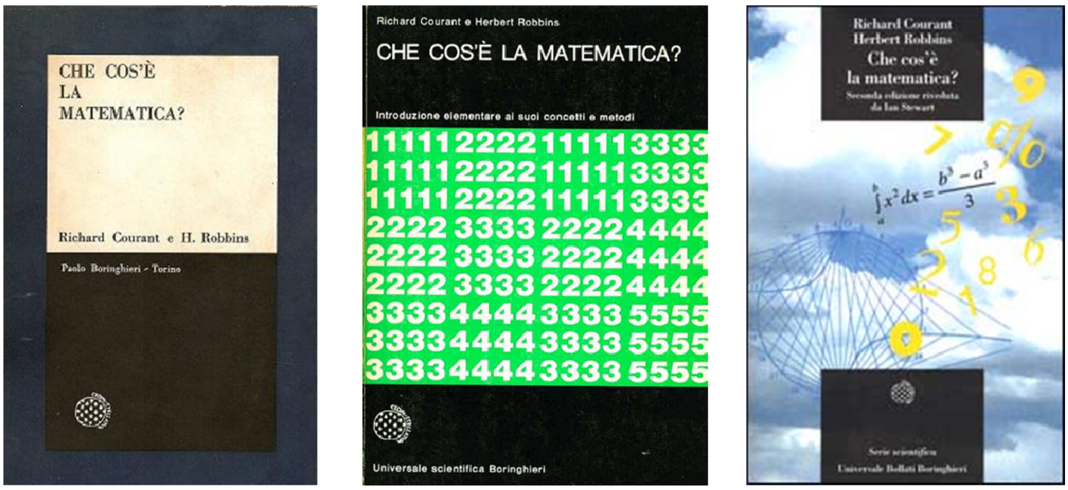
[9] Con buona pace del sommo Hilbert, l'opera *Methoden der mathematischen Physik* è praticamente scritta interamente da Courant, nonostante quanto scritto in copertina.

[10] Inutile sottolineare che noi di RM siamo estremamente grati a Robbins per la sua decisione di nascere nello stesso mese di Courant, dando così a questo "compleanno doppio" un'invidiabile coerenza interna.

studi cui dedicarsi per ottenere il Ph.D. e si affiancò al topologo Whitney che era appena tornato entusiasta da una conferenza dove venivano presentati problemi ancora irrisolti nel campo), i risultati dei suoi lavori erano certo rimarchevoli, visto che già la sua tesi di dottorato sulla omotopia e classificazione delle mappe 2-Complex nello spazio venne pubblicata dalla American Mathematical Society.

La sua tesi gli consentì di entrare, seppure ad un livello e con una retribuzione molto bassi, all'Institute for Advanced Study di Princeton, come assistente di Marston Morse. Poco dopo, Morse fu raggiunto da una richiesta di Courant che gli chiedeva se poteva raccomandargli qualcuno come Istruttore di Matematica per la sua università di New York. Morse rispose proponendogli Robbins, e questi cominciò a lavorare a New York nel 1939.

Dal punto di vista della retribuzione anche l'università di New York non era particolarmente generosa, e fu soprattutto per questa ragione eminentemente pratica che Herbert Robbins accettò con entusiasmo l'insolita proposta che Richard Courant gli fece poco dopo il suo arrivo a New York: "*Racimolerò un po' di soldi raccogliendo i materiali di alcuni vecchi corsi in un libro di matematica destinato al grande pubblico. Ti piacerebbe aiutarmi a farlo? Posso pagarti il disturbo attorno ai sette od ottocento dollari.*" Lo stipendio di Robbins era attorno ai duecento dollari al mese, e l'offerta era pertanto allettante: e comunque Herbert era attratto dall'idea di comunicare alla gente comune le sue idee sulla matematica. Quindi, per sua e nostra fortuna, accettò.



7 *Anche in Italia cambia la veste, ma continua ad essere presente*

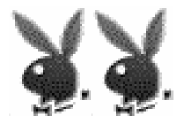
Il risultato della collaborazione fu uno dei libri più famosi della divulgazione matematica, che è tutt'oggi facilmente reperibile in libreria e frequentemente ristampato: "*Che cos'è la matematica?*", la domanda cruciale della fondazione, diventa il titolo e il richiamo dell'opera.

La collaborazione tra Courant e Robbins non fu tutta rose e fiori, soprattutto ad opera completata. È immaginabile che il vecchio Courant si sentisse a tutti gli effetti nel ruolo del docente e considerasse, in ultima analisi, Robbins solo un suo pupillo, un assistente che probabilmente doveva sentirsi gratificato dal solo essere stato di supporto nella creazione del libro. Ma Robbins era di parere diverso, e si mise a combattere per avere il suo nome in copertina come coautore. Alla fine la spuntò, e nel mondo della divulgazione matematica i nomi "Courant & Robbins" sono oggigiorno quasi inevitabilmente pronunciati insieme.

A prescindere dalle diatribe che possono offuscarne un po' la cronistoria, non c'è dubbio che il "What is Mathematics?" di Richard Courant e Herbert Robbins è una pietra miliare per coloro che vogliono avvicinarsi alla misteriosa scienza di Euclide, Gauss e Riemann. Probabilmente il loro libro non è una risposta definitiva alla domanda del titolo, e certo non lo è dal punto di vista di coloro che si pongono la questione sul senso ultimo e profondo della natura della matematica, ma il suo obiettivo non era certo questo.

La matematica resta sempre una sorta di sarchiapone, anche dopo che si è terminata la lettura del Courant & Robbins: ma diventa un sarchiapone assai più familiare. E bellissimo, naturalmente.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Your computer is StOnEd!			
Botte con Ordine			

2.1 Your computer is StOnEd!

Niente da fare, non riesco a scrivere un problema senza parlare di me.

Avevo impostato questo problema parlando di mal di gola e sul fatto che assumo medicinali sì e no una volta ogni tre anni (e tra i "medicinali" rientra anche l'acido acetilsalicilico, non faccio nomi per evitare pubblicità, e se ho un mal di testa di solito me lo tengo e aspetto che passi) o quando sono in condizioni di emergenza (si intende per "emergenza" quando me lo dice il medico – che vedo un paio di volte l'anno per motivi non professionali: leggasi abbuffate colesteroliche taglia XL – o quando mi becca un mal di gola da non riuscire a parlare e la settimana dopo devo tenere un corso, come successo or ora[11]). Siccome i medici di solito si arrabbiano quando leggono cose del genere, ho cambiato l'ambientazione (e l'ho portata in un ambiente in cui sono molto più *fondamentalista* di quello relativo alle medicine), ma siccome avevo un bellissimo problemino (non di matematica) dedicato a loro, l'ho tenuto: lo trovate al fondo.

Si suppone che se leggete queste pagine abbiate una vaga idea di cosa siano i virus (*sensu lato*) per i computer: la cosa si risolve con un buon antivirus, ma tra trovarlo, configurarlo, tenerlo aggiornato, esiste sempre qualcuno che non ce l'ha…, fidando nel fatto che se tutti gli altri nella rete locale hanno l'antivirus, si rischia poco o nulla: insomma, beccarsi un virus sarà una scocciatura, ma è una scocciatura anche stare lì a cercare un antivirus. Valutiamo in 5% la probabilità che l'antivirus vi schianti il computer (proteggendovi in modo forse un po' troppo radicale dal virus) e in 10% la probabilità che senza antivirus sia il virus a schiantare tutto, giusto per fare dei numeri.

Per definire un po' di metodologia, supponiamo che la probabilità di prendersi il virus se una frazione f dei vostri colleghi (voi escluso, quindi) installa l'antivirus diventi $(1-f)\cdot 10\%$ (dove il "10%" lo abbiamo preso dalle supposizioni di cui sopra, alla fine, generalizzeremo). La *domanda zero* ("zero" perché è facile) che vi ponete, è: ma se le policy aziendali richiedono che almeno il 60% installi l'antivirus, qual è il rischio medio per l'intera popolazione?

Ora, visto che stiamo parlando di imposizioni dall'alto, comunque attivate dalla corretta percentuale, e considerato che c'è sempre quel 5% di probabilità che facendo i bravi

[11] È sabato sera e il corso è lunedì: per ora tutto bene, dovrei farcela.

schianti tutto, quale deve essere la percentuale di persone che installano l'antivirus per minimizzare il rischio globale? Questa, per riferimenti successivi, è la *domanda uno*.

Potrebbe essere interessante anche esaminare politiche più "lassiste": ad esempio, supponiamo l'azienda non obblighi nessuno a installare l'antivirus, semplicemente, ce ne propone l'installazione, e se non siamo d'accordo, amici come prima. La licenza che doveva essere utilizzata per noi torna sul mercato interno, e potremo installarlo sul computer di qualcun altro (ci hai ripensato? Spiacenti, dovevi pensarci prima...). Tutti conoscono le percentuali di rischio di installazione o non installazione dell'antivirus, e ognuno lancerà l'installazione solo se gli conviene. In questo scenario, quante persone, secondo voi, installeranno l'antivirus?

Adesso, come Responsabili della Sicurezza Aziendale, pensiamo di comportarci (se ci passate l'ossimoro) "male a fin di bene"; pubblicizziamo il rischio di infezione, nel caso di mancata installazione dell'antivirus, ad un certo valore R maggiore del 10%: se non obblighiamo nessuno ad installare l'antivirus, che valore dovremmo fissare per R per raggiungere il livello ottimale di vaccinazione che minimizza il rischio globale, come determinato nella *domanda uno*? Attenzione che non c'è nessun bonus ad installare l'antivirus, anzi resta il 5% di rischio di schianto (non vi piace 5%? Generalizzate, se volete...).

Ah, la scusa "Non ho risposto al problema perché mi sono beccato un virus" non vale.

Problema speciale per i medici (e i biologi, i chimici, i botanici e i veterinari: ve l'avevamo promesso!): Nella tradizione piemontese (fateci sapere se la credenza è diffusa anche altrove), il tenere una "Castagna d'India" in tasca garantisce una certa (non totale) immunità dalle malattie da raffreddamento, quali mal di gola, raffreddore e influenza; Rudy crede di aver trovato una ragione (molto arzigogolata: è il primo ad avere dei dubbi) per cui un certo effetto possano averlo: riuscite a costruire un ragionamento per cui la cosa possa effettivamente avere un vago fondo di verità? Quello di Rudy è piuttosto lungo, vediamo come ci arrivate voi.

2.2 Botte con ordine

Vi ricordate la palestra di arti marziali dove praticavamo (Rudy e i VadLdRM) sino a qualche anno fa? Forti del fatto che due calci ben dati non si rifiutano a nessuno, siamo rimasti amici e veniamo regolarmente invitati al pranzo sociale.

In occasione dell'ultimo incontro, è stata chiesta la nostra consulenza relativamente all'organizzazione di un torneo: sul *tatami* della palestra era possibile tracciare *tre* campi di gara, sui quali svolgere in contemporanea i combattimenti. Erano iscritti al torneo *nove* atleti e (organizzazione molto spartana), l'idea era che si picchiassero in due per ogni campo, totale sei, e gli altri che non stavano facendo niente facessero gli arbitri, uno per ogni campo.

Volendo mettere un minimo di organizzazione, erano state poste alcune condizioni:

1. Abbiamo bisogno di un torneo in *dodici* round in cui ogni atleta ha esattamente un incontro con ognuno degli altri partecipanti e fa l'arbitro nei restanti incontri.
2. Se appena possibile, vorremmo che ogni volta che un atleta fa l'arbitro, abbia due round di combattimento prima di fare nuovamente l'arbitro.

Riuscite a generare lo schema di torneo soddisfacente entrambe queste richieste? Attenti che state trattando con nove *karateka*, quindi se la risposta fosse "no", meglio avere pronta una schedulazione in cui la prima regola è rispettata e la seconda è violata il meno possibile…

Avete qualche idea? Hanno l'aria impaziente, e non vorremmo che nell'attesa se la prendessero con noi…

3. Bungee Jumpers

Trovate la relazione tra $\arcsin[\cos(\arcsin x)]$ e $\arccos[\sin(\arccos x)]$.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Gennaio.

Come da tradizione, siamo in ritardo. E si tratta di un ritardo non solo fisiologico, dovuto a vacanze ed abbuffate: è che malgrado il Capo continui a produrre i suoi pezzi in rigoroso anticipo, i due nullafacenti redazionali continuano ad allungare i tempi di produzione dei loro pezzi. Dove andremo a finire, di questo passo, non lo sappiamo. Quello che però è certo, è che non posso perdere altro tempo in ciance, e quindi brevemente ringrazio tutti coloro che ci hanno inviato auguri per Natale e l'inizio d'anno, e passo ad un paio di comunicazioni di servizio prima di passarvi le soluzioni.

Prima informazione è che – per qualche motivo misterioso – gli amministratori di Google Gruppi non permettono più a noialtri di iscrivere direttamente alcuno al nostro gruppo: possiamo solo inviare inviti, che devono essere accettati. Insomma, prima potevamo, su richiesta, cambiare gli indirizzi di distribuzione, ma ora non possiamo più farlo. Speriamo che questo non riduca in nessun modo il numero dei nostri iscritti, cioè di coloro che ricevono la nostra Newsletter, perché è un numero a cui teniamo tantissimo... come potete vedere dal fatto che lo pubblichiamo ogni mese a pagina due. Quindi se avete smesso di ricevere la nostra newsletter o se avete cambiato indirizzo di mail vi preghiamo di andare sul gruppo[12] e modificare il vostro profilo.

Altro dato essenziale è che – incredibilmente – Rudi Mathematici è oggi anche una voce di Wikipedia. Non posso scrivere altro in proposito, perché le code di pavone dei tre Redattori mi impediscono di vedere bene la tastiera. Ringraziamo i tanti Wikipedisti che sono tra le schiere dei nostri lettori, e ci godiamo ogni minuto di celebrità, controllando periodicamente le modifiche in rete.

Ed ora, prima di lasciarvi la parola, il Capo ha un problema da proporvi.

4.1 Senza numero, che non ci abbiamo capito niente (quasi)

Colpevoli, Vostro Onore.

In quel di novembre, durante la nostra peregrinazione conferenzialcalendaristica, ci era stato presentato un quesito "doppiamente improponibile ma interessante".

> *Primariamente improponibile* in quanto era data la risposta, ma non la soluzione, e non avevamo la più pallida idea di come arrivarci.
>
> *Secondariamente improponibile* in quanto un aggeggio del genere, girarlo in problema ambientato, è impossibile anche se vi siete fumati tiotimolina risublimata avvolta nelle edizioni originali di *Metal Hurlant*.
>
> *Interessante* per la citazione di James Thurber preferita da Rudy[13].

La colpevolezza (nostra, non del problema) nasce dal fatto che per una serie di eventi, non siamo proprio riusciti a scrivere il pezzo per dicembre, anche se avevamo il materiale: ci scusiamo con ***Bruno*** per il ritardo e lo presentiamo adesso: non tra i problemi, in quanto

[12] https://groups.google.com/forum/#!forum/rudi-mathematici

[13] "Allevare un segugio è estremamente frustrante. Quando lo chiami, non gli importa nulla di dove sei: quello che lo affascina, è *come ci sei arrivato*". J. Thurber, "Il cane che sapeva troppo e altre storie di cani".

continuiamo ad essere completamente "al vuoto" di ambientazione[14]; non tra i BJ, in quanto a soluzione continuiamo a brancolare nel buio. Occhio che arriva.

Questo è noto come ***Il problema del Bozza***, e prende il nome da un professore di un liceo di Ivrea (chi conosce Ivrea, i suoi licei e i residenti professori non avrà problema ad identificare i parametri mancanti); il suddetto, nelle parole di ***Bruno***,

> "...per vincere la noia e le frustrazioni del suo mestiere, a cavallo tra XX e XXI secolo si occupò di matematica curiosa e dilettevole: dilettevole per lui!"

Bene, veniamo al problema, che è doppio: ve lo diamo nella formulazione originale.

Problema 1: fissato $k \in \mathbf{N}$, determinare $x, y \in \mathbf{Z}$ tali che $x^{k+1} = (x+y)^k - y^k$

Soluzione: per k=0 risulta x=0 e $y \neq 0$; per k>0, se x=0 allora $y \in \mathbf{Z}$, se $x \neq 0$ allora $x = \dfrac{(n+1)^k - (n-1)^k}{2^k}$ e $y = \dfrac{(n-1)\left[(n+1)^k - (n-1)^k\right]}{2^{k+1}}$ con (n dispari) OR (n multiplo di 2^{k-h} quando k è pari e 2^h è la più grande potenza di 2 che divide k).

Problema 2: fissato $k \in \mathbf{N}$, determinare $X, Y \in \mathbf{Z}$ tali che $(X-Y)^{k+1} = X^k - Y^k$

Soluzione: per k=0 risulta $X = Y \neq 0$; per k>0, se X=Y allora $X, Y \in \mathbf{Z}$, se $X \neq Y$ allora $X = \dfrac{(n+1)\left[(n+1)^k - (n-1)^k\right]}{2^{k+1}}$ e $Y = \dfrac{(n-1)\left[(n+1)^k - (n-1)^k\right]}{2^{k+1}}$ con (n dispari) OR (n multiplo di 2^{k-h} quando k è pari e 2^h è la più grande potenza di 2 che divide k).

...le cose si verificano, ma come a tutti i segugi interesserebbe capire *come ci si arriva...* Qualcuno ha delle idee?

4.2 [151]

4.2.1 Non mi piace il Master Mind

Riepilogo delle puntate precedenti, a cominciare dal testo del problema:

> *Alberto e Fred hanno scelto* 6 *numeri diversi tra loro compresi tra* 1 *e* 49*, estremi inclusi. Il Capo può fare delle ipotesi, scegliendo un sottoinsieme dei numeri e proponendoli, i VAdLdRM diranno quanti (non quali) sono quelli giusti. Quale strategia permette di indovinare i* 6 *numeri con il minimo di tentativi?*

Avevamo ricevuto le risposte di ***Franco57*** ("25 domande") e di ***Fabrizio*** ("23 domande"); dal nostro punto di vista ci pare manchi qualcosa, ad esempio una soluzione che dica "24 domande". Che era, tra le altre cose, la soluzione "ufficiale": non abbiamo riscontrato errori nella soluzione di ***Franco57*** e neppure in quella di ***Fabrizio*** (e non ci pare ci siano nella "ufficiale"): saremo tutti ben contenti se li trovaste (in particolare, saremmo contenti se li trovaste in quella "ufficiale", come al solito… e probabilmente ***Franco57*** e/o ***Fabrizio*** sarebbero contenti se dimostraste che hanno ragione loro).

Se q e n sono dei naturali, indichiamo con:

---

[14] Quella semi-proposta da ***Bruno*** "dividere un segmento z, di misura intera, in due parti x e y, entrambe di misura intera, in modo che l'ipercubo di dimensione k+1 costruito sul lato x abbia (iper)volume uguale alla differenza degli (iper)volumi degli ipercubi di dimensione k costruiti su z e y rispettivamente" non è proprio un'ambientazione…

- $G(q,n)$ il gioco consistente nel trovare q "numeri giusti" tra n secondo le condizioni indicate nel problema;
- $M(q,n)$ il numero minimo di domande necessarie a trovare i q numeri nel gioco $G(q,n)$.

Si conviene che $M(0,n)=0$. Esaminiamo cosa capita per $q=1$: sia $P=\{x_i\}_{i=1}^{p}$ la prima domanda posta da Rudy[15]:

- Se Alberto risponde 1, Rudy è ricondotto al gioco $G(1,p)$.
- Se Alberto risponde 0, Rudy è ricondotto al gioco $G(1,n-p)$.

Per terminare il gioco, Rudy dovrà porre ad Alberto un numero di domande pari a

$$1+\max[M(1,p);M(1,n-p)].$$

Poniamoci nel caso meno favorevole: la strategia di Rudy dovrà essere quella di scegliere il p tale da minimizzare il secondo addendo dell'espressione qui sopra; essendo $M(1,p)$ una funzione monotona crescente di p, il minimo si raggiunge quando $M(p,n-p)$ ha il valore minimo, che avviene per $p=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Abbiamo dunque:

$$M(1,n)=1+\max\left[M\left(1,\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor\right);M\left(1,\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil\right)\right]=1+M\left(1,\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil\right). \qquad \texttt{[1]}$$

La relazione di ricorrenza **[1]** ci permette di calcolare la seguente tabella:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$M(1,n)$	0	0	1	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5

Mostriamo ora (per ricorrenza) che se $n>0$ è:

$$u_n=M(1,n)=\left\lceil \frac{\ln n}{\ln 2}\right\rceil. \qquad \texttt{[2]}$$

La **[2]** è vera per $n=\{1,2\}$: supponendola vera sino ad n generico, possiamo distinguere due casi:

[15] I valori dei singoli x_i sono insignificanti, in quanto tutti gli interi giocano, al momento, lo stesso ruolo.

Se $n = 2m$ si ha**:**

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_{2m+1} \\ &= 1+u_{\left\lceil \frac{2m+1}{2} \right\rceil} \\ &= 1+u_{m+1} \\ &= 1+\left\lceil \frac{\ln(m+1)}{\ln 2} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{\ln(2m+2)}{\ln 2} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{\ln(2m+1)}{\ln 2} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{\ln(n+1)}{\ln 2} \right\rceil \end{aligned}$$

Nota a margine: i passaggi del tipo $\left\lceil \frac{\ln(2m+1)}{\ln 2} \right\rceil = \left\lceil \frac{\ln(2m+2)}{\ln 2} \right\rceil$ si giustificano considerando che $\frac{\ln(2m+2)}{\ln 2}$ non è un intero e non vi sono interi *r* strettamente compresi tra $\frac{\ln(2m+1)}{\ln 2}$ e $\frac{\ln(2m+2)}{\ln 2}$: infatti, in caso contrario si dovrebbe avere $2^{m+1} < 2^r < 2^{r+2}$

Se $n = 2m+1$ si ha:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_{2m+2} \\ &= 1+u_{\left\lceil \frac{2m+2}{2} \right\rceil} \\ &= 1+u_{m+1} \\ &= 1+\left\lceil \frac{\ln(m+1)}{\ln 2} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{\ln(2m+2)}{\ln 2} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{\ln(n+1)}{\ln 2} \right\rceil \end{aligned}$$

La conoscenza di $M(1,n)$ permette il calcolo di $M(2,n)$, eccetera.

Consideriamo ora il gioco $G(q,n), q > 1$:

Quando Rudy fa la domanda *P*, dalla risposta di Alberto conosce il numero dei "numeri buoni" in *P* e, per differenza, il numero dei "numeri buoni" nella parte complementare *P'*: quindi, per Rudy è equivalente porre la domanda *P* o quella *P'*, e quindi limitiamo la ricerca a quei *P* per cui la cardinalità è minore o uguale a $\frac{n}{2}$.

Rudy ha quindi per la sua prima domanda la scelta tra le strategie:

$$\begin{aligned}&P=\{x_1\}\\&P=\{x_1,x_2\}\\&\vdots\\&P=\left\{x_1,x_2,\dots,x_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\right\}\end{aligned}.$$

Se Rudy opta per la domanda $P=\{x_1,x_2,\dots,x_p\},1\le p\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$, Alberto risponderà fornendo il numero b dei "numeri buoni" in *P*, e deve essere $0\le b\le p$ e $0\le b\le q$: quindi, $b\le\min(p;q)$.

Rudy si trova quindi davanti a un doppio problema:

1. Trovare i b "buoni numeri" tra i $p\in P$;
2. Trovare i $q-b$ "buoni numeri" tra i $n-p\in P'$ (complemento di *P*).

Per risolverli, gli serviranno almeno $M(b,p)+M(q-b,n-p)$ domande[16].

Il caso peggiore è quello in cui $M(b,p)+M(q-b,n-p)$ è massimo (per $0\le b\le\min(p;q)$); la miglior strategia per Rudy è quindi quella di scegliere $p\in\left\{1,\dots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}$ per cui si minimizzi $M(b,p)+M(q-b,n-p), 0\le b\le\min(p;q)$.

Abbiamo inoltre la ricorrenza (valida per $2\le q\le n$):

$$M(q,n)=1+\min[\max(M(b;p)+M(q-b;n-p))]\quad\begin{cases}p=1,\dots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\\ b=0,\dots,\min(p;q)\end{cases}$$

Una simulazione dà $M(6,49)=24$.

Delusi? Esiste un'altra dimostrazione (che dà sempre "24"), ma ve la diamo il mese prossimo

4.3 [152]

4.3.1 Dai Teoremi delle tonsille, PM

Ritorniamo a parlare di questo problema, molto velocemente, perché l'altra volta avevamo pubblicato il dubbio di ***Alberto R***:

> A pag 12 di RM154 ***Laura*** cita, e poi dimostra, la formula di Martin Gardner
>
> $$\left(a^2+b^2+c^2+L^2\right)^2=3\left(a^4+b^4+c^4+L^4\right)^4$$
>
> Lungi da me l'idea di revisionare la dimostrazione (tanto mi piace la matematica quanto odio i calcoli). Osservo, però, che la formula non è dimensionalmente corretta: si eguaglia una lunghezza alla quarta con una lunghezza alla sedicesima. Qualcosa non quadra.

[16] Si ricordi che $M(0,n)=0$.

Ebbene, come spesso accade, ***Alberto*** aveva ragione, e io avevo fatto un pasticcio nel copiare la formula di ***Laura*** aggiungendo incautamente la quarta potenza a secondo membro. Le mie scuse a ***Laura*** e ad ***Alberto***.

4.4 [154]

4.4.1 Ripetizioni!

Questa parte è un'estensione delle note, come vedrete tra poco, però lo stesso mi sembra il caso di riprendere il problema di novembre:

> *Presi i numeri da 1 a 9, è possibile riscrivere gli stessi in disordine sotto i primi in modo che nessun numero sia ripetuto e la somma di ogni colonna è un quadrato perfetto:*
>
> | | | | | | | | | |
> |---|---|---|---|---|---|---|---|---|
> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
> | 8 | 2 | 6 | 5 | 4 | 3 | 9 | 1 | 7 |
>
> *È un caso, o la cosa si può fare anche in altri casi?*

Inclusa la seconda parte, con un passatempo che poteva venire in mente solo a Rudy:

> *Scrivo i numeri da 1 a n, in disordine; nella seconda riga, scrivi quanti numeri sono strettamente minori del numero al piano di sopra e situati alla sua destra (guardando). Nella terza riga, fai la stessa operazione ma sulla seconda riga, e avanti così. Fermati quando hai una riga tutta di zeri. Come conviene scrivere i numeri per dover scrivere il massimo numero di righe?*

Il mese scorso avevamo pubblicato la soluzione di ***Mirhonf*** e ***trentatre***: qui vi passiamo la cartolina natalizia di ***Gnugnu*** (Cometa Mati-Hamilton [2011 32-33]), non solo perché è bellissima e la vogliamo condividere con voi, ma anche perché contiene altre informazioni, che seguono come soluzione del problema:

> La seconda parte del quesito mi ha lasciato notevolmente perplesso. Ci sono due possibilità. Come ritiene la maggior parte dei terrestri 0 è "strettamente minore" di qualsiasi altro naturale; ed allora, se i numeri sono posti in ordine crescente il gioco si arresta al primo passo, altrimenti non termina mai. Oppure la formazione insiemistica di Rudy lo porta a considerare 0 non "strettamente minore" di alcun naturale. In questo caso, la permutazione ottima è quella in ordine decrescente che richiede esattamente 15 (in generale *n*) passi.

> Posso dedurne che Mati, oltre alla propensione per la matematica, abbia un'ottima educazione, che le ha permesso di non rivolgere allo zio[17] appellativi poco piacevoli.

Meno male che c'è ***Gnugnu***, che queste cose al Capo non le manda a dire! Tra l'altro aggiunge:

> (...) la traduzione dal piemontese che compare nella nota 30 non mi pare corretta. Per quanto conosco del torinese la frase pronunciata dallo zio dovrebbe essere in prima persona: "Non ho digerito…".

Ebbene, ***Gnugnu*** come sempre ha ragione, questa volta è colpa mia. Al Capo piace introdurre frasi in piemontese, che la sottoscritta (nata sì a Torino, ma incapace di parlare alcun dialetto) ritiene di sottotitolare... e come si sa bene, la fretta ci coglie sempre nell'ultima fase di produzione di RM, e la traduzione non è stata verificata dal nostro esperto torinese (non ***Gnugnu***, in questo caso intendevo il Capo). Grazie a ***Gnugnu*** per la precisazione e per gli auguri!

4.5 [155]

4.5.1 Undici-Undici-Undici

Allora, straordinariamente il Capo vi ha offerto tre problemi per le vacanze di Natale, e direi che hanno tutti avuto un decente successo. Il primo era veramente facile:

> *Se A e B sono dei palindromi di quattro cifre e C è un palindromo di cinque cifre, e inoltre è A+B=C, riuscite a determinare tutti i possibili valori di C?*

Al solito abbiamo ricevuto parecchie risposte, vediamo di passarvene alcune, cominciando da ***Mirhonf***:

> Schematizziamo il problema nel modo seguente. Siano i numeri A e B palindromi di quattro cifre. A=abba, B=cddc. C sia palindromo di cinque cifre: C=efgfe. Mettiamo in colonna la somma A+B=C.
>
> Do' per scontato che le cifre a, c ed e siano diverse da zero.
>
> $$\begin{array}{cccccc} & a & b & b & a & + \\ & c & d & d & c & = \\ \hline e & f & g & f & e & \end{array}$$
>
> 1. La somma dei due numeri più grandi a quattro cifre 9999 + 9999 = 19998 < 20000; da ciò segue necessariamente che e=1.
> 2. Come detto sopra a e c non possono essere nulli, quindi a+c>1; per quanto detto al punto 1 deve essere necessariamente a+c=11.
> 3. Dal punto 2 segue, a causa del riporto di 1, che:
>   a. (1+b+d)=f cioè (b+d)=(f–1) se 1+b+d non genera riporto (b+d<9).
>   b. (1+b+d)=10+f cioè (b+d)=(9+f) se 1+b+d genera riporto (b+d≥9).
> 4. Per quanto riguarda la terza colonna si hanno i seguenti sottocasi:
>   a. Dal punto 3a segue che se 1+b+d non genera riporto, neanche b+d genera riporto. Quindi si ha che (b+d)=g e g=f–1. Ora si ha che a+c>2, quindi a+c=10+f; per quanto detto al punto 2, a+c=11; necessariamente si ha che f=1; g=f–1=0. Quindi se 1+b+d non genera riporto, cioè b+d<9, l'unico numero C possibile è 11011. L'unico modo per avere b+d=g=0 con (b+d)<9 è che sia b=d=0. L'unico vincolo a

[17] Secondo me (e, credo, secondo Gnugnu) ai piemontesi si applica la stessa definizione che Deighton dava dei gallesi: sono dei buongustai al banchetto degli insulti. E quindi, se Gnugnu mi fa le pulci, apprezzo e gli faccio le contropulci: se Mati è la figlia di mia cugina (in primo grado: figlia della sorella di mia madre) non sono suo zio, sono suo cugino (in secondo grado). Anche perché 'barba' ('zio', in torinese) non è propriamente un complimento. [RdA]

questa soluzione è che a+c=11. Quindi per tutti i numeri del tipo A=a00a e B=c00c, con (a+c)=11, si ha che C=A+B=11011.

b. Dal punto 3b, si deduce che se 1+b+d genera riporto, anche 1+b+d=g; di conseguenza f=g. Ma poiché 1+b+d genera riporto, si ha che 1+a+c=f; poiché dal punto 2 sappiamo che a+c=11, 1+a+c=12, quindi f=g=2. Ma se 1+b+d=10+f=12, allora necessariamente si ha che anche b+d=11. L'unico numero C possibile in questo caso è C=12221. Quindi, per tutti i numeri del tipo A=abba e B=cddc, si ha che C=12221 a patto che a+c=b+d=11.

Conclusione.

Sono soltanto due i numeri C palindromi di 5 cifre somma di due numeri palindromi di 4 cifre:

1. C=11011, con A=a00a e B=c00c, e a+c=11; sono quattro (otto se consideriamo distinti i due casi A=2002 B=9009 e A=9009 B=2002) le somme possibili in questo caso: 2002+9009=3003+8008=4004+7007=5005+6006=11011.
2. C=12221, con A=abba e B=cddc, con a+c=b+d=11; sono trentadue (sessantaquattro) le somme possibili in questo caso: 2222+9999=2332+9889=2442+9779=.....=12221.

Soluzione, questa, molto simile a quella di ***Alberto R.***, almeno in partenza, anche se ***Alberto*** utilizza i criteri di divisibilità per 11. ***Camillo*** fa un ragionamento veloce per giungere alla stessa conclusione, ma trova un solo numero:

> Il ragionamento per arrivare a ciò è presto fatto: per avere le decine di migliaia che possono essere solo 1 occorre che la somma delle unità sia 11, questo produce un riporto di 1 sulle decine che deve propagarsi alle centinaia e alle migliaia. Visto che la somma delle migliaia è 11 più il riporto fa 12 anche le centinaia e le decine devono essere 2 e quindi anche le centinaia e di conseguenza le decine sommate singolarmente devono dare 11 poi ci sono i riporti. Quindi usando le 4 coppie di numeri che sommati tra loro danno 11 otteniamo le 32 somme palindromiche che danno il palindromo 12221.

Simile ragionamento ci ha inviato ***MBG***, mentre ***Zar*** ci arriva per elencazione (un po' di stanchezza delle cellule grigie dopo un anno tanto produttivo, probabilmente), mentre ***trentatré*** ci propone addirittura un metodo generale:

> Problema: dati i numeri palindromi A e B di 4 cifre e C palindromo di 5 cifre, quali sono i possibili valori di $C = A + B$?
>
> Risposta: C può avere solo due valori $C = 11011 = 11 \cdot 1001 = 11^2 \cdot 91$, $C = 12221 = 11 \cdot 1111 = 11^2 \cdot 101$.
>
> Estendiamo il problema: dati i <u>K numeri</u> palindromi A, B, … Z ognuno di <u>N cifre</u> e C palindromo di <u>$N+1$</u> cifre, quali sono i possibili valori di $C = A + B + \ldots Z$?
>
> Per $N \geq 2$ e limitando il numero di addendi a $2 \leq K \leq 5$, la risposta è
>
> $C = 11 \cdot R$ dove R è <u>qualsiasi palindromo di N cifre tutte minori di K</u>
>
> C è sempre multiplo di 11; se N pari C è multiplo di 11^2.
>
> Il numero R corrisponde ai *riporti* della somma $A + B + \ldots Z$ in notazione decimale.
>
> Se N^* è il numero di cifre *indipendenti* di ogni addendo – cioè $N^* = [(N+1)/2]$ – il numero di C diversi è $(K-1)K^{N^*-1}$.
>
> P.es. $N = 4$, $K = 3$: $C = 11 \cdot (1001, 1111, 1221, 2002, 2112, 2222)$ – 6 valori

$N = 2$, $K = 5$: $C = 11 \cdot (11, 22, 33, 44)$ – 4 valori.

<u>*dimostrazione*</u>

Con la rappresentazione decimale $A = a_N\, a_{N-1}\, a_{N-2} \ldots a_1$ ecc., nella somma $A + B + \ldots Z$ separiamo i *riporti*, cioè per ogni $1 \leq n \leq N$

$a_n + b_n + \ldots z_n = 10 \cdot r_n + s_n$ con s_n, $r_n < 10$

Evidenziando i riporti (sfasati di un posto) lo schema della somma diventa

$$
\begin{array}{cccccc}
 & a_{1,N} & a_{N-1} & \ldots & a_2 & a_1 \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & z_N & z_{N-1} & \ldots & z_2 & z_1 \\
\hline
c_{N+1} & c_N & c_{N-1} & \ldots & c_2 & c_1
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{cccccc}
r_N & r_{N-1} & r_{N-2} & \ldots & r_1 & 0 \\
 & s_N & s_{N-1} & \ldots & s_2 & s_1 \\
\hline
c_{N+1} & c_N & c_{N-1} & \ldots & c_2 & c_1
\end{array}
$$

I numeri $R = r_N\, r_{N-1}\, r_{N-2} \ldots r_1$ e $S = s_N\, s_{N-1}\, s_{N-2} \ldots s_1$ sono ancora <u>palindromi di N cifre</u>. Si ricava immediatamente dallo schema $c_{N+1} = c_1 = r_N = r_1 = s_N = s_1$.

Le altre cifre di C sono date da $c_n \equiv r_{n-1} + s_n \ (mod\ 10), \quad 2 \leq n \leq N$.

S, R, C sono palindromi, quindi $s_{N+1-n} = s_n$, $r_{N+1-n} = r_n$, $c_{N+2-n} = c_n$ e valgono le

$c_n \equiv r_{n-1} + s_n \equiv c_{N+2-n} \equiv r_{N+1-n} + s_{N+2-n} \equiv r_n + s_{n-1} \ (mod\ 10)$ da cui

$s_n - r_n \equiv s_{n-1} - r_{n-1} \equiv s_{n-2} - r_{n-2} \equiv \ldots \equiv s_1 - r_1 \quad (mod\ 10)$

e per $s_1 - r_1 = 0$ e s_n, $r_n < 10$ si ha

$s_n = r_n$ per ogni n cioè <u>i numeri S e R sono uguali</u>. Per ogni n si hanno i due casi (che vincolano le somme $a_n + b_n + \ldots z_n$ e quindi A, $B \ldots Z$):

$r_n = s_n = 0 \rightarrow a_n = b_n ... = z_n = 0$

$r_n = s_n > 0 \rightarrow a_n + b_n + \ldots z_n = 10 \cdot r_n + s_n = 11 \cdot r_n$

Lo schema della somma diventa quello qui a destra – con $p = r_1$

Limitando il numero di addendi a $K \leq 5$ i riporti r_n sono limitati da $0 \leq r_n < K$ e la somma precedente è immediata.

$$
\begin{array}{cccccc}
p & r_{N-1} & r_{N-2} & \ldots & p & 0 \\
 & p & r_{N-1} & \ldots & r_2 & p \\
\hline
p & c_N & c_{N-1} & \ldots & c_2 & p
\end{array}
$$

Si può scrivere $C = 10 \cdot R + R = 11 \cdot R$. Per l'arbitrarietà degli addendi A, B …, il numero R (l'insieme dei riporti) è <u>qualsiasi palindromo di N cifre tutte $< K$</u>.

Se N è pari, un palindromo di N cifre è multiplo di 11 e quindi C è multiplo di 11^2.

Il numero di C diversi è uguale al numero di palindromi di N cifre in base K, cioè $(K-1)K^{N^*-1}$ con $N^* = [(N+1)/2]$.

Nota 1. La condizione $K \leq 5$ si può togliere, ma le condizioni sugli addendi e su R diventano più complicati.

Nota 2. Il risultato non cambia molto usando una base numerica X diversa da 10 (ma maggiore di 2: in binario non ci sono soluzioni). Vale sempre la $C = (1 + X) \cdot R$ dove R è un palindromo di N cifre minori di un certo valore – ma mi fermo qui.

E con questo ci fermiamo anche noi e passiamo al prossimo problema.

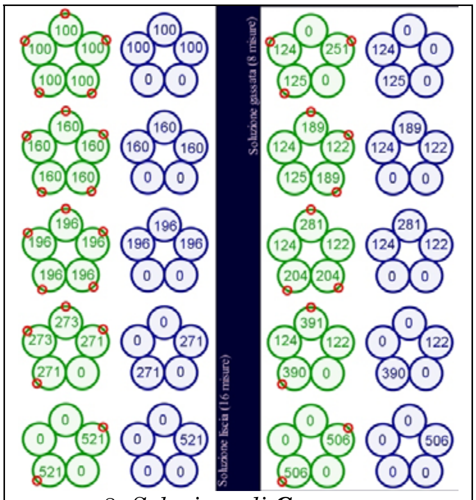
4.5.2 Dovrebbe smetterla...

Devo dirvi che sono un tantino preoccupata che uno di questi giorni il VadLdRM si ribellino agli ignobili tentativi di sfruttamento da parte di Rudy e si decidano a scrivere una e-zine anti-RM, il cui scopo fondamentale è quello di illustrare noi tre membri della Redazione in condizioni svantaggiosissime a giocare il rimanente delle nostre povere pensioni in un gioco a perdita certa. Per fortuna la maggior parte delle invenzioni del Capo non si è mai materializzata nella realtà. Vediamo l'ultima tortura dei pargoli:

> *Abbiamo 5 contenitori da litro vuoti, disposti in circolo. Fred ha a disposizione un mezzo litro con il quale portare l'acqua ai contenitori, e il suo scopo è di riempirne esattamente almeno uno suddividendo il mezzo litro come gli pare tra i contenitori. Alberto, mentre Fred va a prendere l'acqua, guarda quali sono i due litri adiacenti che, presi assieme, contengono la massima quantità d'acqua e li svuota, ma non appena un litro sarà pieno, non lo toccherà più. Qual è la strategia ottimale di Fred?*

Beh, come potete immaginare, abbiamo avuto alcuni aiutanti di Fred e altri di Alberto.

Mentre vi passiamo la soluzione di ***Gnugnu*** – completamente grafica – qui sulla destra, lasciamo raccontare agli altri solutori le loro versioni. Per esempio ***MBG*** ci scrive:



8 *Soluzione di* ***Gnugnu***

> Qui, senza minimamente generalizzare, ho semplicemente buttato giù una sequenza che permette a Fred di riempire un litro in 7 passaggi.
>
> - 1F. Distribuisco il mezzo litro equamente sui 5 litri, quindi 100ml ognuno
> - 1A. Ne svuoto due qualunque adiacenti
> - 2F. Con un secondo mezzo, rimetto 100 nei due vuoti e rabbocco gli altri 3 a 200
> - 2A. Svuoto due dei litri con 200ml
> - 3F. Ora distribuisco il mezzo in modo da avere 4 litri a 200 e uno a 100
> - 3A. Svuoto due da 200ml. Rimangono così due litri pieni a 200 e uno a 100 (Alberto può in effetti scegliere di svuotare due di quelli vicini al 100 o quelli fra gli altri due 200; la scelta è però ininfluente perché il prossimo passo riporta in ogni caso alla stessa situazione).
> - 4F. Riempio i due vuoti fino a livello 200 e rabbocco a 200 anche quello da 100. Ora sono tutti a 200.
> - 4A. Ne svuoto due qualunque adiacenti e ne rimangono tre a 200 vicini.
> - 5F. Distribuendo attentamente l'ennesimo mezzo litro, arrivo nella situazione 250, 300, 300, 250, 0
> - 5A. Via i due da 300, come da regola.
> - 6F. Riempio i due da 250 fino a 500
> - 6A. Posso svuotare solo uno dei due da 500, essendo quelli adiacenti vuoti, mannaggia!

- 7F. Verso tutto in quello rimasto mezzo pieno e completo il mio litro, TIE'! Fila a studiare chimica!

Invece ***Alberto R.*** suggerisce:

> Io (purtroppo) me li ricordo bene, da ragazzo nelle osterie del mio paese, il "mezzo litro" il "litro" e il "quartino". Contenitori di vetro con il collo largo e svasato nel cui punto più stretto una tacca indicava il livello del vino corrispondente al volume nominale garantito dall'autorevolezza (allora!) dello Stato Italiano con un sigillo metallico. Dunque il "mezzo litro" oltre la tacca e pieno fino all'orlo conteneva più di mezzo litro. L'oste tirchio evitava di sfruttare questa possibilità, che noi invece possiamo usare per risolvere il problema. Infatti il testo non dice che Fred può portare mezzo litro alla volta, ma che ha a disposizione un "mezzo litro" cioè un contenitore del tipo innanzi descritto capace di contenere un volume V un po' maggiore di 500cc.

Ebbene, qui continua con la sua tecnica, ma a noi sembra che – malgrado la nostra nota flessibilità in proposito – questo sia un po' barare, anche se arriva ad una soluzione dopo 6 passaggi. La versione di ***Camillo*** ci sembra la più veloce:

> Se lo scopo di Fred è riempire almeno un litro fino alla tacca mentre Alberto svuota i due adiacenti che contengono acqua.
>
> Primo giro, Fred mette una goccia d'acqua in due litri adiacenti e tutto il restante nel litro all'opposto, così Alberto può buttare solo due gocce.
>
> Secondo giro, Fred rimette due gocce nei litri appena vuotati ed il resto lo aggiunge all'altro.
>
> Terzo giro: il litro è riempito con le quattro gocce mancanti ed Alberto va a studiare chimica e Fred greco.
>
> Se però i litri fossero stati 4 o 3 la strategia doveva cambiare radicalmente entrando in un giochino infinito come in Achille e la tartaruga

Purtroppo il metodo non funziona: già anche solo al primo giro, Alberto prende il litro "quasi pieno" e uno qualsiasi dei due vicini vuoti (che, assieme, contengono più delle "due gocce" degli altri due interessati al versamento) e butta tutto...

E con questo basta, che c'è ancora un problema.

4.5.3 Goodbye, Mr. Chips!

Ebbene, il Capo con il Natale e la fine dell'anno si è lasciato andare alla nostalgia e ha persino rivelato una delle sue fonti. Non solo, ma vi ha passato un problema senza ambientazione! Eccolo:

> *Se α, β, γ sono gli angoli interni di un triangolo, per quali valori è massimo il valore dell'espressione $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$?*

In realtà il Capo sperava in altre idee su come espanderlo, noi abbiamo ricevuto solo due soluzioni veloci, la prima da parte di ***Alberto R***, che intitola la sua soluzione "un triangolo dai seni prosperosi" e principalmente si lamenta:

> Per quale triangolo è massima la somma dei seni dei suoi angoli?
>
> $S = \mathrm{sen}(\alpha) + \mathrm{sen}(\beta) + \mathrm{sen}(\pi-\alpha-\beta) = \max$
>
> Annullo le derivate parziali e sottraggo membro a membro
>
> $\cos(\alpha) + \cos(\alpha+\beta) = 0$
>
> $\cos(\beta) + \cos(\alpha+\beta) = 0$
>
> $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = 0 \rightarrow \alpha = \beta$

dunque il triangolo è isoscele, quindi $S = 2\mathrm{sen}(a) + \mathrm{sen}(\pi-2a)$, la cui derivata $2\cos(a) + 2\cos(2a)$ si annulla per $a = \pi/3$. Triangolo equilatero.

Facile, però c'ho meditato per tre giorni. Tre giorni non per trovare la soluzione che ho trovato ma per cercare l'altra soluzione, quella senza derivate, quella che non ho trovato. Infatti mi sono detto "qui gatta ci cova"; non è possibile che quei volponi di RM propongano un problema risolubile soltanto con i soliti calcoli noiosi, (*ooh, ragassi, siam mica qui a fare gli esercizietti per il prossimo compito in classe*!).

Insomma, ho pensato, ci deve essere una scorciatoia elegante, magari basata su semplici considerazioni geometriche o di simmetria o qualche altra diabolica astuzia. Non avendo trovato nulla mi sono deciso a mandarvi la soluzione "scolastica" e attendo con curiosità RM156. Attenti però! Se la gatta non ci cova e la soluzione brillante non verrà fuori, allora mi avrete deluso.

Purtroppo noi il colpo di genio lo aspettavamo dai lettori, e anche ***MBG*** scrive:

Qui basta osservare che $\gamma = \pi - \alpha - \beta$, per cui riscriviamo:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin(\pi - \alpha - \beta) = \sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha + \beta)$$

Semplice esercizio di massimizzazione di una funzione di due variabili che porta alla soluzione $\alpha = \beta = 60°$, cioè il massimo si ha se il triangolo è equilatero.

Sono andato alla ricerca di qualcosa di più elegante o di qualche generalizzazione, ma non ho trovato niente di particolarmente entusiasmante. Tutte cose relativamente banali. Per esempio posso considerare il cerchio di raggio R circoscritto al triangolo e osservare che il perimetro del triangolo risulta pari a: $2p = 2R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$, per cui il problema si riduce a massimizzare il rapporto p/R, ovvero, dato un cerchio, trovare il triangolo inscritto con perimetro massimo. Seguendo questo filone si può andare a considerare i poligoni inscrivibili in una circonferenza (non mi ricordo come si chiamano; poligoni circolari o qualcosa del genere?) e si trova che si può estendere la formula a patto di considerare gli angoli al centro.

Va beh, siamo buoni e vi passiamo le soluzioni alternative del famoso Mr. Chips:

1. Richiamare la disequazione di Jensen, che dice che, per una funzione concava verso il basso (come $\mathrm{sen}(x)$ per $0 \leq x \leq \pi$), una media di valori della funzione è minore o uguale alla funzione della media. Quindi $\mathrm{sen}\alpha + \mathrm{sen}\beta + \mathrm{sen}\gamma \leq 3\mathrm{sen}[(\alpha+\beta+\gamma)/3] = 3\mathrm{sen}(\pi/3)$.
2. In una circonferenza di centro O e raggio 1, disegnare i diametri AA', BB', CC' in modo che gli angoli AOB, BOC and COA' siano rispettivamente α, β e γ. Osservare che il problema è ora di massimizzare l'area dell'esagono ABCA'B'C'. Per simmetria, l'esagono deve essere regolare.

Chissà se queste vi piacciono? Altrimenti speriamo che a qualcuno vengano nuove idee con il nuovo anno, e noi siamo sempre pronti a pubblicarle.

E con questo vi lasciamo i nostri migliori auguri – ancora una volta – per un 2012 pieno di matematica ricreativa ed allegria, e vi aspettiamo il mese prossimo.

5. Quick & Dirty

Un tale ha 6 pezzi di catena di 5 maglie ciascuno. Decide di portarli dal gioielliere per farli unire in un'unica collana. Il gioielliere gli chiede un compenso di 5 Euro per ogni maglia che apre e chiude. Per cui, realizzare la collana viene a costare 30 Euro. Ma il cliente non è d'accordo. Secondo lui si può spendere meno. Quanto?

Si può spendere soltanto 25 Euro aprendo tutte le cinque maglie di una catena e utilizzandole per unire tra loro le restanti cinque catene.

6. Zugzwang!

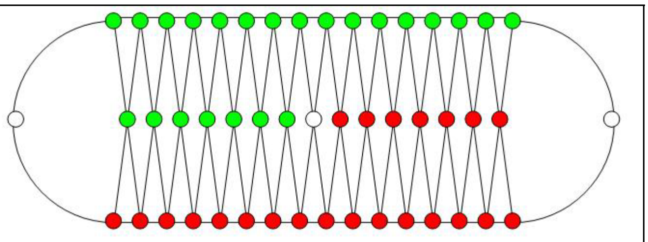
Annuncio Economico: Qualcuno è interessato alla collezione dei primi 250 numeri di Tex Willer, mancante di quattro numeri, edizioni varie (alcuni con le "tre stelle")? Astenersi da richieste parziali (è il regalo di un vecchio amico, ma devo disfarmene e vorrei restasse tutta assieme). E se abitate nel raggio di un centinaio di chilometri da Torino, ve la porto pure a casa (in caso contrario, pagate le spese di spedizione, e mi sa che è 'na bella botta... *a peisô côme 'l maciafer*[18]). C'entra, c'entra...

6.1 Kolowis Awithlaknannai

...una cosa con un nome simile, possono averla inventata solo gli indiani Zuni. Visto, che c'entrava?

Kolowis è, secondo la religione Zuni, il Serpente Mitico che ha creato il mondo, e il nome del gioco dovrebbe significare approssimativamente "La lotta di Kolowis contro un altro serpente di cui al momento non ricordo il nome, ma tanto non è importante".

Come al solito, vi serve una ***scacchiera*** (piuttosto strana) e un buon numero (46) di ***pedine*** di due colori diversi: trovate il tutto, comprensivo di posizione iniziale, in figura. I tre cerchietti bianchi sono posizioni accessibili alle pedine ma lasciate vuote.



9 *La scacchiera e la posizione iniziale (se volete costruirla, gli incroci sono* quindici *e le pedine* ventitré *per parte).*

La ***mossa*** consiste nel muovere una pedina da dove si trova a un altro cerchietto limitrofo che sia vuoto: la ***presa*** si effettua saltando la pedina avversaria. La presa è ***obbligatoria*** ed è possibile effettuare prese ***multiple*** anche cambiando direzione. ***Perde*** chi non può più muovere o resta senza pedine.

Semplice? Beh, sì. E con mosse iniziali piuttosto "obbligate". Ma forse è possibile un po' di analisi, tipo quale possa essere la prima mossa più vantaggiosa. Fateci sapere, se decidete di provarci.

7. Pagina 46

Sia $\arcsin[\cos(\arcsin x)] = \alpha$. Si ricavano immediatamente le limitazioni $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \cos(\arcsin x) \le 1$, $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$. Inoltre, $\sin\alpha = \cos(\arcsin x)$; di conseguenza,

$$\arcsin x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \text{ e } x = \sin\left[\pm\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = \pm\cos\alpha .$$

[18] Lezione di torinese: "Pesano come i pezzi di legno parzialmente incombusti che restano nel camino": evidentemente più pesanti della cenere e "ristretti" dal fuoco, hanno la spiacevole tendenza a sporcare gli alari. Da cui il nome "macchia-ferro".

Nello stesso modo, se $\arccos[\sin(\arccos x)] = \beta$, allora $0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}$ (per $0 \le \sin(\arccos x) \le 1$, in quanto $0 \le \arccos x \le \pi$), e $\cos\beta = \sin(\arccos x)$; di conseguenza,

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} \mp \beta \text{ e } x = \cos\left(\frac{\pi}{2} \mp \beta\right) = \pm \sin\beta .$$

Essendo $\cos\alpha = \sin\beta = \pm x$, si conclude che la relazione cercata è:

$$\alpha + \beta = \arcsin[\cos(\arcsin x)] + \arccos[\sin(\arccos x)] = \frac{\pi}{2}.$$

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Tamburi nella Foresta

Nella nostra umile opinione di fisici ed ingegneri, la risposta alla classica domanda “Un albero che cade nella foresta, fa rumore?” ha risposta sicuramente positiva; abbiamo qualche remora ad estendere la domanda ai matematici, in quanto immediatamente ci porrebbero il quesito: “Bene, ma dal rumore, riesci a capire la *specie*?”.

Se il vostro figlio più giovane, spostando la batteria, inciampa sul vostro gatto preferito (certo: Rudy ne ha uno solo), dovreste riuscire a capire subito se la “parte meno nobile” (essendo il soggetto “il figlio”, ci riferiamo a quella che svolge la sola funzione di tenere distanti tra di loro le orecchie) ha sfondato la grancassa o il rullante: quello che vorremmo fare, questa volta, è provare a generalizzare questo concetto (senza l’aiuto del gatto, che è andato a nascondersi sotto il mobile del bagno).

Come abbiamo accennato nel pezzo del mese scorso, un grosso problema (pratico) per gli “stonati” è l’accordatura della chitarra: consideriamolo un attimo dal punto di vista teorico.

Supponiamo (a mezzo di opportuno dinamometro) di tirare tutte le corde di una chitarra sino ad un valore uguale: a questo punto, “chiunque” (le virgolette servono ad includere gli stonati, se dotati di opportuna strumentazione) è in grado di stabilire lo *spessore* della corda, analizzando la ricetta sonora (o *spettro*, come amano dire gli scienziati nel campo[19]).

Ora, come dovreste ricordare[20] (ma non ve lo ricordate, quindi ve lo rispieghiamo), una corda vibrante con le estremità vincolate (ponticello e capotasto, per i chitarristi) è sottoposta all’equazione d’onda:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad [1]$$

il che suona piuttosto logico: il primo membro (derivata seconda dello spostamento rispetto al tempo) non è altro che un’accelerazione, proporzionale alla forza applicata; il secondo membro, tagliando un po’ per i campi, è la *curvatura* della funzione f, e il tutto sostiene che più tendete la corda (al di fuori della posizione di equilibrio), maggiore è la forza applicata al punto che state considerando.

Da che matematica è matematica, equazioni del genere si sono sempre risolte supponendo la soluzione nella forma $f(x,t) = g(x)h(t)$, il che significa che abbiamo una “forma da ferma” dello strumento (sempre per i chitarristi: la corda, quando non suonate, è un segmento, ma non perdiamo in generalità) definita da $g(x)$, che viene “perturbata” da una funzione $h(t)$ dipendente *unicamente dal tempo*: per risolvere il problema, applichiamo una “separazione delle variabili” (indipendenti[21]).

Sostituendo nell’equazione **[1]**, abbiamo:

$$g(x)h''(t) = g''(x)h(t),$$

da cui:

[19] E se vi viene in mente lo *Spettro di Fourier*, avete pienamente ragione.

[20] Ne abbiamo parlato nel PM di RM147 (Aprile 2011), “Tsunami”.

[21] E nella definizione tra virgolette, una volta tanto, c’è più di quanto sembra.

$$\frac{h''(t)}{h(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)},$$

Dove il primo membro non dipende da x e il secondo membro non dipende da t: ma allora, neppure il secondo membro dipenderà da x e neppure il primo membro dipenderà da t, e quindi saranno entrambi pari a una qualche costante (negativa: la cosa si deduce dal fatto che la forza – ossia la derivata seconda rispetto al tempo – tende a riportare la corda in condizione di equilibrio). Quindi possiamo scrivere le due equazioni:

$$\begin{cases} g''(x) = -\lambda g(x) \\ h''(t) = -\lambda h(t) \end{cases}$$

E, finalmente si capisce il motivo per cui le onde sono sinusoidali: infatti la prima di queste equazioni ha soluzione:

$$g(x) = A \sin\sqrt{\lambda}x + B\cos\sqrt{\lambda}x, \qquad [2]$$

e similmente (tra l'altro, con lo stesso λ) per la seconda.

Se poi teniamo conto delle condizioni al contorno (ossia che la nostra corda deve essere fissa agli estremi), è noioso ma semplice stabilire che:

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n \in N .$$

Ossia, la nostra corda può vibrare solo a *frequenze ben definite*, e quindi il suo *spettro* è formato solo dai valori $\{1/2L, 2/2L, \dots\}$. Motivo per il quale quella della chitarra viene definita (se non suono io: Rudy speaking, as usual) *musica* e non *rumore*.

Giunti a questo punto, potreste anche essere pienamente d'accordo con Fred, il quale preferisce la batteria alla chitarra in quanto meno noiosa: in prima battuta vi rispondiamo che l'abbiamo fatta anche troppo semplice e vi mandiamo amichevolmente a quel paese con il volgare insulto anglo-latino *"ceiiossottuu"*, che i più adusi alla nostra frequentazione dovrebbero conoscere. In seconda battuta, vi diamo retta e ci proviamo.

Purtroppo per voi, si può provare ad estendere il discorso alle membrane vibranti: in fondo, si tratta solo di passare da una a due dimensioni... Bene, proviamo.

L'equazione d'onda diventa[22]:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \Delta f .$$

E le condizioni al contorno sono sempre le stesse, anche se qui i due punti dove abbiamo fissato la corda diventano una curva chiusa che non è altro che il bordo del tamburo, dove la pelle sta ferma.

Con un discorso molto simile a quello visto nel caso monodimensionale, si arriva alle:

$$\begin{cases} \Delta g(x, y) = -\lambda g(x, y) \\ h''(t) = -\lambda h(t) \end{cases}. \qquad [3]$$

[22] Il secondo membro è noto come (operatore) *laplaciano*, ed è definito come $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Tagliando per i campi, diciamo che è un'estensione della derivata seconda (spaziale) alle due dimensioni.

E a questo punto, l'idea potrebbe essere di procedere a definire lo spettro (ossia i λ che sottostanno alle condizioni al contorno), e via andare. Piccolo problema: se D è il contorno che fissa la regione vibrante, sappiamo risolvere la parte spaziale dell'equazione [3] *per pochissime regioni*! Per una regione generica, l'unica è il calcolo numerico, e non esiste un insieme finito di misure (come la lunghezza della corda nel caso della chitarra) che ci permettano di avere a portata tutti i parametri necessari per il calcolo.

Ora, coscienti di avere ormai ben pochi seguaci, vorremmo dire una frase storica: la matematica è quella scienza nella quale, se non sai risolvere un problema, complicarlo spesso ti avvicina alla soluzione.

E qui, i matematici si sono lanciati: riesci a "sentire la forma" di una *varietà riemanniana*?

A questo punto, forse è meglio se spieghiamo qualche termine: chi si sente sicuro nel ramo, può saltare un paio di paragrafi.

Si definisce *varietà* un oggetto che si comporta "ragionevolmente bene" nello spazio: per essere più chiari, è un qualcosa che localmente si comporta come un piano euclideo; riducendo il concetto di "localmente", anche una sfera (o un toro) sono varietà; non lo sono, ad esempio, i frattali o i poliedri (visto che avete dei percorsi che devono affrontare delle "curve strette").

Inoltre, una varietà è *riemanniana* se (sempre localmente) potete definire uno *spazio tangente*, ossia (tagliamo molto per i campi) ammette una normale e quindi si può calcolare, da quelle parti, la derivata (ora dovrebbe essere più chiaro il nesso); il che significa che esistono velocità, accelerazione, eccetera, nel punto considerato.

Cerchiamo di capire in che senso la complicazione del problema può semplificare la soluzione: se la risposta alla domanda è positiva, evidentemente non facciamo alcun passo avanti, in quanto abbiamo semplicemente reso più difficile il problema originale; ma se la risposta fosse "no", la generalizzazione del problema fornisce un campo molto più ampio nel quale cercare controesempi (ossia, varietà riemanniane isospettrali di forma diversa).

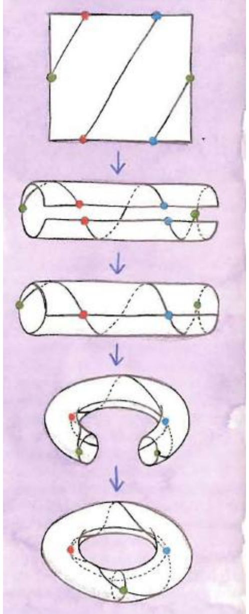
Ed è esattamente quello che è successo: nel 1964, ***John Milnor*** è riuscito a trovare due varietà riemanniane isospettrali. Piccolo dettaglio, insignificante per ogni Vero Matematico: si tratta (quasi) di tori[23] in uno spazio a *sedici* dimensioni, e quindi costruire un tamburo (anzi due, isospettrali) può essere problematico.

Per trovare due varietà isospettrali, forse sarebbe meglio capire *dove* sono le onde. Nel caso monodimensionale la cosa è abbastanza semplice, visto che abbiamo una sola dimensione e quindi più che lì non possono essere, all'aumentare del numero di dimensioni, però, la cosa si fa più complicata. Fortunatamente, ci viene in aiuto un concetto abbastanza semplice, quello di *geodetica*: è lungo queste linee che tendono a "stabilizzarsi" le onde. La cosa sembra piuttosto strana, ma diventa intuitivamente chiara quando si considera quella che a nostro parere è una delle più belle definizioni di geodetica: la curva lungo la quale un corpo che si muova di moto uniforme *non sperimenta alcuna accelerazione*. Quindi, le onde tenderanno a propagarsi lungo queste. Trovare le geodetiche può sembrare un lavoretto da nulla, ma in qualche caso può dare risultati inaspettati: in figura, ad esempio, trovate quelle di un "toro piatto". Come vi dicevamo, il fatto che non si spiegazzi durante la seconda piega è fondamentale per

[23] Il "quasi" nasce dal fatto che quando, a partire da un foglio di carta, organizzate un toro, la prima incollatura (quella che vi dà un cilindro) va senza problemi, ma per la seconda dovete "accartocciare" il foglio; in tre dimensioni non potete farne a meno, ma già solo in quattro avete abbastanza spazio per farlo. L'aggeggio ottenuto è noto come "toro piatto". Questo fatto di non spiegazzare il foglio, per quanto balordo possa sembrare, diventerà a breve piuttosto importante.

riuscire a "tenere i tracciati" delle geodetiche: un classico caso in cui una complicazione porta ad una semplificazione.

Infatti, quello che ha fatto Milnor è stato di partire da un elenco di lunghezze (di geodetiche) che fossero isospettrali, e poi cercare quali oggetti le ammettessero: sorpresa, per un gruppo erano due, gli oggetti!. "Tutto qua", verrebbe da dire. Ma non lo diciamo.



10 *Le geodetiche del toro piatto (rubata a Milnor!)*

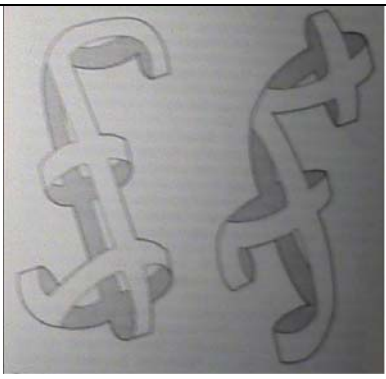
Adesso, giriamo tutto da un'altra parte. Avete presente i gruppi?

Come abbiamo cartolosamente dimostrato, i gruppi sono, in matematica, il metodo migliore per definire delle simmetrie[24]: anche se il metodo non ci è simpaticissimo, un gruppo (di permutazioni) si descrive molto facilmente attraverso una serie di matrici che specificano "dove va a finire" ogni punto che costituisce un elemento del gruppo; l'idea di ***Toshikazu Sunada*** è stata che, se costruite il grafico (di Cayley: ve lo abbiamo spiegato) di una permutazione, avete *tanti modi diversi* per arrivare nello stesso posto: ...e se il "posto" fosse lo spettro, e i modi per arrivarci la forma?

In realtà, come spesso succede, la strada che si percorre è diversa da quella che si ha in mente, e di solito più complicata. Vi diamo la formulazione originale del Teorema di Sunada, fermo restando che in linguaggio normale si dice "No, non puoi sentire la forma di un tamburo":

> Sia M una varietà Riemanniana, su cui un gruppo finito $\boldsymbol{G}$ agisca per isometrie: siano H e K dei sottogruppi di G che agiscono indipendentemente: siano inoltre H e K coniugati, ossia esista una biiezione $f : H \to K$ che porta ogni elemento $h \in H$ in un elemento $f(h) \in K$ che è il coniugato in G di h. Allora le varietà quozienti $M_1 = H / M$ e $M_2 = K / M$ sono isospettrali.

...e qui ci sta bene una citazione di Goethe[25].



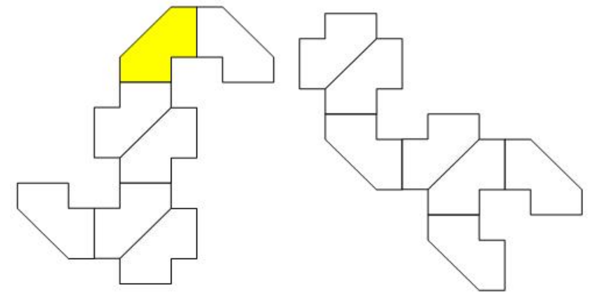
11 *I "Tamburi di Sunada" (noi veramente preferiremmo chiamarle "campane", ma forse si perde in generalità).*

A prima vista, non sembra si siano fatti grossi passi avanti: ci si aspetta che i "quasitori sededimensionali isospettrali" (ci siamo appena inventati il nome: insomma, quelli di Milnor) appartengano alla categoria di cui sopra, e siamo al punto di prima: il fatto è che il metodo di Sunada permette di trovarne in molte meno dimensioni! E per prima cosa, si riesce a costruirne due che sono *solo tridimensionali*. Non siamo riusciti a trovarne un'immagine decente in Rete, quindi abbiamo lavorato di macchina fotografica e telefonino rubando l'immagine da "Safari Matematico" di Peterson [*Ivars, l'ho fatta la mattina di Natale, appena aperto il pacco con il libro! Fai il buono, non arrabbiarti...*]: come disegno fa un po' (tanto) schifo, ma per noi l'importante era darvi l'idea. Li trovate in figura: quelle specie di reti per salsicciotti storti fanno lo stesso rumore, se ci picchiate sopra.

[24] Rudi Mathematici: "*Rudi Simmetrie*", luglio 2007, CS_Libri, ISBN 978-88-95526-02-7. Premio "Peanino" 2007. Ne restano una ventina di copie, affrettatevi

[25] "I matematici sono come i francesi: se dici loro qualcosa, la rigirano nella loro lingua e la capiscono solo più loro".

Da sedici a tre dimensioni è un bel salto, ma le pelli di tamburi continuano ad essere bidimensionali... Niente paura! ***Gordon***, usando il metodo di Sunada, è riuscito a costruire due tamburi (quasi veri, nel senso che sono bidimensionali) isospettrali: li trovate nella figura da qualche parte, visto che cominciamo ad avere qualche problema a far stare così tante figure in modo tale che si capisca qualcosa: vorremmo notaste che non sono particolarmente complicati, e che si costruiscono facilmente a partire dalla "mezza croce greca" che abbiamo lasciato in giallo in uno dei tamburi: visto, che ci siamo riusciti?

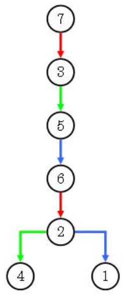

12 *I tamburi, finalmente!*

[Ivars, questi non li hai messi, nel libro: se serve, prendi pure: anche senza chiedere].

Adesso, un attimo di ragionamento: vorremmo capire cosa cavolo c'entrano i gruppi, e seguire, almeno per quanto possibile, il ragionamento di Gordon. Anche se lo schema è abbastanza semplice, alcune cose non ci sono chiare, quindi se qualcuno vorrà poi contribuire come al solito sarà ben accetto.

Consideriamo un (sotto)gruppo del gruppo delle permutazioni, composto da tre elementi, $G_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$: non abbiamo mai amato particolarmente la notazione usuale per le permutazioni (sempre meglio di quella americana, comunque), ma questo ci pare uno dei casi da cui, nel grafo di Cayley, non si capisce molto, quindi ve le diamo entrambe:

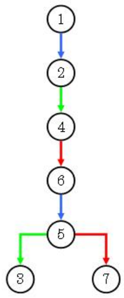
$$H = \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 7 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \\ \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$



H

Poco chiaro? Bene, ve ne diamo un altro:

$$K = \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \\ \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$



K

Ammettiamo una volta tanto che il grafo di Cayley sia clamorosamente poco chiaro, ma anche le formulazioni per operatori non sono una meraviglia. Probabilmente, è l'unico caso in cui quella che abbiamo chiamato espressione "americana" (non si chiama così, ma la usano gli americani, quindi...) funziona meglio:

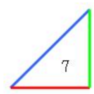
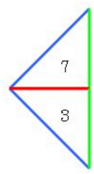
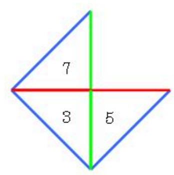
$$H = \left\{ \begin{matrix} \alpha = \{(2,6),(3,7)\} \\ \beta = \{(2,4),(3,5)\} \\ \gamma = \{(1,2),(5,6)\} \end{matrix} \right\}$$

e

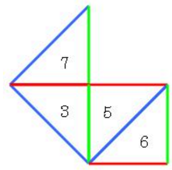
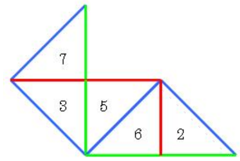
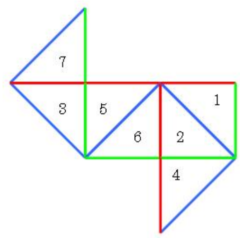
$$K = \left\{ \begin{matrix} \alpha = \{(4,6),(5,7)\} \\ \beta = \{(2,4),(3,5)\} \\ \gamma = \{(1,2),(5,6)\} \end{matrix} \right\}$$

Vorremmo notaste che questi due oggetti *si somigliano, ma non sono uguali*: e questo si vede meglio nella formulazione “americana”: β e γ sono identici, α ha una volta un 2 e una volta un 4: nei grafi di Cayley, α è in rosso, β in verde e γ in blu[26] e il fatto che (ad esempio) α sia tra “7” e “3” e tra “6” e “2”, significa che scambiate “7” con “3” (e “3” con “7”) e “6” con “2” (e “2” con “6”): stesso identico e noioso lavoro per gli altri. Adesso, andate a riprendervi il teorema di Sunada e cercate di capire cosa voglia dire, in questo contesto, che “*H* e *K* sono coniugati” (poi, spiegatecelo).

Armati di questi due efficaci ma scarsamente interessanti oggetti, cosa ci facciamo? Beh, ci facciamo un triangolo (anzi, due). Provo a definire il tutto in un modo operativo, sperando che la linotype (Treccia) non decida di passare a vie di fatto.

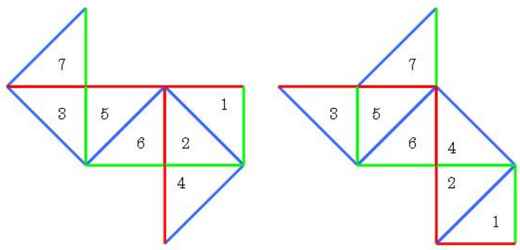
Prendiamo il gruppo *H*, e costruiamo il triangolo $\alpha\beta\gamma$: siccome in cima al grafo di Cayley c’è un “7”, scriviamo “7” dentro al triangolo.	
Dal “7” del grafo di Cayley parte un segmento α (rosso); quindi ribaltiamo il nostro triangolo sul lato opportuno. Siamo finiti, da grafo, su un “3”, e quindi lo scriviamo nel triangolo.	
Dal “3” parte un β (verde) che va al “5”: ribaltiamo il triangolo sul lato verde e scriviamo “5” dentro al nuovo triangolo.	

[26] Ennesima maledizione a Bill Gates, che non ci lascia scrivere le formule colorate se non a pagamento…

Finalmente troviamo un γ (blu); effettuiamo il solito ribaltamento e finiamo su “6”, che scriviamo.	
Dal “6” parte un α (rosso): normale amministrazione, finiamo in “2”.	
Attenzione, lavoro doppio! Da “2” partono un β (verde) e un γ (blu); no problem, li tracciamo tutti e due: uno è un “4”, l’altro è un “1”. E poi basta, che il grafo è finito.	

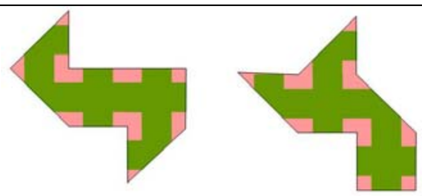
…mi pare chiaro che K ve lo costruite voi.

Siccome però siamo buoni (ve l’avevamo detto, è Natale), vi diamo i due risultati: li trovate in figura, da qualche parte.



13 *I Tamburi di Gordon!*

“…e allora? Ormai, ci abbiamo fatto il callo, agli isospettrali…”. Calma. Tanto per cominciare, questi due sono (al momento, almeno) i due tamburi isospettrali *più semplici*: inoltre, se la cosa vi sembra così facile, abbiamo alcune domande. Ma prima, ridisegniamo i due tamburi di Gordon con una “decorazione” ricavata da un altro disegno: carino, vero? I tamburi di Sunada sono una specie di “scheletro” dei tamburi di Gordon!



14 *…ma questi tamburi, di chi sono?*

E adesso le domande. Perché “7”, come elementi del gruppo base? Perché proprio quelle due permutazioni? Cosa significa, in questo contesto, “coniugati”? E avanti. Se l’avete capito, accettiamo contributi.

Ma sono delle grancasse o dei tom alti?

Rudy d’Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms