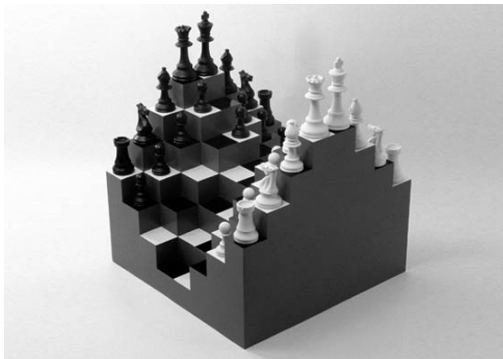


Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 155 – Dicembre 2011 – Anno Tredicesimo



1. Maestro e Discepolo	3
2. Problemi.....	10
2.1 Undici-Undici-Undici.....	10
2.2 Dovrebbe smetterla.....	10
2.3 Goodbye, Mr. Chips!	11
3. Bungee Jumpers	12
4. Soluzioni e Note.....	12
4.1 [152]	14
4.1.1 Dai Teoremi delle tonsille, PM	14
4.2 [153]	14
4.2.1 Il giardino dei destini incrociati	14
4.2.2 Problema impossibile dal Luogo del Divano Quantistico.....	19
4.3 [154]	23
4.3.1 Quando si dice “Andarsela a cercare”	23
4.3.2 Ripetizioni!.....	26
5. Quick & Dirty.....	29
6. Pagina 46.....	29
7. Paraphernalia Mathematica	31
7.1 DoRé Mi Fa Sol(letico)	31



	Rudi Mathematici Rivista fondata nell'altro millennio da <i>Rudy d'Alembert</i> (A.d.S., G.C., B.S) rudy.dalembert@rudimathematici.com
	<i>Piotr Rezierovic Silverbrahms</i> (Doc) piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
	<i>Alice Riddle</i> (Treccia) alice.riddle@rudimathematici.com
	www.rudimathematici.com
RM154 ha diffuso 2'831 copie e il 05/12/2011 per  eravamo in 71'000 pagine.	
Tutto quanto pubblicato dalla rivista è soggetto al diritto d'autore e in base a tale diritto <i>concediamo il permesso di libera pubblicazione e ridistribuzione</i> alle condizioni indicate alla pagina diraut.html del sito. In particolare, tutto quanto pubblicato sulla rivista è scritto compiendo ogni ragionevole sforzo per dare le informazioni corrette; tuttavia queste informazioni non vengono fornite con alcuna garanzia legale e quindi la loro ripubblicazione da parte vostra è sotto la vostra responsabilità. La pubblicazione delle informazioni da parte vostra costituisce accettazione di questa condizione.	

Quando ci si stufa dei “soliti” scacchi, si possono inventare nuove regole o nuove scacchiere: nella seconda opzione, i nostri preferiti sono gli Scacchi “3D” di **Ji Lee** e gli “Scacchi Platonici” di **Patricia Tower**; se invece siete dei tipi da “volgare ostentazione di plutocratica sicumera” e siete ancora in dubbio per qualche regalo di Natale, vi consigliamo i “Renault Formula 1” (costruiti con ricambi originali, prezzo stimato del set 40000 Euro) o gli Scacchi “2D” (proprio i pezzi: loro sono in cuoio, mentre la scacchiera è in legno di pero. Circa 9000 Euro). In ultimo (non in vendita, purtroppo), i “Blade Runner Chess” di **J. F. Sebastian**.

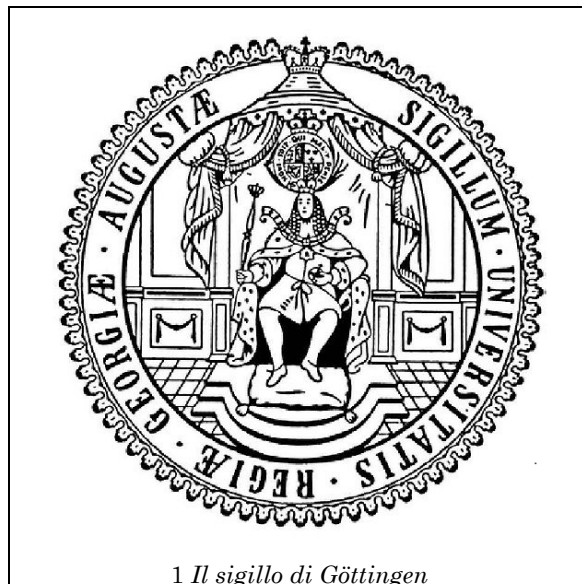
1. Maestro e Discepolo

*Lui, che a quel tempo era mio assistente,
portò questo periodo di indecisione a morte improvvisa.
Tagliò il nodo gordiano attraverso un principio filosofico,
e rimpiazzò il castello di ipotesi con una legge matematica.*
(Nobel Lecture, 1954)

Con ogni probabilità, si videro per la prima volta circa novant'anni fa, in un giorno d'inizio estate che non sappiamo se immaginare luminoso o nebbioso come questo nostro autunno. Non possiamo esserne sicuri, ma il Giugno del 1922 è certo una buona ipotesi temporale per collocare nel tempo il loro primo incontro. La collocazione spaziale è invece quasi certa: Göttingen, (o Gottinga, come piaceva di più scrivere agli italiani), il tempio del sapere tedesco.

L'università di Göttingen è una di quelle istituzioni universitarie che ha divorato la toponomastica della città che la ospita: al pari di Cambridge, Oxford, Princeton, ma forse in maniera ancora più decisa e avvolgente, la *Giorgia Augusta* avoca a sé la totalità dei riferimenti, lasciando alla cittadina che la ospita solo il ruolo di contorno e comprimaria. Curiosamente, il massimo istituto tedesco, quello che ancor oggi è il simbolo della cultura accademica germanica (ruolo che, comunque, era assai più marcato nel primo terzo del Novecento), fu fondato da un re inglese, Giorgio II di Gran Bretagna. Correva l'anno 1734, Giorgio II era anche Grande Elettore dell'Hannover¹, e credeva nell'Illuminismo. L'università aprì ufficialmente i suoi corsi nel 1737, e la sua fama e il suo prestigio crebbero quasi senza interruzioni, almeno fino al 1933, quando le purghe naziste infersero un colpo quasi mortale all'ambiente accademico.

Dall'ateneo tedesco sono usciti 47 premi Nobel; e il numero è davvero più impressionante se si pensa che la quasi totalità di questi furono assegnati nei primi anni della storia del Premio Nobel stesso: del resto basta scorrere un qualsiasi elenco di coloro che a Göttingen passarono anni come studenti o come professori, per restare impressionati.

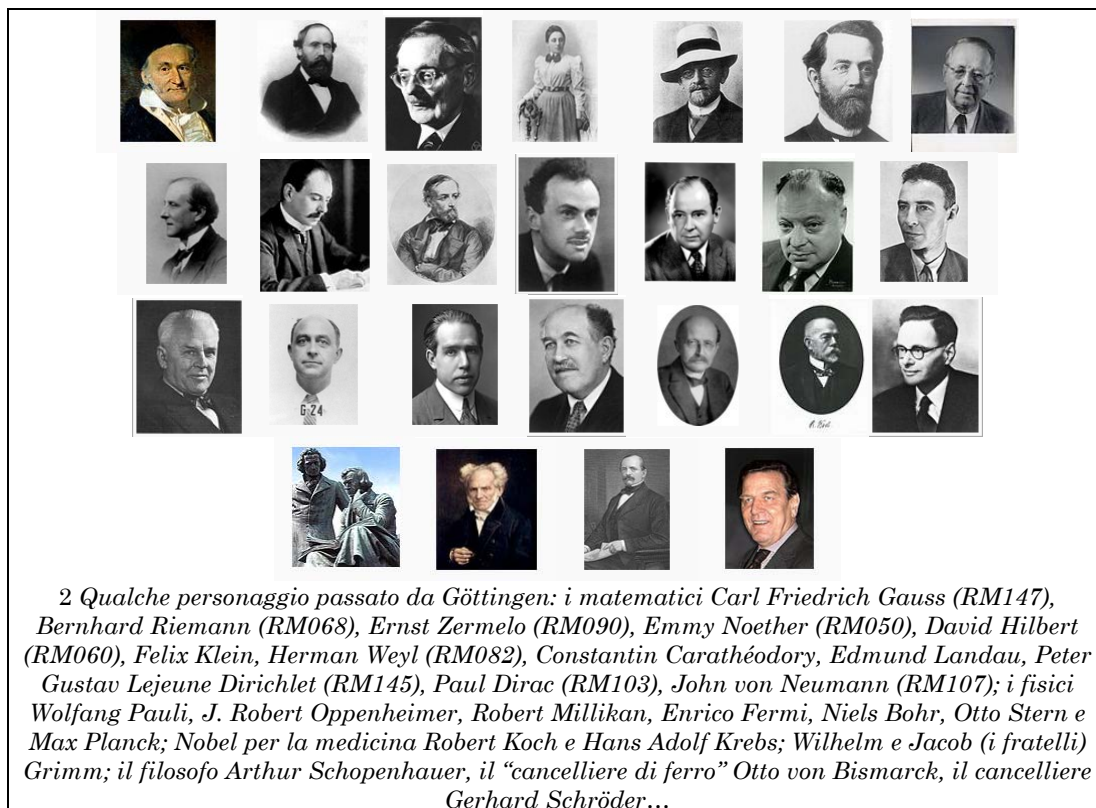


¹ Il sigillo di Göttingen

E forse era adeguatamente impressionato anche il Discepolo, quando si ritrovò a calpestare il sacro suolo accademico di Gottinga. O forse no: forse presagiva già di essere destinato ad essere egli stesso un nuovo vanto per quell'università, o magari, più semplicemente, non era consapevole, dall'alto dei suoi vent'anni, di niente di più della primavera della sua vita. Anche perché quelle mura, quella cittadina che in pratica

¹ In realtà la cosa non è poi tanto curiosa: la casa reale inglese ha sempre avuto legami molto stretti con la Bassa Sassonia, e anche i Windsor, regnanti attuali d'Inghilterra, hanno la parola "Hannover" da qualche parte nel lungo elenco dei loro titoli nobiliari.

coincideva quasi integralmente con la sua università, di scienza e cultura traboccava davvero, ormai da più di un secolo. Interi stuoli di maestri e discepoli si avvicendavano, si davano il cambio generazione dopo generazione, rendendo di fatto routine perfino l'eccellenza. E poi il Discepolo non si trovava a Göttingen, in quel Giugno del 1921, con l'intenzione di restarci: la sua università era quella – meno prestigiosa ma non certo meno densa di eccellenze – di Monaco. Era stato mandato dal suo professore, Sommerfeld, ad ascoltare una conferenza di Niels Bohr².



A Niels Bohr era stato appena assegnato il premio Nobel per la Fisica, in quel 1922, per il suo lavoro fondamentale sulla struttura atomica. Ed è curioso notare che il contributo maggiore al modello atomico di Bohr fu dato proprio da Sommerfeld, al punto che ancora oggi, gli studenti di fisica di tutto il mondo si ritrovano a studiare l'atomo di Bohr-Sommerfeld. Il Discepolo, in questa diarchia, rivestiva proprio il ruolo perfetto del discepolo, visto che era studente di Sommerfeld a Monaco e sarebbe a breve diventato uno dei maggiori nomi della cosiddetta “Scuola di Copenaghen” diretta da Bohr. E in questo percorso che esplorava i segreti della nascente Meccanica Quantistica, da Monaco a Copenaghen, aveva un fratello gemello, almeno dal punto di vista della formazione: Wolfgang Pauli.

Ciò non di meno, il Maestro che probabilmente incontrò per la prima volta in quell'occasione non era Bohr: del resto, l'abbiamo già detto e ripetuto, a Göttinga i pezzi grossi si incontravano come margherite in un prato a primavera.

² Di lui, e di suo fratello si parla diffusamente in RM063 in “Una vita da mediano”.



3 Werner Heisenberg

Il nostro Discepolo si chiama Werner Karl Heisenberg, e il suo nome è forse quello che per primo viene in mente quando si parla di Meccanica Quantistica. Nonostante alla costruzione della più complessa teoria scientifica della storia della scienza abbiano contribuito una pletora di nomi celeberrimi³, è verosimile che se si chiedesse agli addetti ai lavori quale personaggio meglio riesca a riunire in un solo nome l'essenza della MQ, buona parte degli interrogati risponderebbe proprio "Heisenberg".

Nato il 5 Dicembre 1901 a Würzburg, in Baviera, Werner è figlio di una benestante e acculturata famiglia che si professava protestante, ma che di fatto non era particolarmente interessata alla religione. Suo padre August era un professore universitario di Greco antico⁴ e moderno, mentre il nonno materno era preside di un liceo a Monaco; ed è proprio nel capoluogo della Baviera che gli Heisenberg si trasferiscono quando Werner ha circa nove anni. Giusto il tempo di cominciare a frequentare il ginnasio governato dal nonno, che lo scoppio della Grande Guerra sconvolge la regolarità delle

lezioni e della formazione del giovane. Durante il conflitto Werner provvederà sostanzialmente da solo ai suoi studi, e secondo molti commentatori è possibile che questo, anziché danneggiarlo, gli abbia alla fine giovato; si narra che quando aveva sedici anni dette delle ripetizioni di calcolo differenziale e integrale ad un suo amico che frequentava l'università.

Tra l'adolescenza e la gioventù, in quei tempi davvero complessi per la Baviera e la Germania tutta, Heisenberg riesce infine ad iscriversi all'Università di Monaco. Curiosamente, la sua futura carriera di fisico viene determinata probabilmente dalla stanchezza di un vecchio professore di matematica. Werner è infatti assai interessato alla Teoria dei Numeri, e con ogni probabilità avrebbe potuto diventare un genio assoluto nel campo della matematica pura; all'Università ha un primo colloquio con il grande Ferdinand von Lindemann⁵, che sperava potesse diventare il suo supervisore durante il

³ Vale la pena fare un elenco? Se la vale, è forse solo per vedere quante stelle di prima grandezza restano fuori dalla memoria, per evidente impossibilità di rammentarli tutti: Planck, Einstein, De Broglie, Schrödinger, Bohr, Sommerfeld, Dirac, Pauli, Fermi, Yukawa, Von Neumann, Feynman...

⁴ Se pensate che la cosa potrebbe non essere interessante in un articolo di argomento scientifico, è bene ricordare un aneddoto significativo. Quando Yukawa scoprì il mesone, la particella elementare che per massa si poneva tra elettrone e protone, propose il termine "*mesotrone*", per rimarcare la sua dimensione mediana e per assonanza con le desinenze delle altre particelle conosciute (*elettrone*, *positrone*, *neutrone*). Fu Heisenberg a fargli notare che il termine greco per "mezzo" (*mesos*) non aveva alcuna giustificazione per quel "tr", e il mesotrone cambiò nome in mesone. Papà August, probabilmente, ne fu molto soddisfatto.

⁵ Sì, quel Lindemann che per primo dimostrò la trascendenza di π .

suo percorso accademico. Il matematico, però, è ormai vecchio (ha quasi settant'anni) e probabilmente poco interessato alla carriera accademica sua e degli altri, e non rimane particolarmente colpito dal brillante diciannovenne. Heisenberg sostiene allora un successivo colloquio con Sommerfeld, che invece lo accetta con entusiasmo. Il passaggio dalla Teoria dei Numeri alla Teoria dei Quanti avviene quindi così, quasi senza che nessuno se ne accorga: anche se, col senno di poi, è facile riconoscere nella gran parte del lavoro “fisico” di Heisenberg una matrice⁶ assolutamente matematica.

Ed è sempre con un'attenzione particolare agli aspetti matematici che segue i suoi corsi universitari, pertanto restando sempre molto attento agli aspetti teorici della fisica. Curiosamente, suo compagno di corso è uno dei pochi personaggi della fisica moderna che può serenamente contendergli il titolo di maggior teorico della disciplina, Wolfgang Pauli. Mentre Heisenberg comincia ad interessarsi seriamente alla geometria, Pauli gli suggerisce di non dedicarsi troppo, perché la Teoria Generale della Relatività – che è senz'altro la disciplina che fa maggior uso di concetti geometrici – è ormai molto consolidata, e non lascia spazio a grosse innovazioni; il campo più promettente per un fisico teorico, negli Anni Venti, è certamente la fisica atomica⁷.

La carriera scientifica di Heisenberg prende poi presto il volo. Torna a Göttingen, a fare da assistente ad un fisico di gran levatura (certo, il Maestro); poi corre da Niels Bohr, in Danimarca. Quando torna, dopo neanche due anni, di nuovo a Göttingen stende i risultati della sua ricerca teorica: il frutto è una forma di Meccanica Quantistica, del tutto diversa da quella basata sulla meccanica ondulatoria di Erwin Schrödinger⁸. Si tratta di un approccio fortemente teorico, basato sulla matematica delle matrici e sul principio filosofico che la teoria non deve trattare oggetti “non osservabili”, quali ad esempio le orbite degli elettroni e delle particelle subatomiche. In realtà, è il concetto stesso di “particella” ad essere quasi bandito dalla teoria.

Più tardi ci si accorgerà che la teoria di Heisenberg non è alternativa a quella di Schrödinger, ma che le due sono sostanzialmente equivalenti, anche se basate su approcci radicalmente diversi. In un certo senso, si rafforzano a vicenda, perché giustificano i medesimi effetti partendo da punti di vista diversi. Nel 1927 espone il più famoso dei principi della Meccanica Quantistica, quel Principio di Indeterminazione che da lui prende il nome:

Nell'ambito della realtà le cui connessioni sono formulate dalla teoria quantistica, le leggi naturali non conducono quindi ad una completa determinazione di ciò che accade nello spazio e nel tempo; l'accadere (all'interno delle frequenze determinate per mezzo delle connessioni) è piuttosto rimesso al gioco del caso.



4 A qualcuno il Principio di Indeterminazione piace al punto da tatuarselo addosso

A Werner Heisenberg viene assegnato il Premio Nobel per la Fisica nel 1932, naturalmente per il suo contributo alla teorizzazione della Meccanica Quantistica. È facile immaginare quanto un simile riconoscimento potesse risultare esaltante per un fisico appena trentunenne; senza considerare che la proposta originale di assegnazione del Nobel al comitato di Stoccolma era arrivata già quattro anni prima, su iniziativa del fisico più famoso del mondo, Albert Einstein⁹.

⁶ È un gioco di parole, questo? Beh, sì, in fondo...

⁷ Detto per inciso, l'aula dell'Università di Monaco dove si riuniva quel gruppo di ricerca doveva essere interessante, dal punto di vista della storia della scienza: Sommerfeld, Pauli e Heisenberg vinceranno tutti e tre il premio Nobel per la Fisica, in anni e con motivazioni diverse, ma tutte legate alla fisica atomica.

⁸ Di lui, e di un altro pilastro della MQ, Dirac, si parla in RM103 “Non dire gatto...”.

⁹ Fisico che abbiamo festeggiato nell'anniversario del suo *anno mirabilis*, in RM074 “Varianti e Invarianti”.

Eppure, un piccolo fondo d'amarezza forse tormentava Werner, in quel momento glorioso. Forse si sentiva un po' troppo solo, sul palco svedese: del resto, lo stesso Einstein, nel proporlo per il premio più famoso del mondo, lo aveva immaginato accompagnato da due suoi colleghi. E uno dei due era, naturalmente, il Maestro.

Il Maestro non era in fondo troppo più vecchio di Heisenberg: abbastanza per rientrare nella generazione precedente, ma non così tanto da passare per vecchio saggio dai capelli bianchi e mezzo secolo d'esperienza da ricordare. Aveva quasi esattamente 19 anni più di Heisenberg, essendo nato il 11 Dicembre 1882 a Breslau¹⁰, in quella che era allora Germania ma che oggi è Polonia. Nel 1921 era professore di Fisica Teorica a Gottinga, ed era appena stato nominato direttore dell'Istituto omonimo. Era indubbiamente uno dei maggiori fisici del suo tempo; eppure il suo nome – che pure è famosissimo, perché si tratta pur sempre di un astro di prima grandezza della fisica del periodo d'oro di inizio Novecento – è quasi sempre ricordato tra gli ultimi, nell'elenco degli artefici della Meccanica Quantistica. Proprio a differenza di quello di Heisenberg, che ne resta invece la bandiera; e la cosa ha un che di comico, visto che il termine “Meccanica Quantistica” fu coniato per la prima volta proprio da lui, dal Maestro.

E un po' come i veri maestri dell'iconografia delle fiabe, il Maestro sembra quasi condurre la sua avventura nella MQ stimolando e quasi restando volutamente in disparte. Se il suo contributo si fosse limitato a trovare un nome d'effetto per la nuova teoria e a stimolare periodicamente il suo geniale assistente bavarese, la cosa potrebbe quasi non risultare troppo strana¹¹. Ma il contributo del Maestro sul lavoro del suo Discepolo è di natura decisamente più incisiva: quando Heisenberg torna da Copenaghen con i suoi appunti e la sua teoria matematica destinata a rovesciare il punto di vista sul concetto di “osservabile” e su tutta la Meccanica Quantistica, è il Maestro che si accorge che quell'approccio è formulabile attraverso la matematica delle matrici. Per quanto a tutt'oggi la “forma matriciale” della MQ sia associata – peraltro giustamente – al nome di Heisenberg, la formalizzazione in questi termini venne individuata inizialmente dal Maestro, e completata dal lavoro a sei mani fatto da lui, dallo stesso Heisenberg e da Pascual Jordan¹².

The diagram shows the Schrödinger equation:
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$
 Labels with leader lines:

- Planck's constant: points to $\hbar$
- Called the 'Laplacian operator', this quantity describes how the wavefunction, Ψ , changes from one place to another: points to ∇^2
- A mathematical quantity called an 'imaginary number'. It is equal to the square root of minus one: points to i
- The mass of the particle being described: points to m
- Describes the forces acting on the particle: points to V
- Describes how Ψ changes its shape with time: points to $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$

 Below the equation, a caption reads:

5 L'equazione di Schrödinger con legenda divulgativa. Notare come la Ψ sia l'unico simbolo non descritto.

Infine, cosa più sorprendente di tutte, il Maestro è colui che ha dato un senso alla variabile più importante e misteriosa di tutta la Meccanica Quantistica, e forse di tutta la fisica. È curioso notare in che misura la teoria, a quel tempo, era più avanti della sperimentazione.

I fisici di tutto il mondo lavoravano sull'equazione fondamentale che aveva come pulsante la “funzione d'onda Ψ ”, ma nessuno aveva un'idea realmente consistente su

cosa quella Ψ potesse rappresentare. E fu l'interpretazione del Maestro, quella che alla

¹⁰ E il suo nome polacco – con il quale è più facile trovarla negli atlanti di oggi – è Wrocław.

¹¹ “Non troppo strana” sempre se si è disposti a rimanere nel quadretto classico e poetico dell'iconografia del buon maestro: nella realtà accademica, in cui è assolutamente più frequente il caso opposto – ovvero quello del professore che si appropria senza darne riconoscimento del lavoro dei suoi collaboratori – la situazione riveste comunque carattere del tutto eccezionale.

¹² Nonostante il nome di battesimo apparentemente spagnolo e il cognome apparentemente francese, Jordan era – come si vedrà più avanti, “fin troppo” tedesco. Da non confondersi con Camille Jordan, matematico francese, quello del famoso “Lemma di Jordan”.

fine venne riconosciuta da tutti come la migliore. La Ψ è la densità di probabilità di posizione: misura insomma quale sia la possibilità che la particella ad essa associata si trovi in un determinato luogo. Ancor più del Principio di Indeterminazione di Heisenberg, l'interpretazione probabilistica di Born sposta il centro di tutta la fisica moderna dal determinismo newtoniano alla nebulosità della probabilità quantistica.

Il Maestro è Max Born. Heisenberg, dopo aver ricevuto il Nobel nel 1932, gli scrisse che riteneva ingiusto che il riconoscimento fosse toccato solamente a lui, perché alla sua teoria avevano lavorato con contributi fondamentali sia lui, professore di cui era orgoglioso assistente, sia Jordan, che di Werner era coetaneo e pari grado¹³. E in realtà la ragione per cui Born e Jordan furono esclusi dal premio svedese non è mai stata pienamente chiarita. L'ipotesi più probabile è, ancora una volta, politica: il 1932 è anno di un periodo decisamente difficile, per la Germania. Pascual Jordan, i cui contributi teorici alla teoria di Heisenberg erano indubbi, si era iscritto al partito nazista, e anche alle famigerate SA. C'è chi ipotizza che questo bastasse e avanzasse per convincere i saggi di Stoccolma a rimuovere il suo nome dalla lista dei papabili, anche se per farlo avrebbero dovuto, naturalmente, togliere



6 Max Born

anche quello di Born, altrimenti l'esclusione mirata del solo Jordan sarebbe apparsa troppo evidente. Ad ulteriore possibile conferma dell'ipotesi, viene anche ricordato che alla fine il Nobel a Max Born venne effettivamente assegnato – e per fortuna – anche se solo ventidue anni dopo, nel 1954, quando Born aveva già settantadue anni. La motivazione era stavolta proprio per “l'interpretazione probabilistica della Meccanica Quantistica”, cosa che era attribuibile solo ed esclusivamente al vecchio Max. E a questo punto non è difficile immaginare chi fosse il “lui” a cui si riferisce il Maestro nella parte del suo discorso per il Nobel citata all'inizio.

La vita di Born è uno splendido riassunto dell'epoca più ricca della fisica moderna. Di famiglia ebrea, nato in quella Slesia che la storia ha visto tante volte cambiare padrone, ha avuto un'esistenza lunga che gli ha consentito di seguire tutti gli aspetti più avventurosi della ricerca scientifica. Si è già accennato al ruolo centrale che ebbe nella Meccanica Quantistica, ma il suo contributo alla Relatività fu quasi altrettanto importante: il suo libro divulgativo più famoso si intitola “La Sintesi Einsteiniana”, e fu per tutta la vita uno dei pochi amici veramente stretti di Albert Einstein.

¹³ Va riconosciuta a Werner Heisenberg una piena onestà intellettuale. Non solo espresse a Born e a Jordan il suo dispiacere per il mancato premio, ma disse esplicitamente che “i contributi di Born e Jordan alla Meccanica Quantistica non potevano essere cambiati da una decisione sbagliata dall'esterno”.

*6 Born e Heisenberg*

La sua interpretazione della MQ – detta a volte “Interpretazione di Copenaghen”, quasi si volesse intenzionalmente far convogliare ulteriormente una certa confusione tra i cognomi Born e Bohr – è in fondo solo quello che la parola stessa dice: un’interpretazione, che attribuisce significati fisici ad un sistema matematico. Ogni tanto viene messa in discussione, rielaborata, criticata. Ed è possibile che sia sbagliata. Quel che è certo, è che a Born non sarebbero dispiaciute le critiche: era un maestro perfetto, oltre che un grandissimo fisico. E poche cose lo rendevano più orgoglioso, ci piace pensare, che vedere i suoi allievi discutere, pensare, costruire – e se necessario anche abbattere – teorie ed interpretazioni, per una migliore conoscenza del mondo.



2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Undici-Undici-Undici			
Dovrebbe smetterla...			
Goodby, Mr. Chips!			

Eccezionalmente, TRE problemi. Ma solo perché è Natale.

2.1 Undici-Undici-Undici

Come vi abbiamo detto e vi diremo (o meglio, ve lo dirà Alice... L'estensore di queste note – Rudy – è notoriamente troppo modesto per parlarne), il Dodiciundiciundici abbiamo (Rudy e Doc, Alice presente in sala) tenuto una conferenza per il CICAP sulla numerologia e, in particolare, su Pitagora: quello che non vi abbiamo detto (e ve lo diciamo adesso) è che il giorno prima, alle undici e undici, Piergiorgio Odifreddi teneva praticamente la stessa conferenza nello stesso posto: solo che lui aveva più tempo e, esaurita la nostra conferenza, ha cominciato a parlare d'altro: grande fantasia, si è messo a parlare dell'undici e dei suoi simili.

In particolare, ha fatto notare che i numeri di tipo “rep-1” (si chiamano così) generano dei numeri palindromi piuttosto strani, quando vengono elevati a quadrato: 121, 12321, 1234321,... Insomma, “strani”.

Mente Doc riscriveva freneticamente la conferenza, Rudy si è messo a pensare ai numeri palindromi in generale, e si è accorto di una strana cosa: Se A e B sono dei palindromi di **quattro** cifre e C è un palindromo di **cinque** cifre, e inoltre è $A+B=C$, riuscite a determinare tutti i possibili valori di C ?

Risolvete pure mentre parliamo, tanto la conferenza l'avete già sentita ieri...

2.2 Dovrebbe smetterla...

Ci riferiamo ad Alberto, il quale non sembra aver ancora acquisito la serietà e la compostezza che ci si aspetterebbe da un universitario (voi due, smettetela di ridere! Se sono riuscito a scriverla io senza vergognarmi, potete anche cercare di stare seri almeno sino alla fine del problema!).

Stavamo rivangando un vecchio problema di Halloween, basato su candele che si comportavano in modo strano, quando ci è venuta in mente un'interessante variazione.

Questa volta l'oggetto del contendere è rappresentato da cinque litri¹⁴, posti in cerchio: Fred ha a disposizione un mezzo litro con il quale portare l'acqua ai contenitori, e il suo scopo è di riempirne esattamente almeno uno suddividendo il mezzo litro come gli pare tra i contenitori: e Alberto, come suo solito, rema contro.

“Fred, voglio romperti le scatole, ma non troppo: mentre vai a prendere l'acqua, io zitto zitto guardo quali sono i due litri adiacenti che, presi assieme, contengono la massima quantità d'acqua e te li svuoto, ma dal momento in cui un litro sarà pieno, non lo toccherò più”.

Fred, al momento, anziché studiare greco sta guardando i litri e il mezzo litro e facendo strani calcoli: il sospetto è che abbia intenzione di continuare a far finta di contare sin quando Alberto non si deciderà ad andare a studiare chimica. Forse, se date una mano a Fred definendogli una strategia, potremmo avanzare qualche pallida speranza di progresso nelle lingue classiche... Qualcuno ha un'idea?

2.3 Goodbye, Mr. Chips!

Cominciamo con la brutta notizia: il professor Alberto Delgado, della Bradley University, da quattro anni non aggiorna la sua pagina di “problemi della settimana”.

Non vi abbiamo mai parlato di lui, ma sappiate che (con l'esclusione di alcune iniziali scopiazzature da Martin Gardner) è stata la fonte principale di problemi per i primi tre anni di questa rivista: abbiamo raccolto tutti i suoi



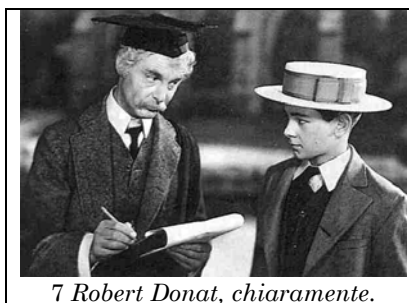
8 Quello vero (ma un po' gli somiglia...)

problemi settimanali, e tra i vari siti che abbiamo frequentato in questi anni è stato l'unico a tenere fede al nome “Problem of the Week”¹⁵: in un periodo nel quale la matematica era considerata supergiù come il latino in Inghilterra durante la prima guerra mondiale (v. figura 1), ha portato testardamente avanti la sua rubrica. Pazientemente abbiamo atteso aggiornamenti, sin quando è comparsa la notizia che non ha intenzione di continuare;

comunque, continua a lavorare all'università e a quanto abbiamo capito al momento il suo incarico è torturare i post-doc e seguire la squadra di triathlon¹⁶.

In questi anni, i problemi “ragionevoli” (quelli difficili venivano da un'altra parte) sono arrivati principalmente da lui. Non preoccupatevi, continueremo a piratare i suoi vecchi problemi, ma vogliamo ricordare la sua lunga e meritevole attività in questo campo proponendovi l'ultimo problema pubblicato, senza modifiche:

Se α, β, γ sono gli angoli interni di un triangolo, per quali valori è massimo il valore dell'espressione $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$?



7 Robert Donat, chiaramente.

¹⁴ Breve spiegazione per coloro che non conoscono la decorazione della nostra cucina: siamo orgogliosi possessori di una collezione completa (dal “doppio” al “decilitro”) di quelle specie di bottiglie da mescita diffuse nelle osterie e nelle *piole* (quantomeno in Piemonte), il cui nome, per quanto ne sappiamo, è la semplice indicazione della capacità: quindi, “cinque litri” sono cinque contenitori da un litro, non uno da cinque litri. “Orgogliosi” perché, avendo questi oggetti ormai una cinquantina d'anni, sono tutti dotati di sigillo in piombo certificante l'esatta capacità, come obbligatorio per le mescite di quando eravamo molto piccoli.

¹⁵ Ogni tanto tardava la soluzione, ma se avesse voluto impegnarsi su quella avrebbe chiamato il sito “Solution of the Week”, giusto?

¹⁶ Noterete che abbiamo detto “... il suo incarico è... e...”: non siamo convinti che le due cose siano così separate tra loro.

OK, facile (gli abbiamo dato una sola pipa); ma esistono strade diverse dalla “via reale” per la soluzione, e potreste sempre provare a generalizzare... Diverse funzioni trigonometriche? Più angoli? Altre idee?

Ciao, Prof. E se cambiassi idea, abbiamo gli URL di qualche sito “tosto”, per tenere il tempo e continuare a torturare il mondo.

3. Bungee Jumpers

Prima parte - Calcolate la parte intera del numero¹⁷:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1.000.000}}.$$

Seconda parte - Calcolate la somma:

$$\frac{1}{\sqrt{10.001}} + \frac{1}{\sqrt{10.002}} + \frac{1}{\sqrt{10.003}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1.000.000}}$$

con una tolleranza di $1/50$.

La soluzione, a “Pagina 46”

4. Soluzioni e Note

Dicembre.

Tempo di avvento, preparazione, regali, abbuffate, tempo di stare in famiglia, bere cioccolate calde ed essere tutti un po’ più buoni.

Noi della Redazione, ovviamente, buoni non lo siamo mai stati, neppure a Natale, non potremmo esserlo neppure cotti allo spiedo, suppongo. Però a Natale la sottoscritta diventa un po’ più sognatrice e idealista del solito, quindi aspettatevi una rubricetta strappalacrime. Del resto dicevo che questo è tempo di stare in famiglia, e noi abbiamo una famiglia allargata di persone che ci scrivono e leggono, proprio in questa rubrica a dire il vero: qual è il modo migliore di celebrare la nostra amicizia? A volte penso che sia proprio questo che ci fa tirare avanti: sapere che anche nei momenti peggiori almeno qualcuno di voi pensa al prossimo numero e ai nuovi problemi, o alla storia del matematico, o a complicati arzigogoli nei Paraphernalia. Sapere che ci siete dà al nostro lavoro tutto un altro sapore.

Del resto a novembre abbiamo vissuto momenti straordinari, e in qualche modo ve ne devo parlare. Per esempio, le foto che seguono, testimoniano incontri eccezionali. Infatti il secondo weekend di novembre, con la sua data 11.11.11 non ha portato la fine del mondo, ma senz’altro una serie di eventi storici. Prima di tutto Alice, la sottoscritta, ha assistito a ben due conferenze dei maschietti della Redazione, per la prima volta dopo ben tre anni (forse voi non lo ricordate, ma è dal 2008 che i Rudi conferenziano in giro per il nord Italia...). La conferenza che i ragazzi portano in giro quest’anno parla di calendari, ed è in tema con il mese in corso... dopotutto tra una quindicina di giorni, se tutto va bene, troverete sul sito uno dei gadget più amati ed utili, il Calendario per il 2012 con matematici al posto dei santi e problemi al posto di ricette di cucina. Comunque, tornando a noi, la prima conferenza, proprio il giorno della fine del mondo, si è svolta in quel di Caluso, ed è stata un successone.

¹⁷ Indichiamo con il punto inferiore la *divisione in migliaia* dei numeri e con la virgola la divisione della parte intera dalla parte decimale.



9 La locandina.

C'erano perfino i cartelloni a tappezzare i corridoi del Liceo Martinetti di Caluso, e studenti ed insegnanti interessati.

Io personalmente li ho trovati divertentissimi: alternavano giochi e informazioni storiche, si passavano la parola, e verificavano continuamente che il pubblico non fosse addormentato.



10 I Rudi e il Prof La Rosa.

Come se non bastasse, in serata, si apriva il congresso del CICAP con una *lectio magistralis*, a cui la triade redazionale non poteva fare a meno di partecipare. Evento sorprendente della serata è che il famosissimo Piergiorgio Odifreddi, per uno scherzo del destino, ha stretto la mano a tutti e tre i Rudi, un po' intimiditi, per la prima volta: in quell'occasione c'è stato anche uno scambio di informazioni generiche (a quanto pare sapeva della nostra esistenza, in qualche modo, ma non molto di più), informazioni che – per il nostro stupore – abbiamo sentite ripetere da PG poco dopo nel suo intervento. Del resto la serata è stata veramente imprevedibile, con Odifreddi che praticamente ha toccato tutti gli argomenti previsti per i venti minuti rudeschi del giorno successivo, e tanto in più.

Malgrado il colpo di scena, i miei ragazzi si sono comportati egregiamente il giorno dopo, e sono anche stata felicissima di incontrare e vedere in azione altri grandi divulgatori: Mariano Tomatis, che ha presentato un suo lavoro sulla lettura del pensiero¹⁸, e Diego e Paolo, che in pochi minuti hanno convinto tutta la platea di quanto sia difficile vincere al *Win for Life*¹⁹.

E più tardi hanno anche accettato di pranzare con i Rudi, con nostro grande piacere. E indovinate un po'? Loro pensano che noi siamo dei VIP. La vita è piena di sorprese. E qui mi fermo, basta parlare di noi. Parliamo un po' di voi.

La volta scorsa mi sono lamentata molto di aver ricevuto poche soluzioni e che quelle soluzioni erano in formato poco pratico, ed abbiamo ricevuto montagne di mail che suggerivano di esplicitare le regole con cui mandare soluzioni e contributi. In realtà non abbiamo mai voluto farlo perché ponendo delle regole al formato dei contributi ci sembra di limitare la libertà di chi vuole giocare con noi, e ciò è Male: pensate però che dobbiamo importare i vostri contributi, e che ogni formato "editabile" (quindi non pdf) va bene: open office, word, testo,...

Per il resto, le soluzioni il mese scorso devono essere arrivate, ma i problemi informatici della Redazione – ormai ciclici e ricorrenti – hanno eliminato gran parte delle posta arrivata. Ve lo diciamo perché è importante ricordare che rispondiamo quasi sempre alle mail che riceviamo – anche se con ritardo a volte – e quindi se non ricevete conferma rinviate! Non vogliamo perderci niente di quello che ci scrivete.

Ed ora, via, finalmente la finisco e lascio la parola a voi.



11 RM ♥ Fate il Nostro Gioco.

¹⁸ Ovviamente su quello che c'è dietro, la lettura del pensiero. Lo seguite, Mariano, vero? Come no? Cominciate subito: <http://www.marianotomatis.it/>

¹⁹ Anche loro non potete non sapere chi sono, non facciamo che parlarne: andate a leggerli su <http://www.fateilnostrogioco.it/> e su <http://www.officinescienza.it/>

4.1 [152]

4.1.1 Dai Teoremi delle tonsille, PM

Ritorniamo a parlare di questo problema, perché **Alberto R** ha espresso un dubbio:

A pag 12 di RM154 **Laura** cita, e poi dimostra, la formula di Martin Gardner

$$(a^2 + b^2 + c^2 + L^2)^2 = 3(a^4 + b^4 + c^4 + L^4)^2$$

Lungi da me l'idea di revisionare la dimostrazione (tanto mi piace la matematica quanto odio i calcoli). Osservo, però, che la formula non è dimensionalmente corretta: si eguaglia una lunghezza alla quarta con una lunghezza alla sedicesima. Qualcosa non quadra.

Ora, noi di RM siamo convinti che in questo caso le unità sono adimensionali, ma siamo pronti ad accettare qualsiasi argomento che possa risolvere il dubbio di **Alberto**.

4.2 [153]

4.2.1 Il giardino dei destini incrociati

Come avevo premesso all'inizio, ci siamo persi parecchie mail il mese scorso, così riprendiamo i problemi trattati ad ottobre, cominciando con il riassunto del testo:

Piotr ha piastrellato in bianco un cerchio del raggio di dieci metri, poi ha piantato degli alberi ai vertici di un quadrato e di un triangolo nei quali era inscritto il cerchio piastrellato. Adesso sta pensando di piastrellare la parte comune al triangolo e al quadrato in colore rosso. Qual è il minimo dell'area in comune tra triangolo e quadrato rispetto al raggio del cerchio?

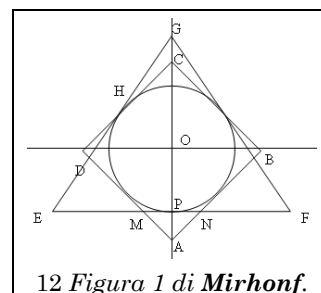
La soluzione di **Mirhonf**, unica presentata il mese scorso, è stata da lui migliorata e riproposta:

Nella soluzione fornita la scorsa volta, ho considerato il quadrato avente uno dei suoi lati parallelo alla base del triangolo isoscele circoscritto alla circonferenza. Ho trovato che il minimo dell'area comune a triangolo e quadrato è pari a $A = 2r^2(2\sqrt{2} - 1)$. Questo valore corrisponde a circa il 91,4% rispetto all'area del quadrato. Ora voglio trattare il problema ruotando il quadrato di 45° rispetto all'asse delle x .

I lati del quadrato misurano $2r$, dove r è il raggio della circonferenza, la sua area è $4r^2$. Facendo riferimento alla figura 1, notiamo subito che il triangolo MAN è necessariamente esterno all'intersezione delle due figure.

Considero un sistema di coordinate con origine posto nel centro della circonferenza. L'equazione della retta AB è $y = x - r\sqrt{2}$. Il punto N, giacente su AB, ha ordinata pari a $-r$, quindi la sua ascissa sarà $-r = x - r\sqrt{2} \Rightarrow x = r(\sqrt{2} - 1)$. Di conseguenza $MN = 2r(\sqrt{2} - 1)$. $AP = r\sqrt{2} - r = r(\sqrt{2} - 1)$. L'area del triangolo MAN misura: $A_{MAN} = r^2(3 - 2\sqrt{2})$.

I punti E ed F, simmetrici rispetto all'asse delle y , hanno una posizione generica sulla retta $y = -r$. Il punto G si trova sull'asse delle y . La retta EG ha equazione $y = mx + q$, con $m > 0$. L'equazione della circonferenza è: $x^2 + y^2 = r^2$. Metto a sistema queste due equazioni ottenendo:



12 Figura 1 di **Mirhonf**.

$$(1+m^2)x^2 + 2mqx - (r^2 - q^2) = 0$$

il cui delta impongo essere nullo per la condizione di tangenza:
 $m^2 q^2 + (1+m^2)(r^2 - q^2) = 0 \Rightarrow q = r\sqrt{1+m^2}$

Quindi l'equazione della generica retta EG, tangente alla circonferenza è:
 $y = mx + r\sqrt{1+m^2}$.

NB: se $m=1$, la posizione di E si calcola così: $-r = x + r\sqrt{2} \Rightarrow x_E = -r(1+\sqrt{2})$; inoltre $y = 0 \Rightarrow x = -r\sqrt{2}$; quindi se $m=1$ le rette EG e DC coincidono; di conseguenza l'area comune al quadrato e al triangolo è l'area del poligono MNBCD:

$$A_{comune} = A_{quadrato} - A_{MAN} = 4r^2 - r^2(3 - 2\sqrt{2}) = r^2(1 + 2\sqrt{2}). \quad (1)$$

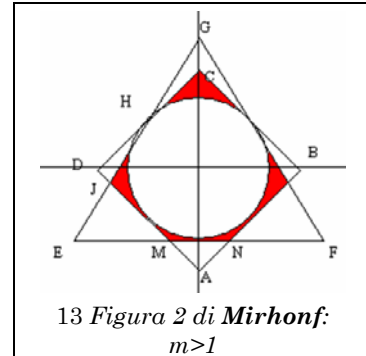
Questo risultato è maggiore rispetto al minimo trovato nella soluzione della scorsa volta. Ora però, possiamo distinguere i due casi:

- $m > 1$; l'ascissa di E $x = -\frac{r}{m}(1 + \sqrt{1+m^2})$ si trova tra $-r(1+\sqrt{2}) < x < -r$ (vedi fig. 2);
- $0 < m < 1$; l'ascissa di E è minore di $-r(1+\sqrt{2})$ (vedi fig. 3).

Caso 1: $m > 1$.

L'area della parte comune è pari all'area del poligono MNBCD (1) meno 2 volte l'area del triangolo HDJ. Calcoliamo le coordinate di H. Equazione della retta DC: $y = x + r\sqrt{2}$. A sistema con l'equazione di EG, si ottiene:

$$\begin{aligned} mx + r\sqrt{1+m^2} &= x + r\sqrt{2} \Rightarrow \\ x &= -r \frac{\sqrt{1+m^2} - \sqrt{2}}{m-1}; \\ y &= r \frac{m\sqrt{2} - \sqrt{1+m^2}}{m-1} \end{aligned}$$



Equazione della retta AD: $y = -x - r\sqrt{2}$. A sistema con l'equazione di EG si ottiene:

$$mx + r\sqrt{1+m^2} = -x - r\sqrt{2} \Rightarrow x = -r \frac{\sqrt{1+m^2} + \sqrt{2}}{m+1}; y = r \frac{\sqrt{1+m^2} - m\sqrt{2}}{m+1}.$$

Le coordinate di D sono $(-r\sqrt{2}; 0)$. Note le coordinate dei vertici HJD, l'area del triangolo da essi delimitato è:

$$A_{HJD} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -r \frac{\sqrt{1+m^2} - \sqrt{2}}{m-1} & r \frac{m\sqrt{2} - \sqrt{1+m^2}}{m-1} & 1 \\ -r \frac{\sqrt{1+m^2} + \sqrt{2}}{m+1} & r \frac{\sqrt{1+m^2} - m\sqrt{2}}{m+1} & 1 \\ -r\sqrt{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left| \frac{r^2}{m^2-1} (\sqrt{2}-\sqrt{1+m^2}) (\sqrt{1+m^2}-m\sqrt{2}) - \frac{r^2}{m-1} (m\sqrt{2}-\sqrt{1+m^2}) + \frac{r^2\sqrt{2}}{m+1} (\sqrt{1+m^2}-m\sqrt{2}) + \frac{r^2}{m^2-1} (\sqrt{2}+\sqrt{1+m^2}) (m\sqrt{2}-\sqrt{1+m^2}) \right| \\
2A_{HJD} &= \left| \frac{r^2}{m^2-1} (2m\sqrt{2}\sqrt{1+m^2} - 2 - 2m^2) - r^2\sqrt{2} (m\sqrt{2}-\sqrt{1+m^2}) \frac{2m}{m^2-1} \right| = \\
&= \left| \frac{2r^2}{m^2-1} (m\sqrt{2}\sqrt{1+m^2} - 1 - m^2 - 2m^2 + m\sqrt{2}\sqrt{1+m^2}) \right| = \frac{2r^2}{m^2-1} |2m\sqrt{2}\sqrt{1+m^2} - 1 - 3m^2| =
\end{aligned}$$

(si vede facilmente che, per $m>1$, la quantità in valore assoluto è sempre negativa)

$$= \frac{2r^2}{m^2-1} (3m^2+1-2m\sqrt{2}\sqrt{1+m^2}).$$

Quindi, l'area in comune tra quadrato e triangolo vale:

$$A_{comune} = A_{MNBCD} - 2A_{HJD} = r^2(1+2\sqrt{2}) - \frac{2r^2}{m^2-1} (3m^2+1-2m\sqrt{2}\sqrt{1+m^2})$$

Chiaramente se m tende a 1, il secondo termine della somma tende a 0. Infatti:

$$\lim_{m \rightarrow 1} 2r^2 \frac{3m^2+1-2m\sqrt{2}\sqrt{1+m^2}}{m^2-1} = 2r^2 \lim_{m \rightarrow 1} \frac{6m-2\sqrt{2}\sqrt{1+m^2} - \frac{2m\sqrt{2}}{\sqrt{1+m^2}}}{2m} = 0$$

(Cioè si torna al caso precedente $m=1$).

Per vedere se esistono minimi per l'area comune, dovremmo derivare l'espressione ottenuta sopra. Ho verificato, sviluppando i calcoli, che la derivata non si annulla mai per $m>1$. Quindi non esistono punti di minimo relativo.

Se m tende all'infinito, si ottiene:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} 2r^2 \frac{3m^2+1-2m\sqrt{2}\sqrt{1+m^2}}{m^2-1} = 2r^2 \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{6m-2\sqrt{2}\sqrt{1+m^2} - \frac{2m^2\sqrt{2}}{\sqrt{1+m^2}}}{2m} = 2r^2(3-2\sqrt{2}).$$

Quindi il valore limite di A_{comune} è:

$$A_{comune} = A_{MNBCD} - 2r^2(3-2\sqrt{2}) = r^2(1+2\sqrt{2}) - 2r^2(3-2\sqrt{2}) = r^2(6\sqrt{2}-5)$$

Siamo, al limite, all'82,8% rispetto all'area del quadrato.

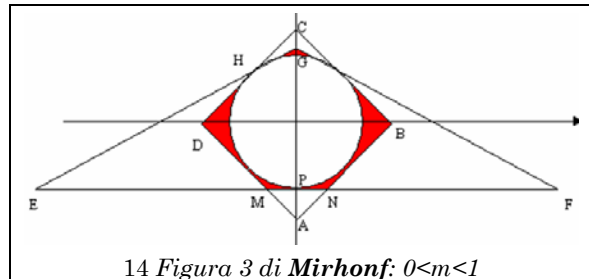
Caso 2: $0 < m < 1$.

L'area della parte comune è pari all'area del poligono MNBCD (1) meno 2 volte l'area del triangolo HCG.

Coordinate di: $G(0; r\sqrt{1+m^2})$ e $C(0; r\sqrt{2})$.

L'area del triangolo HCG vale:

$$A_{HCG} = \left| \begin{vmatrix} r\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+m^2}}{m-1} & r\frac{m\sqrt{2}-\sqrt{1+m^2}}{m-1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & r\sqrt{1+m^2} & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \sqrt{2}r^2 \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+m^2}}{m-1} - r^2\sqrt{1+m^2} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+m^2}}{m-1} \right| =$$



$$= \frac{1}{2} r^2 \left| \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1+m^2}}{m-1} (\sqrt{2} - \sqrt{1+m^2}) \right| = \frac{1}{2} r^2 \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{1+m^2})^2}{|m-1|} = \frac{1}{2} r^2 \frac{2+1+m^2-2\sqrt{2}\sqrt{1+m^2}}{1-m}$$

Da cui:

$$A_{comune} = A_{MNBCD} - 2A_{HCG} = r^2(1+2\sqrt{2}) - r^2 \frac{3+m^2-2\sqrt{2}\sqrt{1+m^2}}{1-m}$$

Vi risparmio i passaggi circa il calcolo della derivata di questa espressione, perché lunghi, anche se semplici. Vi assicuro che essa si annulla per $m = (2 - \sqrt{3})$. In corrispondenza di questo valore $A_{comune} \approx 3,63r^2$, circa il 90,8% rispetto all'area del quadrato.

Se m tende a 1, ci aspettiamo che il secondo termine della somma di A_{comune} si annulli. Infatti

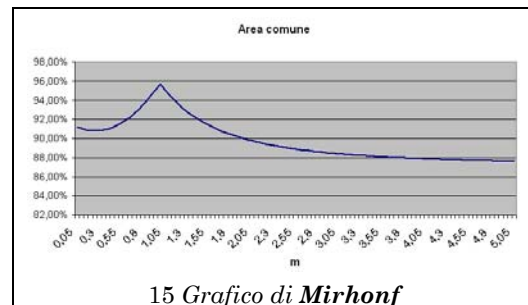
$$\lim_{m \rightarrow 1} \frac{3+m^2-2\sqrt{2}\sqrt{1+m^2}}{1-m} = \lim_{m \rightarrow 1} \frac{2m-2\sqrt{2} \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}}{-1} = 0.$$

Se m tende a 0: $\lim_{m \rightarrow 0} \frac{3+m^2-2\sqrt{2}\sqrt{1+m^2}}{1-m} = 3-2\sqrt{2}$, quindi

$$\lim_{m \rightarrow 0} A_{comune} = r^2(1+2\sqrt{2}) - r^2(3-2\sqrt{2}) = r^2(4\sqrt{2}-2) = 2r^2(2\sqrt{2}-1)$$

Riporto di seguito il grafico che ritrae il valore dell'area comune, espresso in percentuale rispetto all'area del quadrato, in funzione di m .

Per minimizzare l'area comune a quadrato e triangolo, dovremmo scegliere un valore di m il più grande possibile. Con questa scelta, l'ascissa di E tende a $-r$, quella di F ad r . Il



problema è l'ordinata di G. $y_G = r\sqrt{1+m^2}$ che per m molto grande diventa $y_G \approx mr$.

Ora, quanto è grande il giardino di Doc, da cui siamo partiti?

Mi pare che il raggio del cerchio fosse di 10 metri. Se già scegliessimo $m=5$, il vertice del triangolo disterebbe circa 50 metri dal centro del cerchio...

La parte da piastrellare in rosso, in realtà è pari alla parte comune di quadrato e triangolo circoscritti al cerchio, tranne, chiaramente, la parte già piastrellata di bianco (cerchio).

$$A_{rossa} = A_{comune} - A_{cerchio}$$

Poiché il secondo termine è costante, il discorso qualitativamente non cambia. Quantitativamente, si ha che, con raggio 10 metri, nel caso della soluzione della scorsa volta l'area pavimentata di rosso varrebbe:

$$A_{rossa} = 2r^2(2\sqrt{2}-1) - \pi r^2 \approx 51,5 \text{ (risultato espresso in metri quadrati).}$$

Scegliendo $m=5$, ad esempio, $A_{rossa} \approx 36,6$ metri quadrati.

Se potessimo scegliere $m=100$, G si sposterebbe a 1 km dal centro del cerchio e $A_{rossa} \approx 34,374$ metri quadrati.

Se potessimo spostare G all'infinito, non guadagneremmo proprio niente: $A_{rossa} \approx 34,369$ metri quadrati.

E nel frattempo **Camillo** ci ha scritto per lamentarsi che la sua, di soluzione, non l'abbiamo nemmeno menzionata... beh, l'avevamo persa, ovvio. Per fortuna ce l'ha inviata corredata da una serie di bei disegni!

Il disegno dove l'area comune maggiore è quello (forse sarebbe meglio dire quelli perché sono 3) dove un lato del quadrato coincide con un lato del triangolo equilatero. Facendo ruotare il nostro quadrato sul triangolo esattamente 15 gradi dopo troviamo il disegno con l'area comune minore in coincidenza con la diagonale che si sovrappone all'altezza del triangolo. È inutile proseguire con la rotazione perché i disegni possibili continuerebbero a ripetersi.

Per calcolare queste aree comuni è meglio considerare le 2 o 3 aree triangolari che stanno fuori dal perimetro del triangolo e poi sottrarle a quello che sta dentro.

Considerando che l'altezza del triangolo equilatero ADE è uguale al raggio del cerchio il suo lato è ricavato dalla formula²⁰: $2\sqrt{3}r/3$. Per cui il lato $FD=EH$ è il raggio meno il lato $DE/2$. Per trovare l'altezza $FG=HJ$ è sufficiente applicare la formula: $FD \cdot \tan(60^\circ)$. Ora l'area dei 2 triangoli esterni $DFG=EHJ$ insieme è $FD \cdot FG$. Che toglieremo dall'area del quadrato assieme a quella del cerchio:

$$4r^2 - (FD \cdot FG + \pi r^2)$$

ed avremo l'area più grande che Doc piastrellerà di rosso, 54,900627 metri quadrati.

Per l'area minima da piastrellare in rosso le cose sono leggermente più complicate.

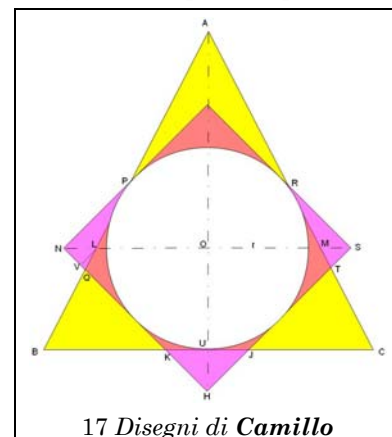
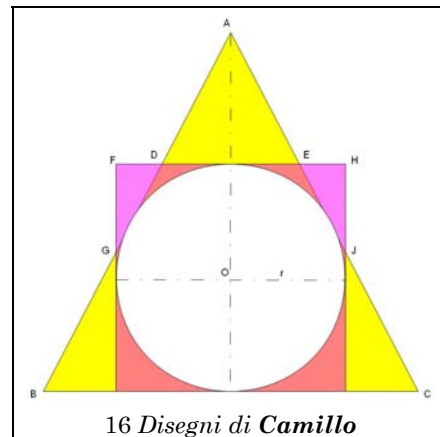
Una cosa semplice è calcolare l'area del triangolo rettangolo-isocele JHK, col teorema di Pitagora calcolo la sua altezza UH: $\sqrt{r^2 + r^2} - r$, questo al quadrato dà l'area.

Per i 2 triangoli molto acuti ai lati si comincia col calcolare il lato $NL=MS$ per fare questo dalla semidiagonale del quadrato si toglie metà del lato del triangolo equilatero ALM:

$$\sqrt{r^2 + r^2} - 2\sqrt{3} \cdot r/3.$$

Saputo questo è facile calcolare i lati $NV=VL$ del triangolo rettangolo-isocele: $\sqrt{NL^2/2}$ e la formula: $VL \cdot \tan(15^\circ)$ permette di calcolare VQ che sommato a NV dà il lato NQ.

Per similitudine si calcola NP, con la proporzione: $VL:VQ=x:NQ$, il risultato moltiplicato per NQ dà l'area dei due triangoli ai lati.



²⁰ Le formule le abbiamo scritte a modo nostro, ogni errore è probabilmente da imputare a me (AR).

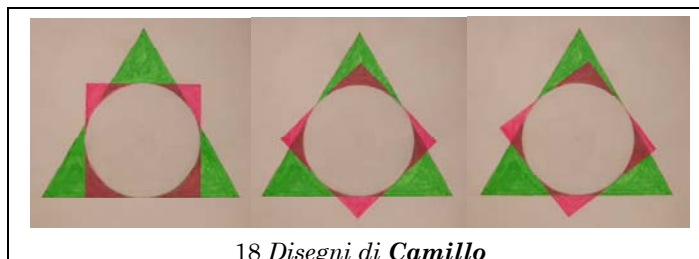
Come fatto più sopra tolgo dall'area del quadrato quella del cerchio e quella di questi 3 triangoli:

$$4r^2 - (UH \cdot UH + NP \cdot NQ + \pi r^2)$$

ed ottengo l'area minima da piastrellare, 48,479344 metri quadrati.

Ma alla fin fine, anche se sembra la figura più logica, chi ha mai detto che il triangolo debba essere equilatero?

Allego un paio di disegni e le fotografie che allegai la volta precedente, sembrano disegni ma sono foto di un doppio disegno che può ruotare. Volevo colorarlo con del giallo e del magenta che per sintesi sottrattiva avrebbe prodotto il rosso delle piastrelle dell'area comune. Il giallo a mia disposizione non è abbastanza intenso ed il rosso prodotto non avrebbe sufficiente contrasto.



18 Disegni di **Camillo**

La “Camillesca soluzione” ci è molto piaciuta, soprattutto le foto dell'esperimento di rotazione. Perfetto, andiamo avanti.

4.2.2 Problema impossibile dal Luogo del Divano Quantistico

Anche il secondo quesito di ottobre aveva a che fare con giardini ed alberi:

Un amico ci mostra il progetto della nuova casa con il terreno annesso. Si tratta di un triangolo i cui lati sono tre strade di lunghezza 850, 1000 e 1200 metri.

L'idea del nostro amico è di costruire la casa in un punto e poi tracciare le vie più brevi per raggiungere ciascuna delle tre strade dalla casa e, alla fine, unire i tre punti di incrocio tra di loro con dei filari di alberi: inoltre richiedeva che gli alberi fossero a cinque metri uno dall'altro e che ce ne fossero lo stesso numero su ogni lato. Quanti alberi deve comprare?

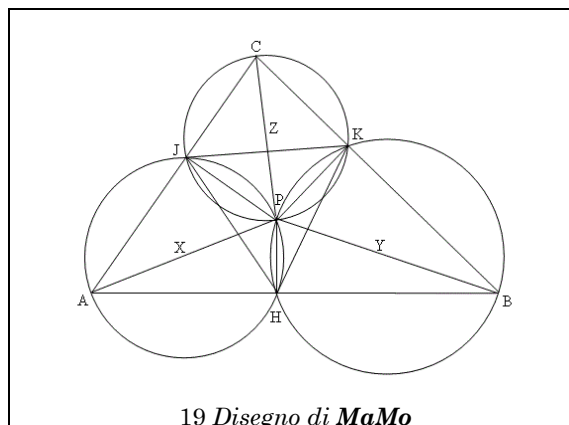
L'altra volta avevamo riportato i pensieri di **Camillo**, vediamo ora cosa ci scrive **MaMo**:

Ho letto la soluzione di Camillo e mi sembra sia sbagliata in quanto i punti di tangenza del cerchio inscritto nel triangolo non coincidono con i vertici del triangolo equilatero inscritto in esso. Ecco la mia soluzione.

Indichiamo con P il punto interno al triangolo che corrisponde alla posizione della casa e da esso tracciamo i tre segmenti perpendicolari ai lati del triangolo. Unendo i loro estremi si ottiene il triangolo equilatero cercato. Sia L la misura dei suoi lati.

Il triangolo viene diviso dai tre segmenti PH, PK, PJ in tre quadrilateri ciclici avendo due angoli opposti retti. Tracciamo le tre circonferenze circoscritte ai quadrilateri e uniamo il punto P con i tre vertici del triangolo. Indichiamo con X, Y, Z tali distanze che rappresentano i diametri dei tre cerchi circoscritti ai tre quadrilateri (vedi figura).

Applicando il teorema della corda alle tre circonferenze possiamo



19 Disegno di **MaMo**

scrivere le relazioni:

$$L = x \sin \hat{BAC} \quad L = y \sin \hat{ABC} \quad L = z \sin \hat{ACB}$$

Indicando con a, b, c i lati del triangolo e con S la sua area possiamo scrivere:

$$\sin \hat{BAC} = \frac{2S}{ab} \quad \sin \hat{ABC} = \frac{2S}{ac} \quad \sin \hat{ACB} = \frac{2S}{bc}$$

Inserendo questi valori nelle relazioni precedenti abbiamo:

$$x = \frac{abL}{2S} \quad y = \frac{acL}{2S} \quad z = \frac{bcL}{2S}$$

Per determinare la quarta relazione necessaria consideriamo i tre triangoli in cui viene diviso il triangolo dai tre segmenti che uniscono il punto P ai vertici del triangolo. Imponendo che la somma delle loro aree sia uguale all'area del triangolo otteniamo l'uguaglianza:

$$S_{ABP} + S_{BCP} + S_{ACP} = S$$

Queste quattro superfici si possono determinare utilizzando la formula di Erone.

Dopo aver inserito i lati dei tre triangoli ho manipolato questa enorme equazione irrazionale con un programma al computer ottenendo la seguente sorprendente soluzione:

$$L = \frac{2\sqrt{2S}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S}}$$

Inserendo i dati del problema si ottiene un valore numerico di 481,2827... m.

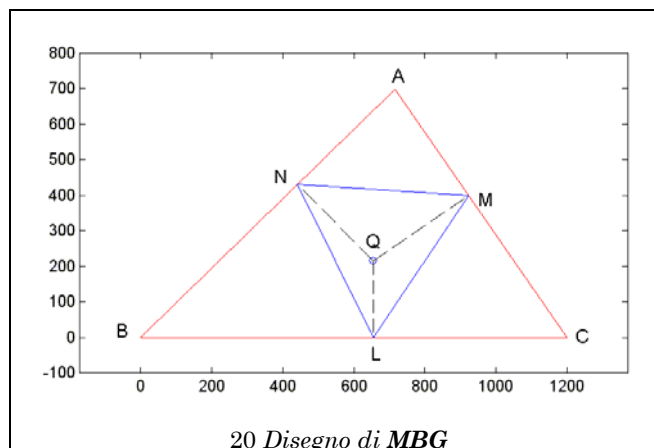
Questa soluzione risolve anche il dubbio di **Camillo** in quanto si può dimostrare che essa corrisponde al triangolo equilatero di lato minimo che ha i vertici posti sui tre lati del triangolo.

Ma non siamo ancora alla fine! **MBG** ci scrive:

C'è qualcosa che non mi torna in questo problema. Credo di aver sbagliato qualcosa ma non riesco a capire dove. Comincio a spiegarvi il mio procedimento.

Non trovando metodi più eleganti, sono partito in modo totalmente analitico, andando a tracciare in un piano cartesiano il triangolo che rappresenta il terreno; al suo interno ho definito un punto generico $Q(x,y)$ per la posizione della casa, da cui ricavo un bel sistema di equazioni che risolte mi danno la posizione di Q che soddisfa le condizioni date.

Il tutto dovrebbe essere rappresentato dalla figura qui sotto. I tre vertici del terreno triangolare io li ho piazzati in $B(0,0)$, $C(1200,0)$ e A che va a finire intorno a $(715.6, 698.5)$, essendo questa una delle disposizioni più comode per fare i calcoli. Naturalmente il risultato non cambia se volete complicarvi la vita con un altro orientamento del



triangolo.

Avendo le equazioni delle rette passanti per lati AB, BC, e CA, ricavo in modo abbastanza semplice le coordinate dei punti L,M e N in funzione di xq e yq con un'arcinota formuletta.

Impongo quindi che i tre lati del triangolo interno siano uguali e pari a un multiplo di 5, ovvero $LM=MN=LN=5n$.

Non sto a riportare le chilometriche equazioni che ne derivano: andate sulla fiducia, oppure riscrivetele voi. Risolvere questo sistema sembrerebbe un compito impossibile, ma in effetti alcuni dei termini più infami si semplificano (cosa che mi fa supporre che esista una via più facile per arrivare alla soluzione) e alla fine me la cavo con una semplice equazione di secondo grado.

Una delle soluzioni è fuori dal terreno (credo che sia la casa abusiva del vicino rompiscatole; sarà bene denunciarlo all'autorità competente quanto prima, visto che si parla di nuovi condoni...), l'altra mi dà la posizione di Q circa a (655, 214).

Ho messo il tutto in un foglio Excel per fare i conti, cosa che tra l'altro mi permette di verificare facilmente che il risultato è invariante se cambio la posizione del triangolo nel piano: cambiano le coordinate ma il triangolo LMN è sempre uguale.

Però qui sono sorti i miei dubbi.

Prima di tutto, per risolvere il problema non faccio assolutamente uso della condizione che gli alberi siano a 5 metri di distanza: nelle equazioni ho scritto che la lunghezza di ognuno dei 3 filari di n alberi sia pari a $5n$, ma in pratica impongo semplicemente che i 3 filari abbiano la stessa lunghezza. Infatti sostanzialmente il sistema di equazioni che risolvo è $LM=MN$ e $MN=LN$. Avendo solo due incognite non mi serve altro.

In secondo luogo, trovo che i tre filari risultano lunghi 481 metri e spiccioli, per cui in effetti non riuscirei a piantare gli alberi con la regolarità voluta.

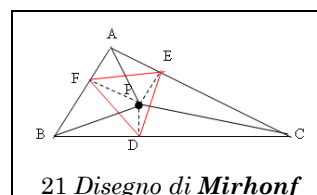
Sperando di non aver sbagliato qualcosa nell'interpretazione del problema, accampo queste ipotesi a sostegno della mia versione:

- piantando degli alberi con il tronco di un adeguato diametro D e considerando la distanza di 5m fra i tronchi e non dal centro degli stessi, i conti tornano.
- essendo la casa non puntiforme ma con un'area finita che valuto di almeno 100mq, le piccole variazioni che si avranno nel tracciamento delle strade e annessi filari, possono portare effettivamente alla soluzione corretta.
- il nostro amico fisico sa bene che il principio di indeterminazione non ci permette di stabilire con esatta precisione la posizione della casa
- la casa è abusiva come quella del vicino; siccome non si vuole far sapere esattamente dove verrà costruita, sono stati date volutamente delle indicazioni fuorvianti.

Niente male, anche se preoccupante in molti passaggi... Speriamo qualche altro lettore riesca a rispondere. Ci sarebbe ancora la soluzione di **Mirhonf**:

Io ho inteso il problema come quello relativo al calcolo del punto P origine di un triangolo pedale equilatero.

Dato il triangolo ABC, quindi, sono in cerca del punto P, tale che, condotte le perpendicolari da P ai tre lati del triangolo e uniti i tre punti di intersezione, si ottiene il triangolo pedale DEF.



Voglio trovare le condizioni per cui detto triangolo sia equilatero. Per costruzione, i quadrilateri AFPE, BFPD e DPEC sono ciclici (poiché presentano due angoli retti opposti, necessariamente gli altri due angoli opposti devono essere supplementari). Quindi: $EF = AP \sin \alpha$, $FD = BP \sin \beta$, $ED = CP \sin \gamma$ (1)

dove α è l'angolo BAC, β è l'angolo ABC, γ è l'angolo ACB. $EF=FD=ED$ implica, applicando il teorema dei seni, denotando $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$,

$$\frac{AP}{BP} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{b}{a} \quad (2)$$

$$\frac{AP}{CP} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{c}{a} \quad (3)$$

$$\frac{BP}{CP} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{c}{b} \quad (4).$$

Nel caso del nostro amico, $a=1200$, $b=1000$, $c=850$. Pongo $BP=d$. Dalla (2)

$$AP = \frac{1000}{1200}d = \frac{5}{6}d. \text{ Dalla (4) } CP = \frac{1000}{850}d = \frac{20}{17}d.$$

Considerando un sistema di assi cartesiani avente origine in B(0;0), le coordinate di C sono (1200;0); calcolo le coordinate di A imponendo pari a 850 e 1000 le distanze dai vertici B e C. $A\left(\frac{3875}{8}; \frac{75}{8}\sqrt{5551}\right)$. L'area del triangolo ABC è A:

$$A = \frac{1200 \cdot \frac{75}{8}\sqrt{5551}}{2} = 5625\sqrt{5551}.$$

Detta A_1 l'area del triangolo BPC, A_2 l'area del triangolo APC, A_3 l'area del triangolo APB, risulta $A = A_1 + A_2 + A_3$. Applico la formula di Erone al triangolo BPD.

$$p_1 = \frac{1}{2}\left(1200 + d + \frac{20}{17}d\right) = 600 + \frac{37}{34}d$$

$$A_1 = \sqrt{p_1(p_1 - 1200)(p_1 - d)\left(p_1 - \frac{20}{17}d\right)} = \sqrt{\left[\left(\frac{37}{34}d\right)^2 - 600^2\right]\left[600^2 - \left(\frac{3}{34}d\right)^2\right]}.$$

Applico la formula di Erone al triangolo APB.

$$p_2 = 425 + \frac{11}{12}d$$

$$A_2 = \sqrt{\left[\left(\frac{11}{12}d\right)^2 - 425^2\right]\left[425^2 - \left(\frac{d}{12}\right)^2\right]}.$$

Applico la formula di Erone al triangolo BPC.

$$p_3 = 500 + \frac{205}{204}d$$

$$A_3 = \sqrt{\left[\left(\frac{205}{204}d\right)^2 - 500^2\right]\left[500^2 - \left(\frac{35}{204}d\right)^2\right]}.$$

Per calcolare d , risolvo l'equazione $A = A_1 + A_2 + A_3$. Ho risolto numericamente questa equazione, trovando $d \approx 585,68258188877$. Se P ha coordinate generiche (x;y) si ha che:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = d^2 \\ (1200 - x)^2 + y^2 = \left(\frac{20}{17}d\right)^2 \end{cases}$$

Sviluppando il quadrato nella seconda equazione e sostituendo la prima nella seconda, si ottiene:

$$1200^2 - 2400x + d^2 = \frac{400}{289}d^2 \Rightarrow x = 600 - \frac{111}{693600}d^2 \approx 545,1042768$$

$$y = \sqrt{d^2 - x^2} \approx 214,2088097.$$

Quindi, le coordinate del punto P sono (545,1042768;214,2088097). Ora, per calcolare il lato del triangolo equilatero DEF, devo trovare il valore di $\sin\beta$.

Applicando il teorema di Carnot, si ha che:

$$1000^2 = 850^2 + 1200^2 - 2 \cdot 850 \cdot 1200 \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{1200^2 + 850^2 - 1000^2}{2 \cdot 1200 \cdot 850}$$

$$\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} \approx 0,821747.$$

Dalla (1), $FD = BP \sin\beta = d \sin\beta \approx 481,2827$ metri (lato del triangolo DEF).

Per coprire un lato di circa 481 metri, piantando un albero ogni 5 metri, c'è bisogno di 96 alberi. Per coprire tutto il perimetro del triangolo c'è bisogno di **288 alberi**.

E qui ci fermiamo, ch  dobbiamo ancora partire con le soluzioni di novembre!

4.3 [154]

4.3.1 Quando si dice “Andarsela a cercare”

Velocissimi, c'  tanto da dire. Il problema proposto dal Capo:

Il teorema di Mascheroni dice che: “Qualsiasi cosa costruibile con riga e compasso,   costruibile con il solo compasso”. Bene, come si fa, dato il segmento AB, a bisecarlo con l'uso del solo compasso?

  in realt  un vero classico: lo stesso Mascheroni, come ci hanno ricordato parecchi nelle loro risposte, ha risposto alla domanda. **Zar** ci ha anche fatto sapere che il tomone di Mascheroni   scaricabile da http://www.geogebraitalia.org/pdf/libro_mascheroni.pdf, come ci si pu  immaginare alcune soluzioni includevano l'esercizio svolto in geogebra, ma noi non ve li passiamo cos  ci provate pure voi.

Comunque in tanti ci hanno mandato soluzioni scherzose, come **Martino**:

In questo caso basta aprire completamente il compasso appoggiandolo sul foglio sino a quando i due bracci non appartengono alla stessa retta, l'uno sul prolungamento dell'altro, in questo caso i due estremi del compasso sono i due punti A e B estremi del segmento ed il perno il punto medio cercato (a meno di un fattore di scala ovviamente).

Beh, non si pu  fare, visto che il compasso   un compasso alla greca, di quelli cio  che si chiudono da soli quando li alzi dal foglio, e non c'  scritto da nessuna parte che i due bracci debbano essere uguali, ma fa sempre piacere ricevere nuove dal nostro **Martino**. Vediamo cosa ha scritto **Gabriel**:

Punto il compasso su un estremo del segmento AB da bisecare e traccio un arco di cerchio oltre la met  del segmento, faccio la stessa cosa all'altra estremit  del

segmento, poi punto il compasso su uno dei punti di incontro dei due archi testé tracciati e traccio un terzo arco di cerchio tangente al segmento.

Il punto di tangenza si trova a metà del segmento.

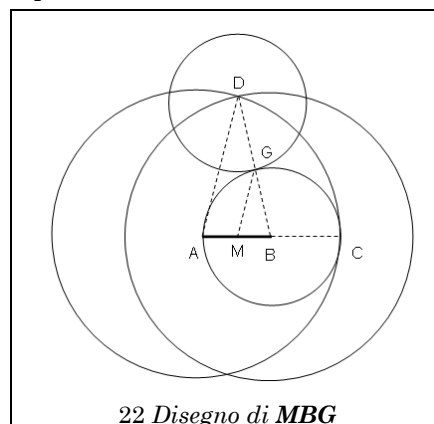
Va bene, d'accordo, come sistema è decisamente molto poco pulito, ma mi è venuto in mente forse perché nel paraphernalia si parla proprio di tangenti.

Anche questo sistema non rispetta le regole, ma vediamo una costruzione quasi approvabile, questa volta da parte di **MBG**:

Ecco la mia costruzione geometrica per il problema della bisezione del segmento senza riga. Ho fatto un minimo di disegno esplicativo (abbastanza orrendo, a dir la verità) che dovrebbe essere finito da qualche parte qui sotto.

Sia AB il segmento da bisecare. Assumiamo $AB=1$. Traccio il cerchio con centro in B e raggio AB e chiamo C il punto diametralmente opposto a A .

Come lo trovo senza la riga? Semplice, basta partire da A e riportare tre volte il raggio sulla circonferenza. [Alternativamente posso trovare C tracciando anche il cerchio con centro in A , i due cerchi si intersecano nei punti E e F e si trovano sull'asse di AB . Tracciando i due cerchi con centri in E e F e raggio EF , il punto di intersezione a destra di B mi individua C]



22 Disegno di **MBG**

Tutto questo mi serve solo per avere un segmento $AC=2AB$. Traccio ora i cerchi con centro in A e B e raggio AC . Chiamiamo D uno dei punti di intersezione, prendiamo ad esempio quello in alto.

Tracciamo i due cerchi con centri in A e in D e raggio $AB=1$. Essendo $BD=2$ per costruzione, i due cerchi sono tangenti in un punto G .

Contenti di aver trovato il punto G , lo siamo ancora di più scoprendo che tracciando il cerchio con raggio AB e centro in G , questo interseca il segmento AB nel punto medio M . Se non ci credete, andate a comprarvi la fatidica riga, tracciate i triangoli ABD e MBG ²¹ e la cosa dovrebbe essere abbastanza chiara.

Se non ricordo male il compasso in senso euclideo dovrebbe essere tale che si chiude quando lo sollevo dal foglio e quindi non mi permette di riportare i raggi con questa agilità. Lascio a voi la costruzione geometrica per rifare tutto con siffatto compasso.

Ebbene sì, **MBG** si è stufato subito del compasso classico. **Camillo** invece ci scrive:

Ma l'asta del compasso usata come riga è una riga e quindi non è usabile. Però una matita usata come matita e non come riga è usabile anche senza necessità di smontare la mina dal compasso, altrimenti come faccio a tracciare il segmento AB .

Ma le pieghe nella carta, un pezzo di filo da cucito, un elastico sono righe?

A) Dalla "geometria dell'origami" ma anche senza scomodarlo con le prime 2 pieghe che facevo quando costruivo aeroplanini di carta bisecavo vicendevolmente due segmenti tracciati dalla piega cartacea.

²¹ Noto ora che sono riuscito anche ad autocitarmi in un triangolo! Giuro che non è stato voluto.

B) Se disegno il metodo classico per bisecare un segmento e dai 2 punti di incrocio degli archi tendo un filo da cucire fissandolo con del nastro adesivo ho bisecato il segmento.

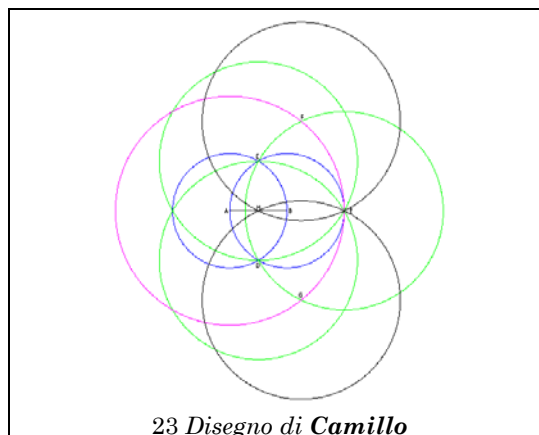
C) Come B) ma piantando 2 spilli negli incroci e poi vi tendo un elastico nello spazio interno all'elastico teso posso disegnare la bisecazione.

D) Metodo per approssimazioni successive. Col solito metodo classico traccio gli incroci e poi continuo stringendo il compasso fino a trovare il punto voluto.

E) Naturalmente non è quanto descritto sopra quello che il GC vuole per cui passo al vero metodo.

È più conosciuto come teorema di Mohr-Mascheroni ma il nostro campanilismo prevale. Premesso che nella ragnatela si trova parecchio materiale e il metodo descritto non è mia farina ma il disegno a colori sì.

Metodo che non riportiamo, ovvio, ma il disegno sì, anche se piccolo, perché della prossima soluzione, quella di **Beppe GIM**, vi forniamo solo il testo, e niente figura:



23 Disegno di Camillo

Questo problema si risolve conoscendo che cosa è “l’inversione di un punto rispetto ad una circonferenza”, che è un tipo di trasformazione geometrica nel piano.

Dato un cerchio $C(O, r)$, e tracciata una semiretta da O , sia P un punto della semiretta, che può essere sia esterno che interno alla circonferenza.

Si dice “inverso di P ” rispetto a C un altro punto P' , giacente sulla semiretta, tale che:

$$OP \cdot OP' = r^2 \quad (1)$$

I punti della circonferenza sono punti uniti, cioè si trasformano in sé stessi. I punti interni alla circonferenza si trasformano in punti esterni, e viceversa. Questa si potrebbe considerare una “riflessione circolare” rispetto alla circonferenza.

Se P si avvicina ad O , il suo inverso P' si allontana verso l'infinito. Si può dire che il centro O ha come inverso il “punto all'infinito” sulla semiretta.

Ci interessa vedere come si fa a costruire il punto inverso di un punto P esterno a $C(O, r)$ col solo compasso.

Con centro in P , e raggio pari a PO , si interseca C in due punti H e K . Con centro in H e raggio $HO = r$, si disegna un archetto; con centro in K e ugual raggio $KO = r$ si disegna un altro archetto, che interseca il precedente nel punto P' .

È facile vedere che P' così ottenuto è l'inverso di P . Infatti, essendo $PO = PH$, il triangolo OPH è isoscele su base OH . Essendo $OH = HP' = r$, anche il triangolo OHP' è isoscele, su base OP' . I due triangoli isosceli hanno uguali angoli alla base, cioè sono simili. Perciò si può scrivere:

$$OP/OH = OH/OP' \quad (2)$$

$$\text{e cioè: } OP \cdot OP' = OH^2 = r^2 \quad (3)$$

che non è altro che la (1).

Ora che sappiamo costruire l'inverso di un punto P esterno a C , utilizziamo la costruzione per dividere un segmento dato AB in due parti uguali, cioè trovarne il

punto medio. Con centro in B, tracciamo la circonferenza di raggio BA, che ovviamente passa per A. A partire da A, riportiamo tre volte il raggio AB su questa circonferenza, fino a determinare il punto D, che sarà allineato con A e B, e a distanza $BD = BA$. Insomma, AD è un diametro di tale circonferenza: $AD = 2 AB$.

Ora, con centro in A e raggio sempre uguale ad AB, tracciamo una seconda circonferenza, che passa per B. Il punto D', inverso di D rispetto a quest'ultima, divide a metà il segmento AB. Infatti si ha:

$$AD \cdot AD' = AB^2, \text{ cioè: } 2 AB \cdot AD' = AB^2, \text{ da cui: } AD' = AB/2 \text{ cvd.}$$

Capito tutto? Fate le prove con Geogebra, **Beppe** le sue ce le ha mandate, ma noi ce le teniamo strette. Andiamo avanti.

4.3.2 Ripetizioni!

Come si fa a rendere questo problema in fretta? Non si può, accidenti. Vediamo un po', aveva due parti, la prima più o meno così:

Presi i numeri da 1 a 9, è possibile riscrivere gli stessi in disordine sotto i primi in modo che nessun numero sia ripetuto e la somma di ogni colonna è un quadrato perfetto:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\ 8 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 9 & 1 & 7 & \end{array}$$

È un caso, o la cosa si può fare anche in altri casi?

La seconda parte, invece, coinvolgeva un passatempo:

Scrivo i numeri da 1 a n, in disordine; nella seconda riga, scrivi quanti numeri sono strettamente minori del numero al piano di sopra e situati alla sua destra (guardando). Nella terza riga, fai la stessa operazione ma sulla seconda riga, e avanti così. Fermati quando hai una riga tutta di zeri. Come conviene scrivere i numeri per dover scrivere il massimo numero di righe?

Anche qui, risposte ne sono arrivate, ma solo sulla prima parte. Vediamo prima quella di **Mirholf**, molto prolifico questo mese:

Ho cominciato a trovare qualche soluzione a mano... per valori di n piccoli. Ho trovato subito che per $n = 1, 2, 4, 6, 7$ e 11 non è possibile. Per gli altri n ho sempre trovato soluzioni sino a $n = 20$, quando è diventato più lungo trovare una soluzione.

Allora ho scritto un programmino per la ricerca della soluzione tramite PC. Bene... Per qualsiasi n ho trovato sempre soluzioni, anzi, più n diventa grande, più soluzioni si trovano. Quindi mi aspetto che, per n diverso dai suddetti valori, sia sempre possibile riscrivere i primi n numeri in ordine diverso, senza ripetizioni in modo tale che

$$i + x_i = k^2$$

$$i = 1, 2, \dots, n;$$

$$x_i = 1, 2, \dots, n;$$

$$k \text{ appartenente a } N \text{ tale che } k^2 < 2n.$$

Qui il Nostro ci fornisce anche un esempio ($n=147$), che vi risparmiemo. Non vi risparmiemo, però, la bella soluzione di **trentatre**:

Problema: trovare una permutazione $P = \begin{pmatrix} a & b & \dots & n \\ a' & b' & \dots & n' \end{pmatrix}$ dei numeri $(1, 2, \dots, N)$ tale che $a+a', b+b', \dots, n+n'$ siano tutti quadrati. Per quali N è possibile?

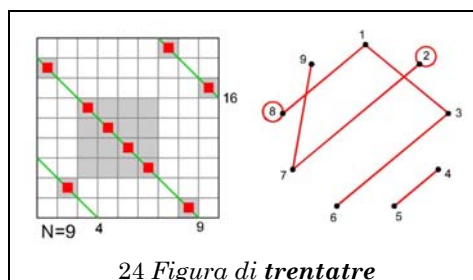
La permutazione P si può rappresentare con i suoi *cicli*; la soluzione citata nel problema per $N=9$ è $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 9 & 1 & 7 \end{pmatrix} \equiv (1,8)(2)(3,6)(4,5)(7,9)$.

Le colonne della permutazione (p. es. 1/8) vanno intese come ordinate ciclicamente: il ciclo (a) indica a/a , (a, b) indica le due colonne a/b e b/a , (a,b,c) indica le tre colonne a/b , b/c , c/a ecc.

Indichiamo una soluzione per N con S_N , e per ogni S_N disegniamo ogni coppia a/b della permutazione come una casella occupata in una scacchiera quadrata di lato N . Il passaggio dalla permutazione alla scacchiera – e viceversa – è immediato. Poiché ogni coppia compare solo una volta, il problema consiste nel trovare una distribuzione sulla scacchiera di N torri (quelle degli scacchi) che non si attaccano fra di loro, e vincolate a un certo insieme di caselle.

La figura riporta il caso $N=9$, con quadrati rossi: coppie a/b ; righe verdi: i vincoli $a+b = m^2$; quadrati grigi: gruppi di caselle adiacenti.

A destra è riportato il grafo delle connessioni “quadratiche” fra i numeri $1\dots N$.



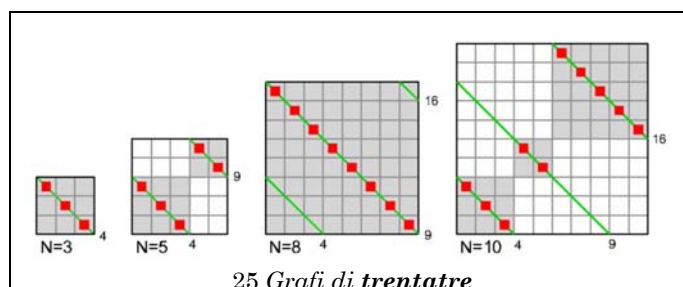
24 Figura di trentatre

I punti 2 e 8 presentano un cappio:

corrispondono ai cicli unitari (2) e (8) ; ogni ciclo unitario (a) , per la $a+a=m^2$, è un *semi-quadrato* (cioè 2, 8, 18, 32...).

Nella permutazione ogni numero compare due volte (in alto e in basso): i rami che legano a e b corrispondono a due frecce in direzione opposta. Una soluzione è data da un insieme di percorsi che tocca tutti i nodi una sola volta in entrata e una in uscita.

Oltre al ciclo $(4,5)$ i nodi terminali 6, 9 obbligano i cicli $(3,6)$ e $(7,9)$; tolti questi nodi e tutti i loro collegamenti, con i nodi restanti si possono formare soltanto i cicli (2) e $(1,8)$. $N=9$ ammette una e soltanto una soluzione.



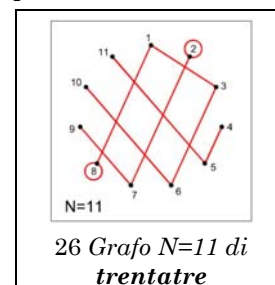
25 Grafi di trentatre

Con l'aiuto dei grafi si possono trovare le S_N per N abbastanza piccolo; nel disegno i primi casi.

Non esistono soluzioni per $N=4, 6, 7, 11$. P. es. il grafo $N=11$ è qui sotto.

I nodi terminali 9,10,11 obbligano i cicli $(7,9)$, $(6,10)$, $(5,11)$; fra i nodi restanti 4 è isolato (senza rami) e non può formare una coppia: non esistono S_{11} . In generale la soluzione è impossibile se esiste un percorso aperto con un numero pari di lati e senza cappi.

$N=14$ è il primo caso che presenta due soluzioni diverse (che non disegno). $N=15$ ha due soluzioni *simmetriche* (S) e una *non-simmetrica* (NS). Una soluzione NS si può disegnare ribaltata rispetto alla diagonale; le figure sono diverse ma la soluzione è unica.



26 Grafo $N=11$ di trentatre

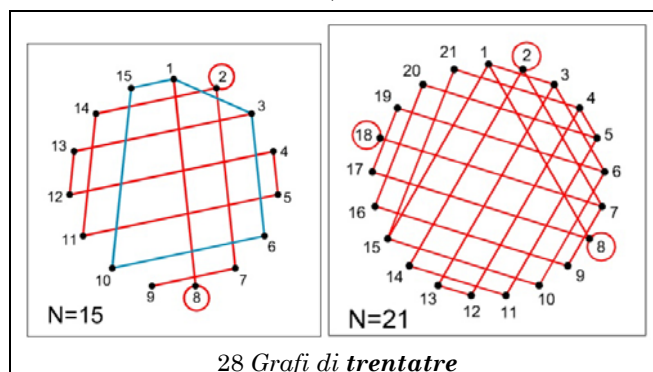
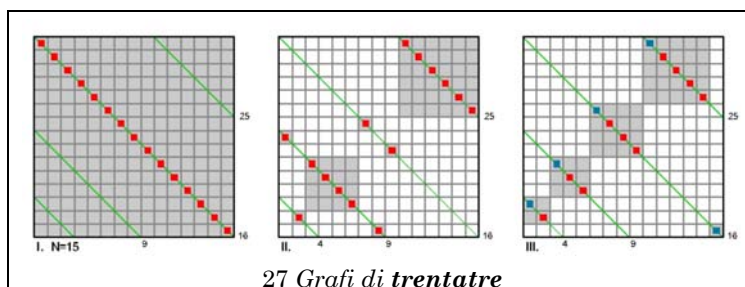
Il grafo $N=15$ (a sinistra) evidenzia la soluzione non simmetrica.

Il circuito (in blu) consente di costruire il ciclo (1,3,6,10,15); i nodi restanti sono su un unico percorso (da

9 a 13) di 8 segmenti: va spezzato con (2) e gli altri cicli – di ordine 2 – seguono. Se si percorre il circuito in senso inverso si ottiene la scacchiera ribaltata (nella scacchiera III. le caselle corrispondenti al ciclo sono in blu).

In generale le soluzioni simmetriche S hanno tutti i cicli di ordine 1 (i *semi-quadrati*) oppure 2, le soluzioni non-simmetriche NS hanno almeno un ciclo di lunghezza ≥ 5 .

Nel ciclo (1,3,6,10,15) la somma di due numeri adiacenti (inclusi il primo e l'ultimo) è un quadrato; è il ciclo più breve di questo tipo.



Se un ciclo è presente nel grafo N è presente anche nei grafi con N maggiore e – nella stessa posizione – negli schemi delle soluzioni; quindi tutte le S_N con $N > 15$ possono avere forme NS .

Le soluzioni NS diventano presto preponderanti. P.es. $N=21$ ha 10 soluzioni S e ben 28 NS , dovute ai 5 cicli (1,3,6,10,15), (1,3,6,19,17,8), (1,3,13,12,4,21,15), (2,7,9,16,20,5,11,14), (1,3,13,12,4,21,15,10,6,19,17,8) presenti nel grafo (v. figura). Una soluzione è composta degli ultimi due cicli, con aggiunto soltanto (18). E' abbastanza sorprendente come dal grafo, in fondo semplice (21 nodi e 27 rami), si possano ricavare 38 soluzioni diverse.

Osservando i casi $N = 3, 8, 15$ è evidente che esiste una soluzione data dalla permutazione inversa dove tutte le colonne a/b hanno la stessa somma $a+b=m^2$.

Per ogni $N = m^2 - 1$ esiste una soluzione *semplice* composta da un unico blocco centrato su m^2 .

Data una soluzione per N è possibile costruire altre soluzioni per alcuni valori $N^* > N$; basta aggiungere un blocco di punti centrato su una riga m^2 – v. figura. Deve essere $m^2 = N + N^* + 1 > 2N + 1$.

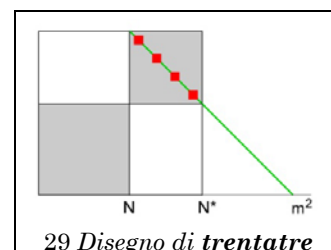
Dalle soluzioni già note si ottengono p.es. le soluzioni *composte*

$N=3$ $N^*=5, 12, 21, 32, 45...$ (5 deriva da 3: v. figura)

$N=5$ $N^*=10, 19, 30, 43...$ (10 deriva da 5 e quindi da 3)

$N=8$ $N^*=16, 27, 40...$

$N=9$ $N^*=15, 26, 39... ecc.$ (15 II deriva da 9)



La trasformazione si può applicare di nuovo ai valori ottenuti.

Le soluzioni *composte* sono costituite dalla S_N iniziale con aggiunti blocchi semplici sulla diagonale del diagramma; indichiamo queste soluzioni con $[N; a, b, \dots]$, dove N sta per una S_N e $a, b, \dots$ sono le dimensioni dei blocchi aggiunti.

Il processo si può invertire. Dato N^* si possono ricavare i valori N da cui N^* deriva; basta imporre la condizione $N^* + 4 \leq m^2 \leq 2N^*$ e la trasformazione diventa $N^* = [N; a]$ con $N = m^2 - N^* - 1$ e $a = 2N^* - m^2 + 1$ (vale la $N^* = N + a$).

Ripetendo il processo a partire dalle soluzioni per $N = 3, 8, 9, 13, 17, 24$ (di cui 3, 8, 24 sono *semplici*) si può costruire una soluzione *composta* per ogni $N \geq 3$, esclusi i casi impossibili. Si ha infatti

$$5 = [3; 2], 10 = [5; 5], 12 = [3; 8], 14 = [10; 4], 15 = [9; 6], 16 = [8; 8]$$

$$18 + k = [17 - k; 2k + 1], \quad k = 0 \dots 5, \quad (m = 6)$$

$$25 + k = [23 - k; 2k + 2], \quad k = 0 \dots 7, \quad (m = 7)$$

$$33 + k = [30 - k; 2k + 3], \quad k = 0 \dots 7, \quad (m = 8) \text{ ecc.}$$

tutti gli $N \geq 25$ derivano dagli $N \geq 16$ senza lacune.

La risposta alla domanda iniziale è pertanto: esiste almeno una soluzione per ogni $N \geq 3$ esclusi i casi impossibili $N = 4, 6, 7, 11$.

Il risultato non sorprende: le soluzioni *composte*, immediatamente costruibili con il processo di cui sopra, sono solo una piccola parte delle soluzioni per N dato. Quanto “piccola” si può verificare con un programma che calcola tutte le soluzioni (cioè verifica tutte le combinazioni di caselle possibili sulla scacchiera). Indicando con $N(S, NS)$ il n° di soluzioni dei diversi tipi si ottiene (dopo $N=30$ il tempo di calcolo diventa proibitivo):

14(2,0); 15(2,1); 16(1,1); 17(0,1); 18(1,2); 19(5,5); 20(5,8); 21(10,28); 22(14,39); 23(9,21); 24(14,65); 25(21,121); 26(31,285); 27(49,642); 28(43,1038); 29(38,1058); 30(39,1075).

E' evidente l'aumento pressoché esponenziale delle soluzioni di tipo NS .

Finiamo quindi in bellezza con soluzioni che pervengono allo stesso risultato, non succede quasi mai tra le nostre pagine. E con questo è tutto, non mi resta che augurarvi le migliori feste possibili e a risentirci i primi di gennaio, con il solito ritardo...

5. Quick & Dirty

Un tale ha 6 pezzi di catena di 5 maglie ciascuno. Decide di portarli dal gioielliere per farli unire in un'unica collana. Il gioielliere gli chiede un compenso di 5 Euro per ogni maglia che apre e chiude. Per cui, realizzare la collana viene a costare 30 Euro. Ma il cliente non è d'accordo. Secondo lui si può spendere meno. Quanto?

6. Pagina 46

Prima parte – Per prima cosa, proviamo che è:

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}.$$

Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} &= \frac{2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&< \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Analogamente si dimostra la seconda parte della disuguaglianza, quindi si ha:

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1.000.000}} &> 1 + 2\left[(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{1.000.001} - \sqrt{1.000.000})\right] \\
&= 1 + 2(\sqrt{1.000.001} - \sqrt{2}) \\
&> 2 \cdot 1.000 - \sqrt{8} + 1 \\
&> 2.000 - 3 + 1 \\
&= 1.998.
\end{aligned}$$

Nello stesso modo:

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1.000.000}} &< 1 + 2\left[(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{1.000.000} - \sqrt{999.999})\right] \\
&= 1 + 2(\sqrt{1.000.000} - 1) \\
&= 1 + 2 \cdot 999 \\
&= 1.999.
\end{aligned}$$

Quindi, la parte intera della somma richiesta è pari a 1.998.

Seconda parte – Con una tecnica simile a quella utilizzata per il punto precedente, si ricava:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{10.000}} + \frac{1}{\sqrt{10.001}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1.000.000}} &> \\
> 2\left[(\sqrt{10.001} - \sqrt{10.000}) + (\sqrt{10.002} - \sqrt{10.001}) + \dots + (\sqrt{1.000.001} - \sqrt{1.000.000})\right] \\
&= 2(\sqrt{1.000.001} - \sqrt{10.000}) \\
&> 2(1.000 - 100) \\
&= 1.800
\end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{10.000}} + \frac{1}{\sqrt{10.001}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1.000.000}} &< \\
< 2\left[(\sqrt{10.000} - \sqrt{9.999}) + (\sqrt{10.001} - \sqrt{10.000}) + \dots + (\sqrt{1.000.000} - \sqrt{999.999})\right] \\
&= 2(\sqrt{1.000.000} - \sqrt{9.999}) \\
&= 2.000 - \sqrt{39.996} \\
&< 2.000 - 199,98 \\
&= 1.800,02
\end{aligned}$$

Quindi, nell'ambito della precisione richiesta, la somma è pari a 1.800.



7. Paraphernalia Mathematica

7.1 DoRé Mi Fa Sol(letico)

Conosco due canzoni: una è “Yankee Doodle”, l'altra no.
James Abram GARFIELD (1831–1881)

Alla tastiera (del computer: è importante, nel seguito), Rudy²².

Il bello degli insiemi almeno parzialmente ordinati è che una certezza l'avete di sicuro: o è dentro, o è fuori (i dubbi nascono sul *dov'è*, se è dentro). Per quanto mi riguarda, ho la certezza di saper suonare la chitarra, ma ho anche la certezza di essere il peggiore nel ramo²³. Il motivo è presto detto: esplorando l'albero genealogico in verticale sino ai miei tre nonni conosciuti, e in orizzontale per tutti gli affini e acquisiti, con un'unica eccezione²⁴, non si conta alcuna persona intonata. Il risultato migliore (test esaustivo sull'intera popolazione) nel dirvi se un suono è più alto di un altro si ha solo se l'intervallo tra i due prende almeno mezza scala: per i molti che ritengono la cosa impossibile, specifico che questo significa accorgersi che le due note sono *diverse*, ma vuol dire non riuscire a decidere quale sia la più alta e quale la più bassa. Seriamente, una volta tanto, vi dico che la cosa è *estremamente* frustrante. Pensate solo al fatto che ogni volta che prendete in mano una chitarra (vostra, tra l'altro) vi serve un amico che ve la accordi.

Come avrete intuito, ho intenzione di parlare di musica. E siete invitati ad andarvi ad ascoltare tutti gli esempi, voi che ci capite (sì, sto piatendo compassione).

Sin da quando Douglas Hofstadter era giovane (parlo dei tempi di “*Gödel, Escher, Bach*”) l'esempio classico è sempre stata l'**Offerta Musicale**: la cosa mi ha sempre lasciato un po' perplesso, visto che è bellissima (“stonato” significa che se canto qualcosa non lo riconoscete, non che non mi piaccia la musica) ma, a matematica, viaggia su principi piuttosto terra terra: il fatto che con semplici strumenti matematici (e un 98% di genio musicale) si riesca a creare una cosa del genere può essere interessante di per sé, ma ben difficilmente può portare a “qualcosa di nuovo”: lo sanno tutti, vuoi perché hanno letto *GEB*, vuoi perché di articoli ne sono stati scritti un mucchio: riassumo la cosa, sperando che i musicofili si limitino alle formule e i matefili agli spartiti (se siete entrambi, sapete già tutto).

Nel **Canone 1** la seconda voce (**g**) va al contrario rispetto alla prima (che è **f**) partendo dalla diciottesima misura (infatti l'argomento di **f** è **18-t**, e il Canone dura **18** misure): il Canone è noto come *Cancrizans*, evidentemente.

Nel **Canone 2** le cose si fanno più semplici: la seconda voce segue fa le stesse cose della prima, ma sfalsata di una misura.

Nel **Canone 3** (*Per Motum Contrarium*), con le immortali parole di Hofstadter, la seconda voce ha messo lo spartito sottosopra: non solo, ma è in ritardo di mezza misura. Per far quadrare le cose, dobbiamo effettuare uno shift (la costante **K** nella formula).

Nel **Canone 4** (*Per Augmentatione Contrario Motu*) non solo la seconda voce parte con mezza misura di ritardo e usa lo spartito al contrario, ma se la prende anche comoda: infatti, la velocità viene dimezzata (da cui la divisione per **2** che trovate nella formula).

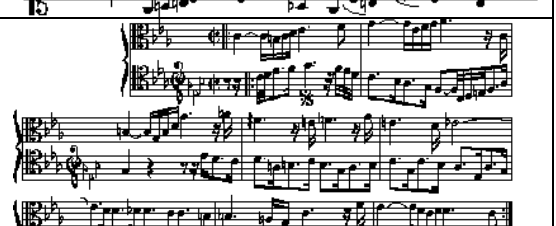
²² È abitudine dei redattori di questa rivista, nell'uso della prima persona, passare con la massima *nonchalance* da quella singolare a quella plurale: date le varie affermazioni personali (non tutte lusinghiere) che seguiranno, Rudy questa volta non ha la minima intenzione di tirare in ballo il resto della banda.

²³ Dicevamo, insiemi *parzialmente* ordinati: non vi dico se in questa posizione sono da solo, e soprattutto non faccio nomi.

²⁴ Il nonno paterno di mia moglie: suonava il contrabbasso e la fisarmonica nella banda di paese. Mai conosciuto.

Nel **Canone 5** facciamo le cose un po' più semplici: ci limitiamo a partire in ritardo e ad effettuare lo shift opportuno.

Gli altri ve li calcolate voi che siete bravi: nella tabella qui sotto trovate sia la parte matematica che quella musicale²⁵.

Funzione	Canone	
$g(t) = f(18 - t)$	1	
$g(t) = f(t - 1)$	2	
$g(t) = -f(t - 0,5) + K$	3	
$g(t) = -f\left(\frac{t - 0,5}{2}\right) + L$	4	
$g(t) = f(t - 1) + H$	5	

30 Bach for Dummies (le prime due colonne)

Questa era la situazione quattro o cinque anni fa, quando avevo deciso che un pezzo su “Musica e Matematica” si sarebbe potuto anche fare, ma ci sarebbe stata un po' troppo poca matematica, e avrei dovuto allegarvi una paccata di MP3 (che sarebbero diventati illegali: le mie sono *fair copy*). Adesso Bach lo trovate (legale) facilmente in rete, quindi potete approfondire tranquillamente.

²⁵ Che è, mi pare evidente, la più difficile: le formulette saranno semplici, ma per farci stare della buona musica sotto ci vuole Bach. Sempre a proposito di JSB, ricordo di aver letto da qualche parte che le *Variazioni Goldberg* sono “ancora più matematiche”, ma non ho trovato nulla in merito: se qualcuno vuole scriverci un PM, questo spazio affittasi.

In tempi più recenti, fortunatamente, è spuntato altro materiale: non solo, ma l'approccio matematico è a mio parere più interessante e, come vedrete, anche più vario. Ma per prima cosa torniamo un attimo all'orecchio del sottoscritto.

“Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si...” “E dopo?” “E dopo di nuovo ‘Do’, ma un’ottava più alta”.

Senza puntare alle inarrivabili (per me) vette di chi sente una nota e vi dice “è un ‘Si’”, già solo accorgersi che la nota all’inizio e quella dopo il Si sono la stessa²⁶ ma di due ottave diverse, rappresenta un’impresa impossibile per me: se comunque restiamo nel teorico, a me viene subito in mente una cosa: il **modulo**! Si può associare ad ogni nota un numero (Do=0, Re=1,...,Si=6) e ci riportiamo ad una successione di numeri, che so trattare (e leggere, tra l’altro... Altro dramma per il sottoscritto) molto più facilmente.

“Rudy, guarda che ci sono anche i diesis e bemolle...” E meno male: a me il sette sta antipatico, mentre il dodici è molto più simpatico. Lasciamo solo perdere il bemolle che non lo trovo nel set di caratteri e non voglio combinare guai²⁷. In fin della fiera, la corrispondenza diventa:

Do	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

E anche il fatto che da qualche parte c’era un semitono e altrove un tono l’abbiamo risolta. Non solo, ma matematicamente la nostra scala ha già un simbolo pronto: su Z_{12} , l’anello dei naturali modulo dodici, dovreste riuscire a lavorarci tutti, anche quelli più stonati dello scrivente (posto che esistano).

Per vedere la prima funzione “interessante” da queste parti, i chitarristi sono invitati a ricordare i loro inizi e lo “scontro” con l’accordo²⁸ di Si7: non solo serve il mignolo, che già è una dannazione, ma il barrè (che già è duro del suo) è pure *doppio*! La prima cosa da fare, a quel punto, era provare se la cosa diventava più semplice trasformando il Si7 in un Sol7 (o in un La7), e eventualmente vai di capotasto. In pratica, abbiamo una funzione:

$$T_n : Z_{12} \rightarrow Z_{12} \quad T_n(x) = x + n \bmod 12$$

nota come **trasposizione**: nel seguito l’indicazione mod 12 non la trovate più, tanto si capisce di cosa sto parlando. Se la cosa vi sembra abbastanza stupida, provvediamo introducendo un’altra funzione, quella di **inversione**:

$$I_n : Z_{12} \rightarrow Z_{12} \quad I_n(x) = -x + n.$$

Già solo con questi due semplici oggetti, se ci accontentiamo di una certa approssimazione (nella quale, sia detto per inciso, c’è il genio del musicista) possiamo trovare dei casi notevoli: procuratevi la **Fuga 6** dal **Clavicembalo ben temperato** di **J.S.Bach** (Libro 1): il primo segmento²⁹ [Mis.1–3] è:

$$P_1 = \langle 2, 4, 5, 7, 4, 5, 2, 1, 2, 10, 7, 9 \rangle.$$

A questo punto, parte un’altra voce:

²⁶ Nel seguito, per motivi che vi saranno chiari a breve, ignorerò il fatto che siano di ottave diverse e non indicherò a che ottava mi riferisco: Quindi, la scala sarà sempre “Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do, Re, Mi, Fa,...”.

²⁷ Lo so che è una cosa diversa, in teoria musicale, e che su questo i musicisti si picchiano usando i logaritmi (in base due) come corpi contundenti. Ma teniamoci sul semplice, almeno per partire, va bene?

²⁸ Sempre per i pignoli intonati, sorvoliamo sul fatto che stiamo parlando di insiemi di note (accordi) e non di note singole: l’esempio del Si7, avendoci sofferto a lungo sopra, mi pareva particolarmente adatto.

²⁹ D’ora in poi quando parlo di una sequenza di note *ordinata* parlo di “segmento”, per differenziarla dall’“insieme”. A pedice, si trova la *misura* d’inizio del segmento.

$$P_3 = \langle 9, 11, 0, 2, 11, 0, 9, 8, 9, 5, 2, 4 \rangle.$$

E, come possono notare tutti, è $P_3 = T_7(P_1)$!

Come dicevo, il genio sta nel “quasi”: dopo un po’ infatti, parte la voce:

$$P_8 = \langle (4, 5, 7, 9, 5), (10, 7, 6, 7, 3, 1), 2 \rangle$$

Per quanto riguarda la prima parentesi, $P_8 = T_2 P_1$, mentre per quanto riguarda la seconda $P_8 = T_5 P_1$, e l’ultima nota sembra non c’entrarci niente.

Ancora più avanti poi, abbiamo

$$P_{13} = \langle 9, 11, \bar{1}, 2, 11, \bar{1}, 9, 8, 9, 5, 2, 4 \rangle$$

che è “quasi uguale” (le eccezioni sono gli “1” sopralineati) a $T_7 P_1$, e la cosa non sembra casuale: infatti, se guardiamo qualche altra misura, con la stessa notazione vediamo che sono tutti quanti “quasi” T_7 ³⁰ del primo segmento:

$$P_{17} = \langle 9, 11, 0, 2, 11, \bar{1}, 9, 8, 9, 5, 2, 4 \rangle$$

$$P_{18} = \langle 9, 11, \bar{1}, 2, 11, 0, 9, 8, 9, 5, 2, 4 \rangle$$

$$P_{21} = \langle 9, 11, \bar{1}, 2, 11, \bar{1}, 9, 8, 9, 5, 2, 4 \rangle$$

Ma ad un certo punto salta fuori qualcosa di totalmente inatteso: ad esempio,

$$P_{14} = \langle 4, 2, 1, 11, 2, 1, 4, 5, 4, \overline{9, 0, 10} \rangle$$

$$P_{22} = \langle 4, 2, 1, 11, 2, 1, 4, 5, 4, \overline{7, 10, 9} \rangle$$

E potreste metterci un po’ di tempo per accorgervi che, con la solita eccezione delle parti sopralineate, questi due segmenti non sono altro che $I_6 P_1 = \langle 4, 2, 1, 11, 2, 1, 4, 5, 4, 8, 11, 9 \rangle$. visto, che si usa anche l’inversione?

Facile dire “Eh, vabbeeh, Bach...”: in effetti, questa analisi (fatta in musica, non nei numeri) è nota da tempo ai musicisti: altri pezzi, però, richiedono altri strumenti.

Colonna sonora: **Overture** dal **Tristano e Isotta**, di **Wagner**. Trascrizione per pianoforte.

$\{0, 2, \bar{5}, 8\}$	$\{0, 2, 6, 8\}$	$\{0, 2, 6, 8\}$	$\{0, 2, \bar{5}, 8\}$
P_1	P_2	P_3	P_4
P_5	P_6	P_7	P_8
P_9		P_{12}	P_{13}

Qui, non parliamo di segmenti, ma di *insiemi* di note³¹ e vediamo in che misure sono utilizzati: la cosa è più difficile, ma i più scafati tra di voi si accorgeranno che, con l’usuale notazione per le misure, potete ottenere lo schema qui di fianco: vorrei notaste le simmetrie delle intestazioni di colonna, qualsiasi possa essere il loro

significato.

³⁰ Se vi sta venendo il sospetto che T_7 sia un personaggio importante, sappiate che quelli che fanno la musica la chiamano “quinta perfetta”.

³¹ Non so se questa nota sia necessaria (non conosco Wagner, che non mi piace per lo stesso motivo per cui non mi piace la lirica, ma qui so di essere giustificato): ignoriamo l’ottava, come sopra.

Quello che vogliamo dire è che *tutti gli insiemi di note delle misure di una colonna sono trasposizioni o inversioni dell'intestazione*. Il che non è facile da notare per gli intonati, figuratevi per me. E siccome mi piacciono le collezioni complete, non ho la minima intenzione di spendere un capitale per una cosa che non mi piace e che non riuscirei mai a capire. Maggiori speranze con il prossimo, ma non garantisco.

Un musicista che brilla per la sua assenza nella mia biblioteca musicale è **Hindemith**, e quindi adesso vi racconto della sua **Fuga in Sol**³². E che sia in Sol l'ho capito anch'io, quando ho visto il segmento:

$$P_1 = \langle 7, 7, 7, 7, 7, 7, 2, 0, 7, 0, 5 \rangle$$

Non solo, ma le note sono evidenziate da uno “staccato” che si ripete in P_3 , P_8 e P_{15} ³³. E qui potrei fermarmi, ma sono possibili ben altre elucubrazioni.

Consideriamo ad esempio la tabella a fianco, dove abbiamo messo tutte le variazioni possibili del segmento $\langle 7, 0, 2 \rangle$ (evidenzio perché è importante per ora che sia ordinato). Giusto per inventarci delle denominazioni, definiamo le forme generate da **T** come *forme primitive*, e quelle generate da **I** come *forme inverse*. Adesso, possiamo inventarci una nuova funzione: resto in attesa che qualche musicofilo mi spieghi cosa significa, ma dal punto di vista numerico è interessante; definiamo la funzione **J** su **S** come quella che, agendo su un segmento di tre note:

1. *Scambia le prime due*
2. *Prende il segmento che, nella tabella degli inversi, ha le prime due note uguali al risultato del primo punto.*

S	T	I
0	$\langle 7, 0, 2 \rangle$	$\langle 5, 0, 10 \rangle$
1	$\langle 8, 1, 3 \rangle$	$\langle 6, 1, 11 \rangle$
2	$\langle 9, 2, 4 \rangle$	$\langle 7, 2, 0 \rangle$
3	$\langle 10, 3, 5 \rangle$	$\langle 8, 3, 1 \rangle$
4	$\langle 11, 4, 6 \rangle$	$\langle 9, 4, 2 \rangle$
5	$\langle 0, 5, 7 \rangle$	$\langle 10, 5, 3 \rangle$
6	$\langle 1, 6, 8 \rangle$	$\langle 11, 6, 4 \rangle$
7	$\langle 2, 7, 9 \rangle$	$\langle 0, 7, 5 \rangle$
8	$\langle 3, 8, 10 \rangle$	$\langle 1, 8, 6 \rangle$
9	$\langle 4, 9, 11 \rangle$	$\langle 2, 9, 7 \rangle$
10	$\langle 5, 10, 0 \rangle$	$\langle 3, 10, 8 \rangle$
11	$\langle 6, 11, 1 \rangle$	$\langle 4, 11, 9 \rangle$

31 L'insieme **S**, che dice più cose di quante potreste pensare

In pratica, lavorando sempre su **S** (di cui abbiamo la tavola disponibile):

0. Parto da $\langle 7, 0, 2 \rangle$
1. Diventa $\langle 0, 7, \dots \rangle$
2. In riga (7), vedo che l'unico della colonna **I** che comincia con $\langle 0, 7, \dots \rangle$ è $\langle 0, 7, 5 \rangle$, che è il risultato.

Tutto chiaro? Allora chiamiamo l'operazione **J** *inversione contestuale*: è un'inversione (addirittura in due sensi diversi), ma dipende dal contesto, ossia dalle prime due note.

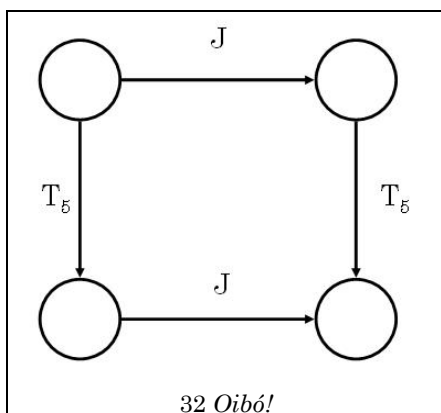
E cosa significa, questo, in musica? Beh, sono *quasi* correlati tra loro: in fondo, abbiamo trovato la forma *inversa* che è, in un certo senso, più *vicina* alla forma originale. Il “quasi” nasce dal fatto che in musica non si usa la $\langle 0, 7, 5 \rangle$, ma la $\langle 7, 0, 5 \rangle$: ciò nonostante, quella che abbiamo trovato (visto che tra le forme inverse nessuna inizia con $\langle 7, 0, \dots \rangle$) resta la “più vicina”.

Ricreazione. E siccome quando c'è l'ora di matematica e comincia la ricreazione si ascolta un po' di musica, qui che parliamo di musica nella ricreazione parliamo di matematica.

³² Completa ignoranza in merito, dicevo: ma a quanto ho capito appartiene al *Ludus Tonalis*, il cui *Postludio* non è altro che il *Preludio* suonato “due volte al contrario”, come “nel meglio Bach”!.

³³ Piccola nota per i numerologi: il primo segmento consiste di due misure di cinque battute e considerando come diverse le note di ottave diverse ho undici note, mentre considerandole uguali ne ho cinque: ma vi siete accorti che tra la nostra notazione e tutto lo sproloquio precedente stiamo usando solo numeri *primi*?

Sono pienamente d'accordo che per farvi digerire una faccenda del genere bisogna faticare molto; bene, preparatevi a faticare. Fate i conti, oppure guardate il disegno in figura e credeteci.



Per prima cosa, scrivete un segmento di tre note nel tondo in alto a sinistra.

Poi, dopo esservi calcolati la tabella della trasposizioni e delle inversioni, scrivete il risultato dell'opportuno calcolo in alto a destra.

Calcolare il valore in basso a sinistra non dovrebbe essere difficile.

Vi resta un tondo da compilare, quello in basso a destra: datevi da fare.

Sorpresa! *Questi operatori commutano!* Adesso, posto che vi piaccia Hindemith, andate a confrontare i gruppi di tre note nelle misure (2,4), (9,16), (37,39)

e (55,57): viene applicata proprio quella funzione³⁴.

Il prossimo passaggio, dal punto di vista matematico, è a questo punto immediato. Smettiamo di lavorare con i segmenti e cominciamo a lavorare con gli *insiemi* di tre elementi: se i musicofili vogliono sviluppare il concetto, potrebbero essere aiutati dal fatto che queste triplette le chiamiamo *accordi*. Dicevo, il prossimo passo: lo schema qui sotto dovrebbe chiarire il concetto che ci troviamo in piena Teoria dei Gruppi.

$$T_m \circ T_n = T_{m+n}$$

$$T_m \circ I_n = I_{m+n}$$

$$I_m \circ T_n = I_{m-n}$$

$$I_m \circ I_n = T_{m+n}$$

I conti ve li fate voi, ma questo è noto come **Gruppo** T/I .

Adesso, prendiamo l'accordo di Do Maggiore³⁵ $\{0,4,7\}$ e definiamo una funzione simile alla **J** di cui sopra: **P** è la funzione per cui:

0. Prendo l'accordo $\{0,4,7\}$
1. Scambio tra di loro la prima e la **terza** $\{7, _, 0\}$
2. Cerco, nella tabella delle forme inverse, quella che contiene questi due elementi in quella posizione: $\{7,3,0\}$.

Insomma, per essere brevi e per generalizzare il concetto:

$P(x)$ è la forma inversa in cui il **primo** e il **terzo** componente si scambiano

$L(x)$ è la forma inversa in cui il **secondo** e il **terzo** componente si scambiano.

$R(x)$ è la forma inversa in cui il **primo** e il **secondo** componente si scambiano.

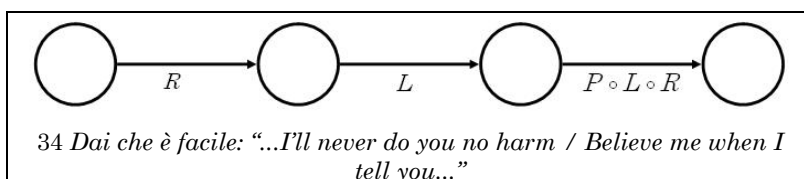
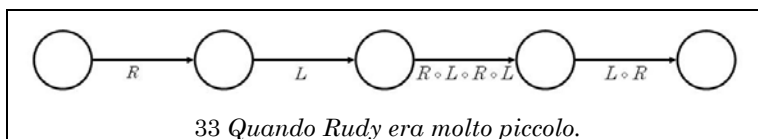
³⁴ Sempre per i numerologi, vi faccio notare che a parte un caso (il secondo), sono tutti distanziati di due misure.

³⁵ Fermi tutti! Me lo ricordo! Aspetta... La fondamentale, la terza e la quinta maggiore. Giusto? Eh? L'ho detto giusto, Capo?

Conti alla mano, PLR è un gruppo, contiene **24** elementi ed è isomorfo³⁶ al gruppo diedrico D_{24} . Il che già di per sé è un bel risultato.

Fine della ricreazione.
Tutti in classe di musica.

Adesso, prendete un accordo (maggiore) qualsiasi e buttatelo nella catena a fianco, poi, dopo esservi cavate le note, provate a suonarlo, possibilmente con un tempo un po' "Anni Sessanta": lo riconoscete? Se non ci siete arrivati, la soluzione in nota³⁷.



Sappiamo che almeno uno di voi preferisce altro: di questo vi fornisco il primo accordo (attenti che non è quello di

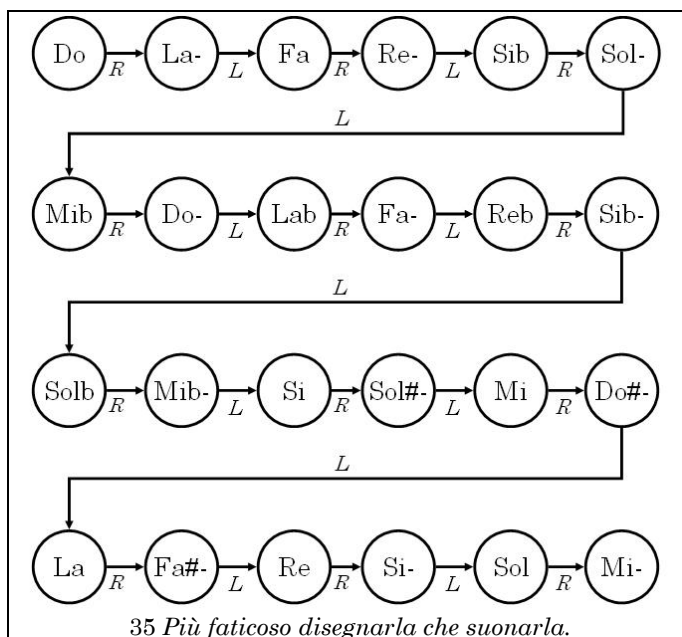
partenza, e stiamo semplificando) e i passaggi: vediamo se "Chi-Dico-Io" ci arriva... Si parte con un $\{1,9,6\}$, che dovrebbe essere un $Fa\#-$. Auguri³⁸.

Torniamo sul classico: e qui dobbiamo usare i bemolle, che l'autore ha già sempre l'aria arrabbiata del suo... **Beethoven, Nona Sinfonia, Secondo Movimento**, misure 143-176: trovate la sequenza qui di fianco.

Vorrei notaste che ci sono ventiquattro elementi, tutti diversi, e quindi facciamo il giro dell'intero gruppo!

Insomma, c'è tutto, ottenuto solo alternando i due operatori R e L . Quando si dice il genio.

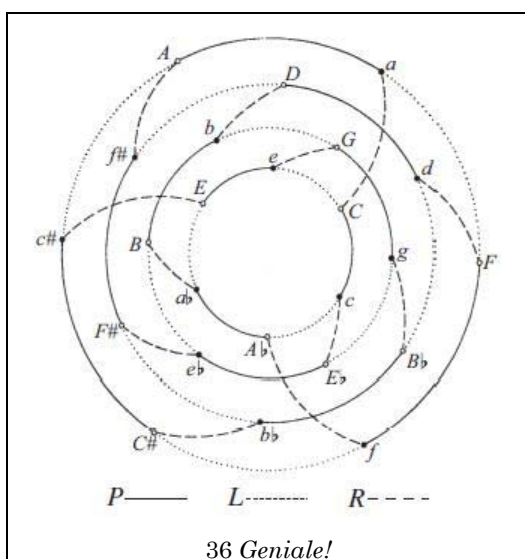
"Rudy, ho qualche difficoltà a visualizzare il Grafo di Cayley del gruppo RLP ..." Se voi avete difficoltà a visualizzarlo, figuratevi io a disegnarlo (o a suonarlo, se è per questo...) Comunque, siccome sono un buono, l'ho trovato e ve lo passo: purtroppo, ho trovato solo la versione con la notazione inglese delle note: quindi ricordatevi che $Do=C$, $Re=D$, ... $Sol=G$, $La=A$, $Si=B$ e i minori si indicano con lettere minuscole.



³⁶ Come T/I , del resto.

³⁷ È quello noto come "Giro I-VI-IV-V-I", il preferito da "Elvis the Pelvis"

³⁸ Sì, uno è scalzo. :-P



Vi faccio notare il colpo di genio (degno di un Beethoven della matematica): il grafo non è disegnato sul piano, ma su un **toro**: in questo modo si riesce a far sì che le varie linee *non si intersechino*. Carino, vero?

Niente da fare: Beethoven è tutta un'altra cosa, se lo ascoltate mangiando una ciambella...

Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms