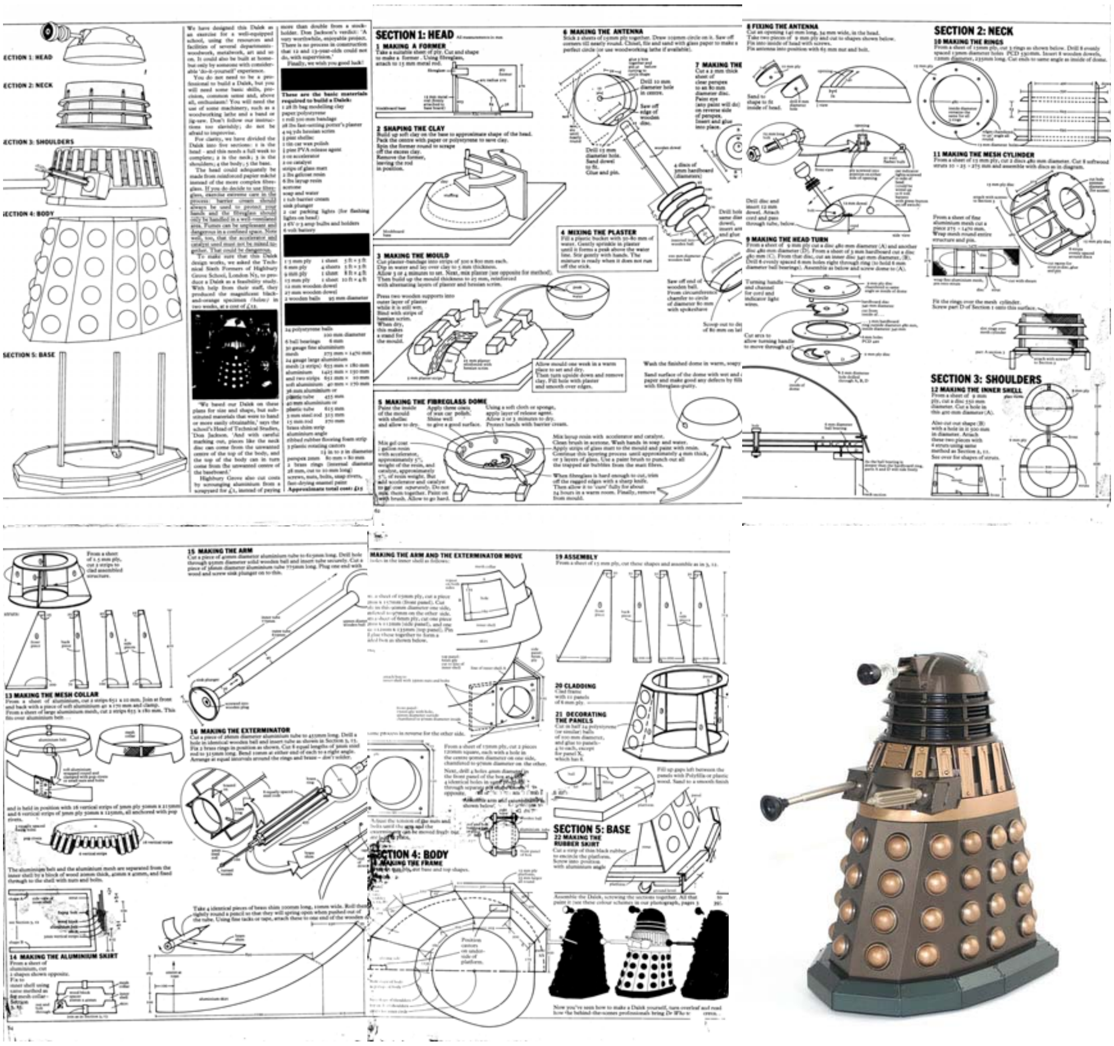
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 154 – Novembre 2011 – Anno Tredicesimo



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell’altro millennio da

Rudy d’Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM153 ha diffuso 2823 copie e il 01/11/2011 per Google eravamo in 64’900 pagine.

Dato il modo fetente con il quale è stato trattato dalla televisione italiana, pochi (e ormai anzianotti) sono i fan di *Doctor Who* nel nostro paese, mentre all’estero si contano a legioni. Quando la BBC ha ricevuto la richiesta di uno di questi dei *blueprint* per costruire un *Dalek*, con flemma e gentilezza tutta britannica glieli ha inviati gratis. Pensate cosa succederebbe facendo domanda per i piani di costruzione per C1P8: probabilmente, rasentando la violazione di copyright, risponderebbero “*Ex-ter-mi-nate!*”

1. Genius loci

TANSTAAFL! [1]
Robert Anson Heinlein, "*The Moon Is an Harsh Mistress*"

Abbiamo detto già molte volte che dello scrittore in citazione apprezziamo moltissimo i romanzi[2] ma dissentiamo totalmente dalle sue visioni politiche e filosofiche. Il primo obiettivo di questa *pièce,* come sempre nel caso dello scrittore citato, è mostrare che aveva torto.

Non intendiamo parlare del fatto che alcuni personaggi rendono disponibile in modo gratuito oggetti che altri fanno pagare a caro prezzo; senza andare ad esaminare casi riferiti ad alcuni grandi nomi come OpenOffice.org o Firefox, basterebbe considerare l'esistenza quasi triskaidecennale di una rivista di matematica *free* per smentire facilmente Heinlein.

Con un'eccezione, gli editori di questa rivista sono abbastanza "diversamente giovani" da ricordare la nascita degli *hard discount* e la sensazione di estraneità che, le prime volte, coglieva gli acquirenti quando vi si addentravano. Citiamo alcuni esempi, di cui abbiamo avuto e continuiamo ad avere esperienza personale:

> L'acqua minerale non è situata in prossimità delle casse, secondo la regola che se la si mette subito nel carrello si ha immediatamente la sensazione di avere ormai il carrello pieno, e quindi si acquisterà meno: di solito, viene messa dove c'è spazio.
>
> Il prodotto più costoso di un dato genere non è all'altezza dell'occhio e segnalato da *advertising* con dei colori che farebbero impazzire lo sventurato camaleonte che cercasse di mimetizzarvisi: i prodotti sono uno per genere, e ancora nel loro scatolone appoggiato sul *pallet*, per facilitare lo spostamento.
>
> L'unica pubblicità riferita a un prodotto è l'indicazione, in caratteri ragionevolmente ampi, del prezzo.

Il messaggio convogliato da una visione del mondo di questo genere è, in sostanza, strettamente utilitaristico: "se questo ti serve, prendilo: raccontarti quanto ti sia utile costerebbe troppo sia al produttore che a te", e questa filosofia viene applicata all'intera catena, a partire dalla ricerca di aziende sconosciute, passando per un *packaging* completamente anonimo, evitando accuratamente gli ingorghi del pupazzetto omaggio e giungendo ad una disposizione del prodotto basata sulla massima efficienza. Il tutto, per garantire un prezzo finale il più basso possibile, fermo restando un ragionevole guadagno per l'intero sistema.

Come sempre nel caso delle idee commerciali, la situazione iniziale è quella di monopolio; l'idea può, a questo punto, mostrarsi totalmente improduttiva e sparire nel nulla o essere fonte di guadagno per l'inventore ed avere successo. Nel caso degli Hard Discount, con indubbia soddisfazione dei consumatori, ci siamo trovati nel secondo caso: è stata infatti una *success story* per molto tempo e il loro sviluppo è stato da molti additato come esempio del consumo consapevole[3].

[1] "There Are No Such Things As A Free Lunch!", "Non esistono cose come un pranzo gratis!"

[2] Un po' meno le traduzioni, almeno per quanto riguarda i titoli: quello (meraviglioso) della citazione in italiano è diventato "La Luna è una severa maestra". Passabile, ma volete mettere con la forza dell'originale?

[3] Releghiamo in nota la considerazione che, giustamente, questo concetto si è espanso non solo al cercare l'occasione migliore al minor prezzo, ma anche all'essere consci che tutto quello che consumiamo a basso prezzo è prodotto da qualcun altro a prezzo ancora più basso: l'attenzione all'etica della produzione è una componente importantissima, ma che al momento non intendiamo sviluppare, volendo parlare d'altro.

Come sempre, il successo fa nascere la concorrenza. E i concorrenti, pur essendo dal punto di vista qualitativo sostanzialmente equivalenti all'*incumbent*, soffrono di un *gap* di visibilità spesso difficile da colmare, al di fuori di questo ambiente, di solito la soluzione è la pubblicità: la *efficienza massmediatica dell'advertising emeridiale*[4], rompendo le scatole sette giorni la settimana e suppergiù ad ogni ora del giorno, permette di rendere noto il nuovo marchio a tutti; o, in alternativa, anche se la cosa può sembrare controcorrente, partire con un'operazione di *brand placement*, associando il proprio marchio ad un determinato segmento della società[5].

Nel campo del discount, nessuna di queste strade è praticabile: visto che i prezzi sono sostanzialmente equivalenti e la qualità dei prodotti non si discosta di molto (spesso sono i medesimi, e ancor più spesso neppure ritargati), può essere vantaggioso, a questo punto, presentarsi come un clone dell'*incumbent*, cercando la massima similitudine: se i prodotti sono i medesimi e la presentazione è simile non resta altro da fare, nella presentazione del marchio, che applicare due regole base:

1. Deve essere giallo
2. Deve contenere la massima densità possibile di lettere L e D[6].

Ma esiste un altro metodo potentissimo per pubblicizzare a costo zero la propria attività, se ci perdonate il bisticcio (voluto); basarsi anziché sul logo, sul *luogo*.

Quanto vi fidereste di una Fontina *Made in Salonicco* o, per *par condicio*, di una Feta di Courmayeur[7]?

Anche il più *hard* degli *hard discount*, se apre la sede nel quartiere più ricco della città, avrà per noi una connotazione inconscia di lusso: anche se la logica ci sussurra che quella catena di supermercati pratica sull'intero territorio nazionale lo stesso prezzo, il circondario ci urla che ci troviamo in una zona di *lusso*, e questo connoterà quanto meno quel negozio della catena.

In certi casi, non approfittare dell'occasione appare a dir poco ingenuo: come se una concessionaria d'auto non si fregiasse del trovarsi in Via Maserati[8] o una *software house* non ricordasse ad ogni cliente di avere la sede nella casa del primo informatico italiano.

Presentare con completezza di dati il matematico di cui festeggiamo questo mese il compleanno è scandalosamente semplice: una visita sul sito del Senato della Repubblica permette di ricavare tutti i dati necessari e anche più. Ci limitiamo alla prima parte, anche perché il riportarla nella sua interezza ci lascerebbe ben poco da dire, e potremmo essere tacciati di pigrizia: per una volta, infatti, sono ben più i particolari ricavabili per questa via rispetto a quelli che troviamo sulle nostre fonti abituali. Le quali, sia detto per inciso, una volta tanto ci deludono: infatti omettono un particolare e ne sbagliano un altro[9].

---

[4] La frase non è nostra, fortunatamente: non ricordiamo dove l'abbiamo trovata, ma l'autore dovrebbe vergognarsi di un'espressione così brutta e nel contempo efficace.

[5] Il che non significa automaticamente presentare i propri prodotti come prodotti di lusso: ha fatto scuola, in questo campo, la tendenza di una compagnia telefonica di pubblicizzare i propri servizi come particolarmente vantaggiosi per gli extracomunitari.

[6] Non ci risulta utilizzato, nella nostra visuale, il marchio "Lil'D", che starebbe per "Piccolo Discount". Come nostra abitudine, lo regaliamo a chiunque sia interessato, lasciando a lui l'onore e l'onere di verificare se sia utilizzabile o no dal punto di vista legale. Ma nel caso ci aspettiamo almeno un sorriso alle casse.

[7] In certi casi la cosa può essere voluta: Rudy ricorda che gli sci utilizzati negli anni Ottanta da sua moglie rispondevano all'improbabile nome di *Bahia*. E il marchio era tutt'altro che sconosciuto.

[8] Se la cosa vi sembra improbabile, ne esiste almeno una: Via Maserati Alfieri, Voghera. Non sappiamo se vi siano concessionarie di un qualsiasi marchio.

[9] Il nostro valido Postino, alla lettura di questa nota, provvederà immantinente a segnalare la cosa agli interessati.

PLANA Giovanni Antonio Amedeo

Dati anagrafici

Data di nascita:	08/11/1781
Luogo di nascita:	Voghera, Pavia
Data del decesso:	20/01/1864
Luogo di decesso:	Torino
Padre:	Antonio Maria
Madre:	GIACOBONI Giovanna
Nobile al momento della nomina:	Sì
Nobile ereditario	No
Titoli nobiliari	Barone, titolo concesso con regie patenti il 2 novembre 1844
Coniuge:	LAGRANGE Alessandra Maria
Figli:	Luigi Sofia in Dovet
Parenti:	Lagrange Michele Agostino, suocero e fratello del matematico Lagrange Cesare Augusto Dovet, genero
Luogo di residenza:	Torino
Indirizzo:	Piazza Vittorio, 12
Titoli di studio:	Scuola politecnica di Parigi
Professione:	Docente universitario

1 *Dal sito del Senato della Repubblica*

Giovanni Plana nasce a Voghera, ma ha due zii residenti all'estero, a Grenoble, e all'età di quindici anni viene trasferito presso di loro per completare la sua educazione; non ci poniamo domande su quanto venga realizzata a Grenoble la speranza dei genitori, ma il futuro Senatore del Regno stringe una stretta amicizia con un certo Henri Beyle[10].

Fine del diciottesimo secolo in Francia, presunta intenzione di studiare: per questi due punti passa una sola retta, e si chiama Ècole Politechnique. Qui Plana ha come insegnante Lagrange[11] e, nonostante i confini dell'Italia all'epoca siano piuttosto nebulosi, presumiamo i due sviluppino una certa amicizia, visto che Giovanni ne sposerà in seguito la nipote.

Non vorremmo pensaste che Plana e Lagrange formassero una conventicola di carbonari tesa a immaginare un futuro per una nazione ancora inesistente: delle capacità di Plana si accorge anche un certo Fourier, il quale spinge per far nominare Plana insegnante di matematica alla Scuola di Artiglieria di Grenoble. Fourier fallisce il primo colpo, ma riesce al secondo tentativo: era, infatti, libero un altro posto di insegnante di matematica in una scuola di artiglieria, quella di Torino, con sede distaccata ad Alessandria, e Fourier riesce ad inserire il Nostro in questa sede nel 1803. E a questo punto viene spontaneo porsi la domanda di quanto fosse difficile entrare all'Ècole, visto che Torino, all'epoca, non era territorio francese.

2 *Sen. Giovanni Antonio Amedeo Plana (dal sito del Senato della Repubblica)*

Infatti, la campagna napoleonica in Italia inizia nel 1796, e il Corso sceglie la via di Nizza, di Cuneo e di Cherasco, evitando Torino; e termina solo con il Trattato di Pressburg a fine 1805 (il 26 dicembre): solo in questa data il Piemonte (forse ormai scarsamente significativo dal punto di vista politico, ma ancora formalmente indipendente) viene annesso alla Francia[12].

[10] Meglio noto sotto l'allonimo di "Stendhal".

[11] Trovate tutto o quasi su di lui in "Torino, 1750", RM048 (gennaio 2003): il primo compleanno.

[12] Torino non viene conquistata, ma annessa, e per riconoscimento le vengono donate tre delle api d'oro che componevano il mantello dell'incoronazione di Carlo Magno e che compariranno, per tutto il periodo napoleonico, nello stemma della città. Leggenda vuole che oggi si trovino, assieme a una bottiglia di Barbera, una busta di grissini e una copia della Legge Siccardi, sotto l'obelisco di Piazza Savoia.

Plana, quindi, è tornato in Francia senza spostarsi dalla città che non abbandonerà più.

Il periodo è torbido per l'Europa, ma a quanto pare per Plana è ancora più movimentato. Abbiamo cercato di mettere ordine nei vari titoli e incarichi della sua vita, riunendoli in una tabella, ma siamo consci che il lavoro è incompleto: sono infatti rimasti esclusi, per mancanza di data, tutti gli incarichi di insegnamento contemporanei sia all'Accademia militare che all'Università[13].

1811	Professore di Astronomia all'Università di Torino
1811	Socio nazionale dell'Accademia delle scienze di Torino
1813	Astronomo dell'Osservatorio astronomico di Torino
1814	Professore di Analisi all'Università di Torino
1816	Professore di Meccanica razionale all'Accademia militare di Torino
1827	*Fellow della Royal Society*
1829	Direttore generale dell'Accademia militare di Torino
1829	Membro della Società, poi Accademia, italiana delle scienze di Modena, detta dei Sessanta
1834	*Medaglia Copley della Royal Society*
1835	*Fellow della Royal Society di Edimburgo*
1842	Vicepresidente dell'Accademia delle scienze di Torino
1844	Socio corrispondente italiano dell'Istituto lombardo di scienze e lettere di Milano
1848	Vicepresidente del Consiglio superiore della pubblica istruzione
1850	Socio dell'Accademia dei Lincei
1851	Presidente dell'Accademia delle scienze di Torino
1852	Consigliere comunale di Torino
1858	Vicepresidente onorario del Consiglio superiore della pubblica istruzione
1860	Direttore dell'osservatorio astronomico di Torino
1862	Socio corrispondente della Società reale di Napoli
1863	Socio ordinario della Società reale di Napoli

3 *(Alcuni) Incarichi di Giovanni Plana*

Non solo, ma il nostro riesce anche a litigare: l'Accademia delle Scienze francese aveva proposto un premio a chiunque fosse riuscito a calcolare delle tavole lunari basandosi unicamente sulla legge di gravitazione universale; il problema non era semplice, sono coinvolte perturbazioni importanti derivanti dal fatto che il sistema Terra-Luna non è isolato e che nessuno dei corpi coinvolti è puntiforme. Ciò nonostante, Plana (in associazione con Carlini e contemporaneamente a Damoiseau) riesce a produrre le tavole, ma Laplace ne critica il metodo.

4 *Théorie du mouvement de la Lune*

Carlini abbandona l'impresa, ma Plana insiste e (pubblicando nel 1832 a Torino *Théorie du mouvement de la Lune*) riesce a costringere Laplace ad ammettere che il suo metodo era equivalente a quello di Damoiseau e ad incassare il premio.

In aperta dissonanza con tutte le bibliografie, noi dobbiamo aspettare che Plana compia sessant'anni per trovare la connessione con il tema dal quale siamo partiti. Ma manca ancora una premessa.

Lo stato delle università dell'epoca in Italia è stato inquadrato con molta gentilezza dagli storici della matematica (Tricomi, ad esempio) come *molto deteriorato*; l'insegnamento di Plana è però riconosciuto come della più alta qualità, pari almeno a quello erogato nelle migliori università europee; e a noi piace pensare che per questo, e per la fama da lui raggiunta, gli sia riuscito il colpo di organizzare il più grande evento mediatico di quegli anni.

Infatti, nel 1840, viene organizzato a Torino dall'Accademia delle Scienze il *Secondo Congresso dei Filosofi Naturali* (all'epoca gli "scienziati" si chiamavano in questo modo), e uno di questi (matematico a Cambridge) arriva dietro invito di Plana: a voler essere maligni, viene da pensare che il Nostro abbia brigato peggio di Fourier per farlo arrivare, visto che non solo il matematico viene insignito dell'onorificenza di Commendatore

[13] Quelli riportati in corsivo provengono da fonte inglese (o meglio, scozzese); non abbiamo compulsato siti francesi, ma ci aspettiamo riportino qualcosa anche loro.

dell'Ordine dei Santi Maurizio e Lazzaro[14], ma addirittura viene concesso un salvacondotto al suo accompagnatore Federico Prandi, all'epoca condannato a morte in contumacia per aver partecipato ai moti liberali del 1821[15]. L'inglese, nel 1862, se ne ricorderà e si esprimerà con queste parole nella dedica di un suo libro:

> "Sire, nel dedicare questo volume a sua Maestà, io compio un atto di giustizia nei confronti della memoria del Vostro illustre Padre. Nel 1840 il re Carlo Alberto invitò i saggi d'Italia a riunirsi nella sua capitale. Su invito del suo più grande matematico, io portai con me i disegni e le spiegazioni dell'Analitical Engine. Essi furono ampiamente discussi e la loro validità fu riconosciuta dai più eletti figli d'Italia. Al Re, Vostro Padre, io devo il primo riconoscimento pubblico e ufficiale di questa invenzione. Sono lieto di esprimere la mia riconoscenza a Suo Figlio, il Sovrano dell'Italia unita, il Paese di Archimede e Galileo."

5 *Piazza Vittorio Veneto, 12*

Il "*suo più grande matematico*" era Giovanni Plana, talmente convinto della bontà del lavoro dell'inglese e della sua collaboratrice da spingere un suo allievo, futuro primo ministro, a scrivere una relazione su di esso. Evidentemente, l'inglese è Charles Babbage, la sua collaboratrice è Ada, contessa di Lovelace, mentre lo studentello che diventerà primo ministro è Luigi Federico Menabrea[16].

Chi sta scrivendo queste righe ha dovuto attendere i quarant'anni per scoprire di aver lavorato[17] per cinque anni in casa del primo informatico italiano. Quattordici anni dopo, nelle frammentarie ricerche per queste pagine, abbiamo trovato inquietanti coincidenze: a partire dalla ricerca di una qualche "Via Maserati", scoprendo che la prima accezione presentata da *Google Maps* è proprio nella città natale di Giovanni Plana; proseguendo per il fatto che i primi anni della nostra vita li abbiamo passati in una piazza intitolata a chi l'ha proposto senatore, e i nostri anni universitari gravitavano attorno alla via intitolata al fratello del suocero; terminando con il fatto che, a due isolati da dove scriviamo queste ultime righe, passa una via intitolata ad uno dei suoi allievi.

[14] Abbiamo parlato degli incarichi e dei titoli di Plana, ma abbiamo sorvolato sulle onorificenze: Gran Cordone (è il titolo sopra "Commendatore") dell'Ordine dei Santi Maurizio e Lazzaro, Ufficiale dell'Ordine della Legion d'Onore (Francia), Cavaliere dell'Ordine della Corona Ferrea (Austria), Commendatore dell'Ordine della Concezione di Villa Vinciosa (Portogallo), Cavaliere dell'Ordine della Stella Polare (Svezia). Visto il titolo di Astronomo Reale (1813), avremmo delle ipotesi su quale fosse il suo preferito.

[15] Successivamente graziato, si stabilì in Italia e divenne uno dei più attivi imprenditori del periodo.

[16] Li trovate tutti e tre su RM059 (dicembre 2003), in "La farina di Ofelia". Menabrea compare anche in RM150 (luglio 2011), in "Risorgimento!".

[17] *Si parva licet*, trovate una descrizione piuttosto spenta dell'ambiente nel PM di RM142 (novembre 2010).

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Quando si dice "Andarsela a cercare"			
Ripetizioni!			

2.1 Quando si dice "Andarsela a cercare"

Un risultato della matematica (o meglio, della geometria) che ci ha sempre lasciato perplessi è il teorema di Mascheroni: "Qualsiasi cosa costruibile con riga e compasso, è costruibile con il solo compasso". A prescindere dal primo dubbio ("e come fai a tirare una riga? Togli la mina dal compasso e usi lo spigolo del medesimo come riga?") che di solito viene risolto piuttosto agilmente ("ti trovo due punti della retta, in questo modo è definita"), ci resta sempre il sottile tarlo che Mascheroni le complicazioni se le stesse andando a cercare... Poteva inventarsi la geometria dell'origami, che permette di costruire *più* cose di quelle costruibili con riga e compasso. A questo punto, anche se sembra che non c'entri nulla, aggiungete il fatto che lo scrivente (Rudy) si è appena impossessato di un libro della figlia di Zygmund Bauman (quello della *società liquida:* la figlia si chiama Anna Sfard) dal titolo *Psicologia del pensiero matematico*, dove nelle prime pagine viene distinto l'apprendimento *operativo* ("imparo l'addizione e controllo il conto del droghiere") da quello *strutturale* ("ho imparato l'addizione, ma se esiste l'addizione deve esistere il contrario, e se sommo numeri sempre uguali deve esistere questa come operazione...").

Bene, abbiamo raggiunto la convinzione (per via *strutturale*) che Mascheroni aveva ragione, ma adesso vorremmo quella *operativa*: come si fa? Noi ci siamo già arenati davanti ad un problema piuttosto semplice:

> Dato il segmento AB, bisecatelo con l'uso del solo compasso.

Ragazzi, è un mese che siamo fermi. Ci date una mano?

2.2 Ripetizioni!

Giusto, è un po' che non vi informiamo sulle epiche gesta scolastiche dei VAdLdRM.

Alberto non è misurabile, in quanto impegnato a fare la detartrasi al coccodrillo[18], mentre Fred (seconda ginnasio) ha già collezionato due tre di latino e tre due di greco.

[18] Nel senso che è rimasto escluso (per una decina di posti su centoventi) da "Veterinaria lunga", e si è iscritto (per quest'anno) a quella "corta". Sembra comunque che al Campus di Veterinaria si diverta: il primo giorno è tornato tutto contento dall'aver scoperto che c'è anche un coccodrillo! Da cui, la definizione di Rudy dell'attività.

No, le ripetizioni non sono per lui: le sta dando alla "Tavola Bassa" della famiglia, in matematica; materia nella quale non ha ancora raccolto insufficienze, ma secondo noi è solo questione di tempo.

Se secondo voi non è il caso di fidarsi, vorremmo tranquillizzarvi: al momento, il cugino più piccolo sta imparando a scrivere i numeri, e fin lì Fred ci arriva senza eccessiva difficoltà.

Va detto che il prendersi cura dell'intero *range* di cugini può causare qualche problema: mentre Ale fatica a scalare la strada dei numeri, Mati[19] si annoia di brutto.

Ieri, ad esempio, Ale era arrivato sulla vetta del "nove", e il successivo passaggio richiedeva, da parte di Fred, una premessa teorica (oeu, due cifre! Siam mica qui a coniugare gli aoristi!) e il cambio di foglio. Mati, a questo punto, si impossessava del foglio usato e iniziava a pasticciare i numeri, riscrivendo gli stessi in disordine sotto quelli di Ale; trovate il risultato qui sotto. La prima riga è quella che ha scritto Ale, la seconda quella che ha scritto Mati.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	2	6	5	4	3	9	1	7

E Fred, a questo punto, si è messo a pensare cosa significasse il sorriso vagamente satanico della giovane: successivamente (illuminato dalla consulenza di Rudy), si è accorto che *i numeri sono gli stessi, nessun numero è ripetuto e la somma di ogni colonna è un quadrato perfetto!*

Una volta tanto, la domanda topica l'ha trovata Fred: ma Mati ha solo avuto fortuna, o la cosa si può fare anche in altri casi?

Ora, lo scrivente si trova un po' in ambasce, anche perché domani siamo tutti a pranzo fuori, e Mati ne vorrà sicuramente parlare... Riuscite a darmi una mano? Per quali n è possibile?

Aggiornamento: Siccome la soluzione non è arrivata (anche perché quando c'è stato il pranzo il problema non era stato ancora pubblicato: non essendo voi affetti da telepatia fulminante, non mi avete aiutato) e Mati sembrava piuttosto scalmanata (pranzo autunnale piemontese, un'ora solo per il giro degli antipasti freddi: giustificatissima[20]), le abbiamo rifilato carta, matita e un problemino: "ti scrivo i numeri da 1 a n, in disordine; nella seconda riga, scrivi quanti numeri sono strettamente minori del numero al piano di sopra e situati alla sua destra (guardando). Nella terza riga, fai la stessa operazione ma sulla seconda riga, e avanti così. Fermati quando hai una riga tutta di zeri.

OK, abbiamo barato un po' (ma poco). Come abbiamo scritto i numeri (da 1 a 15, nel caso particolare, ma non disdegnate le generalizzazioni) per fare in modo che impiegasse il massimo tempo, ossia dovesse scrivere il massimo numero di righe?

[19] Vero nome Matilde, ma tutti la chiamano così. Rudy, per motivi completamente ascientifici, è convinto che sia una tipa tosta in matematica: il nome abbreviato è pericolosamente simile al cognome della sua prof di Analisi II, che era una "dura".

[20] Seguono quelli caldi, un paio di primi, due secondi, "Vuoi mica non prendere il fritto misto?", formaggi, dolce, caffè, digestivo... Per citare un noto comico, quando ti alzi per fare una passeggiatina digestiva arriva la voce dalla cucina: "Non andate lontano, che tra mezz'ora si cena!". E, per continuare con le citazioni e le lezioni di torinese, quando vi mettete a letto la frase tipica è quella di uno zio (acquisito) di Rudy: "*L'hai nen digerî...Sarà staita la salada..." ("Non hai digerito… sarà stata l'insalata…").*

3. Bungee Jumpers

Parte prima: Provate che, se t_n è il numero dei divisori dell'intero n (inclusi *1* e n medesimo), allora:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor.$$

Parte seconda: Provate che, se s_n è la somma dei divisori dell'intero n, allora:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} i \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor.$$

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Novembre.

Se devo dirvi la verità, fa freddo, dove sono io, e il freddo non mi piace. Se questa non vi sembra una buona scusa per essere in ritardo con il lavoro, pazienza, non ne ho di migliori. Il vantaggio per tutti voi, però, è che queste note iniziali saranno veloci ed essenziali: giusto il tempo di ricordarvi le conferenze degli uomini rudeschi a novembre a Caluso il 11/11 e a Torino il 12/11. Per maggiori dettagli vi invito a visitare il nostro sito per tanti altri eventi: http://www.rudimathematici.com/memento/mementodb.php, cercheremo di tenerlo aggiornato con le ultime novità: in ogni caso, se siete a Torino ma non volete vedere i Rudi, seguite lo stesso il link, anzi, andate direttamente qui http://www.cicap.org/new/articolo.php?id=274082, perché al convegno del CICAP ci saranno personaggi ben più interessanti di noi, come Odifreddi, Mariano Tomatis e i ragazzi di OfficineScienza, che abbiamo spesso nominato in queste righe.

Ecco, fatto. Ora vi passo le soluzioni che mi avete mandato voi.

4.1 [150]

4.1.1 Forse era meglio prima

Si tratta di un problema proposto a luglio, il testo era più o meno questo:

> *Immaginate che sia possibile parcheggiare in una rotonda a margine dell'aiuola centrale, e che le zone di parcheggio siano delimitate in questo modo: tracciando le righe ogni due metri, ricavando cento spazi. Immaginiamo poi che l'auto standard sia lunga quattro metri. Ogni utente del parcheggio parcheggerà quindi se e solo se trova due spazi adiacenti. Le nostre macchine arrivano una per volta, e si piazzano in un qualsiasi "buco" da due spazi adiacenti che trovano, scelto a caso se ce ne sono più di due consecutivi ma comunque rigorosamente allineati alle strisce. Quante macchine ci si aspetta di trovare, a parcheggio pieno, ossia con solo degli spazi unitari rimasti liberi?*

A suo tempo (in RM151) avevamo pubblicato una soluzione provocatoria di ***Alberto R.***, e altri procedimenti di ***Franco57***, ***Bobbin Threadbare*** e ***GaS***. In RM153 avevamo pubblicato ancora un contributo di ***trentatrè***, e questa volta vi passiamo quello che ci scrive ***Agapetos***:

> volevo comunicarvi una curiosità che ho scoperto riguardo al problema del parcheggio circolare. Il limite cui tende C_n/n – ovvero $(1–e^{-2})/2$ come ha scoperto ***Franco57*** – ha un curioso sviluppo in frazione continua, cioè:

> $(1-e^2)/2$ = 1/(2+1/(3+1/(5+(7+....)))) = [0;2,3,5,7,9....] dove, empiricamente, ho trovato che la sequenza prosegue con i numeri dispari almeno fino a 91 – ma scommetterei che prosegue oltre.
>
> Non ho gli strumenti matematici per dimostrare questa identità, equivalente all'identità
>
> tanh(1)=1/(1+(3+1/(5+(1+(7+...))))) = [0;1,3,5,7,9....] ma magari qualcuno dei lettori di RM ce li ha.....

Perché no? Fatevi sentire.

4.2 [151]

4.2.1 Non mi piace il MasterMind

Anche per questo problema, è giunta una nuova soluzione. Il testo era il seguente:

> *Alberto e Fred hanno scelto* 6 *numeri diversi tra loro compresi tra* 1 *e* 49*, estremi inclusi. Il Capo può fare delle ipotesi, scegliendo un sottoinsieme dei numeri e proponendoli, i VAdLdRM diranno quanti (non quali) sono quelli giusti. Quale strategia permette di indovinare i* 6 *numeri con il minimo di tentativi?*

Pochi commenti pubblicati in RM152, da ***Franco57*** e ***Fabrizio***, una soluzione di ***MBG*** in RM153, ed ora abbiamo ricevuto una soluzione collettiva da parte di ***Riccardo*** e ***Maurizio***:

> Sia n il numero complessivo dei numeri compresi fra 1 e n, k il numero di numeri da indovinare diversi fra loro e p il numero dei numeri contenuti nei sottoinsiemi usati per i tentativi. I sottoinsiemi contengono tutti lo stesso numero di numeri all'infuori al più di un sottoinsieme "residuo" che conterrà un numero minore di numeri rispetto agli altri sottoinsiemi. Diamo qui per scontato che tale insieme residuo non rappresenta un tentativo.
>
> Per fare un esempio, se n=11 e p=3 i tentativi saranno 3 e precisamente gli insiemi (1,2,3) (4,5,6) (7,8,9) mentre (10,11) sarà l'insieme "residuo" che non rappresenta un tentativo in quanto univocamente determinato dagli altri 3 tentativi.
>
> All'inizio faremo quindi un numero di tentativi pari a: INT(n/p).
>
> A questo punto nel caso peggiore avremo k insiemi contenenti ciascuno almeno un numero giusto.
>
> Il numero di tentativi per ogni sottoinsieme contenente nel caso peggiore p numeri è dato da: INT((p+1)/2), e quindi in totale per k sottoinsiemi: k·INT((p+1)/2).
>
> Quindi il numero di tentativi sarà complessivamente dato da
>
> $$\mathrm{INT}(n/p)+k\cdot\mathrm{INT}((p+1)/2)$$
>
> Nel problema proposto n=49 e k=6, da cui mettendo in tabella per valori crescenti di p=2,3,4,... si trova che il numero minimo di tentativi è 24 ottenuto con p=4.
>
> O no? Il dubbio sta nella formula usata per determinare il numero di tentativi che è stata trovata empiricamente ma a un certo punto ci siamo baldanzosamente fermati pensando che fosse vera..

Che ne dite? Fateci sapere.

4.3 [152]

4.3.1 Dai Teoremi delle tonsille, PM

> Vi ricordate che ***Laura*** aveva espresso dei dubbi sul PM di RM152? Beh, quasi a confermare che i nostri lettori questo mese sono stati poco attivi (o la posta di RM

si è mangiata tutte le soluzioni), ***Laura*** si è risposta da sola. Ci ha mandato anche i file in geogebra che fanno tutto il lavoro e i calcoli, ma noi ce lo teniamo per noi perché siamo perfidi e gelosi. Le passiamo subito la parola, lasciandole tutta la pagina.

Che lato deve avere il triangolo equilatero che contiene il punto che dista 3,4 e 5 dai suoi vertici?

E aggiungo: è possibile determinare la posizione esatta del punto P all'interno del triangolo? E se invece di prendere 3, 4 e 5 per le tre distanze, considerassimo un'altra terna pitagorica, è sempre possibile determinare il lato del triangolo equilatero? E se fissassimo una terna qualsiasi di numeri?, lo troviamo sempre un triangolo? E ne troviamo uno solo?

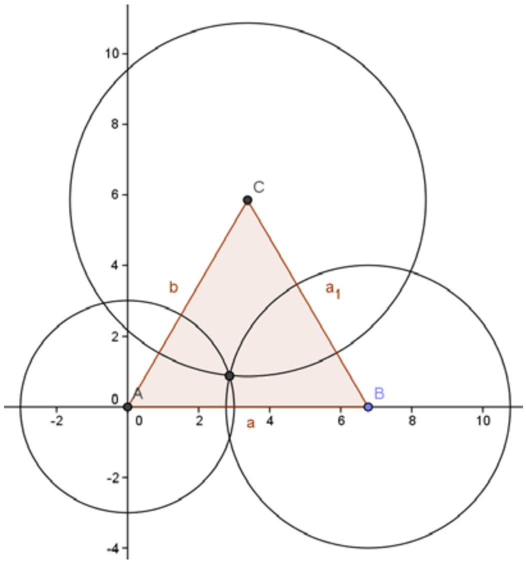
Rispondere a queste domande è molto semplice se si utilizza la formula proposta da Martin Gardner $\left(a^2+b^2+c^2+L^2\right)^2=3\left(a^4+b^4+c^4+L^4\right)^4$ in cui *a, b, c* sono le distanze (qualsiasi) del punto dai vertici, mentre *L* è il lato del triangolo equilatero.

Vediamo perché:

La formula citata può essere ottenuta molto facilmente applicando semplici considerazioni di geometria analitica. Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano in cui uno dei vertici del triangolo si trovi sull'origine e un lato giaccia sul semiasse positivo delle ascisse.

I tre vertici del triangolo avranno pertanto coordinate:

A(0;0), B(*L*;0), C(1/2*L*;√3/2*L*). Prendiamoli come centri di tre circonferenze che hanno i raggi rispettivamente uguali a *a*, *b* e *c*. Il punto P , se esiste, sarà il punto d'intersezione comune alle tre circonferenze e si potrà determinare risolvendo il sistema seguente:



$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ (x-L)^2+y^2=b^2 \\ \left(x-\frac{1}{2}L\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}L\right)^2=c^2 \end{cases}$$

Le incognite del sistema sono *x*, *y* e *L*.

Risolvendo il sistema troviamo le coordinate del punto $P\left(\frac{L^2+a^2-b^2}{2L};\frac{a^2+b^2-2c^2+L^2}{2\sqrt{3}L}\right)$, coordinate che sostituite nella prima equazione forniscono proprio la formula di Martin Gardner:

$$\left(\frac{L^2+a^2-b^2}{2L}\right)^2+\left(\frac{a^2+b^2-2c^2+L^2}{2\sqrt{3}L}\right)^2=a^2$$

...

$$\left(a^2+b^2+c^2+L^2\right)^2=3\left(a^4+b^4+c^4+L^4\right)^4$$

Per determinare il lato L possiamo partire dalla formula proposta e osservare che risolvendo rispetto ad L diventa un'equazione biquadratica:

$$L^4-\left(a^2+b^2+c^2\right)L^2+\left(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-a^2c^2\right)$$

con discriminante

$$\Delta=-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2+4a^2b^2=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c).$$

Se $a<b<c<a+b$ (come nel nostro caso: a=3, b=4, $a+b$=7 >c) il discriminante è sicuramente positivo e l'equazione avrà in generale quattro soluzioni: L_1, L_2, L_3, L_4 date dalle formule seguenti:

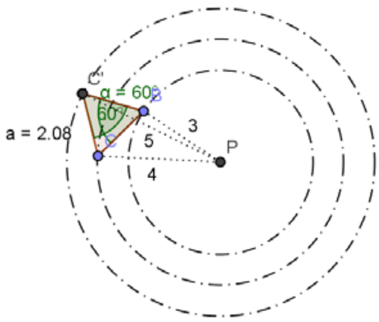
$$L_1=\frac{-\sqrt{a^2+b^2+c^2-\sqrt{3}\sqrt{-a^4+2a^2b^2-b^4+2a^2c^2+2b^2c^2-c^4}}}{\sqrt{2}}$$
$$L_2=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-\sqrt{3}\sqrt{-a^4+2a^2b^2-b^4+2a^2c^2+2b^2c^2-c^4}}}{\sqrt{2}}$$
$$L_3=\frac{-\sqrt{a^2+b^2+c^2+\sqrt{3}\sqrt{-a^4+2a^2b^2-b^4+2a^2c^2+2b^2c^2-c^4}}}{\sqrt{2}}$$
$$L_4=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2+\sqrt{3}\sqrt{-a^4+2a^2b^2-b^4+2a^2c^2+2b^2c^2-c^4}}}{\sqrt{2}}$$

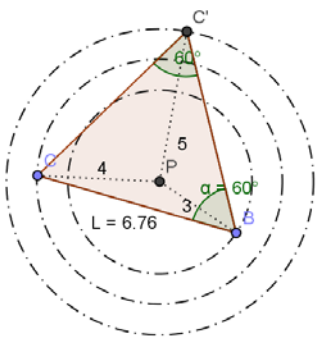
Le soluzioni negative L_1 e L_3 chiaramente non sono accettabili perché negative, mentre delle soluzioni positive soltanto una è accettabile ed è L_4 , cioè quella maggiore, l'altra soluzione corrisponde alla condizione geometrica per cui il punto P è esterno al triangolo, pur distando a, b e c dai vertici del triangolo.

Tornando al nostro caso otteniamo le soluzioni:

$$a=3, b=4, c=5$$
$$L_1=-\sqrt{25-12\sqrt{3}}$$
$$L_2=\sqrt{25-12\sqrt{3}}$$
$$L_3=-\sqrt{25+12\sqrt{3}}$$
$$L_4=\sqrt{25+12\sqrt{3}}$$

di cui soltanto L_2 e L_4 sono positive ma corrispondono alle due situazioni geometriche di figura:





Pertanto l'unica soluzione accettabile è $L_4 \approx 6{,}76643$

Le coordinate del punto saranno P≈(2,866;0,887).

I risultati fin qui ottenuti prescindono dall'aver scelto per le distanze una terna pitagorica e sono validi ogniqualvolta si prenda una terna di numeri che assolve alla condizione $a<b<c<a+b$. Se invece ci interessassimo proprio delle terne pitagoriche? Molto semplicemente possiamo osservare che questa condizione è sempre verificata poiché

$$c^2=a^2+b^2$$
$$\downarrow$$
$$c^2=(a+b)^2-2ab$$
$$\downarrow$$
$$c^2<(a+b)^2$$
$$\downarrow$$
$$c<a+b\ \forall a,b,c>0$$

Ricaviamo per le terne pitagoriche un risultato più semplice di quello ottenuto nel caso generale; sappiamo che un modo per generare terne pitagoriche è scegliere due numeri interi e calcolare la terna tramite le formule:

$$a=m^2-n^2$$
$$b=2mn$$
$$c=m^2+n^2$$

Sostituendo queste espressioni in m e n nella formula di Martin Gardner otteniamo:

$$(2c^2+L^2)^2=3(2c^4-2a^2b^2+L^4)$$
$$\downarrow$$
$$(2(m^2+n^2)^2+L^2)^2=3(2(m^2+n^2)^4-2(m^2-n^2)^2 4m^2n^2+L^4)$$
$$\downarrow$$
$$2L^4-4(m^2+n^2)^2L^2+6(m^2+n^2)^4-24m^2n^2(m^2-n^2)^2-4(m^2+n^2)^4=0$$
$$\downarrow$$
$$L^4-2L^2(m^2+n^2)^2+(m^8-8m^6n^2+30m^4n^4-8m^2n^6+n^8)=0$$
$$\downarrow$$
$$L^4-2L^2(m^2+n^2)^2-((m^2-n^2)^4-4m^2n^2(m^4+6m^2n^2-n^4))=0$$

Il discriminante, come avevamo osservato precedentemente, è sempre positive:

$\Delta=48m^2n^2\,(m^2-n^2)^2$: che è sempre positivo per ogni $m,n\neq 0$.

Le quattro soluzioni dell'equazione sono:

$$L_1=-\sqrt{(m^2+n^2)^2-2\sqrt{3}mn(m^2-n^2)}\ldots\ldots\ldots\rightarrow\ldots\ldots\ldots L_1-\sqrt{c^2-ab\sqrt{3}}$$
$$L_2=\sqrt{(m^2+n^2)^2-2\sqrt{3}mn(m^2-n^2)}\ldots\ldots\ldots\rightarrow\ldots\ldots\ldots L_2=\sqrt{c^2-ab\sqrt{3}}$$
$$L_3=-\sqrt{(m^2+n^2)^2+2\sqrt{3}mn(m^2-n^2)}\ldots\ldots\ldots\rightarrow\ldots\ldots\ldots L_3=-\sqrt{c^2+ab\sqrt{3}}$$
$$L_4=\sqrt{(m^2+n^2)^2+2\sqrt{3}mn(m^2-n^2)}\ldots\ldots\ldots\rightarrow\ldots\ldots\ldots L_4=\sqrt{c^2+ab\sqrt{3}}$$

Soltanto la soluzione L_4 è accettabile per il nostro problema geometrico poiché la L_2 fornisce un lato più corto di uno dei segmenti (c) che dovrebbero essere interni al triangolo.

Quindi stabilita una terna pitagorica, esiste sempre un triangolo che contiene un punto P le cui distanze dai vertici sono uguali ai valori (a; b; c) definiti dalla terna.

Le coordinate del punto P, qualora si fissi un sistema di riferimento cartesiano ortogonale in cui un vertice del triangolo equilatero si trova nell'origine e un lato giace sul semiasse positivo delle ascisse sono date da:

$$P\left(\frac{2a^2+ab\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{3}}};\frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{3}}}\right)$$

Naturalmente dal punto di vista geometrico per ogni triangolo ci sono tre punti che distano (a; b; c) dai vertici, gli altri due si ottengono per rotazione intorno al centro del triangolo.

Si può anche notare che uno degli angoli che i segmenti congiungenti il punto P con i vertici del triangolo equilatero è sempre $5/6\,\pi$, mentre gli altri dipendono dai rapporti a/c e b/c, come si ricava facilmente utilizzando il teorema di Carnot.

4.4 [153]

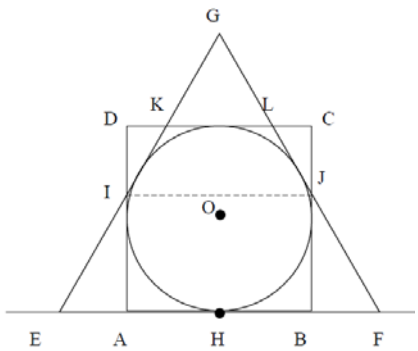
4.4.1 Il giardino dei destini incrociati

Finalmente arriviamo al primo problema del mese passato. Vediamo di riassumerne il testo:

> *Piotr ha piastrellato in bianco un cerchio del raggio di dieci metri, poi ha piantato degli alberi ai vertici di un quadrato e di un triangolo nei quali era inscritto il cerchio piastrellato. Adesso sta pensando di piastrellare la parte comune al triangolo e al quadrato in colore rosso. Qual è il minimo dell'area in comune tra triangolo e quadrato rispetto al raggio del cerchio?*

Una sola soluzione, qui, da parte di ***Mirhonf***, a cui diamo il benvenuto e che preghiamo di mandarci le soluzioni in formati più editabili, la prossima volta[21]:

Problema: qual é il minimo dell'area in comune tra triangolo e quadrato, entrambi circoscritti alla circonferenza di centro O e raggio r?



Poniamo l'origine di un sistema di assi cartesiani in H(0;0). Le coordinate di O sono: O(0;r).

I vertici del quadrato circoscritto alla circonferenza sono A($-r$;0), B(r;0), C(r;2r), D($-r$;2r).

I vertici del triangolo isoscele circoscritto alla circonferenza sono E, F, G.

L'area da minimizzare e la somma delle aree del rettangolo AIJB e del trapezio IJLK.

La generica retta EG ha equazione $y=mx+q$ ($m>0$). La circonferenza ha equazione $x^2+y^2-2ry=0$.

Mettendo a sistema queste due equazioni e imponiamo la condizione di tangenza, dalla prima ricavo $x=\dfrac{y-q}{m}$, che sostituita nella seconda dà $\dfrac{y^2-2qy+q^2}{m^2}+y^2-2ry=0$, da cui $y^2 - 2qy + q^2 + m^2 y^2 - 2rm^2 y = 0$ che riordinata dà $y^2(1 + m^2) - 2y(q + rm^2) + q^2 = 0$.

A questa equazione di 2° grado impongo il delta uguale a zero.

$\Delta/4 = (q + rm^2)^2 - (1+ m^2)q^2 = 0$ che sviluppata dà $q^2 + 2m^2qr + r^2m^4 - q^2 - m^2q^2 = 0$ cioè $2qr + r^2m^2 - q^2 = 0$ da cui $2qr + r^2m^2 - q^2 = 0$.

[21] Forse vale la pena di ricordarvi che il pdf è un formato meraviglioso per prevenire il copia&incolla necessario alla preparazione della rivista. Siamo flessibili, ma se mi riducete la fatica di riscrivere tutte le vostre formule, vi sono grata.

Quindi: $m^2 = \frac{q(q-2r)}{r^2}$, e poiché $m>0$, $m = \frac{\sqrt{q(q-2r)}}{r}$.

NB: se $x=0$ la retta EG ha ordinata $y=q$; quindi deve essere $q>2r$.

Calcoliamo ora le coordinate del punto I. Per fare questo, sostituiamo nell'equazione di EG: $x=-r$, $y = -\sqrt{q(q-2r)} + q$. Analogamente $J\left(r; q - \sqrt{q(q-2r)}\right)$. Quindi l'area di ABJI, che chiamo A_1 è: $A_1 = 2r\left(q - \sqrt{q(q-2r)}\right)$.

Calcoliamo ora le coordinate di K e L. Entrambi i punti hanno ordinata pari a $2r$. Quindi $2r = \frac{\sqrt{q(q-2r)}}{r}x + q$ da cui $x = \frac{r(2r-q)}{\sqrt{q(q-2r)}} = -\frac{r}{q}\sqrt{q(q-2r)}$. Quindi $KL = 2\frac{r}{q}\sqrt{q(q-2r)}$.

L'area del trapezio IJLK, che chiamo A_2, è

$$A_2 = \frac{2r}{2}2\frac{r}{q}\sqrt{q(q-2r)} = \frac{2r^2}{q}\sqrt{q(q-2r)}.$$

L'area è $A = A_1 + A_2 = \ldots = 2rq + 2r\sqrt{q(q-2r)}\left(\frac{r}{q} - 1\right)$.

Calcolo la derivata di A rispetto a q e impongo che sia uguale a zero.

$$\frac{dA}{dq} = \ldots = 2r\left[1 - \sqrt{q(q-2r)}\frac{q^2 - rq - r^2}{q^2(q-2r)}\right]$$

$$\frac{dA}{dq} = 0 \Rightarrow \left(q^2 - rq - r^2\right)\sqrt{q(q-2r)} = q^2(q-2r)$$

Semplificando ed elevando al quadrato entrambi i membri (...)[22] alla fine si ottiene $q = r \pm r\sqrt{2}$. Sappiamo che $q>2r$ quindi si ha il minimo per $q = r\left(1+\sqrt{2}\right)$. Di conseguenza, in corrispondenza di questo valore $m=1$, le coordinate di E e F sono $E\left(-r\left(1+\sqrt{2}\right);0\right)$, $F\left(r\left(1+\sqrt{2}\right);0\right)$.

L'ordinata dei punti I e J vale $y = r\left(1+\sqrt{2}\right) - r = r\sqrt{2}$; $A_1 = 2r^2\sqrt{2}$; $A_2 = 2r^2\left(\sqrt{2}-1\right)$; $A = 4r^2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Ancora una volta chiedo scusa – soprattutto a ***Mirhonf*** – per aver accorciato i passaggi, ma spero che la soluzione si capisca e di non aver fatto troppi errori. Andiamo avanti.

4.4.2 Problema impossibile dal Luogo del Divano Quantistico

I problemi del mese scorso erano di nuovo piuttosto criptici, anche il secondo aveva a che fare con giardini ed alberi:

Un amico ci mostra il progetto della nuova casa con il terreno annesso. Si tratta di un triangolo i cui lati sono tre strade di lunghezza 850, 1000 e 1200 metri.

[22] *Qualche passaggio non l'ho ricopiato, abbiate pazienza: credetemi, lui li ha scritti tutti per bene [RdA]*

> *L'idea del nostro amico è di costruire la casa in un punto e poi tracciare le vie più brevi per raggiungere ciascuna delle tre strade dalla casa e, alla fine, unire i tre punti di incrocio tra di loro con dei filari di alberi: inoltre richiedeva che gli alberi fossero a cinque metri uno dall'altro e che ce ne fossero lo stesso numero su ogni lato. Quanti alberi deve comprare?*

Anche qui, purtroppo, una sola soluzione, quella di ***Camillo***:

> A proposito del Divano Quantistico, non so trovare una sicura soluzione matematico-geometrica però posso fare delle supposizioni.
>
> Il punto in cui collocare la casa e da cui tracciare le vie più brevi per raggiungere le 3 strade che circondano la proprietà è senz'altro l'incentro del triangolo. Ma questo va contro al fatto che dal punto di congiunzione tra le strade si vorrebbe piantare 3 file di alberi con lo stesso numero di piante per ogni fila distanziate di 5 metri tra loro. Questo comporta che il triangolo piantumato debba essere equilatero e quindi la casa non può essere costruita sull'incentro ma leggermente spostata e centrata rispetto al triangolo equilatero sui cui lati vanno messe le piante.
>
> Ora con una semplice formula che coinvolge il semiperimetro si trova il raggio del cerchio inscritto nel triangolo di strade, penso, comunali.
>
> Questo raggio vale 274,81 metri ed il triangolo equilatero inscritto nel cerchio costruito su questo raggio ha un lato di 475,99 metri. Con le piante messe a distanza di 5 metri una dall'altra si evince che andrebbero messe su un triangolo di 480 metri e quindi 96 piante per lato o se si preferisce 97 di cui una è in comune a 2 lati. Quindi il vostro amico dovrebbe comprare 288 piante.
>
> Il mio dubbio è; ma un triangolo equilatero di 480 metri di lato inscritto nel triangolone riesce a toccarne i tre lati, oppure va aumentato a 485 o 490 metri o più? A questo io non so rispondere però di una cosa sono certo l'amico potrebbe costruire la casa in 2 punti diversi perché vi sono 2 punti sul piano che hanno le caratteristiche richieste.
>
> A naso; lo so la matematica non è fatta di "a naso" o "parrebbe". Scrivevo; a naso, parrebbe che la linea di congiunzione tra questi 2 punti potrebbe essere perpendicolare alla retta di Eulero ed in linea con l'incentro.
>
> Questo perché la costruzione geometrica, in scala, con riga e compasso è imprecisa e "parrebbe" quanto sopra.

Beh, per il momento tutto quello che abbiamo è il naso di ***Camillo***, e ne siamo contenti. Scriveteci ancora, se la pensate diversamente. A risentirci a dicembre!

5. Quick & Dirty

Si hanno due nastri di carta e un accendino. Ogni nastro di carta impiega esattamente 1 ora a bruciarsi completamente dall'inizio alla fine. La velocità con la quale esso brucia non è costante in ogni tratto: a volte brucia velocemente all'inizio e lentamente alla fine oppure in maniera del tutto casuale. È possibile calcolare quando trascorrono esattamente 45 minuti, senza disporre di null'altro?

> *Si accende il 1° nastro da un solo capo ed il 2° da entrambi. Quando il 2° è completamente bruciato (mezz'ora), si accende l'altro capo del 1° nastro. Quando è completamente bruciato anche il 1° nastro è trascorso un altro quarto d'ora.*

6. Pagina 46

Soluzione 1

Il numero degli interi nella sequenza $1,2,3,\dots,n$ che sono divisibili per un dato k è $\left[\frac{n}{k}\right]$, e sono nella fattispecie gli interi $k, 2k, 3k, \dots, k\left[\frac{n}{k}\right]$; se sommiamo le comparse di k in questa sequenza, otteniamo $k\left[\frac{n}{k}\right]$, e quindi si hanno i seguenti risultati:

Parte prima: La somma $\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\dots+\left[\frac{n}{k}\right]+\dots+\left[\frac{n}{n}\right]$ è pari al numero degli interi della sequenza $1,2,3,\dots,n$ che sono divisibili per 1, più il numero degli interi della sequenza che sono divisibili per 2,..., più il numero degli interi della sequenza che sono divisibili per *n*. Ma questa è esattamente la somma $t_1+t_2+\dots+t_n$ richiesta dal problema.

Parte seconda: La somma $1\left[\frac{n}{1}\right]+2\left[\frac{n}{2}\right]+\dots+k\left[\frac{n}{k}\right]+\dots+n\left[\frac{n}{n}\right]$ è pari alla somma ottenuta sommando l'intero 1 ogni volta che esso sia un divisore di un numero nella sequenza $1,2,3,\dots,n$, più l'intero 2 ogni volta che esso sia un divisore di un numero nella sequenza, più l'intero 3 ogni volta che esso sia un divisore di un numero nella sequenza, e avanti in questo modo: ma questa è esattamente la somma $s_1+s_2+\dots+s_n$ richiesta dal problema.

Soluzione 2

La *Soluzione* 1 suggerisce una via geometrica molto più elegante.

Consideriamo i rami nel primo quadrante delle iperboli equilatere $y=\frac{k}{x}$ o, equivalentemente, $xy=k$, come in figura.

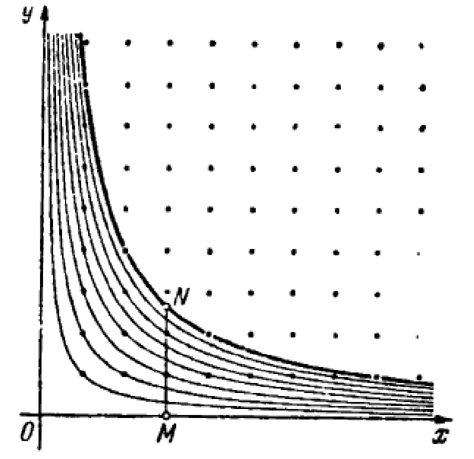
Evidenziando i punti a coordinate intere, vediamo che se un intero x è un divisore dell'intero k, allora il punto (x,y) appartiene all'iperbole di equazione $xy=k$. Di converso, se l'iperbole $xy=k$, allora x è un divisore di k. Da cui, il numero t_k degli interi divisori di k è pari al numero dei punti a coordinate intere giacenti sull'iperbole $xy=k$. Teniamo ora presente che, se $n>m$, l'iperbole $xy=n$ sarà "al di sotto" dell'iperbole $xy=m$, intendendo con questo che qualsiasi retta perpendicolare all'asse delle scisse incrocerà la prima iperbole prima di incrociare la seconda.

Da queste considerazioni, emergono due implicazioni:

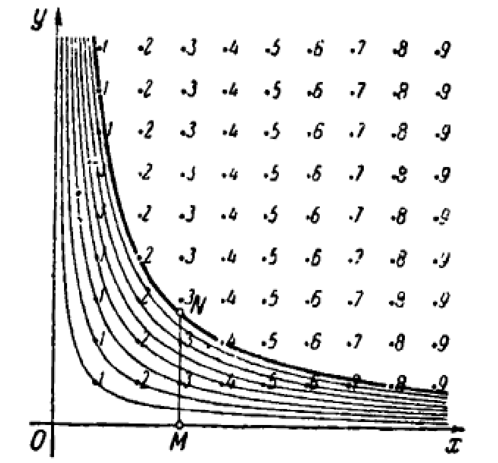
Parte prima: la somma $t_1 + t_2 + \ldots + t_n$ è pari al numero dei punti giacenti al di sotto o sull'iperbole $xy = n$; ognuno di questi punti giace su un'iperbole $xy = k, k \leq n$. Con riferimento alla figura a fianco, il numero dei punti con ascissa k situati su un'iperbole qualsiasi è allora pari alla parte intera del segmento $\overline{MN} = \left[\frac{n}{k}\right]$; da questo, otteniamo che:

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_n = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right],$$

che è la tesi.



6 *Le iperboli* $xy = k$



7 *Le iperboli* $xy = k$ *, con evidenziate le ascisse sul reticolo degli interi.*

Parte seconda: Se, a fianco di ognuno dei punti del reticolo intero, scriviamo il valore dell'ascissa, possiamo notare che $s_1 + s_2 + \ldots + s_n$ è pari alla somma degli interi $\left[\frac{n}{k}\right]$ situati al di sotto o sull'iperbole $xy = n$.

Ma la somma di questi valori per una specifica ascissa k è pari a $k\left[\frac{n}{k}\right]$.

Allora, abbiamo:

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n = 1\left[\frac{n}{1}\right] + 2\left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + n\left[\frac{n}{n}\right],$$

che è la tesi.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Nudo Integrale

Bisogna approfittare delle occasioni.

È assai raro che questa rubrica non sia scritta dal tenutario ufficiale, e ancor meno che venga affidata a qualcuno che non sia particolarmente bravo in matematica[23]; quindi la congiuntura va sfruttata. Per una volta, anziché parlare di "strumenti matematici[24]" di alto livello, parleremo dei dubbi degli studenti di matematica. Di quelli poco bravi, comunque; per intenderci, intendiamo affidarci solo all'esperienza diretta e alla memoria.

C'è un momento davvero cruciale, nello studio della nostra amata materia: l'incontro con il calcolo differenziale e integrale. O, per dirla in altro modo, con i rudimenti dell'analisi. Il momento è cruciale per diverse ragioni: innanzitutto, per l'età in cui quest'esperienza viene vissuta: le cose sono oggi forse cambiate un po', ma fino a qualche lustro fa l'incontro con derivate e integrali giungeva nell'ultimo anno di liceo per coloro che frequentavano lo scientifico, e solo all'università per coloro che avevano scelto un altro tipo di medie superiori. La conseguenza immediata era che il *calcolo*[25] risultava sempre fonte di drammi per tutti: per i ragazzi dello scientifico, che già sapevano che avrebbero dovuto versare lacrime sudore e sangue su cotanta disciplina in vista del famigerato scritto di matematica della maturità, in cui lo studio di funzione era la parte primaria ed essenziale; e per tutti gli altri temerari che si avventuravano in facoltà scientifiche con diversi diplomi, che incontravano – quasi sempre al primo semestre del primo anno, cioè subito – un tambureggiante esame nomato "Analisi Matematica Uno". Quello che le due situazioni, apparentemente ben diverse, hanno in comune è l'elevata quantità di stress che comportano: i liceali sanno che dovranno affrontare lo scritto più caratteristico della loro maturità su questo argomento, gli universitari provenienti da altri istituti sanno che Analisi Uno è un esame scritto da dare presto, e si sentono in qualche modo già ritardatari fin dalla prima lezione del corso.

In più c'è il non trascurabile fatto che il calcolo è materia che ha una potenza di fuoco davvero eccezionale, un vero salto quantico dal punto di vista delle cose che si possono fare con la matematica: quindi ci sono molti teoremi da imparare e – soprattutto – autentiche montagne di esercizi da fare, per abituarsi all'uso del nuovo strumento. In altre parole, si ha davvero poco tempo per soffermarsi su questioni concettuali, quasi di principio: ci sono pertanto delle cose talmente fondamentali e ripetute che si imparano per osmosi, quasi sempre senza chiedersene le ragioni. È virtualmente certo che i professori, fedeli alla deontologia professionale, avranno in qualche momento del corso giustificato e spiegato il "perché" di questo o quel principio, ma è altrettanto certo (e non solo virtualmente), che il discente, nella maggior parte dei casi, acquisisca l'informazione essenziale, la incastri nella mente come dato di fatto, e non si interroghi più di tanto sulla questione. Un buon esempio – anche se a nostro parere non il migliore, come vedremo – è il cosiddetto "*significato geometrico della derivata*".

Non esiste quasi studente di analisi che non sappia rispondere d'istinto alla questione: sorvolando sulla proprietà rigorosa del linguaggio e dei termini, delle condizioni di continuità e di tutti gli annessi e connessi, qualcosa del tipo "*la derivata di una funzione in un punto corrisponde alla tangente alla curva in quel punto*" la si riesce ad ottenere

[23] Ne ricordiamo a memoria uno di .mau., uno di Alice, insomma davvero pochi. Ma già che ci siamo, ricordiamo a voi che l'elenco completo dei PM li potete trovare qui: http://www.rudimathematici.com/indexmundidb.php. Sono ormai un bel numero, come potete vedere.

[24] Perché voi ve lo ricordate, vero, cosa significa "*Paraphernalia Mathematica*"?

[25] È opportuno ricordare che per i *"veri matematici"* (copyright Zar), il *calcolo* è per definizione il calcolo differenziale e integrale, e quindi nel citarlo omettono gli aggettivi qualificativi.

quasi sempre. L'eventuale (e crudele) domanda di approfondimento ("*…e perché?*") ha però di solito minore fortuna.

Ed è un po' un peccato. Perché l'ingresso dell'analisi matematica è cruciale non solo nella vita degli studenti di matematica, ma anche nella storia della matematica stessa. È l'analisi che, in un certo senso, introduce il concetto di "movimento" in una materia che fino ad allora era quasi esclusivamente "statica". I numeri sono in fondo oggetti ben definiti e fermi, e la matematica dell'antichità si è sempre occupata solo di scoprire come interagiscono, addizionandosi, moltiplicandosi, relazionandosi anche in modi complessi, ma pur sempre senza interessarsi troppo di cosa facessero i numeri loro vicini, subito prima e subito dopo nella retta dei reali. In realtà, ciò è probabilmente dovuto proprio al fatto che l'idea stessa di "retta dei reali" era ancora lontana; il concetto di continuità doveva ancora farsi strada. È il momento, insomma, in cui si nota che quasi tutta la matematica precedente è essenzialmente matematica discreta, e viene introdotta una sorta di idea di "dinamica" nuova, rispetto alla staticità precedente. E forse è un caso, o forse no, che questo accada, nella storia della matematica, proprio quando la nuova fisica galileiana lancia i suoi primi vagiti: sarà che Newton[26] si è interessato di fisica e per farlo ha inventato il calcolo differenziale, o piuttosto che ha scoperto il calcolo differenziale e si è accorto solo dopo di quanto fosse utile per la fisica?

La definizione stessa di derivata contiene questo "dinamismo":

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

perché l'introduzione di Δx sta proprio a significare, in fondo, "*e che succede subito dopo x?*"[27]

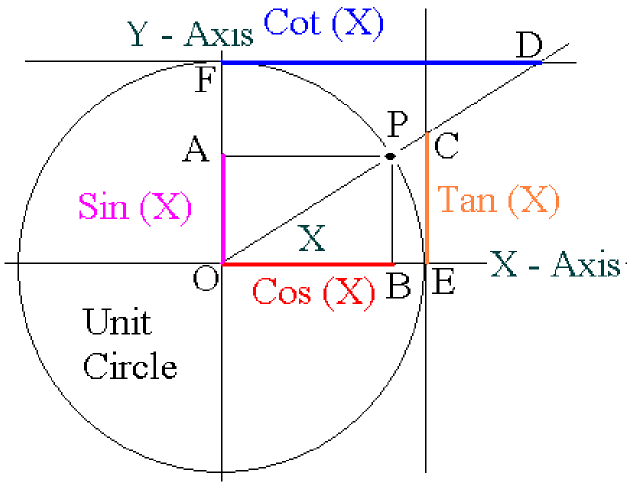
A questo punto dello studio, lo Studente Poco Bravo memorizza definizione ed esempi di derivate, cataloga l'informazione aggiuntiva del *significato geometrico* come *tangente*, e passa a fare gli esercizi. Quello che gli si presenta, ma che rigorosamente non affronta, è ora probabilmente un problema di eccesso di significati per una sola parola. Il termine "tangente", infatti, ha a questo punto nella sua testa più riferimenti, più o meno slegati. Esiste la *tangente* di cui parlano i giornali nelle inchieste di corruzione; esiste il sinonimo linguistico di *toccante*, da cui discende certo anche quello geometrico, ma che è più comprensivo; conosce poi la *tangente* trigonometrica (ricorda a memoria *seno su coseno uguale tangente*), quella cinematica (la forza centripeta tiene vincolato un corpo, se viene a mancare esso parte per la *tangente*), e naturalmente quello geometrico, quando qualche retta o curva tocca qualcos'altro in un punto. Adesso aggiunge questa ulteriore connessione derivata = *tangente*, e non ci pensa più. Dovrebbe forse chiedersi per quale ragione gli inventori di parole sembrano essere tutti così poco originali, ma ci sono un sacco di compiti da fare, non è il caso di farsi troppe domande inutili.

Si perde così un'occasione davvero buona per chiudere un nodo importante e utile per tutta la conoscenza precedente e successiva. Nel suo *cursus studiorum* il nostro eroe ha incontrato già diversi settori della scienza, ma quasi certamente sono ancora vissuti come camere stagne e solo prestando un po' di attenzione potrebbe accorgersi che l'analisi le può connettere. Abbiamo già accennato alla sua caratteristica di fare da pontiere eccezionale tra la matematica e la fisica, ma è solo una parte del suo potere. Dal punto di vista dello Studente Poco Bravo, la trigonometria è vissuta spesso come una branca quasi isolata della matematica, solo apparentemente legata alla geometria; in compenso

[26] Non ci siamo dimenticati di Leibniz: è solo che in questo caso, il paragone calza meglio se ci limitiamo a considerare l'autore dei "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*"…

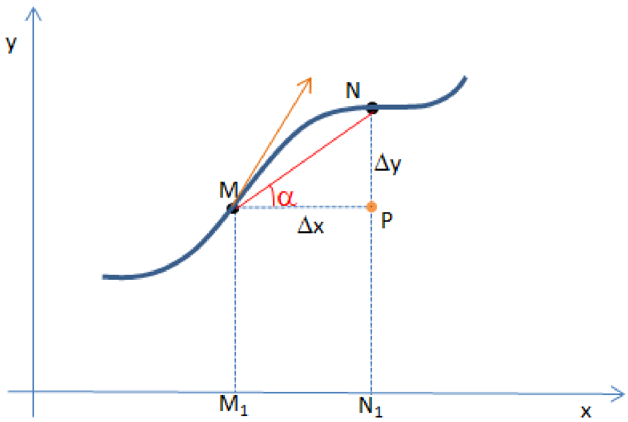
[27] È evidente che, pur se scritto da un cattivo studente di analisi, questo pezzo presuppone alcune conoscenze che potrebbero non essere note a chi non ha mai affrontato i rudimenti del calcolo: tanto per dire, il concetto di limite e quello di funzione (anzi, di funzione continua). I rari lettori meno preparati dello scrivente, comunque, possono facilmente trovarne le definizioni anche solo in qualche enciclopedia, Wikipedia compresa.

ricorda che quest'ultima è stata saldata all'algebra da Descartes, ma il concetto forse merita di essere ulteriormente ribadito. Ebbene, tutte queste connessioni possono avere un bel viatico unificatore proprio nel concetto di tangente.



Il fatto è che quasi certamente lo Studente Poco Bravo ha già perso l'occasione per riunire geometria e trigonometria: avrà già incontrato nei suoi studi il cerchio trigonometrico, ma si è soffermato solo sulla rappresentazione del seno e del coseno, senza capire fino in fondo il senso della tangente: al massimo ha pensato che il cerchio servisse come ausilio mnemonico, e poi diciamocelo: i greci se la saranno pure cavata bene con i rapporti di segmenti, ma non è mica così intuitivo capire che il rapporto tra il segmento fucsia e quello rosso corrisponde davvero al segmento arancio. E che la retta parallela all'asse delle x sia *tangente* al cerchio, beh, è poco più di un caso, al massimo serve per ricordarsi come ridisegnare il tutto alla lavagna. E il legame tra tangente geometrica e tangente trigonometrica va spesso a farsi benedire.

Quando di arriva al calcolo differenziale, la formula che definisce la derivata si piazza nelle meningi con il suo bel limite, il suo ancor più bel rapporto con Δx al denominatore, e lo studente ha già il suo daffare a memorizzare la cosa, oltre che a ricordare tutti gli agguati dei denominatori che tendono a zero. Sul testo c'è di sicuro un disegno che prova ad illustrare cosa significhi davvero prendere $f(x)$, sottrarlo al poco maggiore $f(x+\Delta x)$, commisurare tutto su Δx stesso e poi far tendere a zero lo stesso Δx. Il disegno, di solito, è qualcosa del genere:



In questo caso, il punto M fa la parte di $f(x)$, il punto N quella di $f(x+\Delta x)$; Δx e Δy sono segnati in figura, e se uno si ricordasse il cerchio trigonometrico, non dovrebbe far troppa fatica a ricordare che il loro rapporto corrisponde alla tangente dell'angolo α formato dalla secante MN con l'asse delle x; in buona pratica, dal segmento segnato in rosso. Quindi, abbiamo tirato in ballo la tangente *trigonometrica*. Per renderla *analitica*, dobbiamo usare il solito trucco che richiede l'analisi, cioè mettere tutto in movimento. Far tendere Δx a zero, infatti, significa in pratica "spingere" il punto P fino a farlo coincidere col punto M, e vedere che fine fa la nostra tangente trigonometrica rossa. Il punto N si avvicina pure lui a M, ma lo fa percorrendo religiosamente la curva originale, e il segmento rosso viene ineluttabilmente spinto a trasformarsi nel segmento arancione (pur tenendo ben presente che nel disegno non è in scala: del resto, disegnare con precisione con powerpoint il rapporto tra infinitesimi è cosa difficile). A questo punto, rubiamo le parole allo Smirnov[28]: "… *la posizione limite della secante MN è la* <u>tangente</u> *(arancio) alla curva*

[28] V.I. Smirnov, Corso di Matematica Superiore, vol. I – Editori Riuniti, 1977.

nel punto M e, di conseguenza, la derivata *f'(x) è uguale alla* tangente trigonometrica *dell'angolo α formato dalla* tangente geometrica *alla curva nel punto M(x,y) con il verso positivo dell'asse OX, cioè è uguale al* coefficiente angolare *di questa* tangente."

Frase che sposa, guarda caso, praticamente tutti i significati di tangente finora incontrati, fatto salvo quello relativo alle bustarelle piene di soldi. L'ultimo saltino toccherà alla fisica, quando metterà nel quadrante cartesiano non una qualunque funzione geometrica, ma una traiettoria, una funzione di spostamento o di velocità. In quel caso, anche l'espressione "partire per la tangente" acquisterà un suo pieno significato.

Va detto però che anche il nostro adorato Studente Poco Bravo sotto sotto subodorava, anche senza capirlo, che i molti significati di "tangente" (almeno quelli di ambito matematico), tendevano grosso modo a concetti analoghi, se non proprio coincidenti. E poi, a forza di fare esercizi, di maneggiare le formule trigonometriche piene di *tg(x)*, di perdersi su grafici di traiettorie con vettori velocità che spuntano dalla curva come aghi di porcospino (anche se sempre ben disegnati come da regola di costruzione euclidea), qualcosa rimane per forza. Insomma, dove non arriva la dimostrazione, tutto sommato riesce ad arrivare l'abitudine.

Un po' più misterioso resta invece il marito della derivata, e cioè l'integrale. In questo caso, il guaio è dato dalla coincidenza di uno stesso termine, appunto *integrale*, che salta fuori in due maniere a prima vista del tutto scorrelate.

Tanto scorrelate che neppure i testi concordano su quale dei due campioni sia da presentare prima: la maniera più classica è quella di presentare prima l'integrale *indefinito*, a completamento e complemento del viaggio analitico che ha portato alla definizione della derivata; ma non sono infrequenti testi, specialmente di scuola americana, in cui si preferisce presentare prima il concetto di integrale *definito*, che ha il vantaggio di essere più intuitivo e praticamente utile. Quale che sia il modo, comunque, si arriva al punto in cui il nostro Studente Poco Bravo si trova a maneggiare due concetti ragionevolmente distanti fra loro, che però hanno in comune il nome e, per di più, una evidente parentela, visto che per risolvere un integrale definito è indispensabile saper risolvere prima quello indefinito. Un bel mistero, da fare invidia alla Signora in Giallo.

L'integrale indefinito arriva regolarmente dopo il capitolo sulle derivate, e lo fa con una certa naturalezza. Del resto, la matematica ci abitua fin da piccoli a cercare le operazioni inverse: si impara l'addizione e subito dopo la sottrazione; dopo la moltiplicazione arriva ineluttabile la divisione; non c'è elevamento a potenza senza conseguente estrazione di radice, e così via. Inevitabile, pertanto, dopo aver scoperto vita morte e miracoli della "funzione derivata di una funzione", interrogarsi se una funzione qualunque può essere vista fin dall'inizio come derivata di un'altra funzione sconosciuta, che con sommo atto di originale coraggio potremmo chiamare *primitiva*. In altre parole, anche lo studente meno bravo al mondo, dopo aver imparato che la derivata di x^2 è $2x$, si chiede come si possa fare il percorso inverso, ovvero partire da $2x$ per arrivare a x^2.

I docenti e i libri di testo sono pronti a rispondere: per trovare la primitiva di una funzione, basta imparare a maneggiare il calcolo integrale. In una parola (che poi è sempre il modo che gli studenti poco bravi hanno di cortocircuitare i concetti), basta ricordarsi che

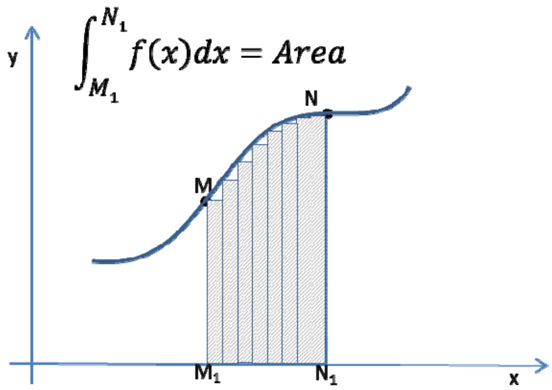
$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

e si può partire poi con tutta una serie di informazioni, elenco di integrali elementari, metodi complicati di integrazione, e così via. Il side-effect più fastidioso del calcolo integrale è il toccare con mano una sorta di entropia matematica: se differenziare è tutt'altro che facile – dice tra sé e sé il nostro Studente Poco Bravo – fare l'operazione opposta è anche più difficile. Non sembra esistere un metodo unico: ci sono tutta una collezione di artifici da memorizzare, per spacchettare i maledetti integrandi in qualcosa di ragionevole, e ricondurli ad integrali elementari noti. Qualcosa di concettuale però rimane per forza: la comprensione che gli oggetti che si stanno maneggiando sono pur sempre della stessa natura, e cioè funzioni. In realtà, c'è evidente perfino una complicazione implicita nel processo di integrazione: mentre derivando una funzione si ottiene in genere un'altra funzione, integrando una funzione si ottiene tutta una classe di funzioni primitive, grazie all'eventuale presenza di costanti che possono girare in lungo e largo senza lasciare traccia nell'azione di derivazione.

Quindi, in buona sintesi, i processi di derivazione e di integrazione indefinita possiamo sintetizzarli così:

funzione	→	(derivazione)	→	altra funzione
funzione	→	(integrazione)	→	famiglia di funzioni

Il passaggio dall'integrale indefinito a quello definito sembra quasi indolore: ad un certo bel punto, si recepisce in qualche modo che se si mettono degli estremi di integrazione sopra e sotto il segno di integrale e si fanno le sostituzioni dovute, si ottiene come "bonus" dal dio della matematica il valore dell'area sottesa dalla funzione integranda tra gli estremi di integrazione e l'asse delle x[29].



Ora, il fatto è che questo "bonus" è davvero eccezionale, e rimane spesso del tutto ingiustificato. O perlomeno, tale sembra nella testa dello Studente Poco Bravo. Perché se c'è una cosa che si ricorda fin dalle elementari è che un'area è pur sempre un numero, un familiare placido numero, quindi la relazione diventa:

funzione	→	(integrazione definita)	→	numero

C'è allora qualcosa che davvero quadra poco: i due tipi di integrali, indefinito e definito, che negli esercizi sembrano davvero la stessa cosa, a meno di un ultimo banale passaggio in cui si sostituiscono alla variabile x i due estremi di integrazione, danno risultati concettualmente diversissimi: il primo genera un'infinità di funzioni (ognuna dei quali ad infiniti valori, ovviamente), il secondo partorisce un misero numero. Lo Studente Poco Bravo già fa un grande confusione quando deve maneggiare grandezze vettoriali a tre componenti e placidi scalari con una sola, le mescola e non le distingue, figuriamoci che

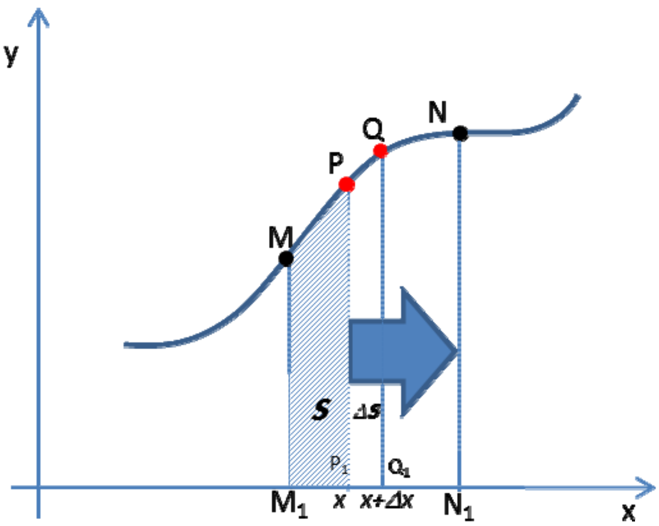
[29] Va precisato che, come al solito, le cose sono sempre un po' più complicate di come noi tentiamo di spacciarle. La definizione di integrale è sempre stata al centro delle grandi revisioni dell'analisi, al punto che non è insolito imbattersi ancora in precisazioni che distinguono "l'integrale secondo Cauchy", "l'integrale secondo Riemann", e altri ancora. In molti casi, la definizione stessa di integrale parte proprio non dal concetto di "ricerca della primitiva", ma da quello di calcolo dell'area, come in fondo dimostra la scelta stessa dei simboli: $\int f(x)dx$ può essere ingenuamente letta come la "somma" (non a caso il simbolo di integrale è un "esse" allungata, iniziale di "somma") dei prodotti/rettangoli che hanno base dx e altezza $f(x)$. Ed è concetto tanto importante che è necessario svincolarlo anche dalle condizioni di continuità della funzione, ove possibile, e quindi dai vincoli che la differenziazione spesso comporta: per questo è definito con somma attenzione e rigore, da parte dei matematici veri. Noi, come sempre, approfittiamo del fatto di essere "rudi".

disastro si prospetta qui, dove a un *aleph* di qualche ordine di infinito si contrappone un misero numero solo soletto.

Il rischio finale (ricordate sempre che stiamo parlando per esperienza diretta, vero?) è che allo Studente Poco Bravo, magari quando non è più studente, qualcuno possa fare la cruciale domanda: “ma insomma, quale diavolo è la ragione *vera* che consente di passare dall’integrale indefinito a quello definito? Perché cavolo l’operazione inversa della derivazione mi consente il calcolo delle aree?”, e lo Studente-Poco-Bravo-Non-Più-Studente comincia ad arrampicarsi sugli specchi. Può l’interpretazione geometrica della derivata come tangente aiutare a raffigurarsi che il suo inverso porti alla produzione del significato geometrico dell’integrale, ovvero alla famosa area sottesa? Mah… forse qualche vero matematico riesce a visualizzare la cosa, ma non sembra poi così evidente.

È possibile, anzi quasi certo, che lo Studente Poco Bravo abbia totalmente dimenticato la lezione in cui il suo bravo professore ha giustificato la cosa. È anche possibile, però, che il professore si sia limitato a darla per scontata, saltando la dimostrazione: in fondo, gli studenti hanno un sacco di compiti da fare, il programma è lungo e qualcosa bisogna pur saltare. E, in conclusione, per un sacco di gente il grado di parentela tra “la ricerca della primitiva” e il “calcolo delle aree” continua ad essere remoto quanto e più di quello tra un eschimese e un’ottentotta. A loro beneficio, visto che come diceva il compianto maestro Manzi, non è mai troppo tardi, scriviamo un paio di passaggi che gli studenti poco bravi si sono persi a lezione, esortandoli ad approfondire.

Anche il questo caso, il trucco sta nel movimento: solo che stavolta a muoversi non sono i punti sul grafico della funzione, ma proprio il segmento che va da un punto della funzione al corrispondente asse delle x. Ovvero, riferendoci alla figura qua sotto,



l’idea è quella di tirare il segmento MM_1 verso destra, fino a sovrapporsi al segmento NN_1, a mo’ di tapparella. Ovviamente, la tapparella va immaginata come abbastanza smaliziata da seguire obbedientemente, nel suo estremo superiore, la curva della funzione. Passando dalla visualizzazione di saracinesche che si chiudono a termini un po’ più analitici, quella che stiamo studiando è una funzione (che truffaldinamente potremmo chiamare ***S)*** che misura proprio l’area sottesa tra la curva e l’asse delle x; e come tale, *ça va sans dire*, è funzione di x.

Come funziona questa funzione? Beh, diamine: va da M_1 a N_1, è sempre limitata dalla funzione $f(x)$ (praticamente per la definizione stessa di integrale) e al tendere di Δx a zero avremo per forza che:

$$\min(\boldsymbol{S}(x)) \leq f(x) \leq \mathrm{Max}(\boldsymbol{S}(x))$$

quasi una definizione, no?

E allora adesso ci mettiamo a calcolare il rapporto incrementale della funzione $\boldsymbol{S}(x)$: (in termini rudi, tiriamo la tapparella):

$$\boldsymbol{S}(x+\Delta x) - \boldsymbol{S}(x) = f(x)\Delta x$$

Anche questo abbastanza ovvio, perfino per un Ex-Studente Poco Bravo. E il bello è che non serve nulla di più, o quasi: basta portare il Δx all'altro membro e fare il limite per Δx che tende a zero. Cosa risulta?

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x}$$

Beh, risulta la definizione di derivata. O meglio, risulta che *f(x)* è la derivata di $\boldsymbol{S}(x)$; o meglio ancora, che $\boldsymbol{S}(x)$ è una primitiva di *f(x)*. E insomma, che è del tutto legittimo considerare la funzione "area" una primitiva calcolabile con un integrale.

Ecco perché. Però la domanda cruciale resta, perché una cosa poco intuitiva come la parentela, per così dire geometrica, tra la tangente di una curva e l'area che essa sottende viene dimostrata tramite passaggi tutto sommato elementari, ovvi. Insomma, come se il maneggiare poche definizioni garantisse una specie di *intuito* analitico migliore di quello, più familiare, di natura geometrica.

E quindi l'interrogativo ritorna: esiste davvero un dio della matematica, che fa simili regali inattesi?

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms