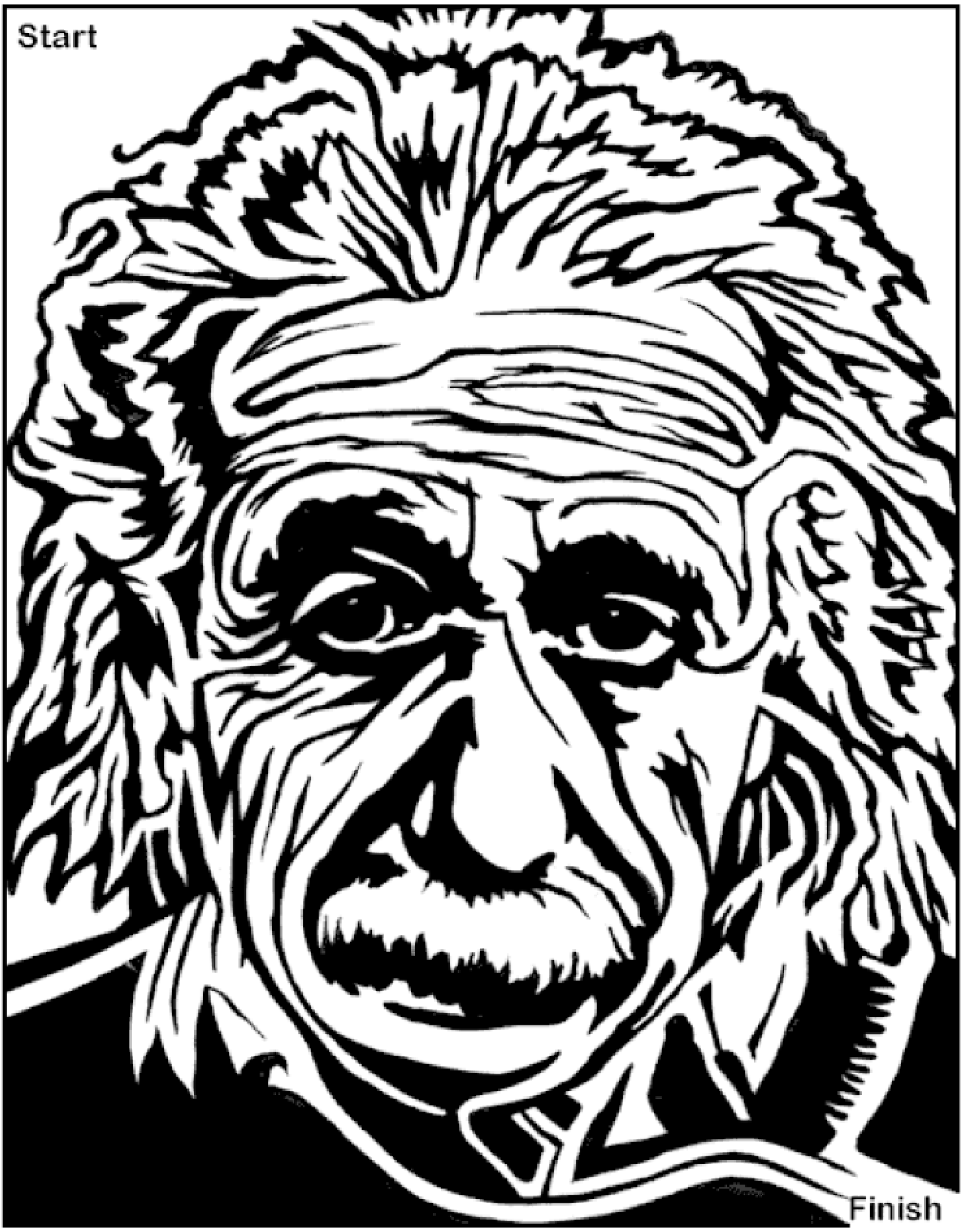
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 153 – Ottobre 2011 – Anno Tredicesimo



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM152 ha diffuso 2'817 copie e il 04/10/2011 per Google eravamo in 37'200 pagine.

Probabilmente avete riconosciuto tutti la foto dalla quale è tratto il disegno in copertina; prima di dire che "non è un gran che, come disegno", partite da "Start" e arrivate a "Finish", visto che trattasi di labirinto. Da ***Waldo the Clown*** (http://waldotheclown.com/amazing_albert_maze.htm).

1. Limiti

Ogni limite ha una pazienza, lo sa?
(Totò in "*Totò a colori*", 1952)

Il prossimo anno ci sarà la fine del mondo. Almeno questo è quanto sostengono coloro che leggono nel raggiungimento del Conto Lungo del calendario Maya l'ineluttabile segno della distruzione di tutto. I cinque contatori del complesso sistema di numerazione dei giorni (*kin, uinal, tun, katun, baktun*) che i Maya usavano si allineeranno tutti sullo zero il 21 Dicembre 2012, dopo circa 5125 anni di rutilante e monotona progressione; per alcuni scettici questo dovrebbe significare solo che anche gli antichi abitatori precolombiani dello Yucatan dovrebbero, per una volta, fare un salto in edicola a comprare un nuovo calendario pieno zeppo di ancestrali messicane poco vestite, come si fa (anche se assai più frequentemente) da noi; altri ritengono che lo scoccare dell'istante decisivo sia fatalmente più significativo. È una convinzione quantomeno impegnativa, perché dovrebbe implicare la certezza, nel caso si volesse mantenere un minimo di coerenza interna, che l'Universo tutto sia stato creato poco più di cinquemila anni fa, con buona pace di tutte le misurazioni sull'età della Terra e del cosmo che fanno gli scienziati. Ma si sa, la superstizione ha spalle larghe, e si crea da sola la propria coerenza: anzi, più coraggiosamente, spesso della solidità logica delle proprie argomentazioni non si preoccupa proprio. Del resto, non occorre arrivare fino ai tropici dell'America Centrale per trovare tracce di immarcescibile e irrazionale superstizione: ce ne sono in abbondanza anche da noi. Tanto per dire, a tiepida conferma dell'apocalisse che ci attende fra poco più di un anno si può infatti ratificare, secondo i detti nostrani, che "anno bisesto, anno funesto": e non crederete mica che sia un caso che il 2012 sarà bisestile[1].

1 *Il calendario Maya (più o meno)*

La paura dei bisestili è assai antica, quasi a ribadire che non necessariamente le cose che sopravvivono ai millenni debbano per forza essere buone e giuste. Gli antichi Romani avevano in cordiale antipatia questi anni che ritenevano in qualche modo anomali, e quindi infausti. Durante la sanguinosissima Seconda Guerra Punica, mentre Annibale imperversava per tutta la penisola, tutti i bisestili furono cancellati dal calendario a furor di popolo. Si potrebbero trarre tristi conclusioni sul crudele spirito settario che portava (e spesso porta ancora) a considerare pericoloso tutto ciò che non è ordinario, ma il discorso sarebbe troppo lungo[2]. Per non avventurarci in cotanta marea, ci limiteremo a notare un'ulteriore e non del tutto evidente analogia tra la paura del Conto Lungo del Maya e quella degli anni bisestili. La fobia scatenata dalla chiusura del Conto Lungo è una forma di paura dell'ignoto: anzi, più precisamente, è una sorta di paura atavica connessa al superamento di un limite. L'Occidente ha passato diverse paure analoghe,

[1] Inguaribilmente refrattari alla superstizione, notiamo che da queste parti, in Redazione, l'anno bisestile è automaticamente connesso al poco scaramantico concetto di Olimpiade Moderna. Siete già pronti per Londra?

[2] Basti ricordare, *en passant*, il più crudele e idiota detto che ancora talvolta si sente mormorare: "*Guardati dai segnati da Dio*". Secondo l'abominevole logica del motto, coloro che hanno qualche piccolo o grande difetto fisico sono così per diretta volontà divina, che li avrebbe marchiati in quanto malvagi, a benefici dei giusti che così possono riconoscerli a vista. Così, oltre agli oltraggi della natura, i disgraziati che non sono fisicamente perfetti dovrebbero subire anche il disprezzo, preventivo e spietato, della società in cui vivono.

basti pensare alle fosche profezie millenaristiche[3]; fatto sta che, ogni volta che si tratta di superare un limite, per quanto convenzionale possa essere, sorge una sorta di timore. Ebbene, il calendario di Roma antica non era molto ben organizzato, prima della riforma attuata da Giulio Cesare; prima del 45 a.C. l'ultimo mese dell'anno era Febbraio, il cui ultimo giorno – a meno di frequenti e variabili eccezioni, dovute all'esistenza di un intero mese aggiuntivo, l'Intercalare – era il ventiquattresimo. Quando anche Febbraio venne definitivamente integrato con un numero di giorni fisso e ragionevolmente stabile (i familiari 28 o 29), il 24 veniva chiamato "sesto (*sextus*) giorno prima delle Calende di Marzo". Il famigerato giorno extra, saltuario e quadriennale com'era, non si meritò altro nome che una ripetizione del confratello, "due volte sesto", ovvero *bis-sextus*. Dalla presenza o meno del *bis-sextus* tutto l'anno veniva nomato bisestile, e da questo fatto si possono trarre subito alcune interessanti conclusioni: la prima è che tecnicamente il "giorno bisestile" che ancora oggi usiamo è, più che il 29, il 24 Febbraio; la seconda è che, nonostante la riforma di Cesare ponesse al 31 Dicembre la fine del ciclo annuale, le tradizioni sono dure a morire, e in qualche modo i Romani continuavano a considerare come "fine dell'anno" il 23 Febbraio; e infine che il concetto stesso di "bisestile" è una sorta di superamento del limite del ciclo del conteggio dei giorni, tale e quale la fine del Conto Lungo dei Maya. Insomma, sia sulle coste americane dell'Atlantico, sia nel bel mezzo del Mediterraneo, l'idea di procurarsi un nuovo calendario da appendere al muro incuteva una bella dose di paura.

2 *Il dio Terminus*

A ribadire il fatto che il 23 Febbraio sulle rive del Tevere fosse considerato ultimo giorno dell'anno brilla la constatazione che proprio in quel giorno cadeva la festa in onore del dio Terminus, che come è facile intuire ha il nome che significa proprio "termine", "limite", e anche più esplicitamente "confine". Si tratta d'un dio abbastanza singolare: era deputato a sacralizzare i confini dei campi, e quindi per estensione a rendere inviolabile la proprietà privata; era raffigurato quasi sempre con il solo busto, perché la sua effige era solitamente usata proprio come pietra confinaria. Le sue caratteristiche erano abbastanza ambigue: a differenza di tutti gli altri dei del pantheon romano non richiedeva sacrifici di animali, quasi fosse modestamente legato solo ai frutti della terra che così alacremente difendeva; peraltro, la sua effigie veniva adorata direttamente all'interno del grande tempio dedicato a Giove Capitolino, e questo era indice di una certa indomitezza di Terminus. Infatti, il mito vuole che per far posto al tempio grandioso dedicato al padre degli dei fossero allontanate e rimosse molte cappelle votive dedicati agli altri numi, che accettarono di buon grado lo spostamento. Terminus invece resistette, quasi a voler rimarcare che lo stesso Giove doveva sottostare alle leggi dell'inviolabilità dei limiti[4].

Del resto, una sorta di contraddizione si ritrova comunque nella storia stessa degli adoratori del dio: da una parte ritenevano l'inviolabilità dei confini tanto importante da ritenerla sacra, inviolabile e patrocinata direttamente da una divinità apposita; dall'altra, non si facevano specie di invadere terre, conquistare popoli, e ampliare per quanto possibile proprio quel "*limes*" dell'impero che non esitavano ad estendere appena possibile con le loro invincibili legioni.

[3] Che però furono probabilmente meno drammatiche di quanto si è a lungo creduto, per la buona ragione che la maggior parte delle persone non aveva proprio idea di vivere nell'anno Mille; si limitavano a contare gli anni di regno del sovrano, per lo più.

[4] Se pensate ancora che prefigurare addirittura un dio per sacralizzare i confini sia un po' eccessivo, forse è il caso di ricordare che il mito della nascita di Roma, sanguinoso e fratricida, è incentrato proprio sull'assassinio di Remo da parte di Romolo, causato dal banale superamento del solco d'aratro che definiva i limiti quadrati dell'Urbe.

È possibile che la suddetta contraddizione sia in qualche modo inevitabile, forse addirittura implicita nel concetto stesso di limite: per ogni gruppo di uomini che, ligio agli ordini e alle paure, temerà di varcare il limite imposto dalle leggi e dalle convinzioni, ci sarà sempre almeno un individuo che sentirà invece il fascino della sfida, e avrà una gran voglia di infrangere la barriera anche solo per il gusto di farlo.

È possibile notarlo anche nello studio delle scienze esatte: persino in matematica. Il concetto di limite assume un significato ben preciso nella nostra amata scienza, ed è inevitabilmente la porta d'accesso, sia dal punto di vista storico sia da quello didattico, verso i campi fertili del calcolo infinitesimale. Ciò non di meno, dalle prime definizioni di Newton[5] e Leibniz[6] si sono succedute numerose e sostanziali revisioni, per evitare critiche metodologiche che, fin dai tempi di Berkeley[7], il principio comportava. E in ogni caso stupisce che proprio per la definizione di limite, ovvero di ovvero di termine, soglia, confine, delimitazione, finitezza, occorra in matematica scomodare l'infinito, seppur nella forma inversa di infinitesimo. In un certo senso platonico, è quasi la quintessenza della contraddizione.

In ogni caso, non sono i limiti della matematica quelli che più fanno presa sul timore e sul senso di sfida degli uomini: da questo punto di vista nulla esalta – e irrita – più dei limiti che scopre e rimarca la fisica. La nascita stessa della fisica intesa in senso moderno è un atto di spostamento di un confine: Galileo[8] difende il sistema copernicano, che vuole spostare la Terra dal centro dell'Universo, e nel farlo scopre che spostare i limiti così solidamente ancorati nelle opinioni del potere è cosa magari razionale, ma certo tutt'altro che facile, e soprattutto assai pericolosa. Da quel momento in avanti, la concezione stessa dell'Universo ha vissuto ripetuti allargamenti, gigantesche espansioni, inimmaginabili proiezioni dei margini del cosmo verso l'infinito, pur non riuscendo neppure a definire con certezza (quasi a ribadire l'ennesimo ossimoro) se tanta maestosa grandezza sia davvero finita o infinita.

Ma non sono certo solo l'astronomia e la cosmologia a marcare il podere protetto dal dio Termine della cittadella scientifica. La termodinamica genera apprensione e rabbia dall'alto del suo Secondo Principio, che pone l'entropia come imbattibile nel lungo periodo; e come se non bastasse, dichiara a chiare lettere che esiste un limite al freddo, assicurando che non si possono raggiungere temperature inferiori ai –273,15° dello zero assoluto. Le facce degli studenti, quando sentono per la prima volta l'informazione, assumono spesso espressioni perplesse, quando non esplicitamente scettiche. "E perché no, poi?", sembrano dirsi, e si guardano indecisi, un po' incerti, forse addirittura insicuri di aver capito bene. Forse il prof intende dire che i –273,15° sono la più bassa temperatura raggiunta finora, certo non che non si possa raggiungerne di inferiori nel futuro… L'idea di un limite, specie se imposta da terzi (Dio o Natura compresi) in maniera assoluta, è quasi sempre vista come un'imposizione intollerabile dai giovani spiriti combattenti. Ma, forse perché si tratta di un limite inferiore e non superiore, forse perché la termodinamica è comunque vista come qualcosa di ancora sufficientemente alieno, il desiderio di infrangere quell'algida barriera non è in fondo troppo sentito.

[5] Protagonista di "Il Tempo e il Denaro", RM071, altro Compleanno che affronta le complessità del calendario.

[6] Di lui si parla in "L'Acusmatico", RM054.

[7] "*È infatti necessario sottolineare che [Newton] ha usato le flussioni come l'impalcatura del suo edificio, come cose da lasciare da parte o buttare via non appena le linee finite si sono trovate proporzionali ad esse. Ma proprio questi esponenti infiniti sono ricavati con l'ausilio delle flussioni. Che cosa dunque si deve ascrivere alle flussioni da parte di questi esponenti e queste proporzioni, se non proprio ciò che doveva essere fin dall'inizio presupposto? E cosa sono dunque queste flussioni? Le velocità di incrementi evanescenti? Non sono né quantità finite né quantità infinitamente piccole, né niente del tutto. Perché non chiamarle allora fantasmi di quantità defunte?*" – Vescovo George Berkeley, "The Analyst – a discourse addressed to an infidel mathematician", 1734.

[8] Una storia che viene raccontata anche in "Rigoroso Esame", RM085.

Ben diverso, dal punto di vista dell'irritazione e della sfida, è il confronto con l'insuperabilità della velocità della luce. È quasi sempre rigettata d'istinto, quando si scopre per la prima volta che la Relatività la impone come limite invalicabile, e non solo dai giovani; del resto, quando la teoria di Einstein cominciò ad essere divulgata, si alzarono vibranti proteste scandalizzate da parte di molti che, anche senza peritarsi di comprenderne le ragioni teoriche, si limitavano a ritenere semplicemente assurda l'idea di una velocità limite. Al punto che il concetto di "velocità della luce", con tanto di lettera simbolo standardizzata, "c", è uno dei pochi concetti di fisica moderna che ha valicato i confini del sapere tecnico per raggiungere il grande pubblico, e diventare patrimonio comune[9].

Il rifiuto è del tutto istintivo; non è infatti causato dalla peraltro corretta osservazione che, su scala cosmica, l'apparentemente elevatissima velocità della luce è invece drammaticamente lenta. Se si pensa agli spazi che separano le galassie, o anche solo a quelli, estremamente più ridotti, che all'interno delle galassie separano le densissime stelle, scoprire che per andare dal Sole alla stella più vicina occorrono comunque più di quattro anni di viaggio a velocità luminale, può implicare solo due giudizi possibili: o la luce è drammaticamente lenta, o il tempo che riusciamo a immaginare dall'alto delle nostre brevissime vite è davvero irrisorio, una specie di lunghezza di Planck dell'eternità.

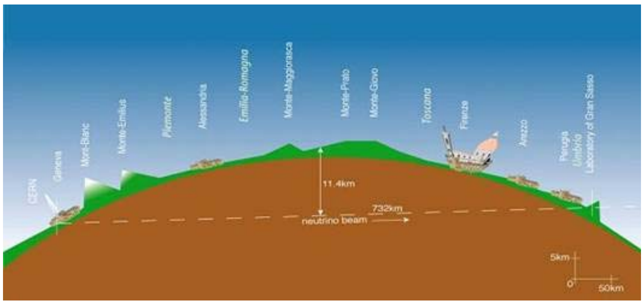
In ogni caso, la velocità della luce fa presa, ha audience: e se ne è avuta una recentissima dimostrazione sui media quando si è trattato di commentare gli strabilianti risultati dell'esperimento OPERA. È anche vero che al clamore ha contribuito soprattutto l'incauto comunicato del Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca che, pur nella sua stringatezza, è riuscito a collezionare almeno tre ragioni di perplessità, per non dire di peggio. Per quanto la cosa abbia avuto larghissima eco, forse è il caso di ricordarla, magari partendo da alcune proprietà dei protagonisti indiscussi dell'esperimento.

I neutrini sono particelle davvero affascinanti, e in qualche maniera sono legati all'Italia fin dalla loro prima comparsa. Agli albori della fisica atomica, quando la Meccanica Quantistica e la Relatività erano discipline ancora giovanissime, le particelle conosciute erano davvero poche, praticamente solo due, elettrone e protone. E ciò che le caratterizzava erano soltanto due proprietà, la massa e la carica elettrica. Comunque abbastanza presto si ipotizzò la presenza di una terza particella, dotata di massa ma priva di carica, e i laboratori di mezzo mondo cercavano di identificarla: non era facile perché per rilevare le particelle subatomiche si usavano (e si continuano ad usare) prevalentemente forti campi elettromagnetici, e una particella neutra non viene minimamente disturbata da essi. Il neutrone – il nome veniva naturale, con la desinenza alla greca sul calco di "protone" e "elettrone" – venne infine scoperto nel 1932 da James Chadwick. Qualche mese prima, nel 1930, il geniale fisico teorico Wolfgang Pauli aveva teorizzato l'esistenza di una particella davvero strana: come il neutrone avrebbe dovuto essere priva di carica, ma oltre a ciò doveva essere anche priva di massa. Le ragioni per le quali Pauli ipotizzò l'esistenza di tale particella sono legate a particolari principi di conservazione, che si mostrarono peraltro corretti: certo è che, specie a quei tempi, ipotizzare qualcosa senza massa e senza carica era più o meno come ipotizzare l'esistenza degli angeli, tanto sembrava eterea e volatile. Sembra che in quei giorni del lontano 1932, alla facoltà di Fisica di Roma, durante una lezione uno studente chiedesse a Enrico Fermi se la particella neutra appena scoperta da Chadwick fosse la stessa teorizzata da Pauli. Fermi rispose di no: quella appena scoperta era la particella neutra massiva, il neutrone; l'altra era invece ben diversa dal punto di vista della massa, assolutamente più piccola. E concluse con una frase del tipo "*…se quello è il neutrone, l'altro potremmo chiamarlo neutrino*".

Il nome rimase, con tanto di desinenza diminutiva in "*ino*" che è abbastanza chiara per noi italiani, ma che certo deve aver incuriosito i fisici stranieri che l'italiano non

[9] "*Via, più veloci della luce!*" – Probabilmente Superman lo grida fin da quando si chiamava ancora Nembo Kid.

conoscono. Oltre al nome, rimase anche la stranezza della particella: con il progredire della ricerca, si è giunti alla conclusione che poi una massa – per quanto davvero irrisoria – i neutrini ce l'hanno; ma restano comunque impalpabili e sottili al limite dell'immaginazione. Sono così eterei e fugaci che è quasi impossibile intercettarli, specie quando sono immersi in fasci di radiazioni pieni di altre particelle dotate di massa e di carica: per questo i fisici, per andarli a rilevare, pensarono di aprire dei laboratori sotto le grandi montagne come il Monte Bianco e il Gran Sasso. I neutrini che provengono da raggi cosmici e dalle radiazioni solari riescono a passare indisturbati sotto i chilometri cubi di roccia, mentre tutte le altre particelle vengono fermate: le montagne funzionano insomma come giganteschi filtri da tè. L'idea era giusta, e funzionò: alcuni scienziati si stupirono persino quando, nei laboratori sotto le montagne, si accorsero che gran parte dei neutrini che i loro macchinari riuscivano a rilevare non venivano dallo spazio sopra la montagna, ma addirittura dagli antipodi, dopo aver attraversato indisturbati tutta la Terra. Poiché i neutrini sono cruciali per capire una delle forze più misteriose della natura, la cosiddetta "interazione debole", nel 2008 dai laboratori del CERN di Ginevra, dove si riescono a produrre neutrini grazie alle altissime energie degli acceleratori europei di particelle, si sono cominciati a dirigere fasci di neutrini verso i rivelatori del Gran Sasso. Il grande esperimento non aveva esplicitamente l'intenzione di misurare la velocità dei neutrini, ma di studiarne altre caratteristiche; però le misurazioni hanno mostrato, con sorpresa degli addetti ai lavori, che i neutrini sembrano avere una velocità leggermente maggiore di quella della luce[10].



3 *OPERA all'opera*

E questo è un limite infranto: anzi, è il superamento del limite per eccellenza, quello che è – o era – per definizione invalicabile. La scoperta sarebbe davvero rivoluzionaria, qualora ulteriori misurazioni dovessero confermarla; è quindi comprensibile che il Ministero competente abbia deciso di diffondere il breve comunicato[11] cui accennavamo poco sopra a commento dell'esperimento.

Lo svarione più marchiano, che è stato rapidamente sottolineato praticamente da tutti i mezzi di comunicazione, Rete in testa, consiste nella citazione di un tunnel che da Ginevra raggiungerebbe l'Abruzzo, una specie di autostrada per neutrini; anche se i neutrini, come si è visto, di tutto hanno bisogno meno che di una galleria, per viaggiare in linea retta sotto terra; e di questo si è parlato a iosa, al punto che il portavoce del ministro ha rassegnato (almeno parzialmente) le sue dimissioni.

Un altro punto interessante non è un errore in senso stretto, ma probabilmente qualcosa di peggio. In un passaggio si citano i costi dell'opera ("*alla costruzione del tunnel tra il Cern e i laboratori del Gran Sasso, attraverso il quale si è svolto l'esperimento, l'Italia ha contribuito con uno stanziamento oggi stimabile attorno ai 45 milioni di euro*"), cosa invero inspiegabile. Anche volendo concedere al ministro e al suo ufficio stampa una sorta di licenza di ignoranza sulla dinamica dei neutrini, è davvero difficile perdonare l'attribuzione del merito di aver stanziato e speso dei soldi pubblici per qualcosa di inesistente. Ma qui si trascende nella politica contemporanea, che è territorio che cerchiamo per quanto possibile di evitare, quindi non procediamo oltre.

---

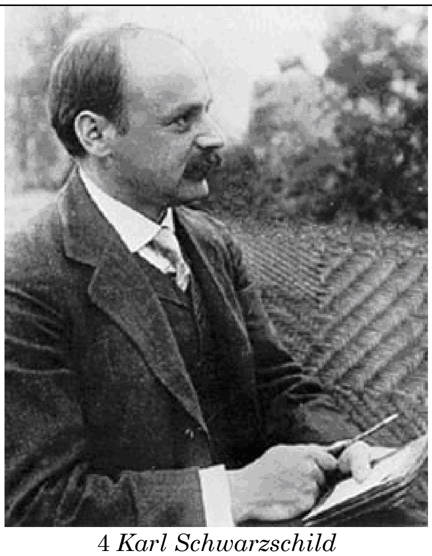
[10] Qui si trova la comunicazione ufficiale dell'esperimento: http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1109/1109.4897.pdf

[11] Con ogni probabilità lo conoscete già, ma in ogni caso è ancora ben reperibile in rete. Ad esempio, qui: http://cattaneo-lescienze.blogautore.espresso.repubblica.it/2011/09/24/einstein-e-vivo-maxwell-pure-e%c2%a0la-gelmini-che-non-si-sente-tanto-bene/. Il link al sito ufficiale, che per diversi giorni dopo la pubblicazione è stato attivo (http://www.istruzione.it/web/ministero/cs230911), adesso non sembra esserlo più.

Anche perché c'è un terzo punto interessante: anzi probabilmente è il più intrigante di tutti. È la dichiarazione di apertura, il nocciolo, il motore immobile che costituisce la ragione vera e propria del comunicato stesso, ovvero: "*Il superamento della velocità della luce è una vittoria epocale per la ricerca scientifica di tutto il mondo*". Il tono è sostanzialmente quello dell'annuncio di un trionfo sportivo; o, al massimo, quello di un titolo da giornale che annuncia il felice esito d'una ardita impresa tecnologica, quale poteva andar bene per lo sbarco sulla Luna degli astronauti dell'Apollo 11. Di certo, non è affatto congruo con lo spirito d'una scoperta scientifica di base, per quanto eclatante e rivoluzionaria. Nessuno stava cercando di superare la velocità della luce: e per quanto tutti i firmatari dell'articolo che annuncia i risultati di OPERA saranno giustamente orgogliosi della scoperta, parlare di "vittoria" è palesemente inadeguato, se non altro perché non si capisce proprio a chi sia toccata la sconfitta, che della vittoria è l'immancabile complemento. Viene da concludere che esistono solo due possibilità in grado di spiegare l'utilizzo di tale terminologia: o i redattori del comunicato non hanno davvero idea di quale sia lo spirito della ricerca scientifica, o l'idea di "superamento dei limiti" è talmente forte e ancestrale da aver avuto il sopravvento sulla più equa e pacata analisi dei fatti di scienza.

Pur avendo il serpeggiante sospetto che delle due evenienze sia la prima ad avere il maggior grado di veridicità, ai fini della tesi di quest'articolo fa più comodo la seconda. I limiti, i confini, le pietre miliari sono fondamentali nella ricerca scientifica non solo per il valore intrinseco che hanno, ma anche perché solleticano il desiderio di testarle, verificarle, e soprattutto superarle, specialmente quando sembrano invalicabili.

La fisica, del resto, è piena di pietre miliari di questo tipo, anche se certo dotate d'un fascino inferiore rispetto a quello irraggiungibile della velocità della luce. La scienza di Galileo abbonda di costanti numeriche, parametri, valori che sembrano in qualche modo marcare, isolare, delimitare specifici eventi o grandezze. Per graziosa coincidenza celebrativa, in ottobre hanno visto i natali almeno due uomini che hanno legato il loro nome a dei numeri, a delle grandezze che si pongono, quantomeno nella loro disciplina specifica, come delle pietre miliari e di paragone. Guarda caso, la disciplina scientifica di due è la medesima, ed è anche quella dove l'incorruttibile velocità della luce mostra al meglio la sua finitezza. E guarda caso, i nomi dei due scienziati hanno in comune un'insolita lunghezza e una ragionevole difficoltà di pronuncia e memorizzazione.



4 *Karl Schwarzschild*

Karl Schwarzschild nacque a Francoforte sul Meno il 9 ottobre 1873. Era il primogenito dei sei figli di una coppia ebrea, Moses e Henrietta. In famiglia non si coltivavano particolari interessi per la scienza; Karl frequentò la scuola primaria ebraica e successivamente si iscrisse al locale ginnasio. Durante questa sua placida adolescenza, cominciò a essere affascinato dall'astronomia, e risparmiava i pochi soldi che aveva a disposizione per acquistare lenti e materiali per costruirsi un telescopio. Il destino di Karl fu aiutato dalla musica: suo padre Moses era infatti legato al professor Epstein dalla comune passione per i concerti, e il professore insegnava astronomia: per di più l'astronomo aveva un osservatorio e un figlio, Paul, dell'età prossima a quella del giovane Schwarzschild. Finì così che Karl si ritrovò a passare una grande quantità di tempo con il coetaneo nell'osservatorio, e alla verde età di sedici anni aveva già una discreta esperienza in campo astronomico, al punto da pubblicare due memorie quando era ancora al ginnasio.

Si iscrisse prima all'università di Strasburgo, poi a quella di Monaco di Baviera, dove si laureò. Per molti versi era già un astronomo a tutto tondo, e tale restò per tutta la vita: si mosse molto tra università e osservatori, spaziando da Vienna a Göttingen, da Monaco a Postdam. Produsse una grandissima quantità di studi di argomento molto vario: associò la magnitudine delle stelle ai loro colori, studiò la relazione tra brillantezza e temperatura superficiale delle stelle variabili, avanzò l'ipotesi che l'universo potesse possedere una geometria non-euclidea, arrivando anche a definire un limite inferiore alla sua possibile curvatura. Immaginò che la coda delle comete fosse causata dalla pressione di radiazione solare, e su questa base calcolò le dimensioni delle code cometarie. A Göttingen, dove divenne prestissimo professore ordinario, fu forse ispirato dalla conoscenza di mostri sacri della matematica come Klein, Minkowski e Hilbert[12], e si dedicò anche a studi teorici sull'elettrodinamica e l'ottica dei corpi celesti, sul trasporto d'energia all'interno delle stelle, e si interessò anche di spettroscopia.

Allo scoppio della Prima Guerra Mondiale, nel 1914, partì volontario sotto le armi. Fu inviato prima in Belgio, poi in Francia, infine sul fronte russo. Nonostante i tempi non fossero certo dei migliori per la produzione scientifica, fu proprio in Russia che Schwarzschild scrisse due delle sue pubblicazioni più famose, una sulla Relatività e una sull'ipotesi quantistica di Planck. In quella sulla teoria einsteniana ricavò la prima soluzione alle equazioni gravitazionali di relatività generale, che suscitò il sincero apprezzamento dello stesso Einstein[13].

La mole di lavoro che Schwarzschild produsse fu semplicemente impressionante: nel celebrarlo, Arthur Eddington non temette di paragonarlo a Poincaré[14], e anzi aggiunse che, a differenza del genio francese, oltre agli studi teorici Schwarzschild fece anche una grande quantità di scoperte eminentemente pratiche. L'Accademia tedesca delle Scienze lo definì "il più grande astronomo tedesco degli ultimi cento anni", ed è sorprendente, oltre che triste, scoprire che questa grande quantità di opere fu compiuta da un uomo che morì a soli 42 anni, proprio per un infezione contratta in Russia, nel 1916.

Nella citata pubblicazione sulla Relatività, Schwarzschild tra le altre cose, e quasi solo per curiosità accademica, introduce il concetto di "raggio gravitazionale", ovvero il raggio che un corpo sferico di una certa massa deve avere affinché la sua attrazione superficiale sia così elevata da impedire persino alla luce di abbandonarlo. In verità, per comprendere il principio è sufficiente anche la sola gravitazione newtoniana; è noto che per sfuggire al campo gravitazionale, per esempio a quello terrestre, i razzi devono raggiungere una certa velocità di fuga[15]. La presenza del "raggio al quadrato" al denominatore della legge di gravitazione universale fa rapidamente comprendere che, comprimendo la massa terrestre in un volume più piccolo, la sua forza di attrazione cresce, e cresce proporzionalmente anche la velocità di fuga. Non è quindi difficile calcolare quanto deve essere compressa la Terra per far sì che la velocità di fuga superi il leggendario limite del 300.000 km/s della velocità della luce. Nella fattispecie, se il nostro pianeta fosse compresso fino a essere ridotto ad una sfera di meno di un centimetro di raggio, nemmeno la luce potrebbe più sfuggire al suo campo gravitazionale.

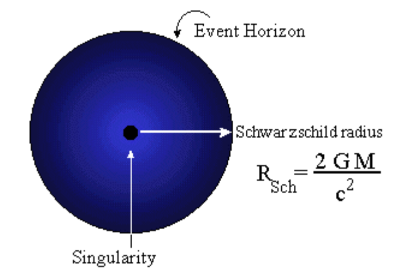
In pieno ventunesimo secolo, quando il termine astronomico "buco nero" è ormai noto e diffuso, non è particolarmente sorprendente riconoscere in questa supercompressione planetaria proprio la trasformazione – in via del tutto teorica, beninteso – della Terra in un buco nero. Ma ai tempi di Karl Schwarzschild il conto era davvero poco più che un gioco accademico: ciò nondimeno, con lo svilupparsi dell'astronomia relativistica

[12] Protagonista di "Wir mussen wissen…", RM060.

[13] "*Non mi aspettavo che si potesse giungere alla soluzione esatta in maniera tanto semplice*", fu il commento del vecchio Albert, celebrato in RM074, "Varianti e Invarianti".

[14] Di lui si parla in "Matematica per porcini", RM075.

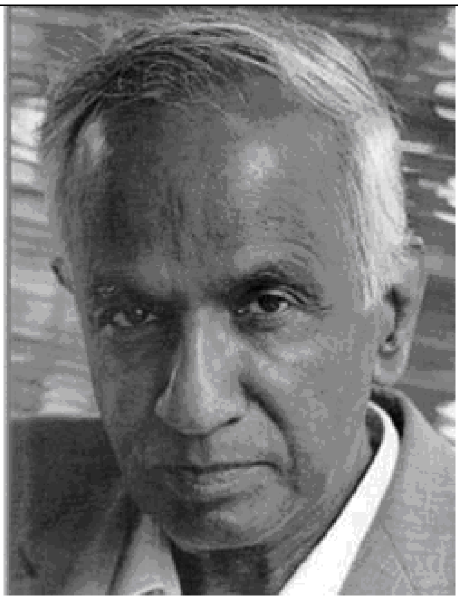
[15] Vale circa 11,2 km/s, poco più di quarantamila chilometri all'ora.



5 *Schema (semplificato) di un buco nero*

moderna, i buchi neri divennero presto oggetti tutt'altro che ipotetici, e il calcolo del loro "raggio gravitazionale", strettamente legato a quello che adesso viene chiamato "orizzonte degli eventi", è qualcosa di più che una mera curiosità. È piuttosto un limite davvero misterioso, quello che in un certo senso separa l'universo della materia ordinaria da qualcosa di diverso, per propria natura inesplorabile e inconoscibile, visto che non c'è sonda, strumento, analizzatore che possa superare quel limite e poi tornare indietro a raccontarci cosa vi ha trovato. E, a gloria del fertilissimo Karl, quel suo "raggio" calcolato quasi per gioco, che certo non avrebbe mai pensato potesse essere particolarmente significativo, specie se confrontato con la mole di tutte le sue altre opere, è certamente ciò che rende il suo nome immortale, perché quel limite misterioso è oggi universalmente noto come "raggio di Schwarzschild".

Non tutti, come si è visto nel caso di Schwarzschild, hanno la fortuna di crescere in una famiglia dove l'amore per la scienza è coltivato e tenuto in gran conto; ma è altrettanto vero che altri questa fortuna ce l'hanno. Ad esempio, può capitare di avere uno zio premio Nobel per la Fisica: e questa fortuna vale almeno il doppio se, quasi per contrappasso, si nasce in una nazione che non è – o meglio non era a quei tempi – felicemente posizionata nel cuore ricco e acculturato del mondo. Il minimo che si può fare, in casi come questi, è mostrarsi degni di cotanta fortuna, e vincere un altro premio Nobel da mettere sul caminetto accanto a quello dello zio.


6 *Subrahmanyan Chandrasekhar*

Subrahmanyan Chandrasekhar, per fortuna di tutti, accettava e si compiaceva di essere chiamato semplicemente Chandra. Nacque il 19 ottobre 1910 a Lahore, città che a quel tempo era parte dell'India, mentre adesso è in territorio pakistano. Figlio di un ispettore delle ferrovie indiano che avrebbe voluto vedere il suo virgulto seguire le proprie orme, Chandra era invece affascinato dalla personalità dello zio paterno, quel Chandrasekhara Venkata Raman che nel 1930 vinse il premio Nobel per la fisica grazie alla scoperta dell'effetto di cambio delle lunghezze d'onda dei raggi di luce quando sono deflessi dalle molecole, che non a caso si chiama oggi "effetto Raman". Se l'ambiente familiare era differente, Chandra condivideva almeno una caratteristica con Schwarzschild: anche lui riuscì a pubblicare la sua prima memoria scientifica quando non era ancora neppure laureato. Studiò all'Università di Madras, e nel 1930 riuscì ad ottenere un finanziamento governativo che gli consentì di andare a studiare a Cambridge. Rimase in Inghilterra fino al 1937, anche se nel 1936 non tralasciò di tornare in patria per sposare Lalitha, la fidanzata che aveva lasciato a Madras. Dopo il 1937 partì di nuovo, ma non per tornare verso est: si diresse invece ancora più a ovest, verso Chicago, dove rimase per il resto della sua vita.

Anche quella di Chandra fu essenzialmente un vita di lavoro, probabilmente ancora più quieta di quella – certamente troppo breve – di Karl. Nel 1953 ottenne la cittadinanza americana, e ne fu evidentemente molto soddisfatto, visto che quando, circa dieci anni dopo, l'università di Cambridge invitò il suo antico studente a ricoprire la cattedra nei suoi prestigiosi college, Chandra preferì rifiutare e restarsene sulle sponde del lago

Michigan. In questa quiete, l'astronomo indiano produsse qualcosa come quattrocento pubblicazioni, spaziando quasi in ogni ramo dell'astronomia: la struttura delle stelle, le nane bianche, la dinamica stellare, il trasferimento di energia per radiazione, la meccanica quantistica degli ioni idrogeno, la stabilità idrodinamica e idromagnetica, l'interferenza di onde gravitazionali, e naturalmente l'immancabile Relatività Generale e la conseguente stabilità delle stelle in ottica relativistica; il che implica, inevitabilmente, anche i buchi neri.

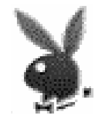
Anche il "limite" che caratterizza Chandra ha qualcosa a che vedere con questi oggetti che, in un certo senso traslato, sono ancora i veri vincitori e "superatori" della velocità della luce. Fin dal 1930, ovvero quando l'astronomo indo-pakistano aveva ancora la verde età di vent'anni[16], pubblicò la dimostrazione che una stella dotata di una massa superiore a 1,4 masse solari era destinata a collassare fino a diventare un oggetto di densità tale da non essere sostanzialmente comparabile a nulla di noto: un buco nero, insomma. Lo studio non venne ben accolto, soprattutto da quello stesso Arthur Eddington che era stato così generoso nei confronti di Schwarzschild; ne nacque una lunga polemica accademica che, probabilmente, influenzò molto, e non positivamente, lo stile di ricerca dell'indiano.

In ogni caso, la comunità scientifica riconobbe i suoi meriti, visto che nel 1983 gli attribuì il premio Nobel per la Fisica, e sostanzialmente proprio per gli studi sulla dinamica ed evoluzione stellare che erano stati al centro della controversia. Morì a Chicago nel 1995; era già ottantacinquenne, ma stava ancora scrivendo libri: la sua opera "I Principia di Newton per la gente comune" fu terminata pochi mesi prima della sua morte.

Naturalmente, la soglia delle 1,4 masse solari è oggi nota come "limite di Chandrasekhar", che è un confine che possono rispettare o superare solamente le stelle. E ci pare che sia allora sufficientemente appropriato per chiudere questa disamina, arruffata e incompleta, sui limiti che costantemente ci legano a quest'universo.

[16] O forse solo diciannove: non sappiamo il giorno esatto della pubblicazione della memoria, ma essendo nato a metà ottobre, è verosimile che abbia pubblicato lo studio prima di festeggiare il suo ventesimo compleanno.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Il giardino dei destini incrociati			
Problema impossibile dal Luogo del Divano Quantistico			

2.1 Il giardino dei destini incrociati

Che sarebbe il giardino di Doc, in cui il proprietario e Rudy si incrociano molto raramente. Anche quest'anno Rudy *non è* stato nel suddetto giardino, quindi ci riteniamo liberi di costruire una discussione assolutamente impossibile.

"Cos'hai combinato, nel giardino?"

"Mah, ho piastrellato in bianco un cerchio del raggio di dieci metri, poi ho piantato degli alberi ai vertici di un quadrato e di un triangolo nei quali era inscritto il cerchio piastrellato, ma adesso mi pare un po' senza senso, il disegno... stavo pensando di piastrellare la parte comune al triangolo e al quadrato in colore rosso, ma non vorrei ritrovarmi con un disegno troppo piccolo..."

"Tranquillo... Basta chiedere ai lettori di RM..."

E, in effetti, c'è un minimo... Qualcuno sa trovare quale sia? Rispetto al raggio del cerchio, ci pare evidente...

2.2 Problema impossibile dal Luogo del Divano Quantistico

Chi conosce il luogo in oggetto, sa che questo problema è assolutamente impossibile. Infatti ci è stato posto durante una giornata piovosa da un amico di famiglia che aveva invitato a pranzo Rudy, la moglie Paola e il più giovane dei VAdLdRM: il più vecchio, saggiamente, aveva optato per un fine settimana marino in casa di amici, trovando (come in tutta la nazione, del resto, con la sola eccezione del LdDQ) una stupenda giornata di sole.

Circondati da una situazione meteorologica degna di Ognissanti e allietati dalle spiritose battute di Rudy sull'imminente "Labor Day" americano[17], la conversazione procedeva sui binari ormai usuali quando appunto un amico, che sapevamo in vena di trasloco, ci ha fatto vedere il progetto della nuova casa con il terreno annesso. Si trattava di un triangolo i cui lati erano tre strade di lunghezza 850, 1000 e 1200 metri[18].

L'idea del nostro amico era di costruire la casa in un punto e poi tracciare le vie più brevi per raggiungere ciascuna delle tre strade dalla casa e, alla fine, unire i tre punti di incrocio tra di loro con dei filari di alberi: volendo però una certa regolarità in questo

[17] Il primo lunedì di settembre. Secondo gli elegantoni americani, il Labor Day è l'ultimo giorno in cui potete indossare dei pantaloni bianchi e considerarvi una persona elegante. O forse è il primo giorno in cui non li potete indossare... Insomma, ci siamo capiti. E con il problema non c'entra nulla, quindi andiamo avanti.

[18] ...e qui dovreste capire perché il problema è impossibile: quella valle, otre che piovosa, è anche strettissima, e un triangolo del genere non ci sta da nessuna parte.

disordine (oh, ragassi, è un fisico, siam mica qui a far tunnel ai neutrini![19]), richiedeva che gli alberi fossero a cinque metri uno dall'altro e che ce ne fossero lo stesso numero su ogni lato.

Quello che gli interessava sapere, a questo punto, era quanti alberi avrebbe dovuto comprare... Comunque, anche se il problema è impossibile, l'amico esiste sul serio, è un fisico, si sta costruendo una casa nuova (senza 'sto sproloquio di giardino, evidentemente) e il problema lo ha tracciato con un pezzo di mattone sulla gettata del salotto. Gli altri ci stavano guardando con aria vagamente perplessa.

3. Bungee Jumpers

Provate che, se p e q sono primi tra loro, allora:

$$\sum_{i=1}^{q-1}\left[\frac{ip}{q}\right]=\sum_{i=1}^{p-1}\left[\frac{iq}{p}\right]=\frac{(q-1)(p-1)}{2}.$$

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Ottobre.

Dopo il mese passato, in cui le soluzioni ricevute mi hanno costretto a salti mortali per scrivere qualche pagina di questa rubrica, sono stata servita con ottimo materiale. Grazie, e bentornati! Forse si capisce tra le righe che stiamo facendo un po' di fatica, recentemente, a mettere insieme la rivista, e sono le vostre mail ed il vostro sostegno che fanno la differenza.

Forse non sapete che gli uomini del trio (Rudy e Piotr, il Capo e il Doc) si sono lanciati nel mondo delle conferenze ormai da qualche anno: bene, con l'autunno è anche cominciata per loro la stagione delle loro presenze sul podio. Alcuni appuntamenti sono già fissati, altri da concordare, ma per il momento vi posso dire che saranno a Brescia il 6/10, a Caluso il 11/11 e a Torino il 12/11. Per maggiori dettagli vi invito a visitare il nostro sito per tanti altri eventi: http://www.rudimathematici.com/memento/mementodb.php. Cercheremo di tenerlo aggiornato con le ultime novità.

Ma non perdiamoci in pubblicità e ciance: finalmente tutti i problemi che nei mesi precedenti erano stati ignorati o lasciati da parte sono stati in qualche modo affrontati, e quindi mi limito a passare velocemente alle vostre soluzioni dei problemi.

4.1 [150]

4.1.1 Forse era meglio prima

Si tratta di un problema proposto a luglio, il testo era più o meno questo:

> *Immaginate che sia possibile parcheggiare in una rotonda a margine dell'aiuola centrale, e che le zone di parcheggio siano delimitate in questo modo: tracciando le righe ogni due metri, ricavando cento spazi. Immaginiamo poi che l'auto standard sia lunga quattro metri. Ogni utente del parcheggio parcheggerà quindi se e solo se trova due spazi adiacenti. Le nostre macchine arrivano una per volta, e si piazzano in un qualsiasi "buco" da due spazi adiacenti che trovano, scelto a caso se ce ne sono più di due consecutivi ma comunque rigorosamente allineati alle strisce. Quante macchine ci si aspetta di trovare, a parcheggio pieno, ossia con solo degli spazi unitari rimasti liberi?*

[19] La parte sana della Redazione intende dissociarsi dal sensazionalismo mostrato da Rudy, che ha sostituito la battuta all'ultimo momento (prima si riferiva al "far luce sulla materia oscura").

A suo tempo (in RM151) avevamo pubblicato una soluzione provocatoria di ***Alberto R.***, e altri procedimenti di ***Franco57***, ***Bobbin Threadbare*** e ***GaS***. Questo mese ci ha scritto ***trentatre***, con qualche commento aggiuntivo:

> Nella soluzione in RM151 ***Franco57*** dice "mi piacerebbe veder pubblicato qualcosa sul limite …". Ho cercato di aggiungere quel "qualcosa".

Ci fa sempre piacere quando le domande trovano una risposta, ecco qui:

> La soluzione di ***Franco57*** definisce la capienza C_n di un parcheggio lineare di n semistalli con la ricorrenza $C_0 = C_1 = 0,\ C_2 = 1,\ C_n = C_{n-2} + \dfrac{2}{n-1}(1+C_{n-3}),\quad n \geq 3$.
>
> La equazione evidenziata nel testo contiene un refuso (n anziché n–1) ma il risultato finale – la *mostruosa frazione* – è corretto. Definendo la funzione generatrice $F(X) = \sum_{n=2} C_n X^{n-1}$, sostituendo per i C_n ($n \geq 3$) la formula di ricorrenza e derivando, si ottiene l'equazione differenziale $F'(X) = \dfrac{2X}{1-X}F(X) + \dfrac{1}{(1-X)^2}$ che si integra, con la condizione iniziale $F(0)=0$, nella $F(X) = \sum_{n=2} C_n X^{n-1} = \dfrac{1-e^{-2X}}{2(1-X)^2}$.
>
> Sviluppando i fattori di F (esponenziale e binomio) in serie di potenze e raccogliendo i coefficienti di X, si ottiene la formula finita, non ricorsiva
>
> $$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-2)^{k-1} \frac{n-k}{k!}, \quad n \geq 2.$$
>
> Da questa si ricavano i valori limite $n \to \infty$ per il parcheggio "lineare" e per quello "circolare"
>
> $$\frac{C_n}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} (-2)^{k-1} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{n(k-1)!} \right) \to K - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-2)^{k-1}}{(k-1)!} \to K + \frac{2K-1}{n}$$
>
> $$\frac{1+C_{n-2}}{n} = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-3} (-2)^{k-1} \left(\frac{1}{k!} - \frac{k+2}{nk!} \right) \to K + \frac{(-2)^{n-3}}{n(n-3)!}$$
>
> (ho usato l'identità $\sum_{k=1}^{n-3} (-2)^{k-1} \dfrac{k+2}{k!} = \sum_{k=0}^{n-4} \dfrac{(-2)^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n-3} \dfrac{(-2)^k}{k!} = 1 - \dfrac{(-2)^{n-3}}{(n-3)!}$)
>
> dove K è il numero
>
> $$K = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^{k-1}}{k!} = \boxed{\frac{1-1/e^2}{2} = 0.4323323584\ldots}.$$
>
> Tutte e due le "capacità" tendono per $n \to \infty$ a K, ma la $(1+C_{n-2})/n$ molto più rapidamente; in particolare $\left|C_{100}/100 - K\right| \approx 1.4\times10^{-3}$, $\left|(1+C_{98})/100 - K\right| \approx 1.6\times10^{-125}$ (!).
>
> Questo spiega come mai la *mostruosa frazione* $(1+C_{98})$ di ***Franco57*** sia praticamente uguale a $100K = 50(1-1/e^2)$.

Complimenti!

4.2 [151]

4.2.1 Non mi piace il MasterMind

Ecco il gioco negletto il mese scorso:

> *Alberto e Fred hanno scelto* 6 *numeri diversi tra loro compresi tra* 1 *e* 49*, estremi inclusi. Il Capo può fare delle ipotesi, scegliendo un sottoinsieme dei numeri e proponendoli, i VAdLdRM diranno quanti (non quali) sono quelli giusti. Quale strategia permette di indovinare i* 6 *numeri con il minimo di tentativi?*

Pochi commenti pubblicati nello scorso numero, da ***Franco57*** e ***Fabrizio***, naturale che un seguito sia giunto dal nostro ***Millennium Bug***, che ha deciso di cambiare il suo allonimo in ***MBG***. Quindi, la parola a ***MBG***:

> Io ho proceduto dividendo i 49 numeri in gruppi uguali e isolare quelli cercati. Le soluzioni si ricavano abbastanza facilmente, considerando i casi in cui i numeri si distribuiscono nel modo più sfortunato.
>
> E' chiaro che proponendo ai VAdLdRM un numero per volta, a GC servono al massimo 48 tentativi. Vediamo di fare di meglio: proponendo 2 numeri per volta, servono nel caso peggiore 30 tentativi: al massimo 24 per individuare in quali dei gruppi da 2 si trovino i 6 giusti e, dopo averli isolati, al massimo altri 6 per scoprire esattamente quali sono.
>
> Procedo così con raggruppamenti iniziali più grossi: con 3 per volta, faccio al massimo 28 tentativi: 16 per trovare i 6 gruppi, più 2x6 per identificare il numero giusto nel gruppo da 3.
>
> Con 4 per volta, me ne bastano 24: 12 per isolare i soliti 6 gruppi e, come prima, 2x6 per identificare il numero giusto nel gruppo da 4.
>
> Peggioro con gruppi da 5: ho 9+6x3=27 tentativi; anche con 6: ho 8+6x3=26 tentativi.
>
> Migliora qualcosa con gruppi da 7 o 8 visto che ottengo in entrambi i casi 6+6x3=24.
>
> Come detto sopra questi sono i casi peggiori in cui i 6 numeri mi vanno a finire ognuno in un gruppo diverso. Se ho la fortuna di trovare 2 numeri o più in un singolo gruppo (o se individuo i numeri prima di avere suddiviso tutti i gruppi) i tentativi si riducono.
>
> Dovrebbe valere questa regola: se ho bisogno di k tentativi per trovare un singolo numero tra N, me ne servono al massimo 2k–1 per trovarne 2 nascosti tra N, contro i 2k necessari per scovare i due separati in due gruppi da N.
>
> Detto T(N,m) il numero massimo di tentativi richiesti per individuare m numeri scelti tra N, ho ricavato che con la strategia delle divisioni in gruppi vale la regola:
>
> T(N+1,m) = max(T(N,m–i) + T(N,i) + 1) per i da 0 a m
>
> Applicandola, ho costruito una tabella per calcolare facilmente T(N,m) in funzione di quanti numeri ho (righe) e di quanti ne devo trovare (colonne).
>
> Però ottengo ancora lo stesso limite di 24 per tutte le strategie che ho provato.
>
> Avevo esaminato anche la soluzione proposta da Fabrizio, ma per come procedevo io mi risultano necessari 25 tentativi: divido l'insieme in 25 e 24, poi divido i 25 in 13 e 12 e il 24 in due da 12 (e sono a 3 tentativi). Supponendo di avere ora 1 o 2 numeri giusti in ogni gruppo, devo utilizzare ancora 4 tentativi per dividere i 13 in 6 e 7 e gli altri in gruppi da 6; infine ho i 3 tentativi da fare sui 6 gruppi da 6 o 7 che contengono i numeri cercati, per individuarli esattamente. In tutto 1+3+4+6x3=25.

Il problema è che se i numeri non sono raggruppati in potenze di 2 sono costretto a utilizzare i tentativi in modo non efficiente.

Secondo me però c'è una soluzione migliore e si può arrivare effettivamente sotto il 24. Innanzitutto mi puzza il fatto che i numeri siano 49 e non qualcuno in più: ad esempio, anche con 56 mi basterebbero 24 tentativi per trovare 6 numeri.

Quindi credo che la soluzione ottimale si abbia facendo i tentativi con sequenze di lunghezza diverse, probabilmente in funzione di quanti numeri non si sono ancora trovati.

A me sembra che il problema sia ancora aperto, non mi stupirei se ottenessimo altre soluzioni nei prossimi giorni...

		m					
		1	2	3	4	5	6
N	2	1	0	x	x	x	x
	4	2	3	2	0	x	x
	8	3	5	6	7	6	5
	16	4	7	9	11	12	13
	32	5	9	12	15	17	19
	6	3	4	5	4	3	0
	12	4	7	8	9	10	11
	24	5	9	12	15	16	17

4.2.2 Le probabilità che Alice...

Questo è stato il problema meno amato il mese passato, e per fortuna (di tutti tranne di Alice, cioè chi vi scrive) il più attaccato questo mese. Rivediamo il testo:

> *Abbiamo tre urne, due delle quali sono vuote mentre la terza contiene 3N palline; indicheremo questo stato delle urne come* $\{0;0;3N\}$. *Scopo di Alice è arrivare alla configurazione* $\{N;N;N\}$ *in* N *mosse, spostando però alla i-esima mossa esattamente i palline da un'urna ad un'altra urna. Per quali valori di N è possibile?*

Nel numero passato ci scriveva solo ***Ant***, ora abbiamo contributi di ***Adriano***, ***Fabrizio***, ***trentatre*** e ***MBG***. Cominciamo da ***MBG***:

> Avevo trovato un approccio interessante al problema, ma presuppone l'uso di palline di antimateria, visto che implica avere talvolta valori negativi in qualche urna. Siccome la cosa può essere pericolosa, non ho approfondito. Però potrebbe essere utile se si riformula il problema in modo da avere all'inizio N palline nelle prime due urne e 4N nella terza e si vuole arrivare ad averne 2N in ciascuna.
>
> E questo era il punto a cui ero arrivato il mese scorso.
>
> Tornato in seguito al problema originale, ho osservato che l'ultima mossa è necessariamente lo spostamento di N palline da un'urna che ne contiene 2N a una vuota, quindi il problema può essere semplificato a due sole urne:
>
> - inizialmente ho la prima vuota e 3N palline nella seconda
>
> - alla mossa n sposto n palline
>
> - alla mossa N–1 devo avere 2N palline nella prima e N nella seconda <u>o viceversa</u>.
>
> Infatti è inutile utilizzare la terza urna prima della fine perché:
>
> 1– per arrivare alla configurazione della mossa N–1 faccio solo somme e sottrazioni di palline e non ho memoria di come ci sono arrivato
>
> 2– tenere le palline in una singola urna invece che in due è più conveniente perché ad ogni mossa le ridistribuisco come voglio, in barba alla regola che mi impedisce di metterne un po' qua e un po' là.
>
> Analizziamo il problema semplificato. Dopo le N–1 mosse, ho spostato in tutto $\frac{N(N+1)}{2}-N$ palline.

A me serve però spostarne in effetti solo 2N o N per passare dalla situazione iniziale a quella finale della mossa N–1, per cui i restanti spostamenti intermedi devono annullarsi; ciò equivale a richiedere che questo numero sia pari (in altre parole, se ho spostato k palline dall'urna A a B, devo poi spostarle indietro da B a A, per cui il numero di palline mosse è sempre nella forma 2k).

Ricavo quindi questa condizione necessaria perché il problema sia risolvibile:

$$\frac{N(N+1)}{2} - N - N = 2k \quad \text{oppure} \quad \frac{N(N+1)}{2} - N - 2N = 2k$$

che si riduce a:

$$N(N-4\pm 1) = 4k$$

Questo risultato mi dice che di sicuro il problema non è risolvibile per gli N pari che non sono multipli di 4, ma non garantisce che lo sia negli altri casi.

Ad esempio, se provate con N=6 o N=10, nel caso migliore vi trovate sempre con una pallina fuori posto.

Per gli altri casi in cui la condizione necessaria è soddisfatta ho verificato che, esclusi N=4 e N=7, per gli N fino a 25 riesco sempre a risolvere il giochino.

(nota: con il trucco del numero di palline negativo riesco sempre e la condizione necessaria diventa anche sufficiente; lo spazio di disponibile a margine di questa nota è troppo piccolo per riportare la dimostrazione…)

Questo trucco lo usano proprio tutti al giorno d'oggi, e soprattutto su queste pagine… In realtà un po' tutti si sono preoccupati nel non trovare la soluzione nel numero di settembre, e ci hanno inviato le loro versioni intermedie. Ecco la versione di ***Adriano***:

Comincio col dire che mi era sembrato semplicissimo e ho tirato subito fuori una soluzione per N=3. Ovviamente poi ho capito bene cosa chiedeva il problema e allora ho scoperto un mondo, che purtroppo non sono ancora riuscito ad esplorare.

Il primo passo è stato accorgersi che l'ultima mossa, l'N-esima per intenderci, serve obbligatoriamente per riempire una delle due urne vuote, in quanto si devono spostare esattamente N palline da un'urna ad un'altra; perciò l'urna di arrivo deve essere vuota, visto che altrimenti conterrebbe più di N palline.

Quindi con le precedenti N–1 mosse bisogna riempire l'altra (diciamo la seconda).

Questo significa che delle prime N–1 mosse, alcune saranno di "sottrazione" cioè serviranno per svuotare la seconda urna in quanto la somma dei primi N–1 numeri (che indicherò Σ (N–1), scusate la notazione) supera N, per tutti gli N>3. Affinché sia possibile svuotare la seconda urna delle palline in eccesso, si deve verificare che Σ(N–1) – N sia un numero pari. Per esempio se N=8, Σ(7) = 28, per cui 28–8 = 20 che è pari e infatti N=8 è una soluzione. Il motivo è che le mosse di "sottrazione" dalla seconda urna verso la prima, devono complessivamente spostare (Σ(N–1) – N)/2 palline. Facendo l'esempio sempre per N=8, sono possibili due sequenze di mosse per riempire la seconda urna:

1, 2, –3, 4, 5, 6, –7 = 8

1, 2, 3, –4, 5, –6, 7 = 8

le mosse col meno ovviamente sono spostamenti dalla seconda urna alla prima. L'ottava mossa come già detto riempie la terza urna. Arrivati a questo punto si può stabilire che i valori di N ammissibili possono essere solo 3,4,7,8,10,11,15,16,... ecc, ovvero ad intervalli di quattro numeri, partendo da 1, i primi due non sono soluzioni mentre i secondi due sì.

Ma qui sorgono i problemi. Della sequenza di sopra, 4 e 7 non sono soluzioni ammissibili. Il motivo è che nella serie di mosse per riempire la seconda urna, non tutte le mosse possono essere di "sottrazione". Questo perché non si possono spostare più palline di quelle che sono effettivamente contenute nell'urna. Perciò, ad esempio, né la prima, né la seconda mossa possono essere di "sottrazione" dalla seconda urna. Con questo vincolo si può vedere facilmente che non esistono sequenze per risolvere il problema quando N=4 o N=7 (ovviamente senza questo vincolo sarebbe possibile anche per questi due valori di N).

A questo punto perciò, imponendo che non si possono sottrarre da un'urna più palline di quante ne siano in essa contenute, resta da dimostrare per tutti gli altri valori di N ammissibili (3,8,10,11,15,16,..., ecc), che è sempre possibile trovare k mosse di "sottrazione" nella sequenza delle prime N–1 mosse, la cui somma sia (Σ(N–1) – N)/2.

E qui mi fermo. Credo che sia sempre possibile risolvere il problema per i valori ammissibili di N >= 8 (per N=3 è banale), ma "credere di sapere" non equivale a "sapere con certezza", perciò la soluzione è incompleta.

Comunque, visto che ancora non è stata pubblicata, proverò a portarla avanti e spero di potervela inviare per il prossimo numero

E noi restiamo in ascolto. ***Fabrizio*** ci scrive ancora:

Pur non essendo riuscito ad individuare una regola generale per valutare per quali N il problema proposto ammetta almeno una soluzione, ho trovato una metodo che, per particolari valori di N, permette di generare sequenze di mosse che risolvono il problema.

L'idea di base prevede di utilizzare inizialmente due sole urne per effettuare gli spostamenti di palline con lo scopo di raggiungere lo stato {0, 1, 3N–1} partendo dalla condizione {0, 0, 3N}.

A tal fine supponiamo che le prime k_0 estrazioni vengano effettuate tutte dall'urna C con spostamento nell'urna B mentre dall'estrazione (k_0 + 1) in poi si alternino estrazioni dall'urna C con spostamento nell'urna B ad estrazioni dall'urna B con spostamento in C.

Indicando con $N_A(k)$, $N_B(k)$, $N_C(k)$ il numero di palline contenute rispettivamente nelle urne A,B,C, alla mossa k, possiamo descrivere la precedente sequenza in questo modo:

STEP	N_A	N_B	N_C
0	0	0	3N
1	0	1	$3N–N_B(1)$
2	0	1+2	$3N–N_B(2)$
3	0	1+2+3	$3N–N_B(3)$
...	...	...	....
k_0	0	$1+2+3+...+ k_0$	$3N–N_B(k_0)$
k_0+1	0	$1+2+3+...+ k_0+(k_0+1)$	$3N–N_B(k_0+1)$

STEP	N_A	N_B	N_C
k_0+2	0	$1+2+3+...+ k_0+(k_0+1)–(k_0+2)$	$3N–N_B(k_0+2)$
k_0+3	0	$1+2+3+...+ k_0+(k_0+1)–(k_0+2)+(k_0+3)$	$3N–N_B(k_0+3)$
k_0+4	0	$1+2+3+...+ k_0+(k_0+1)–(k_0+2)+(k_0+3)–(k_0+4)$	$3N–N_B(k_0+4)$
...	...	...	...
k_0+n	0	1	$3N–1$

Come ben si vede dalla tabella soprastante, così facendo prima o poi si arriverà ad un istante k_0+n in cui il contenuto di palline nell'urna B sarà pari ad 1.

Si noti ora che se k_0+n fosse uguale ad (N–2), una sequenza siffatta sarebbe anche una soluzione valida del problema. In questo caso infatti potremmo completare il tutto in questo modo:

STEP	N_A	N_B	N_C
0	0	0	3N
1	0	1	$3N–N_B(1)$
2	0	1+2	$3N–N_B(2)$
3	0	1+2+3	$3N–N_B(3)$
...	...	...	....
k_0	0	$1+2+3+...+ k_0$	$3N–N_B(k_0)$
k_0+1	0	$1+2+3+...+ k_0+(k_0+1)$	$3N–N_B(k_0+1)$
k_0+2	0	$1+2+3+...+ k_0+(k_0+1)–(k_0+2)$	$3N–N_B(k_0+2)$
k_0+3	0	$1+2+3+...+ k_0+(k_0+1)–(k_0+2)+(k_0+3)$	$3N–N_B(k_0+3)$
k_0+4	0	$1+2+3+...+ k_0+(k_0+1)–(k_0+2)+(k_0+3)–(k_0+4)$	$3N–N_B(k_0+4)$
...	...	...	...
N–2	0	1	3N–1
N–1	0	N	2N

STEP	N_A	N_B	N_C
N	N	N	N

Ma per come la sequenza è stata costruita abbiamo che:

$$k_0+n=k_0+2\cdot\left(\frac{k_0\cdot(k_0+1)}{2}-1\right)=k_0^2+2\cdot k_0-2$$

Imponendo la condizione $(k_0+n) = (N-2)$ si ha infine:

$$k_0+n=k_0^2+2\cdot k_0-2=N-2$$

da cui:

$$N=k_0^2+2\cdot k_0 \qquad k_0\in\{2,3,4,..\}$$

Ciò significa che per N = 8, 15, 24, 35,... esiste sempre una sequenza di spostamenti di palline da un' urna ad un'altra che conduce dallo stato {0, 0, 3N} allo stato {N, N, N}. Non è proprio la soluzione completa del problema, ma forse qualche birra si riesce anche a vincerla.

Bene, vincere birre è un ottimo risultato, anche se ne abbiamo ricevuto uno che permette di ottenere un risultato ancora migliore, e ce lo propone ***trentatre***, con spiegazioni molto colorate:

Con $3N$: n° di palline sia (x,y,z) un possibile stato delle urne.

Nel sistema di coordinate (x,y,z), uno stato è definito dalle condizioni

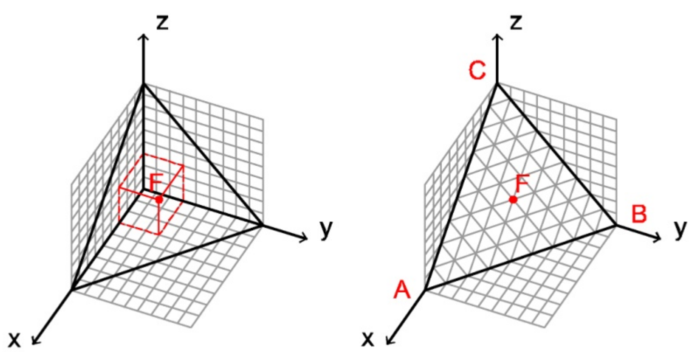
i. x, y, z: interi – lo spazio è limitato all'insieme dei punti con coordinate intere

ii. $x+y+z=3N$ rappresenta un piano α

iii. $x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$ limita il piano α al triangolo T_N con coord. positive.

Ogni stato (x,y,z) è rappresentato da un punto di T_N; in fig.1 il caso $N=3$, dove

T_N: triangolo equilatero di lato $3N$ e vertici $A\equiv(3N,0,0)$, $B\equiv(0,3N,0)$, $C(0,0,3N)$ con $F\equiv(N,N,N)$: punto centrale di T_N.



Il processo si può rappresentare sul triangolo T_N; ogni punto P su T_N è identificato dalle distanze di P dai lati BC, CA, AB, la cui somma vale $3N$.

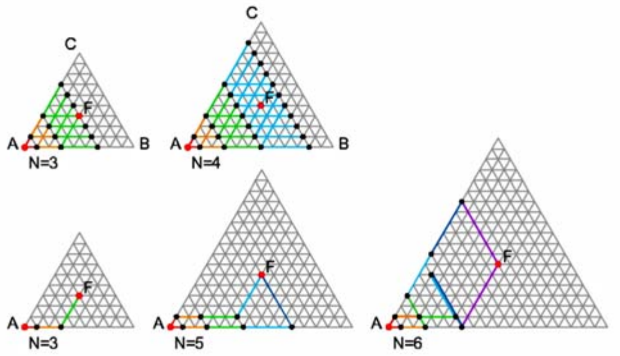
Lo spostamento di k palline fra due urne equivale ad uno spostamento fra due punti di T_N di <u>lunghezza k</u> e <u>parallelo a uno dei lati</u> (una coordinata non cambia). Tralasciando i percorsi simili dovuti a rotazioni e simmetrie di T_N, si possono considerare i soli percorsi $A\to F$.

Indichiamo con $\{N,k\}$ l'insieme dei punti di T_N raggiungibili da A con un percorso composto da segmenti di lunghezze (1, 2 … k) e con $P(N,k)$ un punto $P \in \{N,k\}$.

Esiste almeno una soluzione $(3N,0,0) \to (N,N,N)$ in k passi se $F(N,k)$.

Le soluzioni cercate sono le $F(N,N)$ in N passi; per queste l'ultimo segmento parte sempre da uno dei lati di T_N. Nessun segmento più lungo di N può arrivare a F e non esistono soluzioni in più di N passi.

I casi N= 3, 4, 5, 6 sono disegnati in fig. 2. In alto per N=3 e N=4 sono riportati tutti i percorsi possibili. Per N=3, F è raggiunto dai segmenti-3 (in verde): pertanto esiste una soluzione $F(3,3)$. Per N=4 nessuno dei segmenti-4 (in azzurro) termina in F: N=4 non ha soluzioni.



In basso sono riportate le soluzioni diverse (a parte rotazioni e ribaltamenti) per N=3, per N=5 (una soluzione $F(5,4)$ e una $F(5,5)$) e per N=6 (due soluzioni $F(6,6)$). Naturalmente i percorsi si possono mettere in forma di scambi fra le urne:

$N=3 \quad (9,0,0)(8,1,0)(6,3,0)(3,3,3)$

$N=5 \quad (15,0,0)(14,0,1)(12,2,1)(9,5,1)(5,5,5)$

$(15,0,0)(14,1,0)(12,3,0)(9,6,0)(5,10,0)(5,5,5)$

$N=6 \quad (18,0,0)(17,1,0)(15,3,0)(15,0,3)(11,0,7)(6,0,12)(6,6,6)$

$(18,0,0)(17,0,1)(15,2,1)(12,5,1)(12,1,5)(12,6,0)(6,6,6)$

Il caso N=6 evidenzia la complessità del problema al crescere di N. Ma si può procedere con un programma di simulazione. Indicando con $[m/k]$ il numero m di percorsi $A \to F$ in k passi, cioè di soluzioni diverse $F(N,k)$ ho ricavato

$N=3 \quad [1/3]$

$N=4$ nessuna soluzione

$N=5 \quad [1/4] \quad [1/5]$

$N=6 \quad [2/6]$

$N=7 \quad [6/7]$

$N=8 \quad [1/6] \quad [5/7] \quad [15/8]$

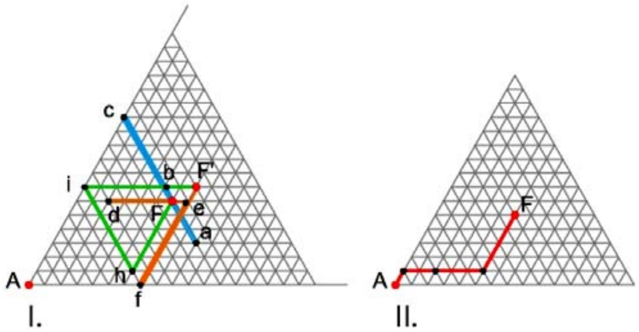
$N=9 \quad [1/6] \quad [2/7] \quad [8/8] \quad [29/9]$

$N=10 \quad [10/8] \quad [24/9] \quad [106/10]$ e così via.

Il numero di soluzioni diverse cresce rapidamente con N (certamente fino a N=50). Sembra quindi che, per N grande, esistano molte soluzioni $F(N,k)$ per k che parte da un valore minimo fino a N.

Riporto di seguito, in forma abbreviata, una dimostrazione della esistenza di $F(N,N)$ per ogni N abbastanza grande.

Una soluzione $F(N,k)$ in k passi (1,2…k) può condurre ad un'altra soluzione $F(N',k')$ con l'aggiunta di alcuni percorsi elementari (v. fig. 3 - I):



(i) lo spostamento di F su se stesso, $F \to F$ in 4 passi (k+1), (k+2), (k+3), (k+4)

($F \to a \to b \to c \to F$ in azzurro)

(ii) lo spostamento fra i centri $F_N \to F_{N+1}$ e inversamente $F_{N+1} \to F_N$ con

a) quattro passi (k+1), (k+2), (k+3), (k+4) ($F \to d \to e \to f \to F'$ in arancio)

b) tre passi (k+1), (k+2), (k+3) ($F \to h \to i \to F'$ in verde).

Verificando che i percorsi restino interni ai triangoli si deducono le relazioni fra le diverse $F(N,k)$ (in tutte le formule il secondo indice deve essere ≤ al primo)

(iii) applicando a F la (i)

$F(N,N-k) \Rightarrow F(N,N-k+4)$

(iv) applicando a F le (ii.a) e (ii.b)

$F(N,N-k) \Rightarrow F(N,N-k+4)$

$F(N,N-k) \Rightarrow F(N+1,N-k+3),\ F(N+1,N-k+4)$

$F(N,N-k) \Rightarrow F(N-1,N-k-3),\ F(N-1,N-k-4)$

(v) combinando (iii) e (iv) e abbreviando $F(N,N)$ con ((N))

$F(N,N-2) \Rightarrow ((N+1))$

$F(N,N-4) \Rightarrow ((N,N+2))$

$F(N,N-6) \Rightarrow ((N,N+1,N+2,N+3))$ ecc. e infine

$F(N,N-2k) \Rightarrow ((N+m)),\quad \forall m = 0,1,2...k,\quad k \geq 3$

(vi) in fig. 3 II sia $A \to F$ con k passi (1,2…k) a zig-zag in modo che sia $F(N,k)$

deve essere $1+2+...\ k = k(k+1)/2 = 2N$ e quindi $k = 4m,\ k = 4m-1$ da cui

$F(4m^2+m,4m),\quad m \geq 1$ - comprende $F(5,4)$ (v. fig. 2)

$F(4m^2-m,4m-1),\quad m \geq 1$ - comprende $F(3,3)$

usando la prima e applicando (v) si ha

m=8, $F(264,32) \Rightarrow ((264\ldots380))$ (esiste $F(N,N)$ per N=264…380))

m=10, $F(410,40) \Rightarrow ((410\ldots595))$

m=12, $F(588,48) \Rightarrow ((588\ldots858))$

$$m{=}14,\ F(798{,}56) \Rightarrow ((798\ldots1169))\ \text{ecc.}$$

le sequenze generate da m=10, 12 ecc. si sovrappongono per cui

(vii) per ogni $N \geq 410$ esiste una soluzione $((N)) \equiv F(N,N)$.

Questo dimostra che esiste una soluzione per N grande. Con percorsi più complicati si possono trovare altre sequenze di $F(N,k)$ che consentono di abbassare il limite.

Tornando alle urne e al quesito: quali N ammettono una trasformazione $(3N,0,0) \rightarrow (N,N,N)$ con lo spostamento di 1, 2, 3 … N palline? la risposta è <u>tutti i valori $N \geq 3$ escluso 4</u>.

E questo sembra essere piuttosto conclusivo, che ne dite? Secondo me ne sentiremo ancora parlare...

4.3 [152]

4.3.1 Un problema letterario

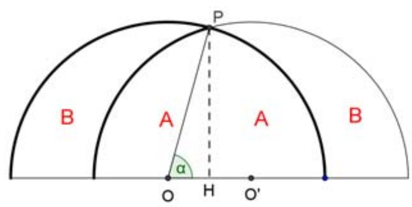
Poveri noi, tutte queste pagine di soluzioni e non abbiamo ancora nemmeno sfiorato i problemi del mese scorso. Bisognerà sbrigarsi. Ecco il problema di Mrs Miniver in quattro parole:

> *Lei vedeva ogni relazione come una coppia di cerchi intersecantisi. (...) la perfezione viene raggiunta quando la somma delle aree delle due parti che non si sovrappongono eguaglia l'area della parte comune ai due cerchi. Sulla carta dovrebbe esistere una qualche elegante formula matematica per arrivare a questo, che però non si applica alla vita.*

Il problema è piaciuto moltissimo, forse era facile, ma ugualmente simpatico. ***Michele*** lo risolve in quattro e quattr'otto:

Consideriamo due cerchi di raggio unitario, uno di centro O e uno di centro O*'* che si intersecano in P. Limitiamoci al problema equivalente relativo ai semicerchi. Mandiamo da P la perpendicolare a OO*'*.

Si tratta di determinare per quale angolo α risulta



$$\begin{cases} \mathrm{A} = \mathrm{B} \\ \mathrm{A} + \mathrm{A} + \mathrm{B} = \pi \end{cases}$$

cioè $3\mathrm{A} = \dfrac{\pi}{2}$, da cui $\mathrm{A} = \dfrac{\pi}{6}$.

Poiché

$$\mathrm{A} = \int_0^{\alpha} \sin(t)^2\, dt = \frac{\alpha - \sin(\alpha)\cos(\alpha)}{2} = \frac{2\alpha - 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{4} = \frac{2\alpha - \sin(2\alpha)}{4}$$

l'equazione da risolvere è $\dfrac{2\alpha - \sin(2\alpha)}{4} = \dfrac{\pi}{6}$, cioè $2\alpha - \sin(2\alpha) = \dfrac{2}{3}\pi$, con $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Con un qualunque algoritmo di approssimazione si ottiene $\alpha \approx 1.30266$, $\alpha \approx 74.6°$.

Altri si sono complicati la vita immaginando che i due cerchi potessero essere di dimensioni diverse. ***Beppe GIM***, per esempio, ha anche controllato la differenza massima tra i due cerchi per poter risolvere il problema:

> Abbiamo due cerchi, $C_1(O_1, r)$ e $C_2(O_2, R)$, che si intersecano. Supponiamo che C_2 abbia raggio R maggiore di r (quanto può essere maggiore, lo vediamo dopo). Il problema richiede che l'area comune ai due cerchi, che chiamo A, sia uguale alla somma delle due parti, che chiamo S_1 (del primo cerchio) e S_2 (del secondo cerchio) che, usando la terminologia degli insiemi, sono ciascuna nel proprio cerchio complementari ad A.
>
> Evidentemente si ha: $S_1 = \pi\, r^2 - A$; $S_2 = \pi\, R^2 - A$ `[1]`
>
> Il problema vuole che: $S_1 + S_2 = A$, perciò facilmente si ha:
>
> $A = S_1 + S_2 = \pi\, r^2 - A + \pi\, R^2 - A = \pi\, r^2 + \pi\, R^2 - 2\,A$
>
> da cui : $3A = \pi\, r^2 + \pi\, R^2$
>
> e pertanto : $A = \pi\,(r^2 + R^2) / 3$ `(2)`
>
> Cioè, l'area A deve essere 1/3 della somma delle aree dei due cerchi, presi separatamente. Ma quanto più grande di C_1 può essere C_2, cioè quanto maggiore di r può essere il raggio R? C'è evidentemente un limite. Se, per esagerare, R fosse 10 volte r, l'area di C_2 sarebbe 100 volte quella di C_1: avvicinando il cerchio C_1 a C_2 e facendolo sovrapporre sempre di più, C_1 sarebbe completamente assorbito dal cerchio C_2, e la differenza tra le due aree sarebbe ancora 99 volte l'area minore. Perciò la condizione richiesta dal problema non si potrebbe mai avere.
>
> È evidente che, per poter soddisfare la condizione richiesta, deve verificarsi la seguente disequazione: $C_2 - C_1 < C_1$, cioè: $\pi R^2 - \pi r^2 < \pi r^2$, da cui: $R^2 < 2\, r^2$, da cui ancora: $R < r \cdot \sqrt{2}$ `(3)`.
>
> Se nella `(3)` mettessimo il simbolo di uguaglianza, si vede dalla `(2)` che si avrebbe:
>
> $A = \pi r^2$, e pertanto, dalle `(1)` : $S_1 = 0$; $S_2 = \pi r^2$, e quindi : $\pi R^2 = 2\,\pi r^2$
>
> cioè il cerchio C_2 avrebbe area doppia di C_1, e C_1 sarebbe tutto dentro a C_2. Questa potrebbe già essere una soluzione, ma con $S_1 = 0$, quindi un po' particolare.
>
> Solo se vale la `(3)`, può aversi un'area $S_1 > 0$.
>
> Premesso quanto sopra, intersecando C_1 e C_2 risulta che la distanza D tra i centri O_1 ed O_2 deve soddisfare la seguente relazione:
>
> $R-r < D < R+r$ `(4)`
>
> Infatti, se fosse $R-r=D$ il cerchio C_1 di raggio minore r sarebbe tangente internamente al cerchio C_2, mentre se fosse $D = R+r$ i due cerchi sarebbero tangenti esternamente.
>
> Tracciate le due circonferenze, che soddisfano innanzitutto la `(3)` e la `(4)`, quanto deve essere la distanza D perche sia soddisfatta la `(2)`?
>
> Le circonferenze si incontrano in due punti, P e Q, simmetrici rispetto alla retta passante per O_1 ed O_2: la retta che passa per P e Q e detta "asse radicale". Il segmento PQ e una corda comune di C_1 e C_2; i due punti P e Q determinano, su C_1 e C_2, due archi di circonferenza, che con la corda detta formano due segmenti circolari. La somma delle aree di questi segmenti circolari e l'area A richiesta.
>
> Indico con 2α l'angolo al centro di C_1 corrispondente all'arco su C_1, e con 2β l'angolo al centro di C_2 corrispondente all'arco su C_2.

La distanza D è data da: $D = r \cos\alpha + R \cos\beta$ (5)

Per il teorema dei seni, dal triangolo O_1PO_2 si ricava:

$$R/\text{sen}\alpha = r/\text{sen}\beta = D/\text{sen}(\alpha+\beta) \quad (6)$$

L'area del segmento circolare determinato dalla corda PQ su C_1 è data da $1/2 \cdot r^2[2\alpha - \sin(2\alpha)]$. L'area del segmento circolare determinato dalla corda PQ su C_2 è data da $1/2 \cdot R^2[2\beta - \sin(2\beta)]$, per cui si può scrivere il sistema di due equazioni:

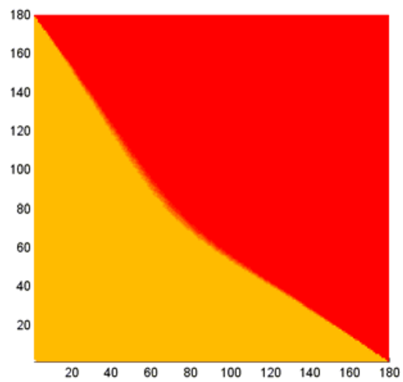
$$\begin{cases} 1/2 \cdot r^2[2\alpha - \sin(2\alpha)] + 1/2 \cdot R^2[2\beta - \sin(2\beta)] = \pi(r^2 + R^2)/3 \\ \sin\beta = r/R \cdot \sin\alpha \end{cases}$$

Queste due equazioni hanno per incognite gli angoli α e β, ma il sistema non è risolvibile analiticamente. (In linea di principio, si potrebbe anche ricavare β dalla seconda e sostituirlo nella prima, e poi manipolare la prima in modo da avere una equazione finale in funzione solo di senα e di α: ma anche questa non sarebbe risolubile analiticamente: fatica sprecata).

Una volta noti gli angoli, si può calcolare facilmente la distanza D, la lunghezza della corda comune PQ, le saette dei due segmenti circolari. Ma come fare per calcolare gli angoli?

Qui ***Beppe*** si riduce ad alcuni casi particolari, per ottenere dei risultati, un po' come hanno fatto tutti. Effettivamente ottenere un risultato numerico non dà moltissime soddisfazioni, lascia l'amaro in bocca a tutti quelli che hanno provato a risolvere il problema. Persino ***MBG*** conclude sconsolato:

Però purtroppo la formula matematica non è così elegante come Mrs Miniver avrebbe voluto, o per lo meno non è elegante per me, dato che non si riesce a risolvere se non in modo numerico. (...)



Per il caso generale invece, la cosa più elegante che sono riuscito a tirare fuori è la figura a lato in cui visualizzo il luogo delle soluzioni in funzione dei due angoli e che divide le due zone colorare diversamente, cioè i casi in cui l'intersezione dei cerchi è troppo grande o troppo piccola per avere l'amore perfetto

Figura che ci sembra interessante. E ci fermiamo qui, non senza ringraziare ***Pabell*** per il contributo che non facciamo in tempo ad aggiungere qui.

4.3.2 Saluti da Alberto

Quest'ultimo problema è proprio difficile, anche da riassumere. Vediamo:

Il gioco consiste nel piazzare sul tavolo stuzzicadenti in "turni" secondo le seguenti regole:

1. *Al turno 0 non c'era nessuno stuzzicadenti sul tavolo.*
2. *Al turno 1 veniva messo uno stuzzicadenti sul tavolo, allineato (ad esempio) all'asse y (qualunque esso sia).*
3. *Ad ogni turno successivo, veniva sistemato il massimo numero possibile di stuzzicadenti in modo tale che:*

a. il punto medio di ogni stuzzicadenti si trovi all'estremità di uno e di un solo stuzzicadenti (quest'ultimo piazzato in un turno precedente).

b. Ogni stuzzicadenti che ne tocchi un altro lo faccia solo ad un'estremità (insomma, gli stuzzicadenti non si devono "coprire a metà": è logico che uno stuzzicadenti ne può toccare più di uno, avendone per esempio uno che gli tocca il centro e toccando lui i centri di altri due con le punte, uno per parte).

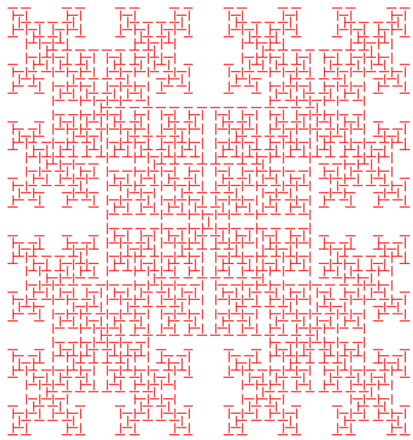
Si riesce a chiudere un turno con 2011 stuzzicadenti sul tavolo? E nel caso, che numero è il turno? E quanti stuzzicadenti ci saranno al duemilaundicesimo turno?

Ecco, qui i contributi sono stati colorati ma non conclusivi, per esempio ***Camillo***:

> Di primo acchito il giochino degli stuzzicadenti sembrava facile ma poi... La posa degli stuzzicadenti in maniera ortogonale porta ad avere lo scheletro di un mostro abissale lungo oltre 90 metri se fatto con 2011 stecchini.
>
> Però se la posa non è ortogonale le cose cambiano. Veri stecchini sul tavolo o fogli di carta con tracciate delle righe; un gran casino. Per cui ho messo mano alla mia "proverbiale abilità manuale" e ho trovato degli stuzzicadenti per orchi che con dei buchi alle estremità ed in centro mi permettono di vincolarli ad un fulcro e provare delle disposizioni "senza che ti scappino da tutte le parti".
>
> Disposizione caotica; al sesto turno di posa mi ha fatto desistere per mancata disponibilità di una piazza d'armi. Allego fotografia di questa disposizione.
>
> Probabilmente una disposizione più ordinata con cui ogni stecco è vincolato al centro con un angolo stretto (forse 18 gradi potrebbe andare bene) permette una disposizione ordinata con una specie di bouquet di stecchi che si rincorrono con delle spirali. Forse è qualcosa che ha a che fare col rapporto aureo.
>
> 
>
> *Addendum*: Acci, ma duemila stuzzicadenti su un tavolo da ristorante proprio non ci stanno. Se invece consideriamo una griglia quadrata con lato di mezzo stuzzicadenti su un tavolo da ristorate di 80X80 cm poco più di 600 stecchini sono sufficienti (gli stecchini sono lunghi 6,5 cm).
>
> Ma su questo benedetto tavolo invece di usare una marea di stuzzicadenti perché non usarne solo 6 per formare 4 triangoli equilateri? Ci scommetto che si poteva coinvolgere anche il personale del ristorante, financo il barista sul suo stretto bancone.

Non dirlo a me, ***Camillo***, che a me il Capo con i suoi problemi dell'anno fa sempre impazzire. Vediamo l'ultimissimo contributo, ancora di ***MBG***, che questo mese si è veramente dato da fare:

> Anche qui mi sono dovuto arrendere alla forza bruta. Nonostante la procedura di costruzione sia semplice, non sono riuscito a identificare un'espressione analitica della serie che rappresenta il numero di stuzzicadenti al passo n.
>
> Ergo, con un simpatico programmino ho simulato il tutto e (sorpresa!) ho trovato che al passo 59 si avrebbero sul tavolo esattamente 2011 stuzzicadenti nella configurazione che vedete qui di lato.



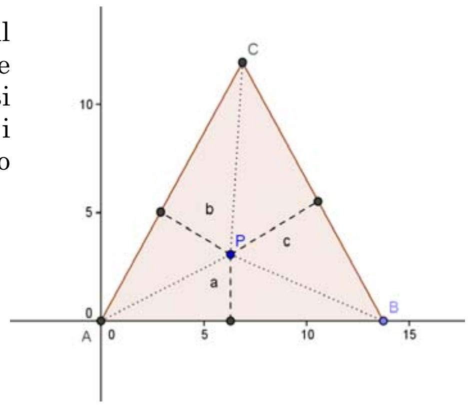
> Supponendo che la lunghezza di uno stuzzicadenti sia circa 6cm, servono almeno 2 metri di tavolo e quindi deduco che i nostri eroi non siano arrivati a questo punto, anche perché il maitre li avrebbe scacciati molto prima.
>
> Il numero di stuzzicadenti al passo 2011 è abbastanza complicato da trovare, anche col programmino. Siccome non ho tempo per scrivere le altre 34 pagine che servono per spiegare il tutto, io mi fermo qui.

E noi invece non ci fermiamo ancora: più di dieci pagine di soluzioni, non un record, ma un'ottima performance. Se non fosse che siamo arrivati ad un momento cruciale: qualcuno ha osato commentare il PM del Capo!

4.3.3 Dai Teoremi delle tonsille, PM

Ecco, ***Laura*** ci scrive i suoi dubbi a proposito del PM del mese scorso:

> stavo sfogliando il vostro nuovo numero di settembre facendo girare la rotellina del mouse e proponendomi quindi di leggere il tutto con molta calma, quando l'attenzione è stata catturata dai teoremi delle tonsille che mi hanno attratto sia perché ho bambini piccoli e quindi l'argomento mi è molto a cuore, sia perché insegno geometria e i punti notevoli li ho sempre trovati divertenti.
>
> Facciamo così: tiratemi il cancellino, io proverò a schivarlo, ma la formula che avete messo per il calcolo del punto del triangolo equilatero a pagina 25 a me non torna.
>
> Intanto io ho interpretato con a, b e c le coordinate trilineari del punto e con d il lato del triangolo equilatero. Dalla formula ottengo come valore di d il numero $\sqrt{25+12\sqrt{3}}$ essendo gli altri non accettabili.
>
> Invece di utilizzare la formula io ho calcolato il lato l del triangolo equilatero imponendo che la somma delle aree dei tre triangoli che si vengono a formare collegando il punto con i vertici sia uguale all'area del triangolo equilatero.



$$\frac{a \cdot l}{2} + \frac{b \cdot l}{2} + \frac{c \cdot l}{2} = \frac{\sqrt{3} l^2}{4}$$

> da cui:

$$\frac{(a+b+c) \cdot l}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{4} \rightarrow l = \frac{2 \cdot (a+b+c)}{\sqrt{3}}$$

> Nel nostro caso $a = 3$, $b = 4$ e $c = 5$ e quindi si ottiene $l = 8\sqrt{3}$.
>
> Per trovare la posizione del punto ho invece lavorato sul piano cartesiano, trovando le espressioni analitiche delle distanze del punto P(x;y) da trovare dalle rette su cui giacciono i lati: $d_{AB`} = y \,;\, d_{AC} = \dfrac{\left|\sqrt{3}x - y\right|}{2} ; d_{AC} = \dfrac{\left|\sqrt{3}(x - l) + y\right|}{2}$
>
> e imponendo che le distanze fossero rispettivamente 3,4,5:

$$\begin{cases} y = 3 \\ \dfrac{\left|\sqrt{3}x - y\right|}{2} = 4 \\ \dfrac{\left|\sqrt{3}(x - l) + y\right|}{2} = 5. \end{cases}$$

che insieme al vincolo

$$\begin{cases} y > 0 \\ \sqrt{3}x - y > 0 \\ \sqrt{3}(x - l) + y > 0 \end{cases}$$

permette di trovare la soluzione: $P = \left(\dfrac{11}{\sqrt{3}};3\right)$; $l = 8\sqrt{3}$.

Gli altri due punti si trovano facendo una rotazione di 2 / 3 π e 4 / 3 π del punto P intorno al centro del triangolo. Trovo: $Q = \left(\dfrac{14}{\sqrt{3}};4\right)$ e $R = \left(\dfrac{11}{\sqrt{3}};5\right)$.

Che cosa sbaglio?

Il Capo pensa che non ci sia niente di sbagliato, nel ragionamento, ma allo stesso tempo ha un grosso rispetto della fonte dove ha preso l'argomento (Martin Gardner)... e così giriamo la domanda di ***Laura*** ai nostri lettori: cosa ne pensate?

Continuate così, ragazzi, e a risentirci a novembre.

5. Quick & Dirty

Si hanno due nastri di carta e un accendino. Ogni nastro di carta impiega esattamente 1 ora a bruciarsi completamente dall'inizio alla fine. La velocità con la quale esso brucia non è costante in ogni tratto: a volte brucia velocemente all'inizio e lentamente alla fine oppure in maniera del tutto casuale. È possibile calcolare quando trascorrono esattamente 45 minuti, senza disporre di null'altro?

6. Pagina 46

Consideriamo i punti sul piano cartesiano per cui sia:

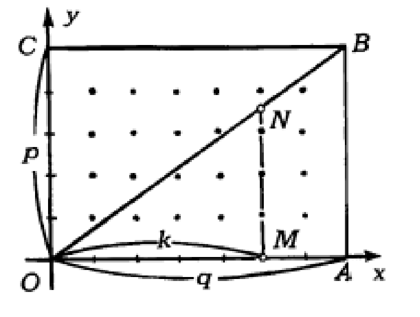
$$(x, y): x, y \in N, 1 \le x \le q-1, 1 \le y \le p-1,$$

Ossia i punti sul reticolo a coordinate intere interni al rettangolo $OABC$ di base q e altezza p con un vertice nell'origine e completamente compreso nel quadrante positivo: essendo p e q primi tra loro, nessuno dei punti considerati appartiene alla diagonale $\overline{OB}$.

Notiamo (v. figura) che il numero dei punti avente ascissa $k, 1 \leq k < q$ e che si trovano al di sotto della diagonale è pari alla parte intera della lunghezza del segmento $\overline{MN}$. Essendo ora

$$\overline{MN} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} \cdot \overline{AB} = \frac{kp}{q},$$

Si ha che il numero dei punti è pari a $\left[\frac{kp}{q}\right]$.



7 *Reticolo dei punti interi*

Da questo si ricava che la somma:

$$\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \left[\frac{3p}{q}\right] + \ldots \left[\frac{(q-1)p}{q}\right]$$

è pari al numero dei punti che si trovano al disotto del segmento $\overline{OB}$.

Nell'intero rettangolo sono contenuti $(p-1)(q-1)$ punti: tenendo conto dello schema simmetrico dei punti, del fatto che nessuno di questi giace sulla diagonale e del fatto che $\overline{OB}$ biseca il rettangolo, esattamente metà di questi punti si trova al di sotto di $\overline{OB}$; quindi risulta:

$$\sum_{i=1}^{q-1} \left[\frac{ip}{q}\right] = \frac{(q-1)(p-1)}{2},$$

Che è la prima parte della tesi; la seconda parte si dimostra in modo perfettamente analogo.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 ...e dico "UNO", e dico "DUE"...

Contrariamente a quanto potrebbe far supporre il titolo, non abbiamo la minima intenzione di parlare di Critica dei Fondamenti; anche perché in questo caso dovrebbe scrivere tutto Doc, che in questo periodo è affaccendato fuori di qui.

Comunque, l'origine di questo pezzo è veramente *fuori di qui*; infatti, in quello che Asimov chiamava "il mondo della fantasia" (quello dove *non* c'erano i Robot Positronici, le Seconde Fondazioni e gli Imperi Interstellari), uno degli scriventi (Rudy) e almeno un lettore (non ve lo diciamo, per *praivasi*) stanno, per interposte persone, litigando di brutto. E si tratta di soldi. Un mucchio.

Se siete andati al cinema negli ultimi quarant'anni, di sicuro avete assistito ad un'asta (*auction*, per gli anglofili); probabilmente alla forma peggiore, nella quale il cattivo di turno, con uno sguardo gelido e un aggiustamento di farfallino, manda a quel paese l'offerta massima possibile per la povera vedova (con come figlia una biondona che è uno schianto) che sta cercando di tenersi la proprietà del prato abbandonato che contiene una quantità innumerabile di petrolio, sin quando arriva il figlio del banchiere (biondone palestrato, evidentemente) che riesce a *contrare*[20] l'offerta del cattivo, eccetera, eccetera, eccetera: vista una, viste tutte.

Sbagliato.

Tanto per cominciare, raramente i battitori si fidano di uno che si aggiusta il farfallino (e a ragione: gli unici portatori di farfallino che conosciamo non sono ricchissimi); secondariamente, di aste ne esistono svariati tipi: non arriviamo a dire che anche solo scegliere il tipo di asta sia un problema *politico* ma, se non ne conoscete la matematica soggiacente, potrebbe rapidamente diventarlo.

Come usuale, statuiamo le regole: esistono ***quattro*** tipi fondamentali di asta.

1. L'asta ***ascendente***, nota anche come *aperta*, *orale* o *inglese*. Questa è quella che conoscete tutti: il battitore stabilisce un prezzo minimo, tutti quanti possono rilanciare, di solito a scatti prefissati (per evitare il "colpo della vedova" visto sopra: questo caso particolare, comunque, è noto come *giapponese*), e si continua sin quando non mollano tutti tranne uno, e quelli che mollano, di solito[21], devono mollare tutto (nel senso che non possono rientrare nel gioco).
2. L'asta ***discendente***, che funziona esattamente al contrario (anche se viene pure lei definita *aperta*, o *olandese*): il battitore definisce un prezzo iniziale (solitamente astronomico) e a tempi prefissati il prezzo cala di un importo predefinito; il primo che dice "Io!" (o alza la mano o si aggiusta il farfallino), paga il prezzo in vigore in quel momento e si porta a casa il tutto. Se passate da Amsterdam e volete comprare un tulipano, preparatevi perché usano questa: hanno anche inventato un orologio apposta, per farla.
3. L'asta alla ***prima offerta chiusa*** (e adesso avete capito perché le altre erano "aperte") prevede che tutti i partecipanti facciano offerte in busta chiusa: chi offre di più, paga la cifra proposta e vince l'asta;: molto diffusa per la vendita di terreni minerari.
4. Ultima (ma probabilmente la più divertente), l'asta alla ***seconda offerta chiusa***: tutto funziona come in quella della prima offerta chiusa, ma qui chi vince (offerta più alta), paga l'importo proposto dal *secondo* offerente. Nota anche come *Vickrey*,

[20] Non usiamo a caso il termine: la licitazione del Bridge è, a tutti gli effetti, un'asta.

[21] Esistono dei casi in cui potete, per esempio, saltare un numero prefissato di contro-offerte.

è (era? Siamo sicuri che qualche anno fa ci siano state alcune truffe, in merito) utilizzata praticamente solo in internet o per alcune aste di francobolli giocate per posta (con un altro francobollo, spiritosi!).

Notate che abbiamo sorvolato (non ci interessano) su quelle aste (aperte, ascendenti o discendenti) in cui si ha un *tempo fisso* per puntare, e allo scadere viene comunque assegnato il bene al vincitore: qui, l'unica cosa interessante ci pare il fatto che in Italia si utilizzava una candela, per misurare il tempo: la base della candela era colorata di verde, e quando si arrivava al verde si bloccava l'asta: da cui, l'espressione "Sono al *verde*!"[22]

Bisogna, inoltre, tener conto di altri fattori: in un'asta (di qualsiasi tipo) a ***valore privato***, solo la persona che fa l'offerta conosce il valore che lui attribuisce al bene messo all'incanto, mentre nelle aste a ***valore aperto*** (pure) il valore è lo stesso per tutti i partecipanti, ma alcuni di loro possono avere informazioni private diverse su quale sia il valore effettivo[23].

Anche se un'asta può sembrare un gioco (nel senso di Teoria dei Giochi) decisamente dinamico, in realtà è abbastanza statico: se, ad esempio, prendete l'asta discendente, in pratica ve ne state zitti sin quando a forza di scendere non si arriva alla cifra che avete intenzione di spendere (e se qualcuno fa l'offerta prima di voi, avete "vinto" in quanto avete risparmiato i soldi); inversamente, in un'asta a valore ascendente, continuate a fare offerte sin quando non arrivate alla cifra che siete disposto a spendere (e se poi qualcuno offre di più, avete vinto nello stesso senso di prima).

È abbastanza evidente che nelle aste a prima offerta chiusa il massimo della convenienza si ha comunque nel proporre la cifra che rappresenta la vostra valutazione del bene, riconducendovi in questo modo ai casi precedenti; ma se ci pensate un attimo, anche nelle aste a seconda offerta chiusa conviene dare la propria valutazione: se vincete, pagherete meno, ma se vince un altro la cosa sarà comunque stata onesta perché pagherà comunque il valore corretto (o più: dipende se voi eravate secondi o no): quindi, ***dire la verità rappresenta un Equilibrio di Nash***, ossia è la strategia dominante.

In queste aree, anche se i concetti sembrano semplici, i teoremi possono essere complessi. Ad esempio, un risultato abbastanza "ovvio" può essere espresso come:

> Se ogni membro di un gruppo di potenziali acquirenti neutri rispetto al rischio ha una valutazione del valore privata e indipendente e ogni acquirente desidera solo un esemplare di k premi indivisibili, allora qualsiasi metodo di scelta in cui:
>
> 1. i premi vanno ai k partecipanti con la valutazione più alta e
> 2. il partecipante con la valutazione più bassa si aspetta un surplus nullo,
>
> si concluderà sempre con lo stesso valore atteso.

Complicato? Beh, è una generalizzazione di quanto abbiamo detto sopra: il metodo non importa, va sempre a finire allo stesso modo.

Non crediate che la "Teoria delle Aste" si applichi solo alle aste: abbiamo trovato un gustoso aneddoto (vero) che tira in ballo questo teorema nella vita reale.

[22] Se riuscite a confermarci o a smentirci questa affermazione, siamo contenti uguale.

[23] Questa può sembrare dura da accettare, ce la caviamo con un esempio (non di asta) preso dalla vita reale di Rudy. Ad un'esposizione di disegni di un pittore, le opere se ne stavano andando a prezzi decisamente alti per le nostre finanze, tranne un ritratto della moglie del pittore, che tutti stavano ignorando: Rudy ha, con coscienza di causa, impegnato il suo intero primo stipendio per acquistarlo. L'informazione "privata" era che la persona ritratta era la sua prof di Lettere.

Vi ricordate Dan Quayle, vicepresidente[24] degli Stati Uniti d'America tra il 1989 e il 1993? Quello che veniva preso in giro in quanto considerato non esattamente un "Rocket Scientist", come dicono da quelle parti?

Il nostro aveva deciso una riforma del sistema legale degli USA per ridurre i costi astronomici delle spese legali: in particolare, intendeva modificare la regola secondo cui ogni parte si paga le proprie spese legali nel senso che il perdente avrebbe dovuto pagare al vincente un importo pari alle proprie spese legali: questo secondo Dan avrebbe dovuto ridurre i costi, in quanto spendere un dollaro in più poteva alla fine costarvi due dollari (uno lo davate al vostro avvocato e l'altro lo davate a chi aveva vinto la causa): quindi, ci avreste pensato due volte prima di andare in causa, e il vostro avvocato avrebbe abbassato il prezzo per invogliarvi ad andare avanti.

Supponiamo le due parti in causa abbiano ciascuno la propria valutazione (privata) di quanto sono disposti a spendere per vincere una causa piuttosto che perderla, e che ciascuno dei due sia disposto a spendere una certa cifra per il proprio legale; non solo, ma supponiamo anche che la bravura del legale sia proporzionale al suo costo (questo è un modo gentile per dire "vince chi spende di più", e la cosa è, almeno negli USA, abbastanza vera, ad esempio, per le cause di divorzio; se volete complicarvi la vita, potete introdurre delle probabilità, ma il risultato è lo stesso).

Si vede che sia il caso nel quale ciascuno si paga il suo legale, sia il caso nel quale il perdente paga doppio sono perfettamente compatibili con le ipotesi del teorema che abbiamo visto prima, e quindi in entrambi i casi *i legali verranno pagati la stessa cifra*, e quindi non abbasseranno i prezzi! Visto, che la Teoria delle Aste serve anche al di fuori delle aste[25]?

"A pelle", è difficile convincersi che sia l'asta discendente che l'ascendente si comportino nello stesso modo, soprattutto se si prova a pensare alla pratica (illegale ma non troppo) dell'accordo sottobanco: in un'asta per l'allocazione di un servizio svoltasi anni fa negli Stati Uniti con il metodo olandese, erano attese le offerte da parte di almeno cinque operatori per ogni zona "appetibile": risultato, a New York si sono presentati in due, che hanno fatto crollare il prezzo portandolo a livelli bassissimi. Per evitare situazioni incresciose di questo genere, è stato inventato un metodo piuttosto complicato in due fasi, noto come ***Asta Anglo-Olandese***. Supponiamo ci siano quattro beni all'asta: prima si comincia con un'asta ascendente (e questa è la parte "inglese"), sin quando non restano solo cinque (uno più dei beni all'asta) giocatori; a questo punto i cinque fanno un'offerta in busta chiusa e i quattro vincitori pagano il prezzo della quarta offerta (e questa è la parte "olandese"): indovinate come va a finire, un'asta del genere? Già, sempre nello stesso modo[26].

Un altro punto da tenere in considerazione è la cosiddetta ***maledizione del vincitore***: partiamo dalla considerazione che ci siano delle valutazioni private del valore del bene all'asta. Il fatto stesso che *qualcuno vinca l'asta* significa che qualcuno ha "sbagliato mira" nella valutazione, e quindi è probabile che il vincitore abbia sovrastimato il bene all'asta: questo pericolo è molto maggiore per i partecipanti più deboli, e quindi questi porranno una particolare attenzione nel non sovrastimare. Ciò va allora a vantaggio dei giocatori più forti, che potranno fare delle offerte più basse basandosi sulla certezza che i deboli terranno il prezzo basso. Morale della favola, degno della Legge di Muphy: non solo vince sempre il più forte, ma paga anche poco. Anche qui abbiamo degli aneddoti. Una

[24] Presidente: Bush (padre).

[25] Si narra che Dan abbia obiettato: "Appunto! Spendendo la stessa cifra, con il rischio di pagare doppio, la gente pagherà la metà!". Sbagliato anche stavolta: il ragionamento si basa sul *guadagno* atteso in caso di vincita.

[26] Un'asta di questo tipo era stata proposta per l'allocazione dello stesso servizio di cui sopra ma in Europa: una serie di ritardi nell'organizzazione delle aste ha fatto sì che in realtà si potessero allocare *cinque* premi, quindi ogni nazione ha "semplificato" il metodo. La cosa divertente è che gli inglesi hanno utilizzato solo il metodo olandese, mentre gli olandesi hanno utilizzato solo il metodo inglese. Se non son matti, non li vogliamo.

grossa compagnia, intenzionata a vincere un'asta per un servizio in una zona degli Stati Uniti, nel 1995 assoldò un importante studioso di Teoria delle Aste per tenere delle conferenze che spiegassero la "maledizione del vincitore": secondo voi, le compagnie concorrenti come si sentivano, alla fine delle conferenze? Sì, ha vinto a poco prezzo.

Qualcuno di voi può aver storto il naso alla frase "illegale ma non troppo" che abbiamo utilizzato poco sopra parlando degli accordi sottobanco, ma questi possono essere talmente ben nascosti da non essere dimostrabili, e pochi anni fa se ne è avuto un esempio. No, non facciamo nomi: troppo facile fare causa per calunnia, in questi casi.

Sono all'asta due beni equivalenti (a e b), e abbiamo due concorrenti (A e B); ogni partecipante può fare offerte diverse per ciascuno dei due beni e può vincerne uno o due: asta ascendente, ma *con l'obbligo di offrire ad ogni rilancio il 10% in più* rispetto all'offerta precedente. I due concorrenti *non* si sono accordati precedentemente, ma A offre 18.18 per a e 20 per b.

Risultato: al giro successivo B offre 20 per a e si ritira su b, in quanto aveva interpretato il fatto che $18.18 + 10\% \approx 20$ come un'offerta di accordo. Chiusura dopo due giri di offerte, e il battitore se ne torna a casa con una miseria in tasca.

Insomma, al confronto il Dilemma del Prigioniero sembra l'innocente marachella di due educande…

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms