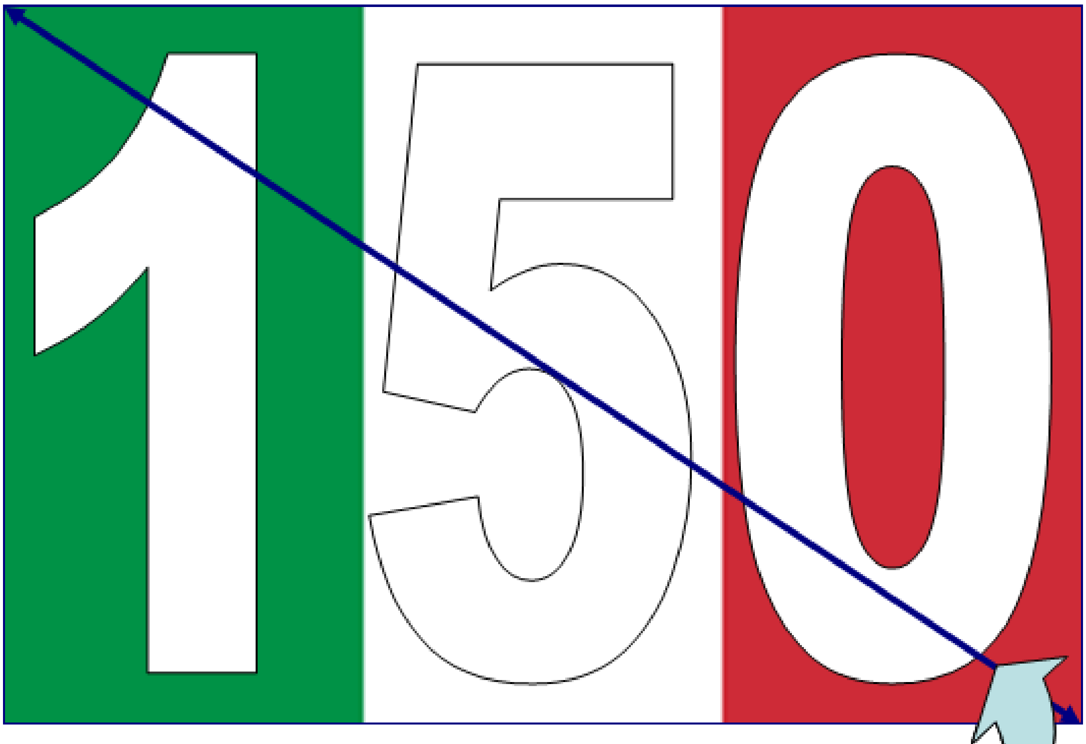
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 150 – Luglio 2011 – Anno Tredicesimo



La bandiera italiana celebrata da RM ha un'area pari ad esattamente 150 piedi liprandi quadrati.

Trovare la lunghezza della diagonale blu

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM149 ha diffuso 2786 copie e il 03/07/2011 per Google eravamo in 22'400 pagine.

Se non sapete risolvere l'elementare problema della copertina di questo mese, l'unica possibile causa è che non conosciate il rapporto preciso che regolamenta i due lati del patrio rettangolo.

In questo caso vergognatevi, correte ad informarvi, risolvete il problema (anche in differenti unità di misura) e per punizione cantate l'inno nazionale almeno tre volte di seguito.

1. Risorgimento!

Noi fummo da secoli
calpesti, derisi,
perché non siam popoli,
perché siam divisi.
Raccolgaci un'unica
bandiera, una speme:
di fonderci insieme
già l'ora suonò.
(Goffredo Mameli, *Canto degli Italiani*, autunno 1847)

Il forte di Bard ha uno strano fascino: e la cosa è strana, perché un forte è una costruzione essenzialmente militare, e di solito gli oggetti militari sono tutt'altro che affascinanti. Efficienti, certo: spesso ingegnosi, innovativi, magari altamente tecnologici, ma non affascinanti. È impossibile, anche riconoscendoli come un evidente prodotto dell'ingegno degli uomini, dimenticare lo scopo ultimo per il quale sono stati fabbricati: il fine distruttivo non è rimovibile, neanche dalla mera estetica dell'oggetto. Così, anche se un missile strategico armato di testate nucleari somiglia davvero tanto, sia nella forma sia nella struttura tecnologica, ad un razzo vettore di capsule spaziali, resta del tutto evidente che è assai meno bello e non solo, ovviamente, meno utile. Il forte di Bard, però, bello lo è davvero: forse per la sua natura difensiva, che in qualche modo ne attenua l'aggressività bellica, o più probabilmente per la sua magnifica dislocazione geografica, che poi è la sua stessa ragione d'essere. Il grande alveo della Valle d'Aosta ha un suo respiro netto e chiaro: il grande massiccio granitico del Monte Bianco chiude il fondo della valle e genera la Dora Baltea, che ne è l'arteria idrica; orizzontale e rettilinea, la Dora riceve tutti i perpendicolari torrenti delle meravigliose valli minori, e si dirige sicura verso l'unica uscita, dove comincia davvero la pianura. A Bard, dove potrebbe già immaginarsi lo scioglimento della valle, questa invece si restringe, e per di più un colle si erge prepotente proprio prima che la Vallèe si apra verso il resto d'Italia. E su quel colle insolito e ripido (quasi un tappo geologico messo a chiudere la porta) è evidente, perfino a chi non è minimamente versato nelle logiche della strategia, che un pugno di uomini ben piazzati può tenere a bada un intero esercito. E il forte di Bard fu infatti un problema serio anche per i migliori soldati del mondo, quando decidevano di arrivare nella pianura padana passando lungo il corso della Baltea: e per la stessa ragione, il forte di Bard è sempre stato, almeno fin quando le guerre si combattevano con fanti, cavalli e cannoni trasportati a fatica su carri con ruote di legno, un presidio militare importante per il Regno di Sardegna.

1 *Il forte di Bard*

Importante, e anche comodo per scopi politici. Una fortezza di prestigio, ma distante dalla capitale del regno e ragionevolmente isolata è un buon posto per i rampolli della nobiltà che nutrono eccessivi sentimenti di ribellione. In piena restaurazione post-napoleonica, l'Austria dominava il Lombardo-Veneto, che era allora territorio integrante dell'impero austriaco, e controllava politicamente e militarmente gran parte del resto dell'Italia. Quando Carlo Alberto divenne re di Savoia nel 1831, i suoi sentimenti anti-austriaci alimentarono volontà di indipendenza in molti giovani aristocratici che sognavano di liberarsi dal giogo di Vienna. In questo clima, la fortezza di Bard era un ottimo posto dove le autorità conservatrici potevano isolare, per compiacere gli Absburgo e senza incidenti diplomatici, giovanotti in carriera militare dallo spirito troppo indipendente. Un giovane ufficiale del Genio che era a capo del forte di Bard riuscì a tornare a Torino solo nel 1831, per iniziare una brillante carriera politica e diplomatica che lo avrebbe condotto a diventare il primo Presidente del Consiglio dei Ministri del Regno d'Italia, oltre che uno dei maggiori artefici del Risorgimento italiano. Camillo Benso, conte di Cavour, con ogni probabilità era davvero contento e pieno di progetti, quel mattino in cui consegnò al suo successore il comando della fortezza, per cominciare seriamente a costruire una nazione quasi dal nulla; e anche il nuovo comandante del forte era una testa un po' calda, mandato in isolamento perché un po' troppo inviso ai potenti austriaci: quindi i due, con ogni probabilità, si trovavano simpatici. Curiosamente, anche questo suo successore nel comando della fortezza sarebbe diventato, pochi anni dopo di lui, Presidente del Consiglio dei Ministri del Regno. E ancora più curiosamente, l'ufficiale che sostituì il conte di Cavour e che ne avrebbe seguito le tracce militari e politiche era un matematico.

Un quarantotto: si dice ancora, si ritrova nei dizionari come parola con piena dignità di significato: significa "*grande confusione, baccano, parapiglia, putiferio*"[1], e a pensarci bene è davvero insolito che un numero, o quantomeno il nome di un numero, sia assurto ad una tale specificità semantica. All'origine del significato c'è naturalmente un anno, quel 1848 che è senza dubbio l'anno più rivoluzionario della storia d'Europa, e forse del mondo. La *Primavera dei Popoli*, è stata chiamata, e la maniera migliore per riassumerla è forse un elenco al negativo: Inghilterra, Olanda, Russia e Impero Ottomano sono le sole nazioni europee non attraversate dall'ondata rivoluzionaria. Tutte le altre ne sono, in diversa misura, colpite. E non solo in Europa: anche il Sudamerica, tra Brasile e Nuova Granada[2], si infiamma. La Francia rinnova il suo spirito rivoluzionario, la Danimarca cambia costituzione e ordinamento, l'Impero Austriaco vede esplodere sommosse in ogni sua parte. E le origini sono molte e diverse, si coagulano movimenti sia liberali sia radicali e giacobini, borghesi e popolari: in molti casi, ad alimentare le rivolte e le rivoluzioni è proprio ciò che Klemens von Metternich più aveva in odio, essendo lui il guardiano e il simbolo di un impero che riuniva molti popoli: lo spirito nazionalistico. E infatti è proprio in Germania e in Italia che il Quarantotto risuona più forte cha altrove, proprio perché quelle due nazioni sono ancora frammentate in piccoli stati separati; e forte era in molti dei loro abitanti la volontà di unità e di indipendenza nazionale.

E infatti in Italia il Quarantotto si affianca, quasi si identifica, nella memoria comune, con quella che gli italiani chiamano Prima Guerra di Indipendenza. Le prime e più violente rivolte del Quarantotto italiano esplodono in Sicilia, contro i Borboni: anche se per qualche strano motivo l'evento è poco esaltato dal comune sentire risorgimentale, quasi fosse poco noto, nel gennaio del 1848 in Sicilia si forma uno stato indipendente, sfuggito di mano ai Borboni. Stato che si dà una costituzione avanzatissima per l'epoca e resiste per sedici mesi alla restaurazione di Ferdinando II. Ma sono le rivolte contro l'Austria, la potentissima Austria, quelle che fanno più scalpore: rivolte che, comunque, presero slancio e vigore anche sull'esempio dei trionfi rivoluzionari siciliani. Insorge Venezia, insorge Milano, fino alla dichiarazione di guerra del Piemonte all'Austria.

Il 17 marzo[3] insorge Venezia, che si costituisce in stato indipendente da Vienna col nome di Repubblica di San Marco: il giorno successivo, il 18, comincia la rivolta milanese delle Cinque Giornate.

---

[1] Così recita il Sabatini-Coletti, Dizionario della Lingua Italiana, Rizzoli-Larousse 2004.

[2] Stato che durò meno di trent'anni, e che comprendeva la Colombia, Panama, e parti di Ecuador e Venezuela.

[3] La celebrazione di quest'anno che ha visto 17 marzo assurto a festa nazionale ricorda però il 17 marzo 1861, quando fu proclamato il Regno d'Italia: curiosa, comunque la coincidenza di date, che fa di questa una giornata decisamente patriottica.

A Milano, uno dei viali più importanti e maestosi della città si chiama "Corso XXII Marzo": sono molti i turisti, i non milanesi che si lambiccano il cervello nel tentativo di ricordare cosa abbia di significativo quel giorno. Immaginiamo che tale dubbio non sia presente negli abitanti del capoluogo lombardo, anche perché Corso Ventidue Marzo è la prosecuzione di Corso Porta Vittoria, che è nome ancora più esplicito; e Porta Vittoria, non certo a caso, troneggia su Piazza Cinque Giornate. Dal 18 al 22 marzo Milano insorge contro gli austriaci, e le sue strade si popolano di tricolori e barricate. Tra i molti che combattono su quelle barricate, c'è anche un ventitreenne milanese purosangue: un matematico.

2 *Le Cinque Giornate di Milano (Baldassare Verazzi)*

Radetzky si ritira, richiudendosi nel Quadrilatero: appena due giorni dopo, il re di Sardegna Carlo Alberto dichiara la guerra e varca il Ticino, fiume di frontiera. Gli scontri cominciano subito e si susseguono: ad inizio Aprile la battaglia di Ponte di Goito, verso la fine dello stesso mese la vittoria di Pastrengo. Dopo altre scaramucce attorno alle postazioni difensive degli austriaci asserragliati nelle piazzeforti di Mantova, Verona, Peschiera e Legnago, il 29 maggio si combatte la battaglia di Curtatone e Montanara. La battaglia dal duplice nome e dal duplice luogo risulta favorevole agli Austriaci, ma ha il gran risultato di consentire all'esercito piemontese di riorganizzarsi, rendendo così possibile, il giorno successivo, la vittoria nello scontro di Goito; infatti, a Curtatone e Montanara non è il regolare esercito sabaudo che affronta i soldati di Vienna, ma bensì un'armata formata dall'esercito regolare del granduca Leopoldo II di Toscana[4], da battaglioni dell'esercito del Regno delle Due Sicilie e da gruppi di volontari toscani e napoletani. In particolare, i volontari toscani sono essenzialmente studenti universitari di Pisa, Livorno, Siena e Prato, guidati dai loro stessi professori. Tra gli studenti pisani c'è anche un caporale ventiquattrenne: un matematico.

Ma l'eroismo dei volontari non basta a vincere la guerra: a Custoza gli austriaci mostrano tutta la loro capacità di controffensiva, chiudendo a loro vantaggio la prima fase della guerra. Poi verrà il 1849, e nuovi scontri, fino a quello definitivo di Novara, che costringe Carlo Alberto alla capitolazione.

L'insurrezione di Venezia, tra le prime a sbocciare nei primi mesi del '48, dura fino al 23 Agosto del 1849. A difenderla strenuamente dall'assedio che le bianche truppe austriache del feldmaresciallo Radetzky conducono con spietata perizia, fortemente aiutate anche da un'epidemia di colera, ci sono molti eroici giovani venuti da ogni parte d'Italia, tra cui spiccano i napoletani Gugliemo Pepe e Girolamo Ulloa, che combattevano in difesa della repubblica voluta dai veneziani Daniele Manin e Nicolò Tommaseo. Tra questi volontari c'è anche un valoroso soldato di Pavia, che si è guadagnato proprio sui bastioni veneziani la nomina a sergente: non ha neppure diciott'anni, e certo ancora non sa che diventerà Ministro delle Pubblica Istruzione del prossimo Regno d'Italia. È un matematico.

Dovrà passare ancora un decennio, prima che il ritorno di fiamma del 1859 e 1860 veda il nuovamente l'Italia armarsi per liberare sé stessa: ma è tutt'altro che un decennio tranquillo. Sono anni di ribellioni e repressioni, di complotti e insurrezioni. Nel 1856, un

[4] Leopoldo aveva concesso la costituzione il 17 febbraio, ed era particolarmente innovativa per il tempo: fu la prima a riconoscere pienezza ed uguaglianza di diritti a tutti i cittadini di qualsiasi religione.

brillante ma povero studente del prestigioso collegio Ghisleri di Pavia finisce espulso a causa delle sue idee risorgimentali. Rischia il futuro e forse anche la fame, ma per fortuna riuscirà a trovare lavoro e poi a rientrare nel mondo accademico: è un matematico.

3 *Solferino*

Nel maggio 1859, forte dell'alleanza con Napoleone III, imperatore di Francia, una nuova campagna parte dal Piemonte per liberare la Lombardia, accendendo quella che gli Italiani chiamano Seconda Guerra d'Indipendenza[5]. Si susseguono le battaglie di Montebello, Pastrengo, Magenta, mentre i Cacciatori delle Alpi di Giuseppe Garibaldi liberano Como e Varese. L'imperatore d'Austria, Francesco Giuseppe, prende il comando per scendere direttamente in campo per la prima e ultima volta: e vede con i suoi occhi il massacro di Solferino, dove molte delle bianche divise austriache si coprono di sangue[6]. Il Lombardo-Veneto torna ad essere in mani italiane, ma per giungere all'unificazione d'Italia occorrono ancora molte altre avventure: l'incredibile impresa dei Mille, un florilegio di plebisciti a favore dell'unificazione al Regno di Sardegna, l'abbattimento delle ultime resistenze. Tra le ultime operazioni, l'assedio alla cittadella di Gaeta[7], che cadrà solo il 13 Febbraio 1861. A guidare le trattative per la resa da parte piemontese c'è un generale che aveva partecipato anche alla campagna di Lombardia del 1859. È lo stesso ufficiale che trent'anni prima aveva preso a Bard le consegne da Cavour: nel frattempo ha fatto molta carriera, sia dal punto di vista militare e politico, sia da quello scientifico. Del resto, lo sappiamo già: è un matematico.

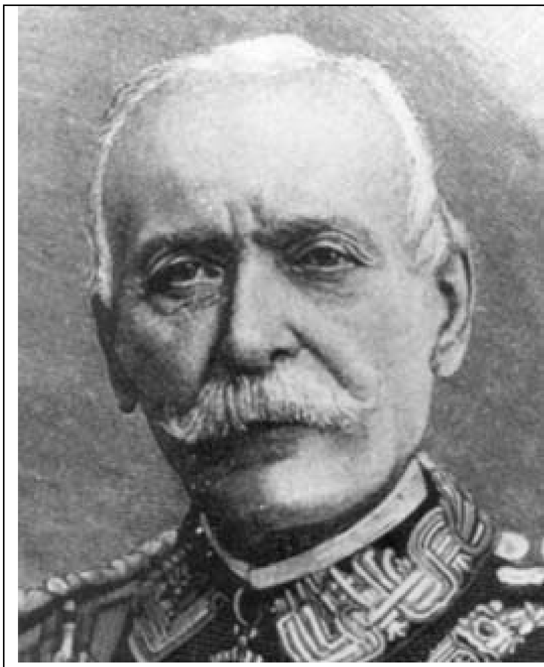
Il Risorgimento italiano è un evento così vasto e complesso che è davvero impossibile ridurlo ad un articolo veloce: in fin dei conti, è pur sempre un lungo pezzo di storia disegnato più dalla diplomazia e dalla politica che dagli scontri militari; e più dai sogni e dai sentimenti degli uomini che lottavano per l'ideale d'una patria unita che dalla politica e dalla diplomazia. I pochi episodi citati sono tenuti insieme da un pretesto narrativo, quello del contributo dei matematici all'Unità d'Italia, e non certo da una metrica di importanza storica; eppure è curioso notare come, pur in un riassunto così scarno e selettivo, sia possibile lo stesso leggere una sorta di atmosfera generale e complessiva di mobilitazione, di dedizione.

[5] Anche se la storiografia europea moderna tende, con occhio meno locale, a definire questa come parte del conflitto franco-austriaco.

[6] La battaglia di Solferino, per quei tempi, fu veramente sanguinosa. Sembra che Francesco Giuseppe stesso, dopo quell'esperienza, avesse abbastanza orrore delle battaglie e della guerra, anche se, forse controvoglia, ne dichiarò altre durante il suo lungo regno, fino alla stessa Grande Guerra. Fu la più grande battaglia dell'epoca dopo quella di Lipsia che segnò la fine di Napoleone, con più di 200'000 soldati sul campo. Sempre il triste spettacolo di Solferino fu la causa – per una volta benemerita – della fondazione della Croce Rossa da parte dello svizzero Henry Dunant.

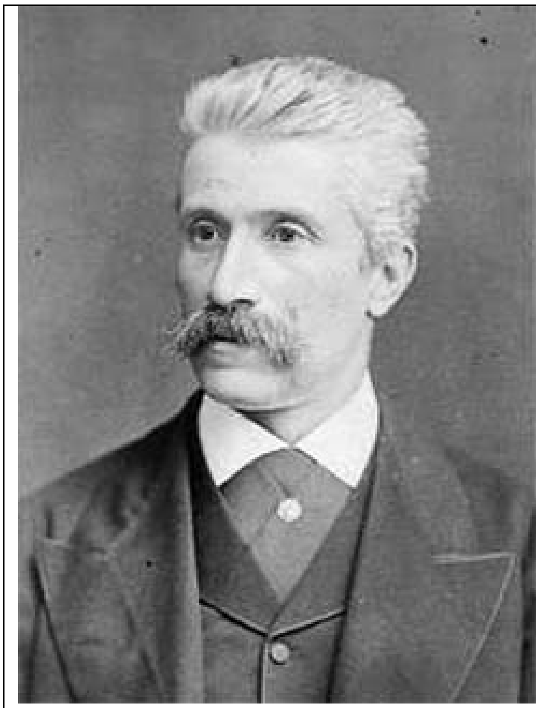
[7] Tra le ultime operazioni militari di grande respiro che portano alla resa del regno delle Due Sicilie, l'assedio di Gaeta è quella di maggiore valenza strategica e che pone di fatto definitivamente fine alla guerra, perché è a Gaeta che si trova personalmente tutta la famiglia reale di Francesco II di Borbone. Dal punto di vista strettamente cronologico, però, più di Gaeta resistettero la Cittadella di Messina, che cade il 12 marzo, e quella di Civitella del Tronto, che si arrende solo il 20 marzo 1861, tre giorni dopo la proclamazione del Regno d'Italia.

Il matematico che prende il posto di Cavour al forte di Bard, che partecipa poi come tenente generale alla campagna lombarda della Seconda Guerra di Indipendenza e che conduce le trattative per la resa della fortezza di Gaeta è Luigi Federico Menabrea[8]. Nato a Chambery il 4 settembre 1809, morirà nei pressi della natìa casa nell'Alta Savoia il 24 maggio 1896. A dire il vero, chiamarlo "matematico" è forse violare l'esattezza storica, visto che la sua formazione è prevalentemente dedicata all'ingegneria, e in particolare a quella militare. Ministro della Marina nel governo Ricasoli, ministro dei Lavori Pubblici in quello Farini-Minghetti, dirige poi come Presidente del Consiglio ben tre governi successivi, dal 1867 al 1869. Contribuisce certo al Risorgimento, come si è visto, ma è bene ricordare anche che il Risorgimento è tutt'altro che un periodo caratterizzato dall'unità di intenti e di obiettivi: persino Mazzini e Garibaldi si guardano spesso in cagnesco, e Menabrea, la cui fedeltà andava probabilmente alla corona sabauda prima ancora che al neonato stato italico, è tra coloro che cercò di impedire a Garibaldi la presa di Roma. Come matematico, ha un ruolo fondamentale nell'invenzione da parte di Babbage della Macchina Analitica: e fu proprio Ada Lovelace a far conoscere gli studi dell'italiano al matematico inglese.



4 *Luigi Federico Menabrea*

Il ventiquattrenne che si arrampicava sulle barricate milanesi nel marzo del Quarantotto è Francesco Brioschi, nato il 22 dicembre 1824 proprio a Milano e morto il 14 dicembre 1897 nella sua città natale. Quando, nel 1859, in previsione dell'Unità ormai prossima, Cavour lo incarica di progettare una riforma per la scuola superiore, si ritrova come collega Giuseppe Verdi, che ha ricevuto un incarico nella medesima commissione. Dal 1861 al 1862 è Ministro dell'Istruzione del regno, e fonda il Politecnico di Milano. Sia nella sua proposta di riforma della scuola secondaria, sia nella sua azione di ministro, Brioschi cerca di seguire i modelli dell'istruzione scientifica tedesca: questo testimonia che era stato influenzato sensibilmente da un viaggio, davvero di cruciale importanza nella storia della matematica italiana, che aveva intrapreso nel 1858 con altri matematici italiani a Parigi, Berlino e Göttingen, dove aveva anche conosciuto Riemann[9]. Si

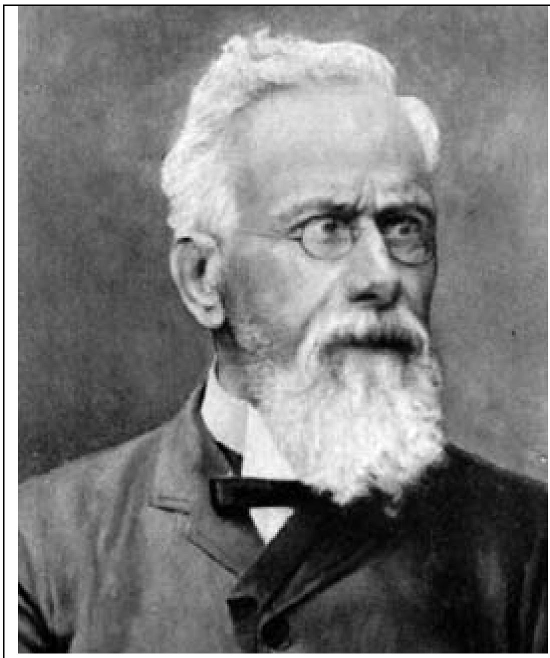


5 *Francesco Brioschi*

[8] Di lui abbiamo già parlato – con maggiore dettaglio – in RM059, Dicembre 2003, "*La Farina di Ofelia*", compleanno dedicato a Babbage e Lovelace, personaggi che torneremo a nominare in seguito.

[9] Protagonista di "*Pellegrinaggio a Thule*", RM068.

interessa delle funzioni dei gruppi abeliani ed ellittici, della matematica applicata all'idraulica, e soprattutto della teoria dei determinanti: la sua opera sull'argomento riscuote l'ammirazione entusiasta di Hermite[10]. È uno dei maggiori rappresentanti della prima generazione di matematici italiani, eppure dice di sé stesso "*Sono solo un calcolatore*". Un calcolatore che dimostra per via analitica i risultati ottenuti in maniera meno rigorosa da Möbius[11] e da Jacobi e che, come politico ed educatore, si preoccupa di diffondere l'opera di Euclide nelle scuole, e di fare in modo che sia pubblicato il Codice Atlantico di Leonardo da Vinci, allora ancora ignoto alla comunità scientifica.


6 *Enrico Betti*

Il caporale ventiquattrenne volontario nella battaglia di Curtatone e Montanara è Enrico Betti. Nato a Pistoia il 21 ottobre 1823, morto a Soiana il 11 agosto 1892, si forma all'Università di Pisa, dove studia matematica: è uno dei compagni di viaggio verso le capitali europee della scienza che fa anche Brioschi[12]. Entra in Parlamento nel 1862, diventa e Rettore dell'Università di Pisa e poi, nel 1864, Direttore della Scuola Normale Superiore: gran parte dell'eccellenza che l'istituto pisano ha raggiunto e mantenuto negli anni è dovuta alla sua opera. Betti è infatti soprattutto un accademico: per quanto impegnato a fondo nella lotta risorgimentale, gli onori e gli oneri politici e istituzionali che riceve successivamente non gli appaiono migliori della sua vita universitaria. Oltre che deputato diventa sottosegretario all'Istruzione, poi Senatore del Regno, ma nessuna carica gli pare tanto attraente quanto il suo mestiere di docente universitario.

Quando Riemann torna in Italia nel 1863, trova in Betti un amico, disposto ad ospitarlo e a rinnovargli l'amicizia nata in Germania. Influenzato dal genio tedesco, Betti si dedica allo studio della topologia, pubblicando notevoli memorie sull'argomento, al punto che Poincaré[13], dopo averle lette, chiama "*Numeri di Betti*" le grandezze che gli erano state ispirate dallo studio dell'opera. Prima ancora che topologo, Enrico Betti è però algebrista: si dedica con passione all'analisi dei lavori di Galois[14], giungendo quasi ad una completa dimostrazione analitica dei lavori del francese. Dimostra la chiusura dei gruppi di Galois per la moltiplicazione e la possibilità di risolvere le quintiche tramite gli integrali delle funzioni ellittiche.

Bisogna ricordare anche che il giovane Betti parte volontario per Curtatone e Montanara al seguito di un suo amato professore, che non a caso è proprio il comandante del Battaglione Universitario Toscano.

---

[10] Celebrato in "*Vite parallele*", RM095.

[11] Anche di lui si è già parlato, in RM118, "*Gettare l'anima oltre l'ostacolo*".

[12] Con loro c'era anche Felice Casorati, altro grande nome della matematica italiana dell'epoca.

[13] Protagonista di "*Matematica per porcini*", RM075.

[14] In un compleanno che abbraccia tutta un'epoca, i riferimenti ad altri matematici non possono che essere molti, ma in questo caso abbiamo già parlato di quasi tutti: Galois è celebrato in "*Group Fiction*" RM069.

Questo affascinante personaggio, che tra l'altro fa da ponte ideale tra Betti e Menabrea, giacché anch'egli ebbe un ruolo importante nelle discussioni che portarono alla Macchina Analitica di Babbage, è Ottaviano Fabrizio Mossotti. Nato a Novara il 18 aprile 1791, si laurea in Fisica-Matematica a Pavia nel 1811. Due anni dopo entra all'Osservatorio Astronomico di Brera e ha tutti i titoli per aspirare ad una cattedra all'università di Pavia, salvo uno, fondamentale: è cittadino straniero. La sua nascita piemontese tale lo rende, infatti, nel Lombardo-Veneto austriaco.


7 *Ottaviano Fabrizio Mossotti*

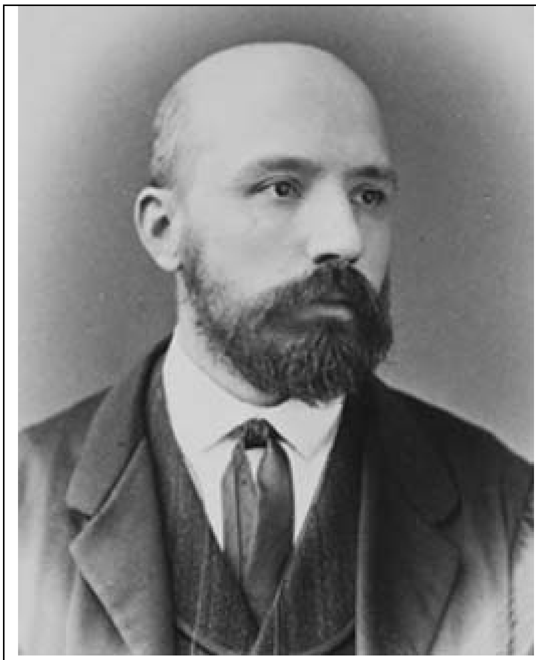
Trova un metodo nuovo per il calcolo delle orbite celesti che suscita addirittura l'ammirazione di Gauss[15], ma questo non cambia la sua posizione accademica. Scrive articoli divulgativi di astronomia su un giornale liberale, *"Il Conciliatore*", e proprio in quest'atmosfera liberale viene contattato dalle società segrete che auspicano l'indipendenza nazionale, soprattutto quella diretta da Filippo Buonarroti. Il suo nome compare nelle carte dei rivoluzionari, e si vede costretto a fuggire a Londra, dove peraltro si guadagna la stima di un fisico del calibro di Young. Vaga poi tra Europa e Sudamerica: quando sembra rendersi disponibile per lui una cattedra a Bologna, se la vede negare all'ultimo minuto perché lo Stato Pontificio ha scoperto che è ricercato dalla polizia austriaca, e non vuole essere compromesso diplomaticamente. Ricomincia il pellegrinaggio e l'esilio: insegna all'università inglese di Corfù, riceve entusiasti commenti su un suo lavoro da parte di Faraday, scrive un testo elementare di Fisica Matematica che diventa un manuale usatissimo.

Il Battaglione Universitario Toscano forte di quasi 500 tra studenti e professori, è quasi una sua personale creazione. Solo quando finalmente l'Unità d'Italia è raggiunta si vede riconoscere gli onori. Diventa uno dei primi senatori del Regno; viene eletto all'Accademia delle Scienze di Torino: ma è ormai giunto alla fine della sua esistenza. Muore a Pisa il 20 marzo del 1863.

[15] Finalmente celebrato solo in RM147, "*Rivoluzionari*".


8 *Eugenio Beltrami*

Lo studente espulso dal Collegio Ghisleri per le sue simpatie per il Risorgimento è Eugenio Beltrami. Nato a Cremona il 16 novembre del 1836, al momento dell'espulsione frequentava l'Università di Pavia, dove seguiva gli insegnamenti di Brioschi. Incapace di mantenersi gli studi, accetta un impiego presso le Ferrovie: il lavoro lo porta a frequentare Verona e Milano, e proprio qui, all'Osservatorio di Brera, ritrova Brioschi, che lo convince a dedicarsi alla matematica. È evidente che il matematico che ha combattuto durante le Cinque Giornate ha simpatia per il giovane Beltrami, al punto di riuscire a farlo entrare, pur senza concorso, come professore straordinario di algebra e geometria all'Università di Bologna. Del resto, la fiducia era ben riposta: Eugenio Beltrami si rivela presto uno studioso di vaglia, dedicandosi alle geometrie non euclidee. Affascinato dagli studi di Riemann, Lobachevski[16], Gauss e del suo professore Luigi Cremona, si applica alla geometria differenziale, in qualche modo aprendo anche la strada verso il calcolo tensoriale. Grandi meriti ha anche come traduttore e divulgatore della matematica: traduce in italiano opere di Gauss, e introduce nel paludato mondo accademico di fine Ottocento uno stile brillante e chiaro, che farà storia, nell'esposizione delle idee matematiche. Poco prima di morire diventa anch'egli senatore nel 1899. Muore a Roma il 18 febbraio del 1900.


9 *Luigi Cremona*

Il ragazzino diciottenne che diventa sergente prodigandosi nella disperata difesa di Venezia è proprio il professore di Beltrami, e cioè Luigi Cremona. Nato a Pavia il 7 dicembre 1830, Cremona è una delle figure più significative e autorevoli della matematica italiana del suo periodo. Fratello di Tranquillo, noto pittore della Scapigliatura Milanese, si impegna nel Risorgimento prima ancora che nella matematica. Dopo il sogno infranto del Quarantotto, si laurea a Pavia in Ingegneria: si dedica però all'insegnamento, prima nei licei, poi come ordinario di Geometria Superiore a Bologna. Brioschi però lo conosce, e ne sa il valore: lo chiama quindi ad insegnare Statica Grafica nella sua creatura, il Politecnico di Milano. Ma le sue capacità sono note un po' ovunque, nell'ambiente, e nel 1873 viene chiamato direttamente dal Ministro dell'Istruzione che lo incarica di riordinare la Scuola degli Ingegneri a Roma. Qui inizia la nuova attività, e nel contempo occupando la cattedra di Matematica Superiore alla Sapienza. Diventa senatore e anche, seppur per brevissimo tempo, Ministro della Pubblica Istruzione. In campo scientifico, si occupa anch'egli di

[16] Il suo posto d'onore nelle pagine di RM è in "*Quintum Non Datur*", RM083

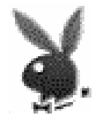
geometria algebrica e differenziale, il campo che dava maggior lustro alla scuola italiana di matematica, con una mole di opere impressionante. Muore a Roma il 10 giugno 1903.

Il numero di matematici famosi impegnati nella battaglia per l'Italia Unita è straordinariamente elevato, se si tiene conto che quasi tutti i maggiori nomi della matematica del tempo sono rappresentati in episodi risorgimentali. Il dato è fin troppo rassicurante, al punto che viene da chiedersi quale possa esserne la ragione: esiste davvero una correlazione tra la dedizione alla matematica e lo spirito di indipendenza nazionale? C'è davvero una sorta di sincronia delle passioni, come se lo studio delle superfici geometriche implicasse per necessità anche l'amore per quella strana superficie bidimensionale e tricolore che è solita agitarsi nelle tre dimensioni dei cieli patri? O, più probabilmente, non sarà che il Risorgimento e la volontà di unire una patria che da troppo tempo era illogicamente divisa fossero afflati sentiti tanto diffusamente, tanto naturalmente, tanto fortemente, tanto urgentemente, centocinquant'anni fa, che tutti gli uomini dotati di cuore e ragione non potevano fare a meno di sentirli propri? Fosse vera questa seconda ipotesi, potremmo accantonare le strane e improbabili correlazioni, e giungere a dimostrare, quasi banalmente, che i matematici sono uomini.


10 *Il Tricolore sul Quirinale*

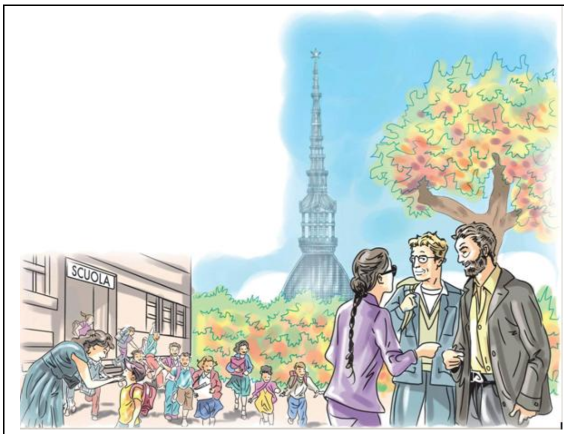
Ma noi lo sapevamo già, vero?

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Forse era meglio prima			
Rimettere i debiti (… e qui è un problema!)			

2.1 Forse era meglio prima

Non ci riferiamo alla situazione politica, ma al fatto che abbiamo posto un problema, tempo fa (no, non vi diciamo dove e quale: e non è sulla rivista di cui parliamo dopo) che secondo noi sarebbe stato più apprezzato se prima avessimo posto questo; comunque, Rudy ha intenzione una volta tanto di cominciare dal fondo (e di parlare del suo trasloco che quest'anno compie quattro anni[17]).



11 *Il Posto di Rudy da Piccolo (rappresentazione di fantasia – anche di Rudy – visto che la Mole dovrebbe essere alle spalle di chi guarda). Con i dati del problema, comunque, trovate l'originale su GoogleStreet.*

Rudy ha sviluppato un'antipatia per il gruppo bancario Intesa-SanPaolo. La cosa non è legata al fatto che stiano costruendo un grattacielo davanti a casa sua[18], ma al fatto che hanno deciso di inibire l'accesso a una scuola riprendendosi l'ingresso padronale (bellissimo) ad un palazzo dove non solo Rudy aveva fatto la prima elementare, ma anche il VAdLdRM più giovane (sarebbe Fred) ha frequentato le medie inferiori. Su riviste di altra levatura (decidete voi la direzione) avevamo già ambientato un problema in zona, e ci era piaciuta molto l'immagine (di fantasia quanto le rappresentazioni dei tre personaggi): siccome ci pare che alcuni dettagli siano migliori degli originali, vi mettiamo il risultato in figura[19].

---

[17] Quindi il fatto che parlarne fosse reato dovrebbe essere caduto in prescrizione, visto che secondo le nuove leggi il tempo di prescrizione si calcola *dall'inizio* del reato, non da quando viene scoperto. Per ulteriori dettagli, rivolgetevi all'Avv. *MaVaLà* Ghedini.

[18] Noto tra i torinesi come il "*GrattaPaolo*"; di fianco ha il palazzo della Provincia, noto come il *PalaPepsodent*. Siamo in trepida attesa del soprannome che verrà rifilato al progettando grattacielo della Regione, soprattutto visto che sul nome dell'attuale Governatore si possono svolgere intraducibili e irriferibili giochi di parole dialettali.

[19] Per gli *afictionados* dei Luoghi Storici dei Rudi Mathematici: Piazza Bernini, tra Via Duchessa Jolanda (non fate insinuazioni, la Litizzetto abitava a trecento metri) e Corso Ferrucci.

Quando Rudy aveva un'età che si misurava agilmente con una sola cifra in un mucchio di basi di numerazione, Piazza Bernini era un ingorgo perenne, nonostante il (o forse grazie al) semaforo su Corso Francia; recentemente, per fortuna, hanno piazzato una rotonda *alla francese* (quelle inventate da un inglese), il che rende l'attraversamento tanto veloce quanto avventuroso (ed è *molto* veloce). Qualche giorno fa, affrontando la rotonda, Rudy ha incrociato un Grande Idiota Creativo che non trovava niente di meglio da fare che *parcheggiare a margine dell'aiuola centrale*, e questo grande atto di genialità veniva salutato con un'ovazione da parte di tutti gli automobilisti presenti che trasformavano le *vuvuzela* di calcistica memoria in un sospiro di zanzara. I suddetti entusiasti apprezzatori della *performance*, assistendo alla successiva impresa del G.I.C. (attraversare la rotonda), si precipitavano incontro a lui con l'intento evidente di congratularsi per l'ardita idea: trascinati dall'entusiasmo, dimenticavano anche di scendere dalla macchina e di frenare.

La cosa, comunque, ha fatto pensare Rudy. Supponiamo che l'operazione compiuta dal G.I.C. sia legale, usuale ed autorizzata: "Grissino" (è il soprannome del nuovo Sindaco di Torino) procede quindi a delimitare le zone di parcheggio attorno all'aiuola al centro della rotonda, delimitando però gli spazi in un modo un po' strano: traccia le righe ogni *due* metri, ricavando *cento* spazi, quando sappiamo benissimo che l'auto standard è lunga *quattro* metri. Ogni utente del parcheggio (che presumiamo tutti rispettosi della segnaletica orizzontale) parcheggerà quindi se e solo se trova *due* spazi adiacenti. Le nostre macchine arrivano una per volta (se due torinesi litigano per un parcheggio, gli viene tolta automaticamente la residenza), e si piazzano in un qualsiasi "buco" da due spazi adiacenti che trovano, scelto a caso se ce ne sono più di due consecutivi ma comunque rigorosamente allineati alle strisce (bianche: vorrete mica anche farlo pagare, un parcheggio così fetente?).

Quello che ci chiediamo, data la casualità con la quale si piazzano le macchine, è quante macchine ci si aspetti di trovare, a parcheggio pieno, ossia con solo degli spazi unitari rimasti liberi.

"Oeu, Grissino, e in quei buchi cosa ci metti?" "'*Na pianta o 'na becana...*" Che sarebbe la bici.

2.2 Rimettere i debiti (... e qui è un problema!)

Qui, si possono fare insinuazioni di due tipi:

1. Il mese scorso Doc non aveva voglia di fare niente, quindi ha riciclato un vecchio Compleanno; questo mese, il ruolo dello sfaticato tocca a Rudy.
2. Rudy, che è sempre in anticipo sugli appuntamenti, è perennemente in ritardo sulle idee, e quindi scopiazza quella di Doc del mese scorso nel mese attuale.

E, probabilmente, è più vera la seconda. Comunque, per giustificare il tutto, ci teniamo a dire che il problema è già comparso sulla stessa rivista di cui sopra, ma questa volta non vi mettiamo il disegno in quanto violare due copyright nello stesso numero ci sembra francamente eccessivo. Non solo, ma lo scopo recondito del problema (che vi spiegheremo in nota successiva) non è stato raggiunto, quindi l'immagine è inutile.

Il problema, ambientato nell'antichità classica, prevedeva i nostri tre eroi a cavallo in una zona perfettamente piana del Sahara: Alice, in abiti ragionevolmente discinti[20], alla guida del trio; Rudy, in posa statuaria sul cavallo lanciato al galoppo, armato di *papiro & calamo*; Doc, su un asinello rispondente (quando ne aveva voglia) al nome di "Publio

[20] In realtà avevamo iniziato un esperimento, e questo era lo scopo recondito del problema: vedere quanto (senza dirglielo) riuscivamo a costringere il disegnatore a *svestire* Alice. Il tutto mantenuto nelle regole ferree di una rivista che può capitare in mano a minorenni e a docenti universitari, è evidente.

Virgilio" che si chiedeva cosa ci stava a fare da quelle parti, armato di mazzaferrata da otto chili e fornito del ragionevole numero di pali.

L'idea era che Alice, "novella Didone", dovesse piantare i pali per definire i confini dell'area sulla quale avrebbe regnato; ventiquattro ore di tempo per circoscrivere un'area, correndo a velocità costante e fermandosi solo per piantare i pali che Doc mena seco; abituato a robuste attività agricole, il Nostro è in grado di piantare un palo in un minuto.

Sorvolando sulle capacità dei due cavalli e del ronzino[21], quello che ci chiediamo è come minimizzare il lavoro di Doc (e di Publio Virgilio, che si porta tutto il peso) massimizzando l'area su cui Alice eserciterà la sua potestà: insomma, vogliamo l'area massima piantando il numero minimo di pali, contando che percorriamo il perimetro a velocità costante e Doc ci mette un minuto a piantare il palo (e intanto stiamo tutti fermi a vedere se si pesta il pollicione).

Si accettano anche risposte in latino, se in esametri virgiliani.

3. Bungee Jumpers

Dimostrare che tra tutti i rettangoli di pari perimetro P, il quadrato è quello di area massima.

Dimostrare che tra tutti i rettangoli di pari area S, il quadrato è quello di perimetro minimo.

Dimostrare che la somma dei cateti di un triangolo rettangolo non eccede la lunghezza dell'ipotenusa moltiplicata $\sqrt{2}$.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

Ci credete? Una delle cose che ci dispiace di più, in quest'abbondanza di bei libri da recensire scritti da persone che hanno qualcosa a che fare con RM, è che abbiamo un imbarazzo editoriale: è meglio ritardare una già tardiva recensione, per non parlarne nei pigri mesi estivi o, viceversa, raccontarveli lo stesso anche a Luglio e Agosto, per evitare che il manto di novità libraria si appanni? Beh, come è noto noi confidiamo sul fatto che la matematica ricreativa possa essere anche un argomento da spiaggia, oltre che di poltrone (e aule magne, perfino), quindi procediamo indefessi.

[21] Siamo perfettamente consci di dire un'asinata: "ronzino", nel Medio Evo, era termine appannaggio dei migliori cavalli. Ci stiamo ancora chiedendo come sia passato a definire i peggiori.

4.1 I giochi matematici di Fra' Luca Pacioli

«Bolzone. Doi ladri in un prato robano 7 porci e sempre l'un fa quello che fa l'altro pigliando a uno a uno. Poi fa' venire li ladri a una man e li porci all'altra, gomenza dal più.»

Che la matematica possa essere anche divertente, oltre che utile e bella, è cosa ormai risaputa: ci piacerebbe molto dire che questa Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa ne sia un esempio lampante, ma la nostra proverbiale modestia ci impedisce di giungere a tanta arroganza. Però è indubbio che i lettori di queste righe sappiano bene cosa si intenda per "matematica divertente": e, grazie soprattutto all'opera evangelizzatrice di Martin Gardner, crediamo che questo tipo di conoscenza sia ormai patrimonio di molte altre persone. Però, che i giochi matematici fossero invece già in auge prima ancora della scoperta dell'America è cosa assai meno nota.

Luca Pacioli, matematico e artista, è l'autore di quel *De Divina Proportione* che ancora oggi è opera fondamentale per chi voglia accostarsi all'aspetto matematico delle arti grafiche. Pioniere del rinascimentale risveglio delle scienze, fra' Luca scrisse anche altri testi più esplicitamente matematici, quali la *Summa de Arithmetica*. Al pari del suo coevo Leon Battista Alberti che dedicò il suo tempo alla stesura dei *Ludi Mathematici*[22], anche Pacioli si dilettò nel proporre dei veri e propri giochi matematici, problemi algebrici e logici: era sua convinzione che i giochi servissero a far sentire il piacere delle proprietà dei numeri agli allievi, di modo che possano associare dei buoni ricordi allo studio della matematica. Una convinzione che condividiamo in pieno, anche sei secoli e mezzo dopo.

[22] Bel nome, vero? Ricorda qualcosa…

12 – *Luca Pacioli nel celebre quadro di Jacopo de' Barbari*

E c'è un po' di gioco anche nella nascita di questo libro, a bene vedere. Per quanto Pacioli sia ben noto a chiunque si interessi di arte e di matematica, è difficile trovare articoli o saggi su di lui che narrino del suo amore per i giochi matematici. Le sue opere fondamentali sono sempre citate e lodate, ma l'aspetto ludico del monaco di Sansepolcro è restato a lungo sconosciuto. Il manoscritto originale del Pacioli è infatti riportato nel codice Vaticano Latino 3129, rimasto a lungo senza alcuna attenzione da parte degli storici.

Silvia Toniato, filologa, si imbatte in quest'opera ancora quasi sconosciuta durante la sua tesi di laurea, e ne è incuriosita. In realtà, la sua intenzione originale era proprio quella di farne l'oggetto della tesi, ma una trascrizione recente del manoscritto fatta da G.Derenzini[23] inizialmente la dissuade: ha poco senso dedicare la prima ricerca d'una aspirante ricercatrice ad un'opera trascritta così di recente. Ciò non di meno, Silvia rimane con un desiderio inappagato: quello che ha trovato nel Codice è davvero interessante, ricco di spunti, osservazioni, dati e metodi interessanti, per capire al meglio la matematica del primo Rinascimento. La trascrizione, comunque benemerita, non approfondisce né analizza, e invece quelle carte sembrano davvero reclamare studio, attenzione e analisi. Ma le ricerche costano, e costano soprattutto tempo: il progetto è troppo vasto per poter essere affrontato per via accademica, eppure l'esigenza di raccontare almeno alcuni degli elementi chiave dedotti dall'opera ludica pacioliana è forte. Sembra una situazione senza via d'uscita, se in qualche modo non si capisse, alla fine, che la maniera giusta per far rivivere dei giochi è il gioco stesso.

Grazie alla rete, Silvia Toniato scopre che anche Dario Bressanini, pur essendo soprattutto un chimico quantistico con la passione per gli aspetti scientifici della cucina – come ben sanno i frequentatori del suo blog e della sua rubrica su *Le Scienze* – ha da sempre un malcelato debole per i giochi matematici, specialmente quelli che risalgono al Rinascimento italiano. E noi di RM ne sappiamo ben qualcosa[24]: Dario ci ha fatto l'onore di essere amico della Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa fin dai tempi storici della e-zine, ed è stato certo anche uno dei suoi maggiori mentori e mecenati.

Il risultato dell'incontro tra Silvia e Dario è un libro davvero prezioso: chi provasse a leggere direttamente la trascrizione del manoscritto del Pacioli, oggi, si troverebbe in guai più seri di chi volesse leggere un testo di problema in lingua straniera, per il semplice fatto che delle lingue straniere, quantomeno, esistono i dizionari: l'italiano del Quattrocento è difficile, ma è soprattutto difficile capire quelli che potremmo definire "termini tecnici". Quanti sanno dire, tra i lettori di questa che è pur sempre una rivista di matematica e di giochi, cosa sia un *bolzone*? Quanti riconoscono nei *rotti* le frazioni, nell'*agiognimento* la somma? E non è probabile che chi riesca a muoversi con abilità tra i termini desueti e sonanti del volgare da poco assurto a dignità di lingua italiana possa

[23] G.Derenzini, *Il codice Vat. Lat. 3129 di Luca Pacioli*, in E.Giusti, *Luca Pacioli e la matematica del Rinascimento*, Petruzzi, Città di Castello, 1996.

[24] Il primo compleanno scritto da qualcuno non interno alla Redazione di RM, *"Requiem per una Formula*", RM64, Maggio 2004, in cui si narra l'affascinante storia della risoluzione delle equazioni cubiche e della scoperta dei numeri immaginari, è opera sua.

trovarsi invece in difficoltà nel ricostruire storicamente gli artifici matematici alla base dei giochi? Anche la matematica, specialmente l'algebra, che a quel tempo era molto fresca e recente, parlava in quei giorni una sorta di slang giovanile ben diverso dal lessico simbolico che conosciamo oggi.

Quasi giocando, e per mezzo di quel grande gioco che può essere la rete, Silvia e Dario uniscono le forze e le specializzazioni diverse, e soprattutto la comune passione. Riescono così a coniugare il rigore dell'attenta ricostruzione storica e filologica con l'entusiasmo giocoso di chi affronta un problema per il puro gusto di affrontarlo e risolverlo; soddisfano ad un tempo sia l'appassionato di storia sia l'amante della matematica ricreativa, che è impresa difficile, e lo diciamo da esperti dilettanti della materia.

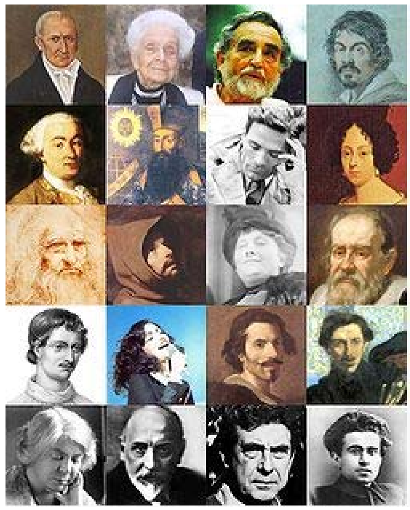
E, curiosamente, in qualche modo, sembrano rispolverare un'antica dignità nazionale, in quest'anno di celebrazioni patriottiche: quel periodo bello e non certo misconosciuto in cui l'Italia era il centro del mondo. Non solo delle arti, che lo sanno tutti: ma anche della matematica.

Titolo	I Giochi Matematici di Fra' Luca Pacioli
Sottotitolo	Trucchi, enigmi e passatempi di fine Quattrocento
Autori	Dario Bressanini (Chiqua, Lord Stokastik), Silvia Toniato
Editore	Edizioni Dedalo
Collana	La scienza è facile
Data Pubblicazione	Marzo 2011
Prezzo	15 Euro
ISBN	978-88-220-6823-1
Pagine	240

5. Soluzioni e Note

Luglio.

A questo punto dell'anno e approfittando del numero d'ordine di questo RM, vorremmo contribuire anche se in modo limitato alle celebrazioni per l'anniversario dell'Unità d'Italia.



13 *Italiani.*

Per quanto si può, da questa piccola rubrica di note, volevo celebrare tutti quelli che ci leggono soprattutto perché siamo una rivista in italiano, e uno dei motivi per cui RM è nato è la scarsa diffusione della matematica ricreativa in italiano.

Facendo un salto su Wikipedia[25], ho riscoperto che ci sono praticamente tanti italiani all'estero quanti se ne trovano in Italia, e siccome io sono una di loro, mi sento rinfrancata al pensiero di poter celebrare – insieme a circa altre 120 milioni di persone, di cui 60 lontani dall'Italia come me – l'anniversario della nascita della nostra nazione. E sono contenta di poterlo fare dalle pagine di questa rivista che amo tanto. Tanti auguri, Italia!

A parte le celebrazioni, immagino che siate in vacanza o ci stiate andando, o almeno me lo auguro. L'estate è sempre povera di materiale per questa rubrica, e dopotutto va bene così... ma ricordatevi di riprendere a risolvere e a scrivere! Lo sapete o no, che siete voi, con i vostri interventi, le vostre soluzioni e i vostri commenti che ci spronate a mandare avanti la baracca?

In questa sezione, visto che non vi ho raccontato nulla il mese passato, dovrei avere una montagna di cose da dirvi, ma così non è. Il mese è passato a discutere altri problemi che con la matematica poco hanno a che fare, così finirò con l'essere piuttosto breve anche questa volta.

A proposito delle discussioni che ci hanno impegnato questo mese, la Redazione si è trovata di fronte ad un dilemma non da poco. Ormai sono parecchi anni che produciamo RM, ed è evidente a tutti che il nostro intento non è in alcun modo politico o ideologico: insomma, i tre Redattori di RM hanno – come normale – le loro convinzioni, ma non è per promuoverle che scrivono, quanto per divulgare la matematica soprattutto ricreativa. Ci rendiamo conto però (e ancor più ora che ci è stato fatto notare) che le nostre idee e modi di pensare sono espressi tra le righe di RM. Ora non abbiamo intenzione di scusarci per quello che siamo e che pensiamo, ma ci spiace se anche una piccola parte di RM ha urtato la sensibilità dei nostri lettori. Non ci sentiamo di aprire dibattiti sulla rivista riguardo questioni che con l'intento fondamentale della rivista non hanno nulla a che fare, ciononostante se qualcuno dei nostri lettori avesse qualche rimprovero da estenderci, saremo felicissimi di discuterne privatamente via mail.

Tutto ciò non vale – ovviamente – per le considerazioni matematiche: cerchiamo di pubblicare tutto quello che ci inviate e quando, per dimensioni o tipologia di intervento, ciò non è possibile, abbiamo ancora tanto spazio nel *Bookshelf* sul nostro sito.

[25] http://it.wikipedia.org/wiki/Italiani: anche la figura è presa da lì. 1ª riga: Alessandro Volta, Rita Levi-Montalcini, Vittorio Gassman, Caravaggio; 2ª riga: Carlo Goldoni, Martino Martini, Pier Paolo Pasolini, Elena Lucrezia Cornaro; 3ª riga: Leonardo da Vinci, Francesco d'Assisi, Maria Montessori, Galileo Galilei; 4ª riga: Giordano Bruno, Mia Martini, Gian Lorenzo Bernini, Umberto Boccioni; 5ª riga: Grazia Deledda, Luigi Pirandello, Salvatore Fiume, Antonio Gramsci. Scienziati, artisti, uomini e donne importanti, come siamo importanti tutti noi gente comune.

Recentemente, infatti, abbiamo ricevuto parecchi articoli che vogliono dimostrare diverse teorie matematiche. Voi sapete bene che non siamo professori e non abbiamo alcun potere né competenze sufficienti a verificare una teoria, ma a tutti quelli che ci inviano dimostrazioni possiamo offrire una piccola porzione del *Bookshelf*, dove chiunque può andare a scaricare le dimostrazioni e in caso scriverci a proposito. Tra i nostri lettori ci sono anche professori e persone che di matematica ne sanno più di noi, e senz'altro saranno motivati ad inviare commenti e consigli. Così tenete d'occhio la sezione del sito con il Bookshelf, e andate a controllare le dimostrazioni e le teorie proposte: gli autori ve ne saranno grati.

E con questo passiamo alle vostre soluzioni dei problemi del mese.

5.1 [148]

Ci scrive ***Cid*** a proposito del PM – ahimè – scritto da me medesima sugli interessi composti:

> Sul PM del numero scorso si afferma che a partire da un grammo d'oro si giungerebbe in 2000 anni ad avere un capitale pari a 4 quadrilioni di terre; l'errore sta nel ritenere normale che ci sia qualcuno disposto a pagare un interesse del 5% in oro. Provate ad andare in una banca ed investire il valore in euro pari a un Kg di oro e chiedere alla banca che dopo un anno vi dia il valore corrispondente a 1050 grammi di oro (al valore dell'oro alla data in cui ritirate il denaro) e state pur certi che nessuna banca accetterà queste condizioni; se siete fortunati potrete trovare una banca che è disposta a versarvi dopo un anno il valore in euro pari a 1000 grammi di oro senza farvi pagare spese e commissioni, cioè se va bene avrete un interesse dello 0% e questo significa che dopo 2000 anni un grammo d'oro resta sempre un grammo d'oro.
>
> Se ritenete che vi sia una banca che se si deposita un Kg d'oro sia disposta a pagare dopo un anno un valore superiore ad un Kg d'oro, fatemi sapere il nome di questa banca così generosa.

Ebbene, l'articolo originale da cui ho preso la maggior parte delle informazioni, molto più correttamente, immaginava che S. Giuseppe investisse l'equivalente di un centesimo e con un interesse del 5%, proseguiva poi a fare conversioni dei valori, e per rendere l'idea della quantità di denaro accumulata in duemila anni con l'interesse composto, convertiva la somma ottenuta in oro. Io – pigra e con l'idea di semplificare il conto – ho evitato le conversioni, il risultato non cambiava nell'ordine di grandezza, così non mi sono preoccupata di averlo reso più inverosimile. Scusatemi.

5.2 [149]

Poche e scarse soluzioni... siete tutti in vacanza? Problemi troppo facili? Va beh, cominciamo.

5.2.1 "30mmP-20C" e "30mmNP-20C"

C'è da dire che il Capo ha raccontato quasi tutto questo problema in piemontese, rendendo un tantino ardua la comprensione. Io però lo riporto – anche se sintetizzato – ancora con le sue parole, perché è proprio divertente:

> *Siete in una officina attiva dagli inizi degli anni Sessanta, e la vostra attenzione è attratta da una scatola in legno con due file di buchi, all'interno di ognuno dei quali c'è un cilindro metallico riportante un'iscrizione simile a quella che ci fa da titolo. "30mm" è il diametro del cilindro, "20C" è la temperatura alla quale il cilindro mostra effettivamente quel diametro. "P" e "NP" significa che si tratta di calibri "passa-non passa": quello con la "P" entra in un buco circolare con diametro 30 millimetri, mentre quello marcato "NP" non entra.*

> *Dovendo misurare un buco da trenta, e in mancanza dei cilindri giusti, si può provare a mettere due cilindri, uno da dieci e uno da venti, e vedere se ci stanno tutti e due, ma per verificare che il buco non sia ovale si può mettere nei due buchi che restano altri due 'passa'. Da quanto devono essere, i due calibri uguali che vi servono per fare la misura?*

Beh, la maggior parte delle mail che abbiamo ricevuto erano per dire che il problema era troppo facile. Vergognatevi, anche i problemi facili hanno la loro dignità!

Per cominciare pubblichiamo la versione di ***Michele I.***, al suo primo intervento su RM, a cui diamo un caloroso benvenuto.

> La soluzione che intendo fornire è algebrica, e sfrutta la geometria analitica. Per questo, mi facilito i successivi calcoli ponendo i tre raggi rispettivamente uguali a 3, 2 e 1. Alla fine, avremo cura di rimoltiplicare il risultato; ciò detto, iniziamo. Chiamiamo A la circonferenza di raggio 3 e la poniamo al centro degli assi. B e C sono quelle di raggio 2 e 1, e abbiamo l'accortezza di mettere i loro centri in $C_B(-1,0)$ e $C_C(2,0)$.
>
> Non andiamo a calcolare le equazioni delle circonferenze, in quanto poco servono. Noi infatti sappiamo che la condizione di tangenza di due circonferenze è che la distanza fra i loro centri sia uguale alla somma o alla differenza dei raggi: il primo caso si ha con la tangenza esterna, il secondo con tangenza interna. Ora, dobbiamo imporre la tangenza della nostra circonferenza (il cui centro è in C(a,b) e di raggio r alle altre tre. Otteniamo pertanto questo sistema:
>
> $$\begin{cases} d(C_A,C) = r_A - r \\ d(C_B,C) = r_B + r \\ d(C_C,C) = r_C + r \end{cases}$$
>
> Che diventa (ricordando che $r_A = 3$, $r_B = 2$ e $r_C = 1$)
>
> $$\begin{cases} a^2 + b^2 = (3-r)^2 \\ (a+1)^2 + b^2 = (r+2)^2 \\ (a-2)^2 + b^2 = (r+1)^2 \end{cases}$$
>
> Dove, consci delle radici quadrate che emergono nelle distanze, abbiamo elevato tutto al quadrato. Lo abbiamo fatto senza timore: distanze e raggi mai son negativi, quindi l'opra è legittima. Sviluppando i vari quadrati, arriviamo a questo:
>
> $$\begin{cases} a^2 + b^2 = r^2 - 6r + 9 \\ a^2 + 2a + 1 + b^2 = r^2 + 4r + 1 \\ a^2 - 4a + 4 + b^2 = r^2 + 2r + 1 \end{cases}$$
>
> Questo è un sistema di 3 equazioni in 3 incognite, pertanto risolubile. Tuttavia, l'abbondanza di termini al quadrato e termini non al quadrato, ci fa pensare che il sistema presenti difficoltà nella risoluzione. Noi, cauti, notiamo che i termini a^2, b^2 e r^2 hanno ovunque lo stesso coefficiente (che poi sia lo stesso per tutti è puro caso...)[26], pertanto qualcosa se ne potrà andare. In effetti, proviamo a sintetizzare le informazioni contenute nelle prime due equazioni, e lo facciamo rendendo ambo i primi membri eguali a $a^2 + b^2$, uguagliando poi i secondi.
>
> Otteniamo questa equazione:

[26] *Ovviamente la frase è ironica: data la geometria della situazione, le uniche soluzioni sono determinate da punti di tangenza delle circonferenze, è completamente naturale che il sistema si semplifichi [NdAlice].*

$$r^2 - 6r + 9 = r^2 + 4r + 1 - 2a - 1$$

Per la nostra felicità i due r^2 van via, e, dopo qualche maneggio algebrico,

arriviamo a questa condizione:

$$10r - 6 - 2a = 0$$

Ripetiamo il procedimento usando un'altra coppia di equazioni. Per esempio, prendendo la prima e la terza, otteniamo

$$8r - 12 + 4a = 0$$

Il gran sistemone di prima è pertanto diventato questo sistemino:

$$\begin{cases} 10r - 6 - 2a = 0 \\ 8r - 12 + 4a = 0 \end{cases}$$

Il quale ci conduce a $5r-3 = 3-2r$, e quindi a $r = 6/7$. Ora però dobbiamo ristabilire le proporzioni originarie. Poiché avevamo diviso tutto per 5, il diametro varrà $2r\cdot 5$, cioè $60/7$. Là.

No, non è finita qui. Michele in realtà ha trovato la soluzione molto più velocemente, ma in spirito con RM ha voluto provare ad arrivarci da un'altra direzione. La sua versione breve è la seguente:

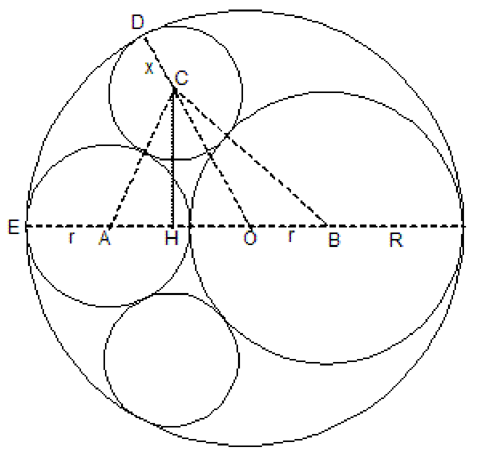
Per puro gusto, vi fornisco una soluzione molto più veloce: il cerchio che consideriamo è il primo cerchio di Pappo, e basta applicare questa formula:

$$r = d \cdot \frac{(1-k)k}{2\left[(1-k)^2 + k\right]}$$

dove d è il diametro del cerchio grande, k è il rapporto fra il raggio di uno dei cerchi piccoli e il raggio del cerchio grande.

Veloce, vero? La versione di ***MaMo*** giunge allo stesso risultato in un altro modo ancora:

<u>SOLUZIONE</u>: La situazione è illustrata nella seguente figura.



14 *La figura di **MaMo**.*

Indichiamo con R ed r i raggi dei cerchi noti ($R > r$) e con x il raggio del cerchio incognito.

Osserviamo che il segmento CH è l'altezza dei due triangoli AOC e BOC. Di essi conosciamo la lunghezza di tutti i lati per cui possiamo trovare le loro aree utilizzando per entrambi la formula di Erone.

Per il triangolo AOC si ha:

$$AO = OE - EA = R \qquad AC = r + x$$
$$OC = OD - CD = R + r - x$$

Il semiperimetro del triangolo è $p = R + r$, per cui l'area del triangolo AOC diventa:

$$A_{(AOC)} = \sqrt{r\ x\,(R+r)(R-x)}$$

L'altezza del triangolo AOC è quindi:

$$CH = \frac{2 \cdot A_{(AOC)}}{AO} = \frac{2}{R}\sqrt{r\,x\,(R+r)(R-x)}$$

Similmente per il triangolo BOC abbiamo:

$$OB = r \quad BC = R + x \quad OC = R + r - x$$

Il semiperimetro del triangolo è p = R + r, per cui l'area diventa:

$$A_{(BOC)} = \sqrt{R\;x\,(R+r)(r-x)}$$

L'altezza è quindi:

$$CH = \frac{2 \cdot A_{(BOC)}}{OB} = \frac{2}{r}\sqrt{R\,x\,(R+r)(r-x)}$$

Uguagliando le due espressioni di CH si ottiene:

$$\frac{2}{R}\sqrt{r\,x\,(R+r)(R-x)} = \frac{2}{r}\sqrt{R\,x\,(R+r)(r-x)}$$

Poniamo la condizione $x \leq r$ ed eleviamo al quadrato entrambi i membri. Semplificando essa diventa:

$$r^3 x(R-x) = R^3 x(r-x)$$

Trascurando la soluzione $x = 0$, si ricava:

$$x = \left(\frac{R^2 - r^2}{R^3 - r^3}\right) R\,r$$

Semplificando numeratore e denominatore per $R - r$ si ottiene la soluzione generale:

$$x = \left(\frac{R+r}{R^2 + R\,r + r^2}\right) R\,r$$

Essa è accettabile in quanto verifica sempre la condizione $x \leq r$.

Nel caso numerico R = 10 mm e r = 5 mm si trova il valore x = 30/7 mm. Cioè si deve usare un cilindro del diametro di circa 8.57 mm.

E con questo abbandoniamo il primo problema e vediamo cosa ci avete scritto per il secondo…

5.2.2 Da un problema di aprile

Tante, troppe domande in questo secondo problema del mese scorso... vediamo se riusciamo a riassumere

> *I VAdLdRM giocano con un dado (a sei facce e "onesto"): cominciano a lanciare il dado con l'accordo che la partita finirà quando verrà ottenuto un punteggio strettamente minore del precedente; insomma, lanciano il dado e se il risultato (dal secondo tiro in poi, evidentemente) è maggiore o uguale al tiro precedente, si va avanti. I Nostri tengono anche un punteggio; si definisce "punteggio" la somma dei valori del dado ottenuti nei vari tiri di una partita (con l'esclusione dell'ultimo, quello perdente): cosa vi aspettate, in media, come punteggio??*

No, non finisce qui:

> *Alberto propone il seguente gioco: Fred lancia il dado e all'inizio di ogni partita mette una moneta da dieci lire. Quando la partita finisce, se il punteggio (come definito prima) è minore di dieci, Fred perde e Alberto si prende le dieci lire; se è maggiore o uguale, Fred si riprende la moneta e vince dieci lire da Alberto. Conviene il gioco a Fred?*

No, non ancora...

> *Come cambiano i numeri, se cambia il dado? Nel senso, per avere gli stessi risultati, usando un intero set di dadi da Dungeons & Dragons (per quelli che non lo sanno, rispettivamente da 4, 6, 8, 12 20 e 100 facce), quali sono i valori per i quali conviene a ciascuno dei due il gioco?*

Quasi nessuna risposta qui. L'unico che ci ha scritto in proposito è stato ***Alberto R.***:

$$\left(\frac{1}{5}\right)\sum_{n=1}^{6} n\left(\frac{6}{5}\right)^{n-1} = 7.985984$$

> Questo potrebbe essere il valor medio del punteggio.
>
> Ho ottenuto il risultato con una invereconda successione di ipotesi fantasiose e assunzioni arbitrarie.
>
> Se errato avrò la conferma che la matematica è una cosa seria e bisogna lasciarla alle persone serie. Se invece è corretto (non si sa mai!) avrò la conferma che, come dice uno di voi, tagliare per i campi qualche volta funziona.

Beh, onore al tentativo in ogni caso. Il Capo, interrogato (o meglio rampognato per aver proposto un problema tanto complicato nel mezzo dell'estate), ha scritto:

> OK, cerchiamo di renderlo più facile: nel calcolo del punteggio viene contata anche la giocata perdente. A questo punto cosa mi dite del gioco?

A me non sembra per niente più facile, ma lui insiste che è così. Allora provateci, che ne riparliamo il mese prossimo. Buona estate!

6. Quick & Dirty

In una scatola di matite colorate, ce ne sono lo stesso numero per ogni colore, e voi pescate al buio. Per essere sicuri di prendere una matita blu, dovete estrarne 25, mentre per essere sicuri di prendere tutte le matite di un qualche colore bisogna estrarne 29. Quante matite ci sono nella scatola?

> *Usiamo, come sempre in questi casi, la Legge di Murphy.*
>
> *Se per essere certi di estrarre una matita blu bisogna estrarne* 25 *matite, vuol dire che con le prime* 24 *abbiamo preso tutte le matite degli altri colori e, estraendo la venticinquesima, peschiamo in una scatola dove ci sono solo matite blu.*
>
> *Se per essere certi di pescare tutte le matite di uno stesso colore dobbiamo estrarre* 29 *matite, vuol dire che con le prime* 28 *abbiamo estratto per ogni colore tutte le matite meno una (ossia nella scatola resta una matita per ogni colore), e la prossima che estrarremo ci permetterà di completare un qualche colore. Quindi, se* m *è il numero delle matite di ogni colore e* c *il numero dei colori, deve essere* $28 = c\cdot(m-1)$*; quindi,* $c-1$ *divide* 24 *e* c *divide* 28*; i candidati a* $c-1$ *sono quindi* $\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$ *e i candidati a* c *sono allora* $\{2,3,4,5,7,9,13,25\}$*; di questi, solo* $\{2,4,7\}$ *dividono* 28*, ma solo* 4 *soddisfa le condizioni del problema; quindi ci sono* 4 *colori, con* 8 *matite per ogni colore, totale* 32 *matite.*

7. Pagina 46

Siano a e b due lati adiacenti del rettangolo.

Dal teorema delle medie geometrica e aritmetica si ha:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Rightarrow ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \qquad [1]$$

o, equivalentemente,

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}, \qquad [2]$$

e in queste espressioni i segni di eguaglianza valgono solo per $a = b$.

Dalla [1] si ricava:

$$S = ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{P}{4}\right)^2.$$

L'area S sarà massima nel caso di eguaglianza tra il secondo e il terzo termine, e questo si verifica solo per $a = b$ e quindi, per un dato perimetro, la superficie massima si avrà nel caso del quadrato.

La seconda parte si prova in modo perfettamente analogo, considerando però che nel caso di area s fissa si avrà il perimetro minimo nel caso $a = b$.

Per la terza parte, siano a e b i cateti del triangolo e sia c l'ipotenusa: si ha quindi $c^2 = a^2 + b^2$. Sia inoltre $d = a + b$ la somma dei due cateti. Dalla [2] abbiamo:

$$\frac{a+b}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2}$$

ossia

$$\frac{d}{2} \leq \frac{c}{\sqrt{2}}$$

da cui

$$d \leq \frac{2c}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}c,$$

che è la tesi.

8. Paraphernalia Mathematica

Questa volta, cominciamo con un po' di *outing*: Rudy vi aveva promesso questo pezzo dal PM di RM142 (Novembre 2010, "Strizza, Schiaccia & Disidrata", quello sulle compressioni dati), ma all'epoca non aveva capito nulla dell'argomento.

Testardo come un Cuneese sommato ad un Canavesano (vi ricordate le origini dei suoi genitori, sì?), procedeva eroicamente nello studio e, finalmente, si apprestava a scrivere l'articolo quando arrivava lo *tsunami* in Giappone: a questo punto il titolo diventava di cattivo gusto, quindi decideva di rinviare.

Il mese successivo, Treccia decideva che era venuto il momento per lei di scrivere un PM: per una cosa che avviene per la prima volta in dodici anni, non ci è sembrato il caso di dire "'momento che c'ero prima io". Altro rinvio.

Il mese dopo, per una serie di ragioni personali, doveva esserci l'articolo sulla mano del Mercato di Adam Smith. Aridanghete.

Adesso non ci sono più scuse. Ve lo beccate, volenti o nolenti. E se non lo state leggendo, vuol dire che a Rudy è schiantato il PC. Fate qualcosa!

8.1 Ondine

Col che, dovrebbe esservi chiaro il motivo per il quale non ne abbiamo parlato quando era pianificato.

La traduzione è nostra e, non avendo trovato articoli in italiano, non sappiamo se sia accettata nell'ambiente accademico: a quanto ci risulta, tutti (tranne i francesi, come al solito) usano l'originale inglese *wavelet*, infatti il nome dice tutto, anche nella sua versione francese (*ondelette*) che ha lo stesso significato:

- È una funzione ***a quadrato sommabile***: il suo integrale su $(-\infty,+\infty)$ è finito (vale zero, tra l'altro, il che è una comodità in più).
- È ***definita in un intervallo ristretto***: al di fuori di questo intervallo, la funzione non è definita (si assume pari a zero e costante, ma il bello è, giustappunto, che non ci importa il valore che assume).
- È ***traslabile*** e ***scalabile***, ossia la portate dove volete per l'asse delle x con l'ampiezza che vi serve.

Una volta che avete definito una ***wavelet madre*** $\psi(x)$, potete scalare della dimensione a e traslare di una distanza b questo aggeggio generando la famiglia:

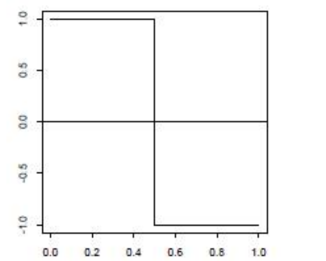
$$\left\{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right),(a,b)\in \Re^{+}\times\Re\right\}. \tag{1}$$

In questo modo, avete generato una ***base*** sull'insieme delle funzioni a quadrato sommabili esattamente come succede con seni e coseni nell'analisi di Fourier: insomma, potete descrivere qualsiasi funzione "ragionevole" attraverso una serie di *wavelets*.

La domanda, a questo punto, probabilmente è qualcosa del tipo: "Ma se fa le stesse cose dell'analisi di Fourier, perché non uso l'analisi di Fourier?" Buona domanda, ma prima di rispondere è meglio se vediamo un esempio.

Una *wavelet* molto utile a fini didattici è la ***wavelet di Haar***. Si comincia dalla definizione della *wavelet* madre $\psi(x)$, che è una semplice funzione a gradino:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ -1 & se \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}.$$

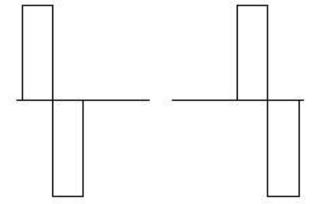


15 *La Madre di Tutte le Wavelet (di Haar),* ψ_{00}

...e ve ne diamo anche il grafico, nella figura 15; si vede facilmente che risponde a tutte le caratteristiche definite sopra per le *wavelets*.

Ora, come facciamo a generare le altre *wavelet* della famiglia? Semplicemente, con il trucchetto degli (a, b) visti nella formula [1]:

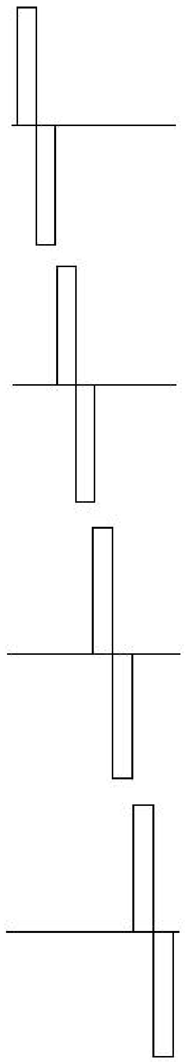
$$\psi_{jk}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \cdot \psi(2^j x - k);$$



16 ψ_{01} *(a sinistra) e* ψ_{11}

OK, non è esattamente la stessa cosa, ma funziona. E si dimostra (facile ma noioso) che sono una base (ortonormale, grazie alla costante che abbiamo introdotto) dello spazio delle funzioni a quadrato sommabili, ossia che è:

$$\int \psi_{jk} \cdot \psi_{j'k'} = 0 \Leftrightarrow (j \neq j') \vee (k \neq k').$$



17 *Dall'alto,* ψ_{20}, ψ_{21}, ψ_{22}, ψ_{23}

Ossia, qualsiasi funzione a quadrato sommabile puo' essere espressa come somma di una serie di *wavelet* di Haar.

Adesso che sapete tutto sulle trasformate di Haar, potrebbe essere interessante vedere come sono fatte: dieci minuti con un foglio Excel vi chiariscono il concetto, e facendo un po' di pulizia sui fogli dovreste ottenere i grafici delle due figure di fianco: vi serve una funzione di scala, ma siamo fortunati, visto che per come abbiamo definito le *wavelet* di Haar, la funzione di scala è la funzione unità, che si indica come:

$$\phi(x) = 1(0 \leq x < 1).$$

No, la notazione non piace neanche a noi. Se trovate qualcosa di meglio, fatecelo sapere.

Adesso cerchiamo di capire a cosa servono: arriveremo ad una formulaccia, ma non preoccupatevi: la faremo seguire da un esempio ragionevolmente chiaro, usando dei numeri "piccoli".

Supponiamo di avere un vettore di dati $y = (y_0, y_1, \ldots, y_{2^n - 1})$ di dimensione 2^n, ottenuto da un qualche campionamento statistico; possiamo associare a questo insieme una funzione a gradino definita come:

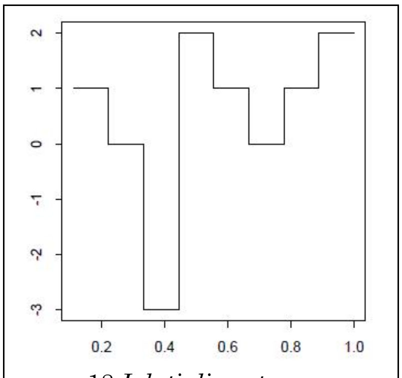
$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^n - 1} y_k \cdot 1(k \cdot 2^{-n} \leq x < (k+1) \cdot 2^{-n}),$$

e in questo modo dovrebbe anche tornarvi chiaro a cosa serve la funzione unità: "tiene ordine" nei dati (nel senso che li mette uno di seguito all'altro e li tiene separati nell'intervallo $[0,1)$).

...e quando arrivano le ondine? La funzione è a quadrato sommabile, e può essere sviluppata in qualsiasi base ortonormale di questo spazio (Fourier docet), ottenendo:

$$f(x)=c_{00}\phi(x)+\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{2^j-1}d_{jk}\psi_{jk}(x)\right),$$

che è una bestia meno brutta di quanto sembri: tanto per cominciare la sommatoria su j è finita in quanto parliamo di una funzione a gradino; e, siccome per ogni k il dominio di f è finito, anche l'altra sommatoria è finita, cosa che, *non succede con la trasformata di Fourier*: ve li ricordate, quei cornetti al fondo dell'onda quadra? Nascevano dal fatto che le sommatorie erano infinite.



18 *I dati di partenza*

Supponiamo di avere un set di dati $y=(1,0,-3,2,1,0,1,2)$: trovate il suo "moltiplicamento per la funzione unità" nella figura a fianco.

Adesso, cerchiamo i coefficienti dello sviluppo in ondine di Haar della nostra funzione. Questi si ottengono risolvendo un'equazione matriciale dall'aria ingannevolmente semplice (comunque, si può fare):

$$\begin{bmatrix}1\\0\\-3\\2\\1\\0\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&\sqrt{2}&0&2&0&0&0\\1&1&\sqrt{2}&0&-2&0&0&0\\1&1&-\sqrt{2}&0&0&2&0&0\\1&1&-\sqrt{2}&0&0&-2&0&0\\1&-1&0&\sqrt{2}&0&0&2&0\\1&-1&0&\sqrt{2}&0&0&-2&0\\1&-1&0&-\sqrt{2}&0&0&0&2\\1&-1&0&-\sqrt{2}&0&0&0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{00}\\d_{00}\\d_{10}\\d_{11}\\d_{20}\\d_{21}\\d_{22}\\d_{23}\end{bmatrix}.$$

I coefficienti $2^j\ (1,\sqrt{2},2)$ nella matrice centrale corrispondono alle diverse risoluzioni.

Risolvendo, ottenete i coefficienti:

$$\begin{bmatrix}c_{00}\\d_{00}\\d_{10}\\d_{11}\\d_{20}\\d_{21}\\d_{22}\\d_{23}\end{bmatrix}.=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2\sqrt{2}}\\-\frac{1}{2\sqrt{2}}\\\frac{1}{4}\\-\frac{5}{4}\\\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}\end{bmatrix}.$$

E, a questo punto, dovreste essere convinti che, come dicono gli americani, Rudy vi stia vendendo dell'"olio di serpente" (o il Colosseo, nella versione italiana). E sareste anche giustificati a pensarlo, visto che i nuovi dati sono (ben che vada) della stessa dimensione degli originali (e quindi non si guadagna niente, a mandare questi al posto degli originali). Non solo, ma questo pezzo sta venendo troppo corto, nonostante tutti gli artifici utilizzati per allungarlo. Quindi, adesso vi rispiego tutto, cercando di motivare la cosa.

Prendiamo in considerazione una lista di numeri, questa volta più "semplice" (nel senso di comoda): ad esempio, $[6,12,15,15,14,12,120,116]$; abbiamo due modi per trasmetterla, perfettamente equivalenti: uno è quello di trasmettere *sic et simpliciter* la lista, l'altro è di trasmettere solo qualcosa. Tanto per cominciare, trasmettiamo la lista delle ***medie*** $[9,15,13,118]$, ossia le medie (aritmetiche) tra il primo e il secondo, tra il terzo e il quarto, eccetera: inviando solo questa, non riuscite di sicuro a ricostruire il vettore. Allora, trasmettete un'altra lista, quella delle ***distanze dirette*** $[3,0,-1,-2]$, che non sono altro che la "distanza" tra il primo e la media tra lui e il secondo, tra il terzo e la media tra lui e il quarto, e avanti così. E non preoccupatevi, per il momento, di risparmiare spazio[27]: a quello ci pensiamo dopo.

Definiamo la ***trasformata discreta unidimensionale di Haar*** come la trasformazione lineare:

$$\vec{x} \to \begin{bmatrix} \vec{m} \\ \vec{d} \end{bmatrix},$$

dove $\vec{x} \in \Re^N$ (con N pari) e $\vec{m},\vec{d} \in \Re^{\frac{N}{2}}$; questi ultimi due, non sono altro che le medie e le distanze dirette:

$$\begin{aligned} m_k &= \frac{x_{2k+1} + x_{2k}}{2}, \\ d_k &= \frac{-x_{2k+1} + x_{2k}}{2}. \end{aligned}$$

E anche se quella delle distanze dirette sembra un'inutile complicazione, è una definizione formalmente molto carina.

Adesso, ignorando un po' di segni di matrici trasposte, possiamo esprimere la nostra trasformazione in forma matriciale come:

$$W_N = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{\frac{N}{2}} \\ D_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix}. \qquad [2]$$

No, la notazione non piace neanche a noi, ma quella originale era peggio. Comunque, crediamo la cosa sia ragionevolmente chiara, evidenziata dalla similitudine tra le due sottomatrici M e D e dalla comparsa, nella seconda, del segno negativo per il primo dei coefficienti non nulli della riga[28].

[27] Anche se ci pare che in termini di entropia (informatica) qualche piccolo risparmio ci sia. No, non abbiamo nessuna voglia di calcolarla.

[28] Se il fatto che i termini della matrice siano completamente diversi dal caso precedente vi lascia perplessi e decidete di risolvere il problema, fatecelo sapere. Pubblicheremo (no, non lo facciamo il conto...).

I due termini "media" e "distanza diretta" dovrebbero aver fatto suonare un campanello in testa agli ingegneri: il primo è un filtro ***passa-basso***, mentre il secondo è un filtro ***passa-alto***; in pratica, nel primo tengo conto delle *persistenze*, mentre il secondo mi tiene il conto dei *rapidi cambiamenti*. E qui sta il trucco.

Infatti, posso stabilire una ***soglia*** al di sotto della quale non misuro i cambiamenti rapidi, e li pongo tutti pari a zero; questo porterà ad avere una perdita nella precisione dei dati precisamente misurabile, e quindi nota a priori.

Se adesso vi chiedete a cosa serve tutta questa sbrodolata di matrici, accendete il vostro player MP3 e mettete su l'ultima canzone che avete taroccato: la compressione utilizzata è esattamente questa. "Rudy, guarda che io non ho mai taroccato niente...". Faremo finta di crederci: in questo caso, prendete una canzone e, per amor della scienza, passatela al primo *ripper* che trovate. Ad un certo punto, dovrebbe chiedervi che percentuale del segnale volete *perdere*[29]. Bravi, avete appena definito la soglia sotto la quale tagliate le "rapide variazioni".

La cosa si vede anche nelle famigerate "suonerie da scuola": la conoscete la leggenda? Tranquilli, ve la spieghiamo. Qualsiasi libro di acustica vi dice che gli umani percepiscono suoni tra i 16 e i 32K Hertz; se il libro è amante della precisione vi dirà anche che la capacità di sentire i suoni più acuti diminuisce con l'avanzare dell'età. Questo ha dato origine ad alcune suonerie particolarmente diffuse tra i giovani *[Sì, i VAdLdRM ne sono ampiamente forniti (RdA)]* che utilizzano solo le frequenze estreme (non udibili dai prof), e quindi che hanno una matrice di variazione nella quale se mettete una soglia cancellate tutto. Se guardate, la dimensione dell'MP3 della suoneria è molto maggiore di altre suonerie, in quanto deve portarsi dietro un "data loss" (sarebbe la soglia) pari a zero[30].

Abbiamo citato l'MP3, e vi sarà sorto il sospetto che anche altre codifiche imparentate usino lo stesso metodo: in questo caso, ci avete azzeccato in pieno. L'unica complicazione che avete se, ad esempio, siete interessati al JPEG, è che qui dovete trattare un insieme di dati *bidimensionale*: niente paura! Data un'immagine $M \times N$, la trasformata diventa una cosa del tipo $A_{M\times N} \rightarrow W_M A W_N^T$, dove questa volta ci siamo ricordati di indicare la trasposizione. Attenzione che, in questo caso, dovete lavorare con *quattro* sottomatrici (le altre due sono una via di mezzo tra la media e la distanza, se vi ricavate i termini). È ancora peggio se volete ottenere un filmato MPEG: qui dovete lavorare in tre dimensioni, visto che dovete anche considerare il "panino" delle due immagini successive; comunque queste complicazioni sono tanto utili[31] quanto noiose, quindi se volete ve le contate da soli (o lasciate fare alla vostra fotocamera).

Ancora due cose facili-facili: partiamo da quella teorica.

Se fate qualche esperimento, vi accorgete che il filtro passa-basso dell'ondina di Haar è un po' troppo zelante: infatti se vi limitate ad analizzare i dati della *wavelet* sulla parte delle variazioni brusche rischiate di non accorgervi di grosse variazioni, posto che cadano proprio tra due medie[32]. Per ovviare a questo, è stata inventato il ***Filtro ortogonale di***

[29] Sorvoliamo sul fatto che potreste avere una perdita dovuta al campionamento: comunque, se ci scrivete un PM ve lo pubblichiamo.

[30] Rudy usa una suoneria del genere come sveglia, per non svegliare anche sua moglie alle cinque meno un quarto di mattina, ma in questi ultimi tempi gli sta sorgendo un dubbio: quando dorme appoggiato sul lato sinistro *non la sente!* Che abbia un orecchio più vecchio dell'altro?

[31] Un piccolo esempio per mostrarne l'utilità: le immagini di questo file sono state prima inserite senza compressione (raw bitmap, e via andare), dimensioni del file 3MB. Semplicemente passando le immagini in JPEG e reinserendole nel file, dimensione del file 223KB. Non so se mi spiego...

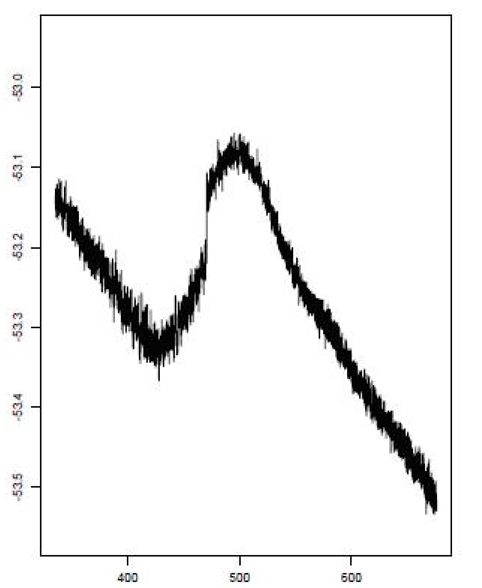
[32] Esempio: $[0,0,100,100] \rightarrow \sqrt{2}[0,100;0,0]$. "Calma piatta" sulle distanze, visto che sono dove *non* calcoliamo la media.

scala di Daubechies, del quale ci limitiamo a dare la matrice del caso $N = 8$: per confronto con quello della **[2]**, il suo significato dovrebbe essere lapalissiano:

$$W_8 = \begin{bmatrix} h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \\ h_1 & h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & h_2 \\ g_3 & g_2 & g_1 & g_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & g_2 & g_1 & g_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_3 & g_2 & g_1 & g_0 \\ g_1 & g_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_3 & g_2 \end{bmatrix},$$

dove quel "giro" nella quarta e ultima riga a noi ricorda alcuni vecchi videogiochi ambientati in un mondo toroidale; comunque, la capacità di "tenere a mente" le variazioni che cadono "fuori media" nella *wavelet* di Haar qui dovrebbe essere evidente. Il costo è una certa qual complicazione nei coefficienti[33], ma vale la pena.

Infine, un'applicazione pratica in cui si ricava qualcosa di nuovo: non solo, ma troviamo un'applicazione delle *wavelets* ai disastri naturali.



19 *Un tranquillo laghetto californiano*

Prendete un lago che, da una parte, abbia un muro al di sopra del quale fluisce l'acqua (insomma, avete una diga da cui l'acqua in condizioni normali straborda con regolarità): è noto sin dalla Cina più antica che, nei momenti precedenti un terremoto, il flusso dell'acqua varia, in quando prima di avere le scosse distruttive parte uno "scivolamento" delle falde che modifica molto velocemente l'altezza dell'acqua nel vostro lago; il guaio è che anche altri fenomeni (riscaldamento, raffreddamento, pioggia,...) variano l'altezza del lago; come si fa a distinguere il terremoto dagli altri fenomeni? Riuscirci significherebbe avere almeno qualche minuto di preavviso che potrebbe essere utilissimo.

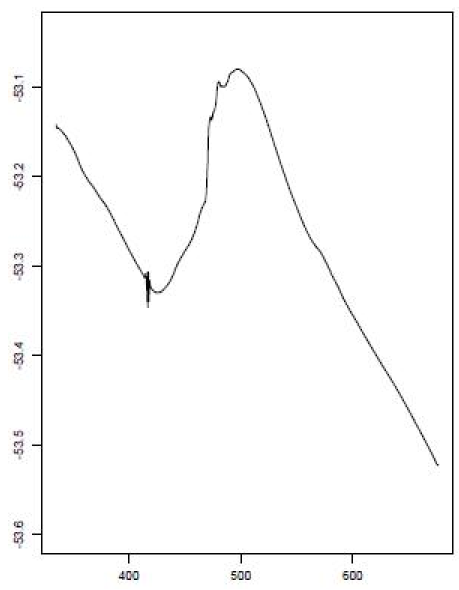
Bene, qualcuno ci ha provato: ha tenuto sotto osservazione un laghetto californiano per un certo periodo di tempo e ha ricavato i dati che trovate nella figura qui sopra; noto che nell'intervallo di tempo c'è stato un terremoto, sapreste dire quando è stato?

[33] Conoscendo il vostro masochismo, ve li mettiamo in nota:

$$\vec{g} = [h_3, -h_2 h_1, -h_0]; \quad h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$$

Va detto che i Nostri sapevano benissimo quando era avvenuto il terremoto: hanno cominciato a fare trasformate *wavelet* variando le soglie sin quando non hanno ottenuto "qualcosa di strano" su quel momento, segno che "quella soglia" era esattamente quella che riusciva a filtrare le variazioni tipiche di un terremoto; trovate il grafico topico nella figura qui di fianco.

Bingo!



20 *Dov'è il colpevole?*

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms