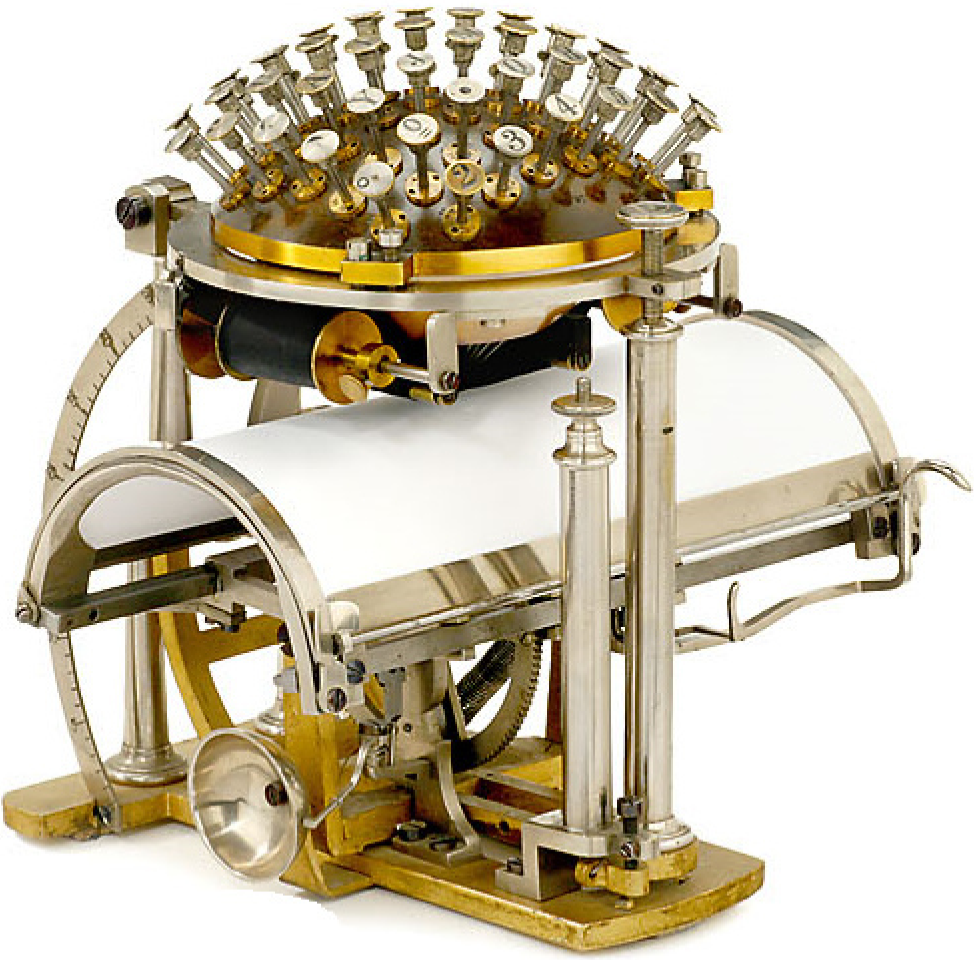
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 149 – Giugno 2011 – Anno Tredicesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell’altro millennio da

Rudy d’Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM148 ha diffuso 2778 copie e il 05/06/2011 per Google eravamo in 22’800 pagine.

Avevamo schedulato questa copertina per altra data, ma la notizia che il 30 aprile di quest'anno è stata costruita l'ultima macchina da scrivere della Terra (Godrey&Boyce, India: al 10 maggio, ne restavano solo 200 in magazzino) ci impone di anticiparne la pubblicazione. Per una cosa del genere vale la pena di utilizzare una pagina di RM in più.

Pare che la tastiera QWERTY nasca per non "incastrare" i martelletti durante la scrittura veloce. Ci chiediamo quanto il termine "scrittura veloce" sia applicabile alla macchina da scrivere brevettata da ***Rasmus Hans Johan Malling-Hansen*** nel 1870.

Molto steampunk, secondo noi. E quel coso emisferico in basso a sinistra è evidentemente l'antenna per la connessione wireless al PC (in realtà è il campanello di fine riga, ma ci piace sognare...).

1. Debiti da rimettere

Καὶ ἄφες ἡμῖν τὰ ὀφειλήματα ἡμῶν,
ὡς καὶ ἡμεῖς ἀφήκαμεν τοῖς ὀφειλέταις ἡμῶν.
(Vangelo secondo Matteo 6, 12)

È quasi inevitabile: parlare di debiti significa parlare di mal di pancia. Gli economisti fanno un grande uso di matematica e – siano lodati per questo – la tengono in gran conto; ciò non di meno è sempre un po' spiazzante, per coloro che sono abituati a vedere i numeri e i grafici come strutture astratte e brillanti che regolamentano l'universo e la mente, ritrovarseli nel ruolo di crudeli indicatori della qualità della vita (quando non direttamente della possibilità di mettere d'accordo il pranzo e la cena), come gli studiosi di economia sono soliti fare.

Nel cristallino mondo della matematica, il segno meno ha stessa dignità, se non addirittura la medesima identità concettuale, del segno più: per gli economisti, la differenza che corre tra loro è la medesima che si ritrova tra un bacio e un pugno[1]. Un debito, specie se il riferimento è a quello pubblico italiano, lascia inevitabilmente scorrere un brivido lungo la schiena a tutti coloro che sono chiamati a discuterne. In parte la cosa dipende anche dal fatto che, mentre molti aspetti della macroeconomia restano oscuri e inaccessibili ai più, con il debito pubblico basta davvero poca matematica per spaventarsi a dovere. Basta prenderne il valore grezzo, pari nel 2010 a 1.843 miliardi di euro e dividerlo per il numero degli italiani (60,2 milioni): il risultato (circa 30'600 euro di debito a testa) riesce a suscitare immediatamente riso o lacrime, ma nessuna via di mezzo. Del resto, un calcolo del genere ritorna assai di frequente in tutti i giornali; poco diversa, anche se sembra già più sofisticata, è la lettura attraverso il famigerato rapporto Debito/PIL, che ha raggiunto ormai un placido 119%. Eppure per prenderne coscienza basta una piccola metafora casalinga: parificando il PIL al totale degli stipendi che entrano in casa e il Debito Pubblico ai debiti verso i negozianti, è come se il nostro amato paese avesse debiti pari a circa un anno e due mesi di stipendio: abbiamo già speso quello che guadagneremo da qui ad Agosto 2012.

Ma ci sono debiti e debiti: nella più importante preghiera della cristianità, un passaggio è dedicato esplicitamente a quest'aspetto; e spesso suscita perplessità, perché sembra essere un'esortazione troppo esplicitamente contabile per trovar posto in un'orazione di così alto contenuto spirituale. In realtà, il passaggio ha effettivamente una storia complessa. Il Pater Noster, unica preghiera che secondo la tradizione è stata insegnata direttamente da Gesù ai discepoli, è riportata solo nei vangeli di Matteo e di Luca; e con differenze anche significative: un ultimo verso[2] riportato da Matteo non è presente nella forma canonica; Luca riporta l'incipit solo come "*Padre Nostro*" mentre è Matteo che registra la forma classica "*Padre Nostro che sei nei cieli*"; e così via. Una differenza notevole tra le due versioni è proprio nel passaggio "*rimetti a noi i nostri debiti, come noi li rimettiamo ai nostri debitori*": il significato ultimo è verosimilmente lo stesso in entrambe, ma Luca usa la forma più immediata e diretta che suona "*perdona i nostri peccati*", mentre è l'originale greco di Matteo a riportare la forma che tutti conosciamo.

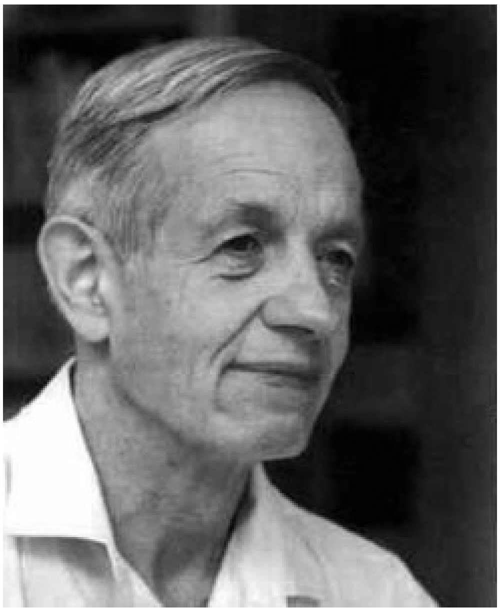
C'è quindi nella preghiera un'equivalenza semantica tra "debito" e "peccato", anche se stupisce che, in un testo prettamente sacro, nella versione ufficiale della Chiesa si preferisca il termine più giuridico rispetto a quello esplicitamente etico-religioso. Per

[1] Differenza peraltro sensibile perfino nel marketing: i notissimi cioccolatini che ancora si chiamano "Baci" avevano inizialmente il nome di "cazzotti", perché la forma compatta e la nocciola ricoperta e sporgente ricordavano un po' la forma di una mano chiusa a pugno. Il successo commerciale dei "cazzotti" fu minimo, ma bastò un accorto cambio di nome del prodotto (con conseguente campagna pubblicitaria tutta basata sul concetto di bacio e richiamo agli innamoramenti) per cambiare totalmente il responso del mercato.

[2] Il verso recita "*Perché tuo è il regno, la potenza e la gloria nei secoli*".

quanto riguarda la versione italiana, la perplessità dei giovani frequentatori delle lezioni di catechismo può essere anche amplificata dall'uso del verbo "rimettere", perché anche se uno dei suoi significati è proprio "condonare, perdonare" il verbo viene più spesso usato nel significato di "riproporre, ricollocare"[3], quando non con significati ancora più terreni. Il risultato è che il giovane discepolo può fraintendere il "*rimetti a noi i nostri debiti*" come una specie di esortazione all'onnipotente a riproporre di nuovo dei debiti magari già pagati in precedenza, anziché come una forma diretta a supplicare il condono dei peccati, e non solo di quelli di natura contabile o finanziaria.

Quel che è comunque certo, sia dal punto di vista dell'alta finanza sia da quello morale, è che se si ha la possibilità di saldare dei debiti è bene farlo, anche senza scomodare l'intervento divino. Ebbene, noi (intesi come Redazione di RM) abbiamo in realtà un piccolo debito con voi (intesi come lettori di questa Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa), ed è bene che si provveda una volta per tutte a saldarlo. Pur se i redattori si sono impegnati anche in attività che trascendono la redazione dell'e-zine, quali la rubrica su *Le Scienze*, il relativo blog, qualche conferenza o dibattito in occasioni speciali, rimane fermo il principio fondamentale che ogni attività extra-rivista nasce e discende comunque dalla rivista stessa. In accordo con questo principio i contenuti del Blog sono quasi sempre già noti ai lettori più attenti di RM, e lo stesso vale, perlomeno per quanto riguarda i contenuti se non esplicitamente anche la forma, anche per le conferenze.


1 – *John Nash*

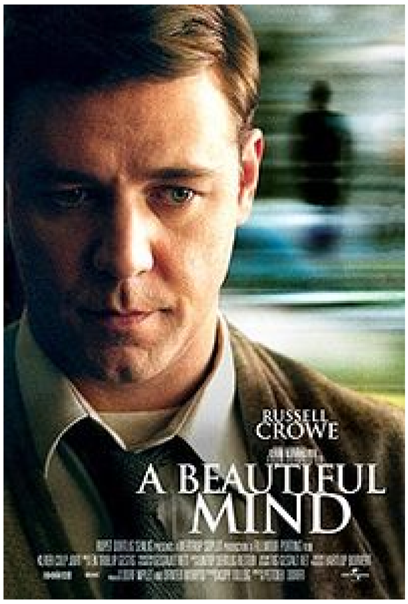
Il nostro primo libro "*Rudi Simmetrie*", è stato di fatto costruito integralmente su materiale già apparso in RM, salvo poche pagine con funzione di introduzione e collegamento. Il secondo, invece "*Rudi Ludi*", ha una struttura diversa, con le parti più assimilabili alle rubriche storiche di RM, Paraphernalia e Compleanni, modificate, ricostruite su base dialogica e inserite in una trama più o meno narrativa. Nel far questo, però, anche alcune parti classiche sono state costruite ex-novo; tanto per fare un esempio esplicito e direttamente in tema, la biografia di John Forbes Nash è stata trattata nel libro pur non essendo mai uscita nella forma canonica di "compleanno di RM". La stessa è stata poi pubblicata anche sul blog, chiudendo il cerchio del delitto: certo non tutti i lettori di RM hanno letto "*Rudi Ludi*", e neppure necessariamente il blog ospitato dal sito di *Le Scienze*: quindi esistono dei puri RMers che sono in credito con noi di (almeno) un compleanno.

Potremmo chiedere loro di perdonarci, di "rimetterci i debiti": sono in genere assai magnanimi, e non dubitiamo che lo farebbero. Ma, un po' per senso del dovere, un po' per correttezza deontologica e un po' (un bel po'…) per riciclare il riciclabile e dedicarsi all'ozio più spudorato, abbiamo pensato di pagare il debito pubblicando come compleanno di questo mese di Giugno proprio il capitolo di *Rudi Ludi* dedicato a John Nash. Dovrebbe essere leggibile a prescindere dalla trama narrativa in cui è inserito, ma per sicurezza (e

[3] La causa del doppio significato sta tutta nella particella "ri" (o "re"), che ha normalmente il significativo iterativo, indicante ripetizione. La stessa particella ha però, soprattutto in latino, anche il significato di "ritorno, tornare indietro", cosicchè "ri-mettere" ha anche il senso di "mettere indietro com'era prima", e quindi perdonare, condonare, come è evidente senza fraintendimenti nel vocabolo "remissione". La scelta del verbo italiano "rimettere" in questo contesto può essere stata causata dall'attrazione della forma latina della preghiera, che recita "*dimítte nobis débita nostra",* con evidente assonanza tra il latino "*dimittere*" e l'italiano "*rimettere*".

anche per scimmiottare i famosi "Testi e Note" di Isaac Asimov), di tanto in tanto inseriremo qualche nota esplicativa.

Nella storia di RL, i protagonisti sono i tre loschi figuri che si firmano al fondo di questo giornalino. Loro (o meglio i loro avatar, le loro controfigure letterarie, i loro omologhi del platonico mondo delle idee) stanno facendo un viaggio dall'Italia alla Svizzera, e nel farlo si dilettano con le loro attività preferite: bere birra, mangiare, parlare di matematica e matematici. In maniera abbastanza palese, il tema che governa il libro è comunque la Teoria dei Giochi, intesa sia nel senso classico (Morgenstern, Von Neumann, Nash) sia nel senso più esplicitamente ludico (Conway e compari). Il sesto capitolo è quello che segue: il quinto, in cui Rudy discettava su Tabelle di Payoff e sugli Equilibri di Nash, aveva inevitabilmente causato la curiosità di Alice relativamente al matematico che dava il nome a tali "equilibri": si chiedeva se fosse proprio quello del film "*A beautiful mind*". Doc, dopo aver confermato l'identità, approfitta dell'occasione per cominciare, come suo solito, a sproloquiare sulla vita e le opere del matematico chiamato in causa.



2 – *La locandina del film*

* * * * *

– Ehi, guardate che non è mica di Russell Crowe!

– Spiritoso. Guarda che in questa macchina è più facile trovare fan di John Nash che di Russell Crowe. Anche se l'australiano non è certo da buttare via…

Piotr sorride al commento di Alice e, come sempre quando ritiene di dover parlare per più di trenta secondi, comincia ad agitarsi sul sedile alla ricerca della posizione migliore. Avere una casa piena di gatte lo ha ormai reso nevrastenico come un felino in merito al comfort della cuccia.

– Lo so, lo so. Tutti matefili, qui dentro, e le star di Hollywood hanno vita più dura di quelle del Trinity College. Comunque, la mia prolusione iniziale non era un commento rivolto a voi due, ma una citazione.

– Di quale citazione vai cianciando?

*Non è facile sollecitare un commento di Rudy quando si immerge nelle sue «*meditazioni da viaggio sul sedile posteriore*», ma un buon metodo è proprio quello di citare una citazione che lui non conosca. Odia non conoscere (e riconoscere) una citazione: la parte difficile del metodo, naturalmente, sta nel riuscire a trovare una citazione che non gli sia già nota.*

*– Della già citata e ora da me ripetuta «*Guardate che non è mica Russell Crowe*», pronunciata da un noto matematico nei riguardi di un altro matematico in occasione di una riunione matematica.*

A Piotr piacerebbe godersi la curiosità degli altri due, farsi pregare e supplicare per rivelare il contesto della frase, ma non ottiene nulla: benché incuriositi, Alice e Rudy conoscono bene il compagno e sanno per esperienza che, per farlo parlare, basta tacere venti secondi. Questa volta ne bastano quindici.

– Primo Festival della Matematica di Roma. Auditorium pieno, gente in fila fuori, molti non riusciranno a entrare. Tra gli ospiti più attesi, uno dei grandi vecchi:

John Forbes Nash. Quando la figura alta e magra fa il suo ingresso e il pubblico comincia a riconoscerlo, parte un applauso lungo, sonoro, scrosciante, che poi si trasforma nella più classica delle standing ovation. A quel punto Piergiorgio Odifreddi, direttore scientifico del Festival, prende il microfono e per sdrammatizzare pronuncia quella frase. Il pubblico ride e anche Nash sorride, non appena capisce il senso della battuta in italiano. E forse quell'uscita lo aiuta a non farsi prendere troppo dall'emozione.

– Mi sarebbe piaciuto esserci. Me ne sono già persi due, di questi Festival.

– Non sei la sola, Alice. Anche se non credo che la cosa ti consoli.

– Basta lamentarsi, su. È solo questione di organizzazione, e se cominciamo a pianificare adesso, il Terzo Festival non ce lo faremo scappare[4].

– Sarà… Ma ora basta davvero, torniamo a Nash. L'aneddoto, per quanto toccante, dimostra che, almeno fra il pubblico dei non addetti ai lavori, il nome di Nash è diventato famoso grazie soprattutto al film di Ron Howard del 2001[5]*. E, naturalmente, Nash viene spesso identificato, se non proprio con Russell Crowe, quantomeno con il protagonista del film.*

– Succede sempre, no? C'è qualcosa di male? Il film non è fedele alla realtà?

*– I film non riescono mai ad esserlo pienamente, Treccia. E del resto, come potrebbero? Ricordo ancora le feroci discussioni seguite a "*Morte di un matematico napoletano*", di Mario Martone, sulla figura di Renato Caccioppoli. A mio modesto parere quel film, pur senza l'intento di narrare la biografia del genio napoletano (tanto è vero che si occupa solo della settimana precedente il suicidio), riusciva a rendere bene, in un'atmosfera densa e coinvolgente, almeno qualcosa del carattere di Caccioppoli. Eppure le polemiche furono estenuanti, al punto che il regista dovette precisare che il film non aveva velleità biografiche. Il film di Howard è decisamente più narrativo, ricostruisce la vita di Nash da Princeton fino al Nobel, e di velleità biografiche ne ha molte. E quindi ogni omissione o modifica, viene indagata. E qualche omissione significativa c'è.*

– Va bene, va bene, ci sei riuscito, bravo. Adesso io e Treccia abbiamo il giusto grado di attesa, ci ricordiamo il film e bruciamo dalla voglia di sapere in che misura non sia stato fedele alla realtà. Adesso che ne dici di piantarla con i trucchetti narrativi e di cominciare a raccontare davvero?

– Ma no, adesso non dovete aspettarvi chissà quali rivelazioni! È solo che…

– Piantala.

– Ma dico davvero! Niente di particolare, solo che…

– Piantala!

Stesso commento, ma in stereo, stavolta. Forse è tempo di piantarla.

*– Bene. L'eroe di questa puntata di "*Matematici allo sbaraglio*" è americano, virginiano, per la precisione. Anche se forse si dovrebbe dire west-virginiano. Nasce infatti a Bluefield, una minuscola città del West Virginia. E Virginia e West Virginia sono strane, non vi pare? Negli Stati Uniti ci sono Dakota del Nord e Dakota del Sud, Carolina del Nord e Carolina del Sud, ma a far fronte alla Virginia dell'Ovest non c'è la Virginia dell'Est, ma solo la Virginia tout-court. Curioso, no? Senza contare che la maggior parte della gente ignora che proprio in*

[4] L'affermazione di Rudy si è poi rivelata troppo ottimistica: anche il Terzo Festival della Matematica di Roma, nel 2009, passò senza che i tre riuscissero ad organizzarsi in tempo per assistervi. Quel che è peggio – e che certo non prevedevano – è che quella terza edizione sarebbe stata anche l'ultima: nel 2010 uno strano pasticcio ne impedì l'organizzazione, e nel 2011 non c'è stato nessun serio tentativo di riesumazione. Un vero peccato.

[5] Il riferimento è naturalmente al "*A beautiful mind*" citato poco sopra. Oltre a Russell Crowe lo interpretavano Jennifer Connelly, Ed Harris e altri. Vinse quattro Golden Globe e quattro Oscar nel 2002, tra cui quelli per miglior film e miglior regia.

Virginia si verificò il maggior numero di scontri della Guerra di Secessione, perché per qualche oscura ragione gli europei tendono a pensare che Unionisti e Confederati si massacrassero molto più a sud, dalle parti del Texas o giù di lì, mentre invece, guarda che roba, è proprio in Virginia che…

– PIANTALA!

Ancora in stereofonia, ma di una dozzina di decibel più rumoroso, stavolta. È proprio tempo di piantarla.

– Ok, ok, la smetto. Comunque Nash è davvero di Bluefield, paesino di neanche dodicimila abitanti; chissà quanti ne contava il 13 Giugno del 1928, quando John è nato. Lo junior *attesta il fatto che suo padre si chiamava esattamente come lui, John Forbes Nash. Papà ingegnere elettrico (ancora non esistevano gli elettronici) e mamma, Margaret Virginia (già, come lo stato…) insegnante di Inglese e di Latino. La sua infanzia… che si può dire della sua infanzia?*

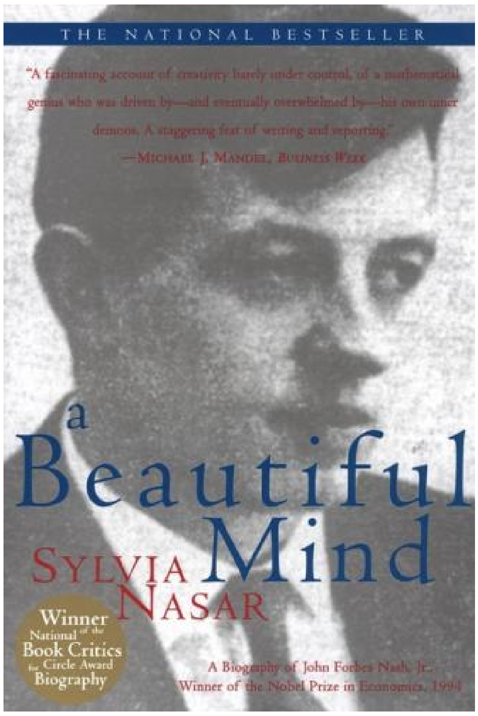
– Beh, proprio perché il film lo abbiamo visto tutti e non parla di quel periodo, vorrei sapere qualcosa in merito…

– Vedi, parlando di Nash, non è proprio possibile evitare di parlare del duplice aspetto della sua mente. Genio e pazzo, pazzo e genio, non si scappa. Il film di Howard si articola tutto su questo duplice aspetto, e in fondo anche il libro a cui il film è ispirato, l'omonimo saggio di Sylvia Nasar[6].

– Ah, dicevo io! C'è una biografia su carta, dietro al film!

– Sì. Anzi no. Sì e no, insomma, Treccia. Il libro è più completo e dettagliato del film, ma comunque non è una biografia ufficiale di Nash. Al libro si è ispirata la sceneggiatura scritta da Akiva Goldsman per il film di Howard e qui siamo sempre meno aderenti alla versione ufficiale, perché Hollywood ha le sue leggi di mercato, e Goldsman le conosce tutte benissimo.

– Non mi suona del tutto nuovo, questo nome, – osserva Rudy.



3 – *Il libro di Sylvia Nasar*

– Non mi stupisce. È uno sceneggiatore per film ad alto budget, non un operaio della tastiera. Ha firmato le sceneggiature di due Batman, *del recente*[7] Io Sono Leggenda *con Will Smith e soprattutto del famosissimo* Codice da Vinci.

– Stai dicendoci che ha falsificato tutta la storia, trasformandola in un thriller o in un racconto di fantascienza?

– No, sto solo dicendo che Goldsman conosce perfettamente le regole dello show business e sa come scrivere una sceneggiatura che piaccia al pubblico. Che cosa esaltare, che cosa sottolineare, che cosa rimuovere…

– Va bene, ma cosa c'entra tutto questo con i primi anni di Nash?

Piotr sospira.

[6] Il libro omonimo è del 1998, ma in Italia non è omonimo. È edito da Rizzoli con il titolo "Il genio dei numeri".

[7] "recente"… beh, era recente qualche anno fa, quando è uscito Rudi Ludi.

– C'entra e non c'entra, Treccia. Nash, fin da piccolo, non era molto socievole, non amava stare troppo in compagnia, ma già mostrava interessi e sintomi d'una intelligenza fuori dal comune. A dodici anni faceva esperimenti scientifici nella sua stanzetta; come molti altri, aveva cominciato ad appassionarsi di matematica leggendo il solito Men of Mathematics *di E.T. Bell*[8]*. Ma dire «come molti altri» è sbagliato: arrivato al capitolo su Fermat, Nash provò a dimostrare alcuni dei teoremi accennati nel libro da Bell, riuscendoci; e questo non è proprio da tutti. Sua sorella Martha, esortata dai genitori a farlo socializzare, faceva una faticaccia, perché John era tutt'altro che scemo ma gli piacevano più i libri dei giochi, e lei trovava decisamente difficile presentarlo agli amichetti.*

– Intendi dire che dava segnali di autismo? – s'informa Rudy.

– No, intendo dire che è impossibile non leggere tutta la sua infanzia e adolescenza sulla base della successiva malattia mentale. Ormai, Nash somiglia a quegli attori che non riescono più a scrollarsi di dosso il loro personaggio. Non so se fosse autistico: di sicuro, in seguito sarà diagnosticato schizofrenico, ma io non so niente di psichiatria e ignoro se le due cose siano correlate o, per quel che ne so, mutuamente esclusive. Dico solo che è ormai impossibile figurarsi Nash soltanto come un ragazzino un po' strano, come un semplice introverso. Dopo A Beautiful Mind*, tutto quello che lo riguarda viene necessariamente catalogato sotto una delle due etichette: genio o follia.*

– E non era così?

– Non lo so. Ma so che la mancanza di normalità ancora gli pesa.

Il nuovo sospiro è ancora più lungo.

– Comunque, John non trascorse una brutta infanzia e al liceo la sua eccezionalità cominciò a rivelarsi anche fuori della famiglia. Dopo il College di Bluefield vinse una borsa di studio per il Carnegie Institute of Technology, dove entrò con l'intenzione di laurearsi in Chimica. Però finiva sempre a seguire con particolare successo i corsi di matematica superiore, anche quelli in cui si parlava di calcolo tensoriale e di Relatività. Così non soltanto cambiò indirizzo di specializzazione, ma affrontò anche due volte quella che al tempo era una delle più prestigiose competizioni di matematica, la William Lowell Putnam…

– … e stracciò tutti gli avversari! – conclude Alice.

– L'ho pensato anch'io, – concede Piotr, – ma invece no. Si piazzò bene, entrambe le volte, ma mai fra i primi cinque. E anche questa cosa gli pesò un bel po': i geni sono sempre gli stessi; se non arrivano primi, non vedono differenza tra se stessi e l'ultimo granello di polvere. Poi, la vita universitaria non era certo rose e fiori: Nash era decisamente strano e preso in giro dai compagni di corso. Comunque, nel 1948, dopo laurea e master, entrò a Princeton per il dottorato. Volendo stringere, è proprio qui, in quel breve periodo e in quel famosissimo luogo, che Nash compì ciò che lo renderà famoso. Non per essere andato a rompere le scatole al più famoso abitante di Princeton, Einstein, per mostrargli la propria teoria matematica della gravitazione (tra l'altro, sembra che il Grande Vecchio gli abbia suggerito di studiare più fisica, un consiglio che pare offensivo soltanto a chi non conosca Einstein: di solito, lui suggeriva di studiare più matematica ma forse aveva capito che a John non sarebbe stato necessario). Non per avere inventato un gran bel gioco da scacchiera che i suoi compagni battezzarono Nash in suo onore (tra l'altro, ebbe un po' di sfortuna: il gioco era già stato inventato, in maniera totalmente indipendente, da Piet Hein: è il bellissimo Hex). Non per…

[8] Libro che citiamo molto spesso, anche se nella sua versione, non troppo facilmente reperibile, italiana. L'editore Sansoni lo ha intitolato "I Grandi Matematici".

– Se ripeti ancora una volta «Non per…» ti infilo la mia pipa da viaggio nel colletto della camicia. Accesa.

– Uff. Per farla breve, in quel periodo cominciò a interessarsi seriamente di topologia e geometria e della nostra cara vecchia Teoria dei Giochi. Era un tipo strano, quindi non stupisce scoprire che detestava la «matematica di seconda mano»; una volta capite le basi d'una teoria, cercava di ricavarsi tutte le conclusioni da solo. Poco economico, come metodo…

– Eheheheh…

– Perché ridacchi, Alice?

– Come sarebbe a dire, perché ridacchio? Glielo vai a dire tu, al Premio Nobel 1994 per l'Economia, che è stato «poco economico»?

– Spiritosa. Comunque quel metodo, economico o no che fosse, gli consentì probabilmente di vedere sotto una luce originale ciò che i predecessori nella teoria dei giochi non avevano visto. E cioè proprio l'Equilibrio di Nash, che è la ragione di questa digressione[9]*.*

– E che nel film viene spiegato con l'esempio dei ragazzi che corteggiano tutti la bionda strepitosa e che finirebbero tutti in bianco se non arrivasse Nash a spiegare che invece ognuno di loro dovrebbe corteggiare qualcuna delle sue amiche meno graziose, vero?

– Vero, – interviene Rudy, – e come spiegazione dell'Equilibrio di Nash è un mezzo disastro, Alice. Non è facile spiegare la questione nel bel mezzo d'un film d'intrattenimento, ma insomma… La strategia dei corteggiatori non dipende affatto dal comportamento degli altri, al più dipende dalla bionda, che però non è un giocatore e non conta. Se uno dei ragazzi avesse violato l'accordo corteggiando la ragazza più bella avrebbe probabilmente ottenuto il guadagno più alto senza nessun contrappasso. Non è affatto certo che la bionda gli avrebbe detto no, in attesa di altri corteggiatori. Le belle ragazze e i produttori di birra[10] *sono differenti.*

– Yes, infatti questa è una delle obiezioni mosse alla sceneggiatura un po' troppo hollywoodiana di Goldsman, – conferma Doc, – ma in seguito, proprio come dice il film, Nash scrisse una memoria su questo concetto e, proprio grazie a quella, memoria, quasi mezzo secolo dopo vinse il Nobel. Giochi Non Cooperativi *fu anche il soggetto e il titolo della sua tesi di dottorato a Princeton. Gli anni Cinquanta furono forse il suo decennio migliore; poi i suoi problemi di salute mentale cominciarono ad aggravarsi. Intorno al 1950 iniziò a collaborare part-time con la RAND Corporation e nel 1952 pubblicò Real Algebric Manifolds, un articolo importante sulla geometria riemanniana che gli spianò la strada verso la Medaglia Fields, della quale fu vaticinato sicuro vincitore. In questo campo raggiunse risultati sorprendenti, ma del resto quello era un periodo davvero creativo della sua vita. Formulò quello che oggi si chiama* Teorema De Giorgi-Nash[11]*, sulla regolarità delle soluzioni delle equazioni differenziali ellittiche con coefficienti non continui (parte dimostrata dal nostro Ennio De Giorgi) e di quelle paraboliche; quest'ultima è la parte dimostrata poi, in modo del tutto indipendente, da Nash. Pare perfino che John ci rimase un po' male nello scoprire che in gran parte del lavoro era stato preceduto dal matematico italiano. Stava comunque ancora per vincere una delle Medaglie Fields del 1958, ma non venne*

[9] Come accennato, il capitolo precedente del libro trattava appunto dell'Equilibrio di Nash.

[10] Nel trattare l'Equilibrio di Nash, nel precedente capitolo di Rudi Ludi, il GC usa come esempio di competitori concorrenti dei produttori di birra.

[11] Inutile dire che di questo teorema parliamo anche nel compleanno dedicato ad Ennio de Giorgi, in RM133, "Carte Quarantotto", Febbraio 2010.

scelto soprattutto perché il suo lavoro, che lo qualificava come uno dei matematici più promettenti del mondo, non era ancora stato pubblicato. Una vera sfortuna, anche se il Comitato della Fields era pronto a inserirlo tra i vincitori della tornata successiva, quella del 1962. Solo che nel frattempo… beh lo sapete. Nel frattempo, John impazzì.

– Andò proprio come racconta il film?

– Non del tutto; ad esempio, sembra che Nash avesse sì allucinazioni, ma solo auditive, non visive. Naturalmente A Beautiful Mind *è un film, e come tale deve sottostare anche a sue regole interne; la rinuncia alla rappresentazione visiva delle allucinazioni sarebbe probabilmente stata troppo ardua dal punto di vista filmico, rischiando di pagare troppo in termini di efficacia narrativa. In ogni caso, Nash era affetto da schizofrenia, e sentiva le voci. Credeva di ricevere messaggi extraterrestri che solo lui era in grado di decifrare, di essere l'imperatore dell'Antartide o il piede sinistro di Dio. Vedeva critto-comunisti ovunque; la mia personalissima e sindacabilissima opinione è che il periodo della Guerra Fredda, il maccartismo in generale e il lavoro alla RAND Corporation in particolare, abbiano contribuito all'acuirsi della sua schizofrenia. Però è anche vero, e su questo il film si sofferma pochissimo, che Nash aveva un carattere difficile, infantile e perfino violento.*

Rudy si fa sentire dal sedile posteriore:

– Sai che non ricordo che cosa fosse la RAND? Nel film sembra quasi una specie di dipartimento della CIA…

– No, non lo era: ma forse avrebbe voluto esserlo, almeno all'inizio. Guardate che esiste ancora, il suo nome, davvero semplice, sta per Research ANd Development, Ricerca e Sviluppo. È un think-tank no-profit, famoso proprio per essere stato uno dei primi ad applicare la Teoria dei Giochi all'analisi dei conflitti. Oltre a Nash ci hanno lavorato un sacco di persone famose: von Neumann, Kenneth Arrow, quello del teorema sulle scelte elettorali, e altri premi Nobel per l'economia come Herbert Simon e Thomas Schelling. Ma anche l'inventore della bomba a neutroni, Samuel Cohen, il logico Quine ed esperti in relazioni internazionali del calibro di Henry Kissinger e Condoleezza Rice.

– No-profit, eh? Non fatico a crederci. Quella gente non pare avere problemi a mettere insieme il pranzo con la cena.

– Già. Ma il punto non è tanto la RAND in sé, ma l'aria che si respirava alla RAND in quegli anni. Non c'è niente da fare, la Teoria dei Giochi è interessante e simpatica, ma è nata e cresciuta in un periodo povero d'innocenza.

– È per questo che il film è accusato di non essere veritiero?

– No, Treccia, no. Forse mi sono spiegato male: il regista e lo sceneggiatore non sono stati accusati di aver raccontato falsità, soltanto di aver troppo epurato alcuni aspetti della vita tormentata di John Nash al solo scopo di produrre un film commercialmente più attraente.

– Ma insomma, che cos'è che il film non dice?

– Niente di matematicamente importante, a dire il vero. Ad esempio, Nash aveva un conclamato orientamento omosessuale ma, nonostante oggi questo aspetto non susciti (o almeno non dovrebbe suscitare) più scandalo, il film si guarda bene dal parlarne. E non parla neppure del figlio illegittimo che ebbe…

– Tutto sommato, – interloquisce Rudy, – si tratta di notizie private e personali. Non so quanto sia grave, in fondo.

– È vero, non è grave; ma se stai raccontando una biografia, decidere di dire o non dire, di porre sotto i riflettori un aspetto lasciandone in ombra un altro, è cosa che ha la sua importanza. Un figlio fuori del matrimonio e delle preferenze omosessuali non sono certo cose di cui vergognarsi; tacerle, però, le fa apparire

delle colpe. Invece, l'unica cosa di cui possiamo dolerci, in realtà, è che per trent'anni una mente eccezionale non sia stata in grado di fare quanto avrebbe potuto. Nash fu preda della schizofrenia dal 1959 al 1990.

– Ma quando gli assegnarono il Nobel? – chiede Alice.

– Nel 1994, insieme a Harsanyi e Selten. Bisogna riconoscere il coraggio della Banca di Svezia, perché…

– Che cosa c'entra la Banca di Svezia, adesso?

– È la Banca che assegna i Nobel per l'Economia; tecnicamente, si tratta di un premio un po' diverso da quelli originali stabiliti da Alfred Nobel. La Banca è stata coraggiosa perché Nash, quando fu selezionato, non era certo di moda. Nel 1978 aveva vinto un altro premio, il John von Neumann Theory Prize, ma le sue condizioni erano tali che non fu neppure invitato alla cerimonia. Il premio glielo consegnò fisicamente Alan Hoffman, a Princeton, e lo trovò seduto in un angolo, con aria assente, mentre si comportava come un bambino.

Fuori, il panorama reclama attenzione. Il Lago di Lucerna, che qualcuno chiama anche «dei Quattro Cantoni», è forse l'angolo più propriamente svizzero di tutta la Confederazione: acque blu cobalto nelle quali si specchiano montagne imbiancate dalle nevi perenni, rami del lago che corrono in ogni direzione tra le valli, giocando fra loro a nascondino. E a nascondino gioca anche il paesaggio, lasciandosi osservare solo a sprazzi, mentre la strada oscilla continuamente tra il buio delle gallerie e la luce arancione e calda del tardo pomeriggio. L'aria è pulita e fresca, sembra promettere un happy-ending.

– Poi, negli anni Ottanta John Forbes Nash cominciò a migliorare rapidamente. Internet e la posta elettronica lo riportarono timidamente all'attenzione dei colleghi, che in genere, sentendo parlare di lui, si stupivano che fosse ancora vivo. Proprio da questi scambi di e-mail nacque l'idea di proporlo per il Nobel per l'economia, e l'idea prese piede. L'Accademia svedese mandò Jörgen Weibull in ricognizione, e Weibull rimase scandalizzato dal fatto che Nash, quasi sconosciuto a tutti, non avesse neppure il diritto di usufruire della mensa della facoltà. È probabile che anche il drammatico romanticismo della situazione, oltre all'oggettivo valore del personaggio, abbia avuto il suo ruolo nella decisione di assegnare il Nobel allo scopritore dell'Equilibrio di Nash.

Alice osserva nello specchietto retrovisore il lago che si allontana. Davanti, lo sa bene, ci sono ancora le meraviglie di Zug e la stessa Zurigo, ma quel posto, da solo, crea un clima particolare, forse unico. Bisogna trovare il modo di tornare qui, si dice. Il lago di Lucerna merita più di un passaggio veloce.

– Beh, non vorrai insinuare che sia stato un Premio Nobel immeritato, il suo!

– Tutt'altro. A voler cercare, si trovano sempre delle attribuzioni un po' sospette, ma non è certo il suo caso. Nash, poi, sembra essere davvero una persona amabile. Lo hanno visto aggirarsi solo fuori dall'Auditorium del Festival, con l'espressione svagata e distratta, che si immagina abbiano i geni, pronto a stringere la mano e a sorridere a chiunque lo riconoscesse. Il suo numero di telefono e la sua mail sono facilmente rintracciabili con una veloce ricerca su Google[12]*. John Nash è davvero una star, ma forse non sa di esserlo. O forse non vuole. Ha ripetuto spesso che per lui è un po'… come dire? Triste? Imbarazzante? Insoddisfacente? Insomma, è un po' strano vedersi attribuire premi e stima per cose fatte così tanto tempo fa, prima della sua lunga malattia. Ha spiegato che gli piacerebbe molto ottenere ancora qualche nuovo risultato, e che per questo continua a lavorare all'università.*

Rudy sembra essere stato morso da una tarantola. Si drizza sul sedile, si sporge verso i sedili anteriori, estrae il cellulare e comincia a trafficare.

[12] Almeno, lo erano quando abbiamo scritto Rudi Ludi. Non abbiamo verificato che lo siano ancora.

– Ehi, ti sarai segnato quel numero di telefono, spero! Ho giusto una cosa che mi frulla in testa da un po', e mi piacerebbe proprio chiedergli se…

Alice e Piotr lo squadrano a occhi spalancati. Rudy fissa prima l'uno e poi l'altra, poi si riappoggia allo schienale, sospira e ripone il telefono.

– Ma no, va. Meglio di no… – dice – tanto, figuriamoci se è in ufficio, a quest'ora. Lasciamolo un po' in pace.

Dietro di loro, Lucerna e il lago dei Quattro Cantoni già non si vedono più.

* * * * *

E così, saldando un debito, siete esonerati dal rimettercelo. Però non temete, lo sappiamo bene che ne abbiamo altri, molti altri, nei confronti di chi ha la pazienza di leggerci.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
"30mmP-0C" e "30mmNP-20C"			
Da un problema di aprile			

2.1 "30mmP-0C" e "30mmNP-20C"

No, tranquilli, non è una crittografia. Non solo vi spieghiamo il titolo, ma ci mettiamo un mucchio di contorno, anche perché l'originale, probabilmente, era un *sangaku*, quindi quasi senza parole.

Come dovreste aver notato, posto che vi siate soffermati sulla didascalia della copertina (quella a pagina due, anzi tre), abbiamo fatto *saltare la prima pagina*; la notizia, per noi, era troppo sconvolgente per non dedicargli un commosso ricordo. La copertina originale, infatti (ve la beccate il mese prossimo) era riferita a tutt'altro (anche se, a voler essere pignoli, una relazione la si trova sempre: al momento a noi viene in mente un vecchio libro di fantascienza in cui uno dei figli di Suloe[13] dice: "Te lo aggiusto io il calcolatore! Tranquillo, ho preso il martellino piccolo, quello da otto chili!").

Ancora una tergiversazione e poi Rudy la smette, non preoccupatevi. Aggiungete a quanto sopra che Rudy ha ritrovato il "*Manuale del Perito Industriale – Sesta Edizione Rifatta –Edizioni Cremonese, Roma, 1973*". Essendo la cosa caduta ormai in prescrizione, confessa: lo ha (più o meno involontariamente) sottratto ad un suo amico che non vede dagli anni Ottanta. All'epoca (nel settantatré) costava la bellezza di dodicimila lire, non so se mi spiego. Si sente ancora in colpa.

Bene, fine. Adesso veniamo al problema.

Siete in una *bôita* (leggasi officina meccanica torinese abitata da operai ad altissima specializzazione) attiva dagli inizi degli anni Sessanta, e la vostra attenzione è attratta da una scatola in legno con due file di buchi, all'interno di ognuno dei quali c'è un cilindro metallico riportante un'iscrizione simile a quella che ci fa da titolo; forti delle vostre capacità di stima, deducete che "30mm" sia il diametro del cilindro, e azzardate l'ipotesi che "20C" sia la temperatura alla quale il cilindro mostra effettivamente quel diametro; quello che proprio non vi è chiaro sono "P" e "NP": le prime sono tutte sulla fila di sinistra, mentre le seconde su quella di destra. Avendo escluso che si riferiscano a problemi risolubili in tempo polinomiale, chiedete lumi al Mago del Tornio, il quale vi spiega che si tratta di calibri "passa-non passa": quello con la "P" entra in un buco circolare con diametro 30 millimetri, mentre quello marcato "NP" non entra; ormai non vengono più usati, ma l'Asso della Fresa vi racconta che quando lui era giovane erano

[13] Se il nome vi sembra balordo, leggete questa nota. Il racconto trattava di un gruppo di astronauti che si erano persi nello spazio, e il comandante della nave si chiamava Suessydo; a bordo c'era anche una specie di giornalista di nome Remoh che, alla fine, si ritrovava naufrago su un pianeta primitivo e si guadagnava la vita raccontando la storia dei suoi amici. Se non ci siete ancora arrivati a capire da dove l'autore aveva preso l'ispirazione, leggete *al contrario* i nomi dei personaggi. In italiano si chiamava "Le menti di Otyr" (pubblicato su un qualche "Galassia" di quando anche il Capo era molto piccolo); sapete mica se si trova (legalmente) da qualche parte l'originale in elettronico?

decisamente costosi e di uso continuo, e una volta gli avevano fatto uno scherzo mica da ridere.

"...dovevo misurare un buco da trenta, e mi avevano fatto sparire i cilindri giusti! E con i soldi che costavano, non potevo mica andare in giro a chiedere dove li avevano messi, avrebbero detto che non sapevo neanche trovare l'acqua in Po... Bisognava inventarsi un modo per fare lo stesso la misura al meglio. La prima cosa che mi è venuta in mente è stata di mettere *due* cilindri, uno da dieci e uno da venti, e vedere se ci stavano tutti e due"

A questo punto azzardate una replica: "Ma in questo modo raddoppi l'errore: due 'passa' con una certa precisione, significa che hai una precisione dimezzata..."

"Fosse solo lì il problema. E se invece di un buco rotondo ne avevo fatto uno ovale? Un diametro era da trenta, ma tutti gli altri?"

"Beh, avresti potuto far girare i due calibri nel buco..."

"*Brao pitola! E cialocheie anche 'npôch an man, parei a sento nen al freid*?[14] No, l'unico modo era mettere nei due buchi che restavano altri due 'passa'; così avrei visto se quattro punti erano su un cerchio da trenta: solo, bisognava trovare che calibri usare, e ho dovuto fare i conti. Ci ho messo tutta la mattina, per poi accorgermi che mi servivano due 'passa' uguali, e noi in officina ne avevamo uno solo! Sono dovuto andare a chiederlo nella *bôita* vicina, da Vincenzo..."

"...e poi sei riuscito a misurare il buco, con i quattro calibri?"

"No, ho fatto prima. A Vincenzo mica l'avevano nascosto, il 'passa' da trenta."

Ora, siccome sia Vincenzo sia il Guru del Mandrino sono andati in pensione da tempo, tocca a voi: da quanto devono essere, i due calibri uguali che vi servono per fare la misura?

2.2 Da un problema di aprile

Di quest'anno, RM147: quello del foglio elettronico. Ci è sorto un piccolo dubbio, tant'è che, se guardate, anche Treccia lo ha valutato "basso", pur essendo un problema di probabilità.

I VAdLdRM questa volta sono riusciti ad impossessarsi di un *intero dado* (a sei facce e "onesto"); intenzionati a provare il gioco presentato ad aprile, cominciano a lanciare il dado con l'accordo che la partita finirà quando verrà ottenuto un punteggio *strettamente minore* del precedente; insomma, lanciano il dado e se il risultato (dal secondo tiro in poi, evidentemente) è maggiore o uguale al tiro precedente, si va avanti.

Qui, il guaio è che hanno deciso di avere anche un *punteggio*; si definisce "punteggio" la somma dei valori del dado ottenuti nei vari tiri di una partita (con l'esclusione dell'ultimo, quello perdente): cosa vi aspettate, in media, come punteggio?

Quello che preoccupa Rudy, è che hanno trovato Japhy.

Japhy, per chi non lo sapesse, è un cagnolino di peluche (rosso e "moscio", con una cerniera sulla pancia) che Rudy tiene in macchina come ricordo della sua turbolenta gioventù (storia lunga e triste: Doc ci aveva anche scritto una canzone, all'epoca. Prende il nome da Japhy Ryder: accendete un cero a San Google, se volete sapere chi era. Avendo comunque il cagnolo *trentaquattro* anni, è diventato più vecchio dell'originale, a quanto ci torna): dentro, ha una trentina di vecchie monete da dieci lire (quelle con l'aratro sul retro), e i VAdLdRM, in coda sull'autostrada, se ne sono immediatamente impossessati

[14] "Bravo stupidotto! E sbatacchiarli anche un po' in mano, così non sentono il freddo?" Vi ricordiamo che le "o" senza accento circonflesso in torinese si leggono come la "u" italiana.

per giocare a soldi a costo zero (nel senso che le monete sono di Rudy, quindi non rischiano nulla).

"Allora Fred, riepilogando: io faccio il banco, tu lanci il dado: all'inizio di ogni partita metti una moneta da dieci lire. Quando la partita finisce, se il punteggio (come definito prima) è minore di dieci, perdi e mi prendo le dieci lire; se è maggiore o uguale, ti riprendi la moneta e vinci dieci lire delle mie. Ci stai?"

Adesso, dovreste suggerire a Fred se vale la pena o no, di giocare a questo gioco. E se riusciste anche a suggerire loro che Rudy è affezionato sia a Japhy sia alle monetine, potremmo anche ringraziarvi per lo sforzo.

Dubbio dell'ultimo momento: come cambiano i numeri, se cambia il dado? Nel senso, per avere gli stessi risultati, usando un intero set di dadi da Dungeons & Dragons (per quelli che non lo sanno, rispettivamente da 4, 6, 8, 12 20 e 100 facce[15]), quali sono i valori per i quali conviene a ciascuno dei due il gioco?

3. Bungee Jumpers

Dimostrate che, per due qualsiasi insiemi composti ciascuno da n numeri reali $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ e $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, vale la seguente diseguaglianza[16]:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

Il rischio è ormai quello di ripetersi, ripetersi, ripetersi, ripetersi… Ci sono un sacco di bei libri, in giro. Ci sono un sacco di bravi autori. Ci sono un sacco di lettori e amici di RM.

L'intersezione dei tre insiemi è tutt'altro che vuoto.

[15] OK, le 100 facce sono rese con due dadi da dieci di cui uno rappresenta le decine e l'altro le unità, ma ci siamo capiti.

[16] Nota come *Diseguaglianza di Cauchy-Buniakowsky*.

4.1 Verso l'infinito ma con calma

«Buongiorno, avete posto
per un po' di persone?»
«Quanti siete?»
«Beh, in ogni corriera
ci sono infinite persone»
«E quante sono le corriere?»
«Infinite.»
«Pensavo peggio.»

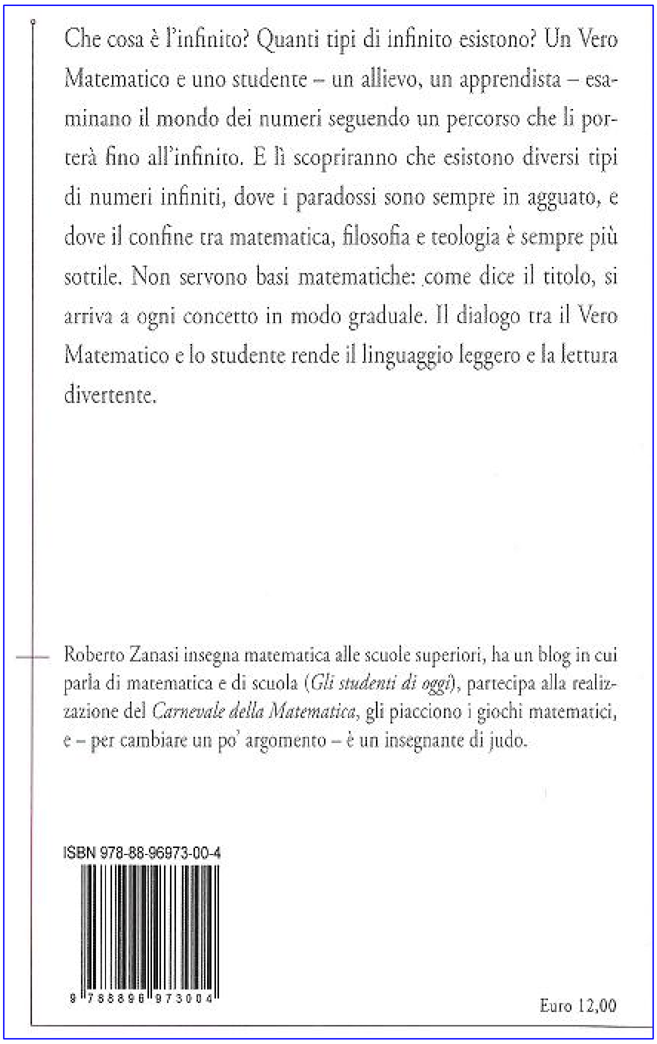
L'infinito è mezza matematica. È una frase che abbiamo già detto altre volte, e che proviamo a ripetere ogni volta che ce ne capita l'occasione. L'obiettivo è palese: se ci fosse qualcuno a caccia di citazioni famose (o destinate a diventare tali) sulla matematica[17], potrebbe forse trovarla intrigante e decidere di registrarla, consegnandoci così, con poca fatica, all'immortalità.

Spicciola vanità a parte, dovrebbe essere evidente che gran parte degli aspetti affascinanti, curiosi, paradossali, e fondamentali (nel vero e proprio senso di "propri dei fondamenti") della matematica hanno in qualche modo a che fare con l'infinito. Non si fa in tempo ad imparare a contare che già ci si rende conto che l'attività appena appresa non ha intenzione di terminare. Non si può affrontare il primo disegno di geometria senza impattare subito su punti e su linee, per scoprire con sorpresa e paura che di punti in una linea ce ne sono infiniti, come rette in un piano, e che quell'infinità di punti si rifiuta di farsi contare. Davvero curioso, no? I primissimi rudimenti della matematica, il contare e i primi disegni geometrici, palesano fin dall'inizio una specie di incompatibilità.

Incompatibilità e fascino che non hanno nessuna intenzione di risolversi più avanti, progredendo nell'esplorazione della matematica. Il celebre libro di Eric Temple Bell, "*I Grandi Matematici*", che racconta cronologicamente la vita dei più famosi eroi della nostra amata scienza, inizia con Zenone di Elea e finisce con Cantor, due giganti che entrambi devono la loro fama all'infinito. I fondamenti della matematica moderna, il tentativo di assiomatizzazione di fatto a più riprese, da Frege a Peano, da Hilbert a Gödel

[17] Se pensate che stiamo parlando in via prettamente ipotetica, ci fate credito di eccessiva fiducia. In realtà stiamo disperatamente cercando di attirare l'attenzione di ***.mau.***, che con certosina fatica, a suo tempo, ha prodotto quest'interessante elenco: http://xmau.com/mate/citazioni/d.html.

si scontra e svolge a colpi di paradossi che, in ultima analisi, dipendono dagli insiemi infiniti. Gli epici litigi che costellano la nascita del calcolo differenziale e integrale di Newton e Leibniz, che annoverava non pochi detrattori d'alto lignaggio, erano tutti centrati sul significato di infinitesimo. E i moderni misteri ancora aperti della matematica come l'Assioma della Scelta, l'Ipotesi del Continuo e molti altri affondano tutta la loro difficoltà nel concetto di infinito. Ci vuole un gran bel coraggio, per prendere la penna e decidere di scrivere un libro sull'infinito, specialmente se lo si fa con l'intenzione di destinarlo ai non-matematici.



Che cosa è l'infinito? Quanti tipi di infinito esistono? Un Vero Matematico e uno studente – un allievo, un apprendista – esaminano il mondo dei numeri seguendo un percorso che li porterà fino all'infinito. E lì scopriranno che esistono diversi tipi di numeri infiniti, dove i paradossi sono sempre in agguato, e dove il confine tra matematica, filosofia e teologia è sempre più sottile. Non servono basi matematiche: come dice il titolo, si arriva a ogni concetto in modo graduale. Il dialogo tra il Vero Matematico e lo studente rende il linguaggio leggero e la lettura divertente.

Roberto Zanasi insegna matematica alle scuole superiori, ha un blog in cui parla di matematica e di scuola (*Gli studenti di oggi*), partecipa alla realizzazione del *Carnevale della Matematica*, gli piacciono i giochi matematici, e – per cambiare un po' argomento – è un insegnante di judo.

ISBN 978-88-96973-00-4

Euro 12,00

Roberto Zanasi questo coraggio lo ha avuto. È possibile che lo abbia fatto in maniera quasi inconsapevole: Zar (questo è il nome che si è scelto per la rete, e con il quale è universalmente noto nella comunità di RM) infatti, ad un certo bel punto della sua brillante vita di professore (e di judoka) si è costruito un bel blog[18], e ha cominciato a scriverci sopra post, per lo più di matematica. Quando ha scritto il primo post sull'infinito, probabilmente immaginava già di dover scriverne tutta una serie, perché altrimenti non è immaginabile che iniziasse "*con calma*" davvero olimpica dalla definizione di "relazione" e di "insieme". È però probabile che non si figurasse di scriverne poi così tanti da ottenere un'opera di ragionevole lunghezza, compatta e coerente, che poteva fare la sua bella figura come un tutto unico. Però, nel giro di poco, il suo discorso sull'infinito è stato raccolto e unito, in forma di e-book o comunque di opera unica[19], ed è diventato ragionevolmente famoso nell'italica rete matematica.

E la sorpresa è stata forse ancora maggiore, quando il suo "*dialogo su matematica, insiemi e numeri*" ha trovato inchiostro disposto a macchiare e carta disposta a lasciarsi macchiare, per coagularsi in un bel volume dotato di ISBN di ordinanza che può ben figurare in ogni scaffale. In quest'ultima fase gran parte del merito va a Daniele Gouthier e alla sua recente avventura editoriale, la fondazione della casa editrice Scienza Express, che sembra nata con la precisa intenzione di elevare i contenuti scientifici della rete alla dignità della carta, quando questi sembrano rispondere ad esigenze precise dei lettori.

---

[18] "Gli studenti di oggi", reperibile all'indirizzo http://proooof.blogspot.com/

[19] Sì, certo, che domande. Anche noi di RM abbiamo approfittato dell'occasione, ci mancherebbe altro.

Fatto sta che i colloqui tra lo studente e il professore[20] sull'infinito e sui fondamenti della matematica si possono finalmente leggere anche lontani da uno schermo, ed è lettura davvero consigliabile. La forma dialogica, diretta, sembra nascere quasi per caso alla fine del primo post/capitolo, ma poi cresce e non abbandona più il lettore. Le due voci sono distinte da diversi caratteri (corsivo per il Vero Matematico e pieno per lo studente) e, definizioni da Vero Matematico a parte, il dialogo scorre in uno stile che sembra avere come primo comandamento l'economia dei vocaboli e la chiarezza dell'esposizione. Così, senza darlo a vedere, ci si ritrova a scoprire con luce e parole nuove la Teoria degli Insiemi, la classificazione delle relazioni, la definizione di funzione, gli assiomi di Peano, il Paradosso di Russell, per poi finire impigliati nella ragnatela degli Aleph, nel precipizio dei Transfiniti, finché si supera il punto di non ritorno e si è presi, al pari dello studente, nella decifrazione di lettere scritte in ebraico o in gotico.

Si finisce al tappeto, insomma. Anzi, sul tatami: il Vero Matematico lascia allo Studente il tempo di prendere coraggio, così come l'Autore fa lo stesso con il Lettore. E quando lo Studente/Lettore diventa confidente, sicuro, in grado di seguire i percorsi apparentemente astrusi e convoluti che all'inizio sembrava non avere nessuna voglia di seguire, è ormai preso e catturato, e continua a divorare le pagine fino a ritrovarsi a pagina 134, senza quasi rendersi conto di aver finito il libro.

Un *ippon*[21] in piena regola, ma piacevole da subire.

Titolo	Verso l'infinito ma con calma
Sottotitolo	Un dialogo su matematica, insiemi e numeri
Autore	Roberto Zanasi (Zar)
Editore	Scienza Express
Collana	Scuola 2.0
Data di Pubblicazione	Febbraio 2011
Prezzo	12 Euro
ISBN	978-88-96973-00-4
Pagine	136

[20] In realtà, dal testo si evince che il "professore" è proprio un Vero Matematico: il titolo gli è consegnato direttamente dallo Studente quando egli ammette di ritenere non solo veri, ma proprio "reali" gli enti matematici. Ma nel leggere il libro la sensazione è che i Veri Matematici, sempre citatissimi e presi come punto di riferimento ogni volta che deve subentrare una definizione formale, non siano poi ritenuti come appartenenti alla stessa tipologia di colui che parla. Il protagonista, insomma, ha l'aria più saggia, anche se non necessariamente più competente: e poi riesce a farsi capire dallo studente, cosa che ai Veri Matematici non capita mai, mentre ai professori, talvolta, accade...

[21] Se non sapete cosa sia, chiedetelo a Zar.

5. Soluzioni e Note

Giugno.

Solstizio d'estate alle porte. Avete mai pensato esattamente a cosa significhi la parola "solstizio"? Significa che si il sole si ferma, "sol stat", si riposa. Sale alto nell'analemma (no, questo, se non lo sapete, ve lo andate a cercare da soli cosa sia), raggiunge il massimo, e quindi, in un certo senso, si ferma. Se preferite una terminologia più precisa e più matematica, la "funzione sole" nel piano cartesiano del cielo trova finalmente la sua derivata pari a zero, e non c'è storia: "derivata zero" in matematichese e "stat" in latino significano senza ombra di dubbio che è tempo di pausa.

Del resto finiscono le scuole, cambiano i palinsesti della TV, le notti raggiungono il loro minimo storico, e la redattrice di queste note si è perfino presa una vacanza nel bel mezzo di maggio, a dire il vero: quindi, se il sole e le scuole si fermano, non vorrete negare alla vostra affezionata linotype di prendersi un attimo di respiro, no? Quindi, le soluzioni di queste "Soluzioni e Note" voi arrivano come al solito ben impaginate, curate, analizzate, selezionate; ma le note… ah, le note. Le note "stanno", come sole. Si riposano. Si ricordano il mare di Lipari, la Sciarra del Fuoco di Stromboli, l'orizzonte spietato e diritto come un asse cartesiano dietro le sagome di Filicudi e Alicudi.

Le note si riposano, godetevi le soluzioni.

5.1 [138]

5.1.1 Valor medio

Vi ricordate questa storia infinita? Questo quesito è stato pubblicato a giugno del 2010:

> *State partecipando a un gioco a premi dedicato ai campioni di calcolo mentale. Il nostro conduttore ha un sacchetto tipo tombola con dentro i numeri da 1 a 100; ne estrae dieci, e il vostro compito è, partendo da quei numeri, di trovare due insiemi disgiunti (l'unione dei quali non sia necessariamente tutto l'insieme iniziale: potete usarne meno) aventi la stessa somma. Avete un minuto di tempo.*
>
> *Supponendo che voi siate velocissimi a far di conto, quali sono le probabilità che avete di vincere? E se il conduttore potesse scegliere qualche numero in funzione di quelli già estratti?*
>
> *La seconda versione del gioco "per persone normali" consiste nell'estrarre meno numeri, rendendo la cosa più facile. Cosa succede se ne vengono estratti nove? E con otto?*

Su RM139 c'erano due soluzioni, di ***Millennium Bug*** e di ***Cid***. Su RM140 ***Michele***, ***Franco57*** e ***Cid*** si sono dati da fare per far luce sulla situazione, finché finalmente, in RM142 il Capo, nella sua immensa generosità, ha mandato la sua soluzione, che si è dimostrata fallosa, e ***Gnugnu*** ha poi corretto in RM143. Poi silenzio, finalmente, finché ***Fabrizio***, improvvisamente, ci ha scritto:

> Bene, rischiando di far venire l'orticaria a Rudy, ho "calcolato" le varie probabilità nei casi 3,4,5,6,7,8. Ovviamente il risultato è stato ottenuto con l'uso "massiccio" del computer, ma qualche cosa di curioso e un po' più furbo dell'approccio a forza bruta per accelerare l'algoritmo di ricerca è saltato fuori. Di seguito i risultati:
>
> 1) $n = 3$
>
> Casi totali: 161700
>
> Somme distinte: 159250
>
> 2) $n = 4$
>
> Casi totali: 3921225

> Somme distinte: 3584848
>
> 3) $n = 5$
>
> Casi totali: 75287520
>
> Somme distinte: 52852944
>
> 4) $n = 6$
>
> Casi totali: 1192052400
>
> Somme distinte: 349932256
>
> 5) $n = 7$
>
> Casi totali: 16007560800
>
> Somme distinte: 245980850
>
> 6) $n = 8$
>
> Casi totali: 186087894300
>
> Somme distinte: 56911
>
> In particolare nel caso n= 8 ho anche la lista degli insiemi aventi somma distinta. Se qualcuno fosse interessato non ho problemi a fornirla. Naturalmente potrei anche aver fatto qualche piccolo errore, in questo caso non avrete problemi a ricalcolare il tutto ;-) e trovare i giusti valori.
>
> Comunque il problema era interessante, c'è anche un po' di letteratura in merito tanto che sto preparando un piccolo documento che riassume lo stato attuale della ricerca in questo campo a futura memoria.

Aspettiamo il documento, ovviamente, che inseriremo in Bookshelf, se ***Fabrizio*** lo permette. Ecco, il sasso è stato lanciato, vediamo se si scatena ancora la rissa.

5.2 [147]

5.2.1 La primavera è come il Natale...

Il mese scorso sono arrivate tantissime soluzioni per questo problema, e la discussione è proseguita anche dopo l'uscita di RM148. Prima di tutto riprendiamo il testo:

> *Il Capo sfida i VAdLdRM a implementare un gioco con un foglio elettronico: generiamo un numero casuale distribuito uniformemente tra zero e uno; poi generiamone un altro e andiamo avanti sin quando i numeri decrescono, fermandoci quando ne estraiamo uno maggiore del precedente. Quante generazioni di numeri casuali vi aspettate di fare prima di fermarvi? E in media qual è il numero più basso che ottenete?*

Con estensione:

> *Sempre generando numeri casuali, si parte da zero e si genera un numero che si richiede maggiore del numero precedente; il secondo numero generato deve essere minore del precedente, il terzo deve essere maggiore, e avanti così, alternando le richieste. Qual è la durata media del gioco?*

Il mese scorso abbiamo pubblicato le soluzioni di ***Cid*** e ***Alberto R.***, nonché quella di ***Trentatre*** e qualche commento di ***Gnugnu***. Abbiamo però perso la bella soluzione di ***Franco57***, che intendiamo pubblicare ora. Cominciamo però dai commenti dello stesso ***Alberto***, che scrive una mail dal titolo "sbagliando s'impara":

> La durata media del gioco è stata da me calcolata in $e - 1$, mentre per ***Cid*** vale e.

Niente di male: io ho fatto riferimento a N = numero di generazioni random decrescenti, esclusa l'ultima, crescente, che interrompe il gioco. Invece nel K di ***Cid*** è compresa l'uscita, crescente, che interrompe il gioco. Insomma $N = K - 1$.

Invece nel calcolo del valor medio del numero più basso ha ragione ***Cid*** e io ho toppato. Infatti, quando si va a cercare il numero più piccolo vanno contate tutte le uscite, compresa quello che ha interrotto il gioco, per cui l'intervallo è diviso in K+1 (ovvero N+2) parti, e non in N+1 come da me assunto.

Meno male che c'è chi sbaglia e si corregge in questo modo! Ed ora il lavoro di ***Franco57***:

Normalmente per risolvere un problema di calcolo della media si cerca di applicare direttamente la definizione, quindi ad esempio nel caso del primo quesito, se la generazione casuale è la sequenza $x_1, x_2, x_3 \cdots$, la durata media della partita sarebbe $P(x_1 < x_2) \cdot 2 + P(x_1 > x_2 < x_3) \cdot 3 + P(x_1 > x_2 > x_3 < x_4) \cdot 4 + \cdots$. Si calcolano le probabilità e poi si fa la sommatoria.

Tuttavia c'è un approccio più potente, concettualmente difficile (sicuramente per me) e quindi molto più gratificante: quello dell'equazione differenziale, perché la media sotto certe condizioni dipende dalla media sotto altre condizioni.

Ecco allora come ho impostato la soluzione: il primo gioco sia ancora "vivo" e il numero più basso uscito, quindi l'ultimo, sia x. Voglio calcolare il numero medio di generazioni $G(x)$ che devo aspettarmi per terminare una partita. Quello che stiamo cercando è $G(1)$, perché è come dire che il primo numero comunque lo accettiamo senza terminare la partita.

Se il prossimo numero è y ci sono i due casi: $y>x$ (probabilità $1 - x$) e il gioco si ferma con 1 solo numero generato, y stesso, oppure $y<x$ e il gioco va avanti, con in media ulteriori (oltre a y) $G(y)$ generazioni. In questo ultimo caso la probabilità è l'infinitesimo dy nell'intervallo unitario [0,1], essendo la distribuzione di probabilità uniforme. Ottengo:

$$G(x) = 1 \cdot (1 - x) + \int_0^x (1 + G(y)) \cdot dy$$

che derivata diventa $G'(x) = -1 + 1 + G(x) = G(x)$.

La condizione al contorno è $G(0) = 1$, cioè, se è uscito 0, col prossimo lancio la partita termina di sicuro. L'equazione differenziale trovata è esattamente una delle definizioni della funzione esponenziale e dunque $G(x) = e^x$. In particolare la durata media della partita vale $G(1) = e$, che effettivamente è cortina, non raggiungendo neanche 3.

Il processo di calcolo del numero più basso che si ottiene mediamente è analogo: sia $M(x)$ il numero più basso che si ottiene in media se finora la partita è aperta ed x è l'ultimo numero uscito, quindi il più basso. Questa volta l'equazione è:

$$M(x) = x \cdot (1 - x) + \int_0^x M(y) \cdot dy$$

che derivata diventa $M'(x) = 1 - 2x + M(x)$ con la condizione al contorno $M(0) = 0$.

Usando un metodo classico delle equazioni differenziali lineari del primo ordine (così dice wiki) moltiplico per e^{-x} e ottengo: $e^{-x}M'(x) - e^{-x}M(x) = e^{-x}(1 - 2x)$, cioè

$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}M(x)\right)=e^{-x}(1-2x)$. Adesso "basta" trovare una primitiva del secondo membro (io ci ho messo un'oretta) ed è $e^{-x}(1+2x)$.

Riscriviamo allora nella forma $\frac{d}{dx}\left(e^{-x}M(x)\right)=\frac{d}{dx}\left(e^{-x}(1+2x)\right)$ e quindi $e^{-x}M(x)=e^{-x}(1+2x)+c$, con c costante, che si semplifica in $M(x)=(1+2x)+c\cdot e^{x}$.

La condizione al contorno fornisce $c=-1$ e quindi infine abbiamo $M(x)=1+2x-e^{x}$.

Il valore minimo medio di una partita è dunque $M(1)=3-e=0{,}281718\ldots$

Con lo stesso metodo si può risolvere anche il quesito sul secondo giochino, anche se diventa sempre un po' più complicato: ancora una volta posto x l'ultimo numero ottenuto a gioco in corso, definisco $D(x)$ il numero medio di generazioni che mediamente ancora servono per terminare la partita, essendo nella situazione di fermarmi se il prossimo numero è inferiore a x (mossa dispari) e $P(x)$ se invece devo terminare se il prossimo numero è superiore a x (mossa pari). Il nostro obiettivo è trovare $D(0)$ (o $P(1)$ che è lo stesso, visto che $P(x)=D(1-x)$, proprietà che tuttavia non sfrutto).

In questo caso otteniamo un sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} P(x)=1\cdot(1-x)+\int_0^x(1+D(y))\,dy & \Rightarrow P'(x)=-1+(1+D(x))=D(x) \\ D(x)=1\cdot x+\int_x^1(1+P(y))\,dy=x-\int_1^x(1+P(y))\,dy & \Rightarrow D'(x)=1-(1+P(x))=-P(x) \end{cases}$$

Le equazioni differenziali ottenute mi hanno sorpreso, perché sono quelle del seno e del coseno, tuttavia le condizioni al contorno sono diverse: $\begin{cases} P(0)=1 \\ D(1)=1 \end{cases}$

Una soluzione più generale è la seguente: $\begin{cases} P(x)=b\cdot sin(x+a) \\ D(x)=b\cdot cos(x+a) \end{cases}$,

ed è sufficientemente generale perché imponendo le condizioni al contorno troviamo effettivamente i valori di a e b con il sistema di equazioni $\begin{cases} b\cdot sin(a)=1 \\ b\cdot cos(1+a)=1 \end{cases}$, il cui calcolo tralascio perché non è poi molto simpatico.

A noi comunque interessa solo il valore di $D(0)=b\cdot cos(a)$ che è più semplice da ricavare sulla base dell'ultima sistema che applica le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} &1=b\cdot\cos(1+a)=b\cos(1)\cos(a)-b\sin(1)\sin(a)=b\cos(1)\cos(a)-\sin(1) \\ &\Rightarrow D(0)=b\cos(a)=\frac{1+\sin(1)}{\cos(1)}=3{,}408223\ldots \end{aligned}.$$

che è quindi il numero medio di generazioni per il secondo giochino.

Siccome non mi fidavo molto dei miei stessi calcoli, anch'io ho aggeggiato col foglio elettronico, che sembra però confermare tutti i risultati.

Sarebbe stato un peccato perderla, anche perché propone un approccio diverso. Nel frattempo sono arrivate ulteriori considerazioni dello stesso ***Franco57*** in proposito:

> Prima di tutto segnalo una cosa che mi pare nessun solutore abbia evidenziato esplicitamente e di cui neanch'io mi ero accorto inizialmente: il primo e il terzo sotto-quesito, cioè quelli sulla durata media del gioco, sono assolutamente indipendenti dal tipo di distribuzione di probabilità!
>
> Infatti se X e Y sono due eventi generati in modo indipendente ma con la stessa legge di probabilità P, la probabilità che la coppia (X,Y) soddisfi una qualsiasi relazione è uguale alla probabilità che la coppia (Y,X) soddisfi la stessa relazione. Per noi $P(X<Y) = P(Y>X)$.
>
> E quindi, poiché i sotto-questi primo e terzo si basano solo sull'ordine degli elementi generati, gli stessi risultati si ottengono con qualsiasi distribuzione altra continua di probabilità, ad esempio una gaussiana. (dico continua perché se accumula probabilità non nulla su un singolo valore entra in gioco $P(X=Y)$ che nel testo è implicitamente ignorata).
>
> Inoltre ho notato che sia il ***Cid*** che ***Alberto R.***, di cui peraltro abbiamo apprezzato i lampi di generalità nelle loro dimostrazioni, non giustificano l'affermazione, comunque vera, che in un insieme di n numeri tra 0 e 1 generati secondo la distruzione uniforme, il minimo valga mediamente $1/(n+1)$. A me non pare affatto scontata: anche se si divide l'intervallo unitario in $n+1$ segmenti, non capisco perché la distanza media tra lo 0 e il primo numero sia uguale alla distanza media tra il primo e il secondo e così via. Forse è un limite alla mia intuizione. Pensavo perciò a due possibili giustificazioni, la seconda non formale:
>
> metodo 1) calcolare esplicitamente con gli integrali, come fa Trentatré, il valore minimo medio quando la sequenza degli n numeri è decrescente. Viene $1/(n+1)!$. Poi notare che tutte le $n!$ permutazioni che generano lo stesso insieme di X_i sono equiprobabili. Si ottiene il valor medio $n!/(n+1)! = 1/(n+1)$.
>
> metodo 2) chiudere il segmento unitario in un cerchio (o in generale in una linea chiusa che conserva le lunghezze) facendo coincidere lo 0 con lo 1. Poi generare casualmente gli n X_i. Adesso la distanza circolare media tra un punto e il successivo in ordine circolare è, questa volta sì in modo piuttosto evidente, $1/n$. Ma l'origine cioè lo 0 coincidente con lo 1, non sappiamo dov'è e quindi deve essere visto anch'esso come generato casualmente al pari degli gli altri n, ottenendo una distanza media tra esso e il successivo di $1/(n+1)$.

Siamo certi che ci sarà ancora qualcosa da dire, ma noi ci fermiamo qui e passiamo finalmente alle soluzioni dello scorso numero.

5.3 [148]

5.3.1 Era una Notte Buia & Tempestosa?

Bene, questo problema ha divertito tutti moltissimo, un carnevale di soluzioni e una sarabanda di figure, speriamo di riuscire a mettere un po' di tutto. Prima il problema stesso, ovviamente:

> *Piove. Per coprire gli amici avete a disposizione quattro ombrelli e un telo di plastica: la vostra intenzione è di mettere il telo di plastica sopra gli ombrelli aperti, con il vincolo che ognuno degli ombrelli (aperti, circolari con raggio unitario e tenuto con il manico verticale) debba essere in contatto con altri due ombrelli, eccezion fatta per il primo e l'ultimo*[22]*. Siete intenzionati a coprire l'area massima,*

[22] Trattasi di inviluppo convesso (*convex hull*), come ci fanno notare ***Zar*** e ***.mau.***

> *rispettando questa regola. Che forma date alla struttura ombrellifera? E che area coprite?*

La prima soluzione è arrivata da ***Martino***, a pochissime ore dall'atterraggio in rete del numero 148:

> Telo perfettamente ed infinitamente flessibile ed estensibile (era il testimone dello sposo alle nozze della cugina del cognato della mucca sferica).
>
> Superficie pari a 4 (quattro) cerchi perché – sotto il peso dell'acqua – il telo si adatta a formare quattro pareti cilindriche attorno agli ombrelli, comunque siano essi disposti.
>
> Telo con un suo modulo elastico reale (ex spasimante della cugina eccetera che si è imbucato al matrimonio per rivedere l'amata che si è messa con quel… quel caprone).
>
> Magnifico problema, che sta di mezzo fra il calcolo di un ala di Rogallo[23] per la discesa di un'astronave su Venere e gli incubi che mi sono venuti prima dell'Esame di Stato.
>
> Sta appeso sugli ombrelli, forma anse elastiche la cui forma dipende dalla massa volumica dell'acqua espressa in unità di raggio degli ombrelli, dal modulo elastico in unità coerenti con le altre e da tante belle cosine che avrebbero fatto felice Feynman ma non me.
>
> Diciamo che la parte "centrale" si strappa sotto il peso dell'acqua come la copertura del Velodromo Vigorelli sotto il peso della neve inzuppata d'acqua, così siamo contenti tutti (e sto trascurando la variazione di quantità di moto della componente orizzontale della pioggia).
>
> Telo che resta ben teso con pieghe circolari o rettilinee che seguono i bordi degli ombrelli o le tangenti agli ombrelli (questo è il marito della mucca sferica, che non l'ha accompagnata alle nozze della cugina del cognato, perché a casa a badare al frutto del loro amore che topologicamente farebbe impallidire Conway).
>
> Pura geometria, finalmente!
>
> 1. Quatto ombrelli in fila. No, perché immediatamente superato dal successivo.
> 2. Quattro ombrelli in quadrato, due dei quali separati da uno spazio largo come quel 3 piccolo, piccolo, così caro a Caccioppoli e ad altri docenti di Analisi. Boh? Vediamo il prossimo…
> 3. Lo spazio fra il primo e l'ultimo degli ombrelli si allarga in modo che i centri vengono a formare i vertici di un trapezio. Pura analisi da esame di maturità allo Scientifico con annesso errore ministeriale: si calcola la funzione in, appunto, funzione dell'angolo su uno qualsiasi dei vertici (per simmetria l'altro è noto dai tempi di Talete) si deriva, si risolve l'equazione, la si confronta con la 2 ed il gioco è fatto
> 4. Mezza torsione nella terza dimensione al trapezio in modo che i vertici diventino quelli di un romboide (dite che non occorre Conway per trovare una trasformazione sul piano? Incredibile!) Stessa solfa di prima ma un po' più pensierosamente laterale.
>
> Adesso il problema è vedere se c'è un metodo non analitico per risolvere il tutto, o magari trovare la 5.

[23] Io lo so, cos'è l'ala di Rogallo! Io lo so, signora maestra! È quel tubo di carta aperto che si mette sotto le ali degli aeroplanini che si rifiutano di volare! E in quel modo, volano (di solito) [NdRd'A].

No, ***Martino*** non si è più fatto sentire in proposito. Da ***Zar*** abbiamo ricevuto solo una figura (che non vi passiamo perché figure simili ricorrono nel seguito), con la semplice frase:

> Possibile che sia così semplice, oserei dire quasi ovvio?

Beh, può darsi. Sono arrivate tante belle soluzioni, e nessuna pare "facile", come quella di ***GaS***, a cui diamo il bentornato tra i solutori, che praticamente, dopo aver accostato due ombrelli, ruota gli altri due ai due lati finché non ottiene l'area massima. La tecnica è forse quella più utilizzata tra le soluzioni giunte in Redazione. La soluzione che si merita il primo premio questo mese è di un degno erede della dinastia di ***Cid***, il ***Vizconde de Bivar***, e ve la passiamo per prima:

> Disponendo alcune monete sul tavolo, (dopo molti tentativi), ho trovato una disposizione che permette di occupare uno spazio maggiore a quello di cinque ombrelli utilizzandone quattro.
>
> Lo spazio di un ombrello in più sarebbe la moneta segnata con la croce (vedi figura).
>
> Inoltre gli spazi rimanenti tra le monete/ombrelli aggiungono uno spazio uguale quasi a quello di un'altra moneta/ombrello.
>
> Il telo di plastica copre lo spazio che si trova all'interno della riga rossa.

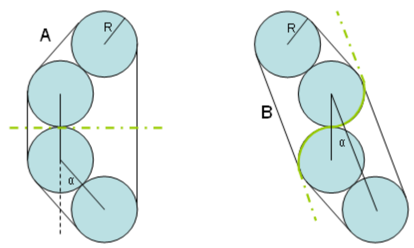
4 *La soluzione del* ***Vizconde de Bivar***

No, non vi diciamo quanti anni ha il ***Vizconde***. Ma sono molti meno di quanto pensiate, e anche se la sua soluzione non è ottima, ci va piuttosto vicino, ed è fatta senza conti. Del resto ***Cid*** stesso, dopo aver finito tutti i conti, scrive:

> Un'osservazione a livello intuitivo che mi conferma di aver trovato l'area massima: un modo intuitivo per notare che questa struttura corrisponde all'area massima è pensare al fatto che il cerchio è la figura avente l'area massima a parità di perimetro; ebbene, due strutture ombrellifere come quella appena trovata appoggiate una contro l'altra formano un ottagono regolare e l'ottagono regolare è il poligono che più approssima il cerchio tra i poligoni aventi al massimo otto lati (...non posso avere più di otto lati con una struttura chiusa formata da otto ombrelli).

Ebbene, il ***Vizconde*** aveva trovato un esagono, il ***Cid*** un ottagono... Va bene, ed ora tutti i conti nella soluzione di ***Andrea***:

> Complice qualche ora di altrimenti noiosissima attesa, con sottomano solo una penna e un foglio di carta recuperato, affronto con piacere questo quesito che, se non ho frainteso la traccia (o se non la ricordo troppo male), appare abbastanza semplice e sicuramente sfizioso.
>
> Per capire quale sia la configurazione "ombrellifera" che garantisce la massima superficie coperta, è innanzitutto fondamentale individuare tutte le possibili configurazioni dei quattro ombrelli di raggio R a disposizione. Per schiarirmi le idee in proposito procedo quindi accostando i primi due ombrelli e aggiungendo successivamente i rimanenti due come "ali": mi rendo conto in questo modo che in realtà esistono due sole possibili famiglie di



5 *Le configurazioni possibili di* ***Andrea***

configurazioni, la "A" e la "B" rappresentate in figura, a seconda che le suddette "ali" risultino inclinate in maniera concorde o discorde.

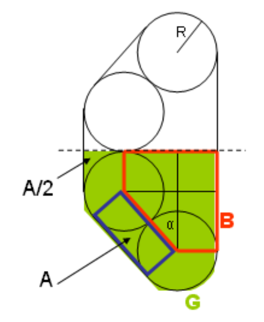
La simmetria della configurazione in grado di massimizzare la superficie coperta, evidente nelle mie rappresentazioni, è assicurata dall'osservazione che, dato un angolo α che ottiene l'obiettivo di cui sopra per una delle due semisuperfici delimitate dalla linea tratteggiata verde, lo stesso angolo massimizzerà analogamente l'altra metà della figura.

Tanto per rovinare subito la sorpresa, si dimostra che la configurazione A consente di ricoprire una superficie lievemente maggiore. Vediamo come si ottiene tale risultato.

Per valutare la superficie della prima figura, misuriamo innanzitutto la semisuperficie verde G e gli elementi che la compongono:

$$A = 2R^2 - \frac{\pi R^2}{2}$$

dove A è quella forma con tre cuspidi indicata dalla freccia, ottenuta come differenza fra un rettangolo e due settori circolari di 90°. Passiamo ora alla superficie B (dove B è la figura in rosso ottenuta come somma di un quadrato, due rettangoli ed un triangolo):



6 *Conti della configurazione "A"*

$$B = R^2 + R \cdot 2R\cos\alpha + R \cdot 2R\sin\alpha + \frac{2R\sin\alpha \cdot 2R\cos\alpha}{2}$$

L'area verde G sarà quindi pari a:

$$G = \frac{3}{2}A + B + 2\pi R^2 - \frac{3}{4}\pi R^2 = 4R^2 + \frac{1}{2}\pi R^2 + 2R^2(\sin\alpha + \cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)$$

e derivando tale espressione rispetto ad α, vedremo che abbiamo un massimo di G per α = 45°, e quindi la superficie totale massima sarà:

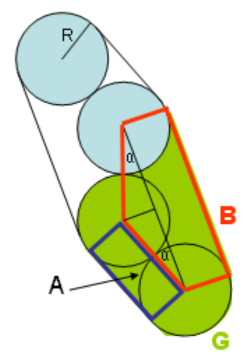
$$2G = 10R^2 + \pi R^2 + 4\sqrt{2}R^2 \approx 18.798R^2$$

anziché un valore di circa $12.566R^2$ che si avrebbe nel caso dei soli ombrelli senza telo.

Ricaviamo ora la superficie della seconda configurazione, misurando innanzitutto la semisuperficie verde G e gli elementi che la compongono:

$$A = 2R^2 - \frac{\pi R^2}{2}$$

dove A è quella forma con tre cuspidi indicata dalla freccia, ottenuta come differenza fra un rettangolo e due settori circolari di 90°. Passiamo ora alla superficie B (dove B è la figura in rosso ottenuta come somma di un rettangolo due triangoli):



7 *Conti della configurazione "B"*

$$B = 2R\cos\alpha \cdot 2R\sin\alpha + 2 \cdot 2R\cos\alpha \cdot R$$

L'area verde G sarà quindi pari a:

$$G = A + B + 2\pi R^2 - \pi R^2 = 2R^2 + \frac{1}{2}\pi R^2 + 4R^2(\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)$$

Derivando tale espressione rispetto ad α, vedremo che abbiamo un massimo di G per α = 30°. La superficie totale massima sarà quindi in questo caso pari a:

$$2G = 4R^2 + \pi R^2 + 8R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx 17.534R^2 .$$

Il risultato del ***Console Andrea*** è quello a cui erano giunti, ovviamente, anche ***GaS***, ***Cid*** e ***Fabrizio***. Perdonateci, ma dobbiamo passare al secondo problema.

5.3.2 Sì, lo era, ma questa è peggio.

Siamo sempre sotto la pioggia, come vedete, e il problema è sempre geometrico, ma tridimensionale:

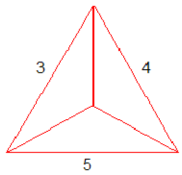
> *Abbiamo due paletti di lunghezza tre, due di lunghezza cinque, uno di lunghezza due e uno di lunghezza quattro. Inoltre, abbiamo anche a disposizione un robusto telo di plastica. Questa volta, la nostra intenzione è di organizzare una tenda approssimativamente tetraedrica (dove "approssimativamente" significa che non si sogna neanche di essere un tetraedro regolare, e non ci poniamo problemi relativi alla stabilità) avente il massimo volume. Vostro compito è progettare la forma di questa tenda.*

Ve lo diciamo subito, qui abbiamo ricevuto tre soluzioni. Per prima cosa vi passiamo l'incipit della soluzione di ***GaS***:

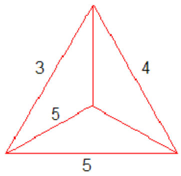
> Cominciamo cercando le configurazioni tetraedriche possibili (sperando che non ne esista nessuna o, al massimo, solo una per non doverne calcolare il volume alla ricerca della soluzione ottimale…).
>
> Date le misure 2, 3, 3, 4, 5, 5 sono possibili solo 9 triangoli con lati definiti dalle seguenti terne: 233, 234, 245, 255, 334, 335, 345, 355, 455. Non è invece ammissibile la terna 235 in quanto da luogo ad un triangolo degenere. Tra i 9 triangoli possibili dobbiamo sceglierne 4 in modo che siano tutti costruibili in maniera "simultanea". Suddividiamo le terne nei seguenti gruppi:

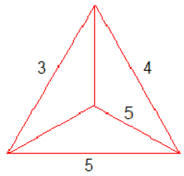
A	B	C	D
255 355 455	233 334 335	234 245	345

> Tra le terne nel gruppo A può esserne utilizzata una sola alla volta in quanto hanno in comune i due lati di lunghezza 5.
>
> Tra le terne nel gruppo B può esserne utilizzata una sola alla volta in quanto hanno in comune i due lati di lunghezza 3.
>
> Tra le terne nel gruppo C può esserne utilizzata una sola alla volta in quanto hanno in comune i due lati di lunghezza 2 e 4.
>
> Ne consegue che un tetraedro può essere costruito utilizzando una ed una sola terna per ogni gruppo; la prima terna e quindi la 345 del gruppo D:

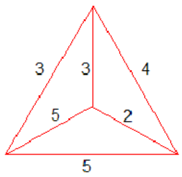


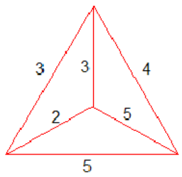
Per avere una delle terne del gruppo A abbiamo due sole possibilità per la posizione del secondo lato di lunghezza 5:





Che comportano la possibilità di due soli tetraedri costruibili (fatto che scombina i piani iniziali costringendoci a calcolare il volume di un tetraedro):





Per un tetraedro irregolare sapevo esistere una formula, tipo quella di Erone per il triangolo, per calcolare il volume in funzione della lunghezza dei lati, formula che non ricordavo ma, fortunatamente, Mathworld esiste ed è venuta in mio soccorso (determinante di Cayley-Menger). (...)

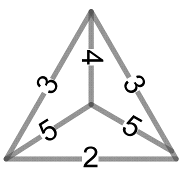
La fine è uguale a quella della soluzione trovata da ***Franco57***:

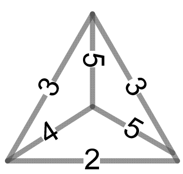
Ho visto che la formula per calcolare il volume V del tetraedro a partire dai lati fu trovata dal pittore Piero della Francesca nel suo "Trattato d'abaco" (non sapevo che fosse stato anche un matematico!) poi sistemata in forma più gradevole da Tartaglia con il determinante:

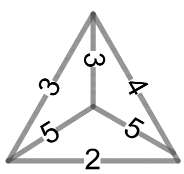
$$288 \cdot V^2 = \begin{vmatrix} 0 & {d_{12}}^2 & {d_{13}}^2 & {d_{14}}^2 & 1 \\ {d_{12}}^2 & 0 & d_{23} & {d_{24}}^2 & 1 \\ {d_{13}}^2 & {d_{23}}^2 & 0 & {d_{34}}^2 & 1 \\ {d_{14}}^2 & {d_{24}}^2 & {d_{34}}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

dove d_{ij} è la distanza tra il vertice i e il vertice j.

Beh, non so se merita la squalifica, ma ho deciso di usarla. Il lato lungo 2 può sempre essere portato alla base del tetraedro e combinato con gli altri. Evitando le forme simmetriche arrivo a solo 10 modelli, che si riducono ulteriormente prendendo un solo modello per le forme isometricamente congruenti e togliendo quelle degeneri o impossibili (faccia con lati 2,3,5). Si arriva a solo 3 forme:







> per le quali il determinante risulta essere rispettivamente 4096, 3646, 862. Il maggior volume lo dà quindi la prima forma e vale $V=\sqrt{\frac{4096}{288}}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$, circa 3,771236. Essendo 3,4,5 una terna pitagorica si tratta di una piramide a base 2,3,3 con l'altezza coincidente con lo spigolo di dimensione 4.

Fulminea, vero? Anche ***Trentatre*** usa gli stessi principi per giungere al risultato, ed aggiunge:

> Le formule 1) e 2) [*formule di Erone* (1) *e di Cayley-Merger* (2) *(NdAR)*] sono più interessanti del problema. La formula di Erone contiene termini di quarto grado, da cui i greci – che si limitavano nelle dimostrazioni alla geometria piana o solida – si astenevano accuratamente. È di solito attribuita ad Archimede (il "divino" Archimede, come dicevano nel Rinascimento). E a proposito di Rinascimento la 2), sviluppata in termini dei quadrati degli spigoli, è più simile alla formula di Erone classica, ed è sostanzialmente la stessa regola per il volume del tetraedro data nel *De corporibus regolaribus* da Piero della Francesca. Che non conosceva i determinanti ma – come evidenziano i suoi dipinti – di geometria se ne intendeva. La forma moderna è invece il *determinante di Cayley-Merger*, che fornisce il "volume" di un "tetraedro" di ogni dimensione.

Siamo arrivati alla fine. Grazie a tutti per le soluzioni, e scriveteci se ne abbiamo persa qualcuna: di solito cerco di citarvi tutti, se non vedete il vostro nome è – molto probabilmente – perché non ho ricevuto vostro contributo. A rileggerci il mese prossimo!

6. Quick & Dirty

Vi ricordate il vecchio problemino sul fatto che avete tre paia di calzini di colore diverso in un cassetto e, volete averne almeno un paio dello stesso colore? Bene, abbiamo trovato un'interessante variazione sul tema.

In una scatola di matite colorate, ce ne sono lo stesso numero per ogni colore, e voi pescate al buio. Per essere sicuri di prendere una matita blu, dovete estrarne **25**, mentre per essere sicuri di prendere tutte le matite di un qualche colore bisogna estrarne **29**. Quante matite ci sono nella scatola?

7. Pagina 46

Come per il Teorema di Pitagora, anche per la Diseguaglianza di Cauchy-Buniakowsky sono state trovate varie dimostrazioni.

7.1 Prima prova

Possiamo scrivere:

$$\sum_{i=1}^{n}(xa_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(x^2a_i^2+2xa_ib_i+b^2\right)=Ax^2+2Bx+C, \qquad [1]$$

dove:

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$
$$B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$
$$C = \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Il primo membro della `[1]` è sicuramente non negativo, essendo una somma di quadrati; in particolare, è non negativo per $x = -\frac{B}{A}$, e la sostituzione di questo valore nell'ultimo membro della `[1]` fornisce:

$$A\frac{B^2}{A^2} - 2B\frac{B}{A} + C = \frac{AC - B^2}{A} \geq 0.$$

Questo in quanto $A > 0$, $AC - B^2 \geq 0$, in quanto $B^2 \leq AC$.

Otteniamo quindi la diseguaglianza cercata sostituendo ad A, B, C le loro espressioni in termini di a_i e b_i; in particolare, si ha l'eguaglianza se:

$$xa_1 + b_1 = xa_2 + b_2 = \ldots = xa_n + b_n = 0,$$

da cui otteniamo

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \ldots = \frac{b_n}{a_n} (= -x).$$

7.2 Seconda prova

Dati due numeri *a* e *b*, $(a - b)^2 \geq 0$, ossia $a^2 + b^2 \geq 2ab$, quindi:

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2.$$

Sia ora:

$$A = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2},$$
$$B = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2},$$
$$\left.\begin{aligned} \bar{a}_i &= \frac{a_i}{A}, \\ \bar{b}_i &= \frac{b_i}{B}. \end{aligned}\right. (i = 1, \ldots, n).$$

Allora deve essere:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{A^2} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}{B^2} = 1.$$

Possiamo allora scrivere le n diseguaglianze:

$$\bar{a}_i \bar{b}_i \leq \frac{1}{2}\bar{a}_i^2 + \frac{1}{2}\bar{b}_i^2$$

Che sommate si riducono a:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i \bar{b}_i \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Sostituendo gli opportuni valori per $\bar{a}_i$ e $\bar{b}_i$, otteniamo:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{AB} \leq 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq AB,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right),$$

che è la tesi: l'uguaglianza vale solo se:

$$\bar{a}_i - \bar{b}_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

ossia se:

$$\frac{b_i}{a_i} = \frac{B}{A} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

7.3 Terza prova

La diseguaglianza è banale per n=1, in quanto $(a_1 b_1)^2 \leq a_1^2 b_1^2$.

Mostreremo che, assunta la diseguaglianza vera per n coppie di numeri, ossia

$$C^2 \leq AB$$

dove

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

$$B = \sum_{i=1}^{n} b_i^2,$$

$$C = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

allora sarà vera anche per n+1 numeri, ossia:

$$(C + a_{n+1} b_{n+1})^2 \leq (A + a_{n+1}^2)(B + b_{n+1}^2).$$

Possiamo infatti scrivere:

$$\begin{aligned}
&(A + a_{n+1}^2)(B + b_{n+1}^2) - (C + a_{n+1} b_{n+1})^2 \\
&= AB + Ab_{n+1}^2 + Ba_{n+1}^2 + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 - C^2 - 2Ca_{n+1} b_{n+1} - (a_{n+1} b_{n+1})^2 \\
&= (AB - C) + (Ab_{n+1}^2 + Ba_{n+1}^2 - 2Ca_{n+1} b_{n+1}) \\
&= (AB - C) + (\sqrt{A} b_{n+1} - \sqrt{B} a_{n+1})^2 + 2(\sqrt{AB} - \sqrt{C^2}) a_{n+1} b_{n+1} \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che tutti e tre i termini tra parentesi nel penultimo sono maggiori o uguali a zero: quindi, per induzione, la diseguaglianza è vera per qualsiasi n e, come sopra, il segno di eguaglianza vale solo se è:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}.$$

7.4 Quarta prova

Per induzione, si dimostra che:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} (a_k b_l - a_l b_k)^2.$$

Il secondo membro dell'eguaglianza è non negativo ed assume il valore zero solo nel caso di eguaglianza tra tutti i rapporti $\frac{a_k}{b_k}$; nel caso allora non sia zero, abbiamo:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 > 0,$$

che prova il teorema.

8. Paraphernalia Mathematica

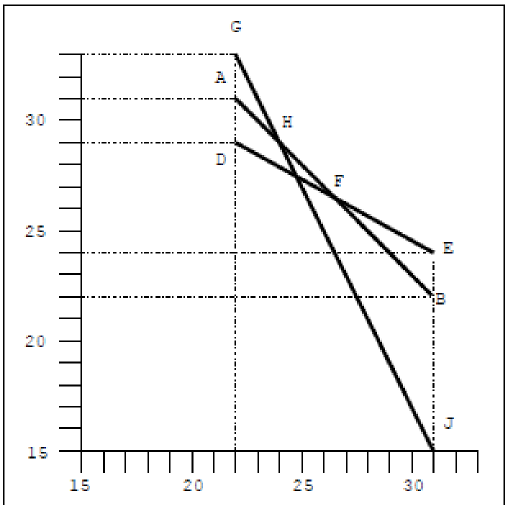
Anche questa volta, una premessa.

Come tutti dovreste ormai sapere, l'estensore di queste note (Rudy) sin dalla più tenera età salta il pranzo dal lunedì al venerdì. Non solo per evitare di addormentarsi (pressione bassa) al pomeriggio, ma anche per la *Weltanschauung* ereditata dal padre: entrambi, infatti, verso mezzogiorno, dovendo scegliere tra la pizzeria "da Gino" e la libreria all'angolo, si dirigevano decisamente verso la seconda: uno perdendosi felice nello scaffale della divulgazione scientifica (roba leggera, stiamo parlando di un dodicenne con scarsi rendimenti in Matematica), mentre il genitore compulsava altri settori, e uno dei più grandi crucci di quest'ultimo era che il pargolo non capisse assolutamente nulla di Economia[24].

Bene, Rudy si è preso la seconda rivincita: questo è il secondo articolo di Economia di cui *suo padre non abbia capito assolutamente nulla*.

8.1 La Mano Sinistra delle Tenebre

Siccome nella premessa abbiamo detto che parleremo di Economia, dovreste aver capito che il titolo[25] rappresenta una neanche tanto velata allusione ad un concetto sul quale abbiamo (politicamente parlando) notevoli dubbi: l' "invisibile mano del Mercato" di Adam Smith. Per riunire in un unico paragrafo tutti i chiarimenti, il *primo* articolo risultato incomprensibile al padre di Rudy è il PM pubblicato su RM091 ("In teoria, è un gioco [003]"[26]).



8 *Le conclusioni di molti anni fa.*

Se ricordate (o se siete andati a rivedervelo), si trattava di vendere oggetti in cambio di soldi, e si cercavano le soluzioni ottimali, ossia il *nucleo* della transazione, in grado di rendere felice acquirente e venditore: ci eravamo accorti che all'aumentare del numero degli acquirenti (e dei venditori), la zona ottimale si riduceva sempre di più: con riferimento alla figura, prima era il segmento $\overline{AB}$ (un acquirente, un venditore): introducendo un ulteriore venditore, ottenevamo il segmento $\overline{DE}$, il che riduceva l'area ottimale a quella sul segmento $\overline{AF}$; indi, incrementando gli acquirenti, ottenevamo il segmento $\overline{GJ}$, il che riduceva il nucleo a $\overline{HF}$: se fossimo andati avanti, avremmo ulteriormente ridotto, a forza di "tagli", il segmento restante sino a ridurlo ad un unico punto (comunque su $\overline{HF}$ e quindi su $\overline{AB}$). Ora, da come avevamo costruito il tutto, in voi dovrebbe essere forte l'ipotesi che da queste parti ci sia un'iperbole: vero, ma andiamo avanti con calma. Il nostro scopo è

[24] Nella quale il genitore era ragionevolmente versato: quella più teorica e vicina alla politica, quantomeno, perché per quanto riguarda la gestione corrente della cassa... Beh, di solito ce la si cavava con un panino verso le quattro, giusto per nascondere all'altro genitore il misfatto.

[25] Nota per le *menti minute*: titolo rubato a Ursula Kroeber LeGuin. E se sia migliore "The Dispossessed" o "The Left Hand of Darkness" rischia di scatenare tra Rudy e Doc una rissa peggiore di quella sulla più bella Formula di Eulero.

[26] Presente anche (in forma leggermente più comprensibile) nel capitolo 18 di "Rudi Ludi". Ricevuto in regalo il libro, il padre di Rudy si è lamentato di non aver capito nulla: in questo, accompagnato da molti nostri lettori, purtroppo.

complicare enormemente la cosa ma, fatto abbastanza sorprendente, secondo noi è più comprensibile: probabilmente perché parliamo molto più di *Matematica* che di *Economia*.

Se seguite un qualsiasi telegiornale, *talk show*, o quotidiano, nel momento stesso in cui si attacca a parlare di Economia avete una certezza: prima o poi, qualcuno tirerà fuori l'onnipotente forza moderatrice del Mercato che, lasciato a sé stesso, in modo automatico e veloce convergerà verso un equilibrio ottenendo automaticamente il miglior rapporto possibile tra domanda e offerta: questo assioma è, tradizionalmente, attribuito ad Adam Smith, e ogni economista che si rispetti[27] si gira verso questo principio cinque volte al giorno e recita le relative devozioni.

Il guaio è che *nessuno* sa se la cosa sia vera: è quella che in Matematica si chiama "congettura" e (in Matematica) di solito si cerca di dimostrarle, le congetture. In Economia, invece, ci si accontenta di un paio di esempi (o di un ragionamento enormemente semplificato) e si va via contenti: un po' come se, avendole verificate sino a centoquarantanove, dessimo per acquisite la Congettura di Goldbach e l'Ipotesi di Riemann in un colpo solo.

Piccolo, imbarazzante neo: a parte il fatto che (come diceva Galbraith), nessun economista è mai diventato ricco[28], alcuni matematici hanno cominciato a fare le pulci all'ipotesi, e ne sono saltate fuori di tutti i colori: prima, però, un po' di teoria (e chiarimenti sul Nucleo, speriamo).

Cominciamo con il definire il nostro Universo: abbiamo un insieme di *agenti* che possono scambiarsi *beni*; questi beni sono in numero di $n \geq 2$, e il Mercato definisce i loro prezzi. Non consideriamo le offerte speciali, quindi se p_j è il prezzo del *j*-esimo bene, allora il prezzo di $x_j > 0$ beni di quel tipo sarà $p_j x_j$. Il che, ad ogni fisico che si rispetti, fa venire in mente il *prodotto scalare*. Infatti, possiamo pensare ad un vettore $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ dei prezzi e ad un *insieme di beni*[29] come ad un altro vettore $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Re_+^n$, allora il costo totale diventa semplicemente $\vec{p} \cdot \vec{x}$.

Supponiamo ora un certo numero di *agenti* (che poi sarebbero i clienti dei nostri venditori), ciascuno dotato di una *dote iniziale* (in denaro) w_k [30] in grado di fornire l'insieme di beni $\vec{p} \cdot \vec{x_k}$: questo significa che l'agente *k* può affrontare l'acquisto dei beni x_k all'interno delle *restrizioni di budget* espresse da:

$$\left\{ \vec{x_k} \in \Re_+^n \middle| \vec{p} \cdot \vec{x_k} - w_k \leq 0 \right\} \qquad [1]$$

Se, per semplicità di disegno, consideriamo uno spazio bidimensionale (a due beni, quindi), possiamo considerare una linea di budget (che, all'aumentare del numero di beni, è un (iper)*piano di budget*) avente come perpendicolare il vettore dei prezzi $\vec{p}$: se vedete il disegno in *Figura* 9, la cosa dovrebbe esservi più chiara, soprattutto se ricordate che in

---

[27] Rudy vi ha già detto che per lui l'unico economista simpatico è Kenneth Galbraith: il quale, in *Una Vita nel nostro Tempo* (che dovrebbe intitolarsi "Economics for Dummies") mostra attraverso una serie di esempi reali che Smith aveva detto una boiata pazzesca. Caso mai non si sia capito, qui intendiamo dargli ragione (a Ken) dal punto di vista matematico.

[28] Qualche matematico sì: Scholes e Black, ad esempio, giocando sui *futures* (PM116 e PM118: "Make Money Fast!").

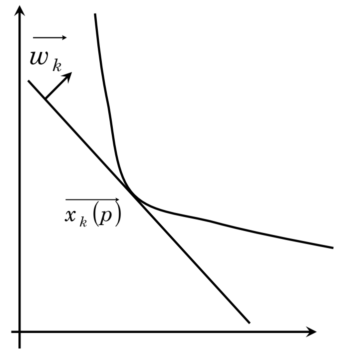
[29] Come al solito, l'inglese è molto più bello: *commodity bundle*.

[30] OK, stiamo esagerando con le note. Ci teniamo comunque a far notare che la lettera "*w*" è scelta in quanto iniziale di *wellness*, benessere. Come diceva Manolito, "I soldi non fanno la felicità, ma quello che mi entusiasma è come la sanno imitare".

Rudi Ludi avevamo, come beni, birre e denaro (che nulla ci impedisce di considerare come un bene acquistabile, ad esempio, al prezzo di un euro all'euro, operazione assolutamente inutile e quindi non considerata).

Ora, almeno in parte, qui casca l'asino, secondo noi: non resistiamo al citare un nostro ulteriore pezzo, pubblicato su RM080 (settembre 2005); la parte topica è quella in corsivo, ma ci piace talmente che ve lo rimettiamo tutto:

> Ci sono esattamente quattro algebre normate: i Reali, i Complessi, i Quaternioni e gli Ottonioni. I Reali sono l'onesto padre di famiglia che porta a casa i soldi: completamente ordinati, sono quelli su cui basiamo l'intera nostra vita. I Complessi sono il fratellino minore un po' fuori di testa ma ancora presentabile: algebricamente completi, ma ***non ordinabili***. I Quaternioni sono il cugino eccentrico che si cerca di non invitare alle riunioni di famiglia, in quanto non commutativo. Ma gli ottonioni, sono lo zio pazzo che nessuno vuole esca dalla stanza imbottita nell'attico: sono non associativi![31]



9 *Schema semplice (ma già con dei guai, secondo noi)*

Già, se avete anche solo due beni, mettersi d'accordo sull'importanza è un guaio; non potete decidere quale sia il bene su cui si concentra la domanda più forte. In Rudi Ludi, tutto funzionava bene perché parlavamo di *un unico* bene, le birre, e i nostri acquirenti erano pienamente d'accordo nel volerne il più possibile; ma se mettiamo due beni (ad esempio – giusto per non fare pubblicità – un whisky dell'isola di Skye e una *stout* irlandese), le scelte di anche solo due acquirenti possono differire notevolmente, e quindi far variare la domanda *in funzione dell'acquirente*; e già solo questo, secondo noi, può causare dei guai.

Gli economisti se la cavano introducendo una *funzione utilitaristica* (*utility function*: secondo noi nell'inglese ci sono un paio di giochi di parole interessanti):

$$u_k : \Re_+^n \to \Re, \qquad [2]$$

dove $u_k(\vec{y}) > u_k(\vec{x})$ se e solo se il *k*-esimo agente preferisce l'insieme di beni $\vec{y}$ all'insieme di beni $\vec{x}$; e su questa funzione possiamo fare alcune richieste sensate; ad esempio, che "più ce n'è, meglio è", ossia che l'intenzione sia di procurarsi la massima quantità possibile di ogni bene; la cosa a noi ricorda più il *gourmand* che il *gourmet*, ma a quanto pare è una richiesta standard in economia: matematicamente, la cosa si esprime richiedendo che tutte le componenti di ∇u_k siano positive. Sotto queste condizioni, diventa possibile determinare la domanda $x_k(\vec{p})$ di ogni agente: è, come mostrato nella figura 9, il piano per il quale il budget è tangente all'offerta.

Possiamo introdurre un'ulteriore funzione, per capire cosa succede: il cosiddetto *eccesso di domanda*, ossia la differenza tra la domanda (da parte del *k*-esimo agente) e quanto gli viene effettivamente fornito:

[31] Originale: *There are exactly four normed division algebras: the real numbers (R), complex numbers (C), quaternions (H), and octonions (O). The real numbers are the dependable breadwinner of the family, the complete ordered field we all rely on. The complex numbers are a slightly flashier but still respectable younger brother: not ordered, but algebraically complete. The quaternions, being noncommutative, are the eccentric cousin who is shunned at important family gatherings. But the octonions are the crazy old uncle nobody lets out of the attic: they are nonassociative*! John Baez.

$$\xi_k\left(\vec{p}\right) = x_k\left(\vec{p}\right) - \vec{w}_k$$

e da quanto detto si possono ricavare le proprietà della *funzione aggregata dell'eccesso di domanda* $\xi\left(\vec{p}\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_k\left(\vec{p}\right)$, note anche come *Leggi di Walras*:

1. $\xi\left(\vec{p}\right)$ è univoca e non ha discontinuità (per la convessità e continuità di u_k)
2. $\xi\left(\vec{p}\right)$ è omogenea di grado zero (in quanto ognuna delle sue componenti è definita dalla tangenza della funzione utilitaristica con il piano di budget)
3. $\xi\left(\vec{p}\right)$ è ortogonale a $\vec{p}$ (in quanto sia w_k sia $x_k\left(\vec{p}\right)$ sono nel piano del budget).

E sin qui, se ci passate la battuta, la capiscono anche gli economisti: quando però i matematici si mettono d'impegno, le carte rischiano di essere potentemente sparigliate.

La seconda legge di Walras ci permette di scalare tutti i prezzi a norma unitaria, ossia di trattare tutti i prezzi come punti sul *simplesso dei prezzi* S_+^{n-1}, dato dall'intersezione dell'ipersfera S^{n-1} con la parte di spazio definita da tutti i semiassi positivi delle coordinate[32] $\Re_+^n$, e $\xi\left(\vec{p}\right)$ è un campo vettoriale continuo sul simplesso dei prezzi: indipendente da come possano cambiare i prezzi, ci si chiede se esista effettivamente un equilibrio, ossia se esista un prezzo $\vec{p}^*$ per cui $\xi\left(\vec{p}^*\right) = 0$, ossia tale che l'offerta eguagli la domanda?

Si dimostra (la cosa è semplice, ma lunghetta) che $\xi\left(\vec{p}\right)$ deve avere uno zero, e quindi deve esistere un equilibrio dei prezzi: questo sembrerebbe dare ragione a a Smith, ma il Vero Matematico, a questo punto, sa che bisogna fare attenzione ai termini che si usano: OK, esiste un equilibrio dei prezzi, ma i prezzi lo sanno? Detto in modo più formale, i prezzi *tendono all'equilibrio*?

Per prima cosa, statuiamo la dinamica dei prezzi in una forma più matematica: un aumento della domanda porta ad un aumento dell'offerta, ossia, usando le derivate:

$$\vec{p}' = \xi\left(\vec{p}\right) \qquad \texttt{[1]}$$

o, in forma discreta,

$$\vec{p}_{n+1} = \vec{p}_n + h\xi\left(\vec{p}_n\right) \qquad \texttt{[2]}$$

per una qualche costante positiva *h*: in entrambe le formulazioni, la dinamica dei prezzi è governata dalla $\xi\left(\vec{p}\right)$, il che ci obbliga ad espandere le leggi di Walras presentando altre richieste, quali ad esempio che almeno uno degli equilibri dei prezzi sia un attrattore locale (in modo da far convergere i prezzi verso di lui) o che le funzioni `[1]` e `[2]` non diventino mai caotiche o non ammettano attrattori di dimensione frattale. Il che non è detto, a priori.

Prendiamola in un senso molto "matematico": definiamo $\Xi(n)$ come l'insieme dei campi vettoriali continui tangenti al simplesso S_+^{n-1}, e ***U*** sia l'insieme delle funzioni di utilità

---

[32] Se siete in due dimensioni si chiama quadrante, in tre dimensioni si chiama ottante: in questo caso come si chiama, 2^n-ante?

che si comportano bene (insomma, derivabili e senza discontinuità); $\Re_+^n$ sia lo spazio delle dotazioni iniziali, e si abbiano a agenti: a questo punto, costruire la funzione aggregata di eccesso della domanda significa definire una mappa per cui:

$$\Im : \left[U \times \Re_+^n\right]^a \to \Xi(n).$$

Sembra complicato, ma non lo è: *Sonneschein*, *Mantel* e *Debreu* hanno cercato (ed è tutto il nucleo della questione) di capire quali siano le caratteristiche dell'insieme immagine di $\Im$ in $\Xi(n)$, che è poi il nocciolo di tutta la questione: se l'origine della funzione si comporta bene, possiamo fare delle ipotesi ragionevoli sulla sua immagine, e quindi dire che una "mano" (la funzione aggregata di eccesso della domanda) guida il mercato verso l'equilibrio.

Il guaio è che i nostri tre hanno dimostrato il *Teorema SMD* (sono le loro iniziali):

> *Per* $n \geq 2$ *e* $\varepsilon > 0$, *la mappatura dei prezzi* $\Im_\varepsilon : \left[U \times \Re_+^n\right]^a \to \Xi_\varepsilon(n)$ *è suriettiva* **se e solo se** $a \geq n$ **.**

Ci piacerebbe lasciarvela capire da soli, ma non siamo abbastanza cattivi. In pratica, se avete meno beni che agenti, tutto funziona benissimo, e riuscite ad arrivare "senza interventi esterni" all'equilibrio dei prezzi (la funzione è suriettiva, quindi si comporterà bene e prima o poi allo zero della funzione aggregata dell'eccesso di domanda ci arrivate); ma nel caso contrario, se ci sono più agenti che beni, può succedere di tutto! Le funzioni caotiche, il comunismo, i frattali, le cavallette... Insomma, la mancanza di suriettività è esattamente quello che vi frega: sapete che esiste un punto di equilibrio tra la domanda e l'offerta, ma *non sapete come arrivarci*; per dirla alla Fantozzi, Walras aveva ragione, ma Smith stava dicendo una boiata pazzesca...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms