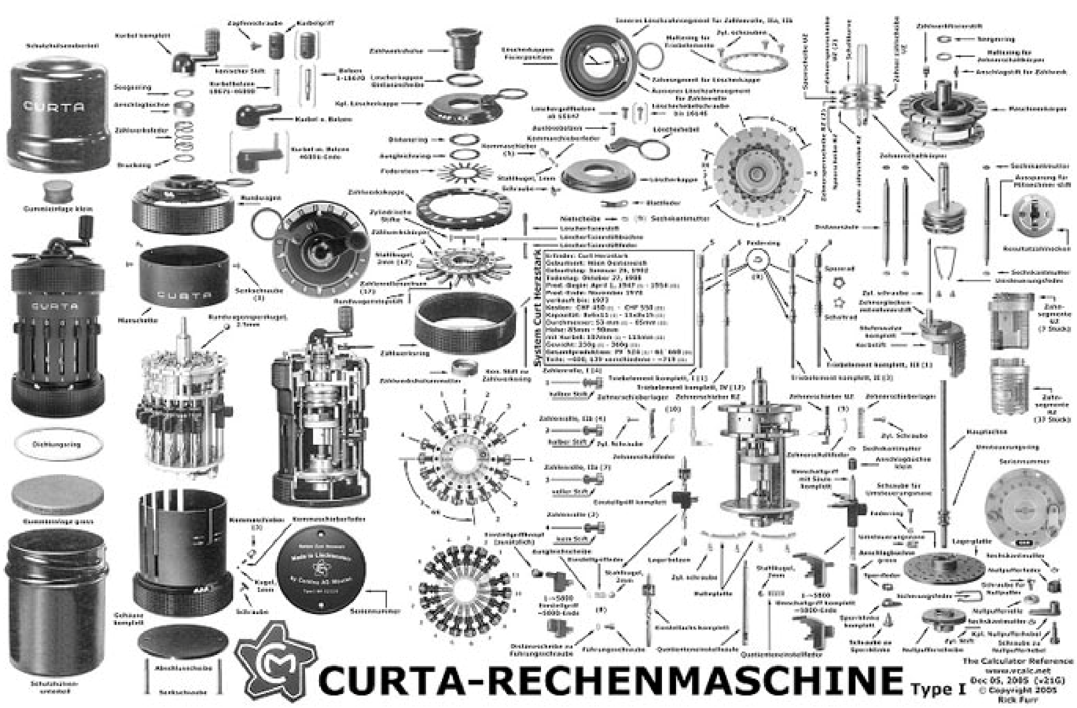
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 148 – Maggio 2011 – Anno Tredicesimo



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM147 ha diffuso 2769 copie e il 30/04/2011 per Google eravamo in 8'770 pagine.

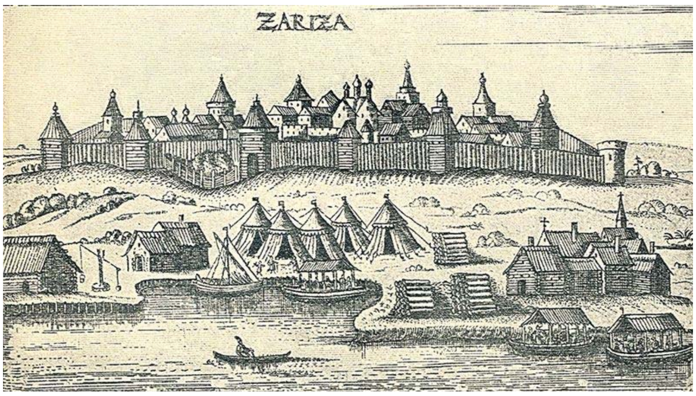
Abbiamo finalmente trovato delle immagini decenti della ***Curta***, considerato "il calcolatore meccanico tascabile più potente mai costruito". In alto lo schemino, sotto un paio di modelli. La sua emozionante storia è disponibile su Wikipedia, e si conclude con una interessante notizia: "Solo il 3% delle Curta inviate a riparare avevano dei guasti o delle parti rotte; il restante 97%, era semplicemente stato smontato dall'acquirente. Un cliente, che si lamentava di aver pagato 600 dollari per la sua Curta e 300 dollari per farla rimontare, si sentì rispondere dal commesso: 'In realtà, la Curta costa 900 dollari. Tutti provano a smontarla'."

1. Il Nazista e l'Ebreo

Anche se l'opera vi delizia con la sua grazia,
non segue necessariamente che
chi l'ha realizzata meriti la vostra stima.
(Plutarco, Vite Parallele, Pericle, 2,1)

Che i nomi si portino appresso dei significati densi e talvolta inaspettati è cosa che si può constatare ogni volta che si graffia appena la superficie etimologica delle voci di un dizionario; ma che essi riescano talvolta a significare ben di più di quanto la stessa etimologia loro consenta, in una mirabile coincidenza di significati (accidentali eppure pregnanti), è cosa certo più rara. In alcuni casi, sono la mescolanza di lingue e le traslitterazioni da un alfabeto all'altro a congiurare perché il complotto semantico riesca: è questo il caso, ad esempio, di un misconosciuto fiumiciattolo russo.

È un fiume che sembra consapevolmente voler riunire in sé stesso tutte le caratteristiche per passare inosservato: è piccolo, breve, e disperso nelle enormi pianure della più grande nazione del mondo. Per di più si situa tra due fiumi maestosi e molto famosi, proprio nel punto in cui i due giganti dell'idrografia europea si avvicinano alla loro minima distanza: così, nelle anse speculari del Don e del Volga, il piccolo corso d'acqua ha la certezza di non suscitare l'interesse di nessuno. Il suo nome discende dalle antiche lingue di ceppo turco e tataro, perché quelle erano terre in cui le grandi orde mongole discendenti da Gengis Khan hanno governato a lungo: e con il termine "Sary-Su" con cui lo battezzarono si limitavano a indicarne il colore: "acqua gialla". O forse (la cosa non è chiarita e probabilmente non lo sarà mai), il termine primigenio poteva essere "Sary-Sin", che significa "isola gialla": e in questo caso il riferimento sarebbe all'isola che si trovava proprio nel punto dove il nostro fiumiciattolo sfocia nel Volga.



1 *Tsaritsyn, sullo Tsaritsa o Zariza*

Il nome italiano del fiume è Carica: un termine più militare che elettromagnetico, che fa subito immaginare ussari dagli alti colbacchi che lanciano i loro cavalli all'assalto, o indaffarati artiglieri concentrati nella febbrile operazione di munizionamento delle loro batterie di cannoni. Un nome di guerra, insomma. Nella traslitterazione più comune, quella inglese, il fiume risponde invece al nome di Tsaritsa (o Tsaritza), termine che lo colloca immediatamente nell'orbita del monarchi russi. "Tsar" è infatti lo zar, padre di tutte le Russie, e la "tsaritsa" è la sua regale consorte, quella che in italiano chiamiamo zarina. Curiosamente, a voler continuare la ricerca di coincidenze e di significati privi di seria giustificazione semantica, il concetto di "regina" era già presente nella geografia del luogo: erano quelle le terre dominate dal Canato dell'Orda d'Oro, e quella zona in particolare veniva talvolta chiamata "terra della Regina dell'Orda". Così, seppur violando tutte le sacre regole dell'etimologia, che passano indebitamente dal colore delle acque alle operazioni militari fino alle sovrane russe e mongole per mezzo delle arbitrarie traslitterazioni, si chiude un corto circuito divinatorio abbastanza inquietante: quel fiume, quell'isola gialla nella sua foce sul Volga, sembrano destinate dai dizionari ad essere un luogo di guerra e battaglie in nome della sovranità e della libertà della Russia.

Sopra e intorno a quell'isola gialla, verso la fine del sedicesimo secolo prende forma una città: vi si trovava già una fortezza chiamata, al pari dell'isola, Sary Su; e da qui prende il nome la città, che infatti viene battezzata Tsaritsyn (anche Caricyn o Zarizin, in italiano). Il destino è nelle parole, anche quando ci entra per sbaglio. Quello "zar" nel nome, la posizione ad un tempo piacevole e fragile, così prossima all'insicuro confine meridionale del regno, rendono rapidamente la città un luogo privilegiato e pericoloso: roccaforte zarista (e come poteva non esserlo?) ed eletta sede dello "Zarevic", il principe erede al trono, Tsaritsyn cresce di importanza commerciale e strategica al punto da diventare un bottino interessante per i vicini predatori dell'impero zarista. I ribelli cosacchi di Razin prima, e quelli di Pugaciov poi, la conquistano nel XVII e XVIII secolo; ma le truppe dello zar riescono sempre a riconquistarla poco tempo dopo. Durante la Rivoluzione d'Ottobre, nel Novembre 1917[1], la città storicamente fedele alla famiglia reale è una roccaforte dei seguaci di Lenin: e nel 1918 Tsaritsyn viene attaccata e assediata dalle milizie della Armata Bianca[2] del generale Krasnov. La città resiste incredibilmente a tre violenti attacchi, e cade solo nel 1919, quando i Bianchi sono guidati dal generale Denikin; l'anno successivo, a rivoluzione bolscevica ormai trionfante, la città torna nell'orbita dei soviet.

Per commemorare l'eroica (almeno dal punto di vista della parte infine risultata vincitrice) resistenza all'assedio del 1917-1918, l'Unione Sovietica, forse in parte anche per cancellare quel nome oggettivamente un po' troppo zarista, concede alla città posta alla confluenza tra lo Tsaritsa e il Volga il nome dello stesso capo supremo dell'URSS: così, nel 1925, Tsaritsyn diventa Stalingrado.

Stalin è un soprannome: il dittatore russo si chiamava Iosif Vissarionovič Džugašvili, nome dal sapore prettamente georgiano. Il soprannome significa "acciaio", e il nuovo termine entra nel nomen-omen della conurbazione come una nuova e fatidica voce di curriculum. Russia, Regina, Isola, Carica, Acciaio: tutti elementi che convergeranno fatalmente in quella regione per sette lunghissimi mesi, dall'Agosto 1942 al Febbraio 1943.

2 *Stalingrado, 1942*

La battaglia di Stalingrado è, quasi con assoluta certezza, il singolo scontro militare che ha causato più caduti di tutta la storia dell'umanità. Il numero delle vittime è verosimilmente prossimo a due milioni, e anche le stime più ottimistiche non scendono mai al disotto di un milione e duecentomila morti. Nell'estate del 1942, le truppe tedesche sono all'apogeo della loro offensiva: non hanno ancora quasi mai subito delle serie sconfitte, e l'avanzata sul fronte orientale è arrivata molto in profondità nel territorio sovietico, anche se la strenua

[1] Che la rivoluzione d'Ottobre sia scoppiata a Novembre è uno dei classici esempi che vengono immancabilmente ricordati quando si illustrano gli accidenti e le incongruenze tra Calendario Gregoriano e Calendario Giuliano.

[2] Il termine "Armata Rossa" è (o è stato, visto gli sviluppi della storia russa degli ultimi vent'anni) considerato sinonimo di "esercito sovietico", ma ai tempi della Rivoluzione d'Ottobre indicava esplicitamente la parte dell'esercito schierata a favore dei rivoluzionari bolscevichi. Ad essa si contrapponeva, con armi e ideologia, l'Armata Bianca, composta dai fedeli allo zar: la definizione cromatica serviva non solo a puntualizzare la differenza con i "rossi", ma anche a ribadire la fedeltà monarchica, perché il bianco è il colore storico associato al trono zarista.

resistenza verso la direttrice di Mosca ha impedito ai panzer germanici di raggiungere la capitale. La decisione di prendere Stalingrado a tutti i costi è ben motivata: la città è un nodo industriale molto importante nell'economia bellica sovietica, ed è di fatto la porta verso i pozzi petroliferi del Caucaso, che avrebbero risolto i problemi di approvvigionamento energetico della Wermacht: la *blitzkrieg* tedesca infatti (come già la Grande Armée napoleonica, del resto) prevedeva che i rifornimenti delle truppe venissero reperiti direttamente sui territori invasi. Inoltre, proprio la posizione ravvicinata delle due grandi anse del Don e del Volga consentirebbe ai tedeschi il controllo delle grandi arterie fluviali russe, tagliando via i collegamenti dell'Armata Rossa e consentendo di raggiungere Mosca passando – per così dire – dalla porta di servizio. Infine, anche se può sembrare una piccolezza di fronte a simili obiettivi tattici e strategici, l'alto comando nazista è convinto che conquistare la città che porta il nome del comandante in capo dell'URSS avrebbe un effetto propagandistico assai importante.

Carica, Regina, Russia: la VI Armata tedesca, agli ordini del generale Paulus, con il supporto delle truppe italiane dell'ARMIR[3] e di armate rumene e croate, *carica* decisamente la *regina* delle città combattenti di *Russia*. Scatena un bombardamento a tappeto che rende la città un cumulo di macerie, resta però sorpresa dalla resistenza dei sovietici: anche se le forze dell'Asse conquistano in fretta il 90% della città, il restante, misero 10% resiste alle forze soverchianti degli attaccanti. È il battesimo del fuoco per la guerriglia urbana del Novecento; la potenza del panzer tedeschi e la loro estrema mobilità in campo aperto vale poco, perché qui è quartiere per quartiere, casa per casa che si deve avanzare. Ed è un massacro continuo: l'altura principale della città viene persa e riconquistata, da una parte e dall'altra, per otto volte di seguito, i cecchini non danno tregua, i cannoni non hanno pace, la città non esiste più, ma la battaglia continua.

Acciaio, Isola: nel freddo Novembre del 1942, il comando sovietico decide il contrattacco. Il fianco nord del saliente tedesco centrato su Stalingrado è protetto dalle armate italiane e rumene, equipaggiate molto peggio di quelle della VI Armata: i russi concentrano l'attacco sul III corpo rumeno e sfondano il fronte, poi dilagano contro le linee italiane e cominciano l'aggiramento di Stalingrado. A sud, in maniera simile, scatenano fuoco e *acciaio* contro la zona più debole, difesa anche in questo dalle truppe rumene, i cui comandanti avevano da tempo chiesto invano rinforzi al comando tedesco. Il fronte cede anche qui, i sovietici passano, piegano verso nord e la manovra a tenaglia si compie: il 12 Dicembre la VI Armata di Paulus è chiusa in un'*isola* tedesca, circondata completamente dalle forze dell'URSS, un "*kessel*", un calderone dal quale è impossibile uscire: ma Hitler non vuole sentire ragioni, Stalingrado deve cadere. Per Berlino, la resa è semplicemente inammissibile.

La VI è la più grande armata di panzer del mondo: più del doppio di una normale; ma è bloccata. Circondati e assediati, impossibilitati a ricevere aiuti dalla Luftwaffe a causa del fuoco di sbarramento sovietico, i soldati tedeschi cominciano a morire di freddo e di fame[4]. Il 31 Gennaio 1943 Hitler promuove il generale Paulus al grado di *Generalfeldmarschall*, il titolo militare più alto della Germania: il suo scopo reale è palesemente quello di impedirgli di arrendersi, perché in tutta la storia militare tedesca mai nessun feldmaresciallo si era consegnato al nemico. Ma, nonostante ciò, pochi giorni dopo Paulus si arrende: la più grande carneficina della storia finisce; l'Armata Rossa era riuscita a tenere Stalingrado, e adesso cominciava la sua marcia verso occidente. Non sarebbe più tornata indietro, arrivando sino a Berlino.

---

[3] ARMIR: Armata Italiana in Russia. Detta anche 8° Armata, era agli ordini del generale Italo Gariboldi. Conteneva anche i resti dello CSIR, Corpo di Spedizione Italiano in Russia, inviato qualche tempo prima. In totale, circa 230.000 uomini.

[4] A Berlino, sconvolto dalla situazione delle truppe e in segno di solidarietà con esse, il generale Zeitzler si autoridusse i pasti mangiando solo l'equivalente di quanto avevano gli assediati di Stalingrado. Nel giro di poche settimane perse 12 chilogrammi, e Hitler in persona gli ordinò di piantarla e di ricomunicare a mangiare normalmente.

Nel 1961 una delle azioni simbolo della destalinizzazione messa in atto da Nikita Krusciov fu proprio la decisione di cambiare, ancora una volta, il nome della città. La "città di Stalin" non poteva continuare a chiamarsi così, e il nome fu cancellato dalle carte geografiche: anche se, proprio per ricordare la terribile battaglia che segnò il punto di svolta di tutta la Seconda Guerra Mondiale, centinaia di piazze e vie in tutte le città del mondo continuano a perpetuarne il nome. La piccola Tsaritsyn prendeva il nome dal piccolo fiume Tsaritsa: la grande Stalingrado ritornò a battezzarsi nei corsi d'acqua che la lambiscono, ma stavolta scelse come nume tutelare il grande e maestoso fiume che difese col sangue dei suoi abitanti. Da allora si chiama Volgograd, la "città del Volga": e speriamo che la placidità del fiume le sia da viatico per una storia futura meno drammatica di quella che ha vissuto fin qui.

Ma si chiamava ancora Stalingrado quando l'Armata Rossa, forte della vittoria, comincia la sua lunga marcia verso ovest. E per un esercito che avanza, ce n'è sempre uno che sbanda, si ritira, chiama a raccolta rinforzi. La Germania, nel tentativo di respingere l'avanzata sovietica sul suo fronte orientale, fa una nuova chiamata alle armi. Tra le migliaia che rispondono alla chiamata c'é anche un giovane professore dell'università di Göttingen: Paul Julius Oswald Teichmüller. A malapena trentenne, fervente nazista, serviva già la sua fede patriottica a Berlino, dove lavorava alla cifratura e decifratura dei dispacci, ma ritiene indispensabile unirsi alle unità combattenti al fronte.


3 *Paul Teichmüller*

Nato nel 1913 nel cuore della Germania, figlio di un tessitore che morì presto a causa di ferite riportate nella Prima Guerra Mondiale, Teichmüller era un ragazzo di campagna dalla mente molto brillante e precoce. Imparò a contare e a leggere da solo, verso i tre anni, e a 17 anni era già bravo abbastanza da essere ammesso nella maggiore delle università tedesche. Si iscrisse alla facoltà di Matematica, ma nonostante le sue indubbie brillanti capacità, non riuscì mai ad inserirsi nell'ambiente universitario: aveva pochi amici, non riusciva a costruirsi una vita sociale, era insomma un pesce fuor d'acqua. Forse per queste ragioni, o forse semplicemente perché davvero rappresentava al meglio il suo ideale politico, dopo appena un semestre a Göttingen si iscrisse al Partito Nazista[5] (che a quei tempi non era certo molto diffuso né popolare) e, neanche un mese dopo, entrò nelle famigerate SA[6]. Nel sacrario dell'intellighenzia accademica tedesca i nazisti ebbero subito un grande successo: molti degli studenti aderirono alla causa, e tra loro fu proprio Teichmüller ad essere eletto rappresentante del partito. Il 7 Aprile del 1933, neanche dieci settimane dopo essere salito al potere, Hitler emana la "legge per la riorganizzazione del servizio civile", che prevede la rimozione di tutti gli insegnanti non ariani. Pronto all'obbedienza, Paul Teichmüller subito organizza il boicottaggio delle lezioni di Edmund Landau, uno dei maggiori matematici tedeschi[7]. Abbastanza intelligente da capire che non era certo possibile argomentare per l'allontanamento di Landau accampando scuse di incompetenza o inadeguatezza sulla materia che insegnava, Teichmüller si esibì in un

[5] Per essere più precisi, si iscrisse al *Nationalsozialistiche Deutsche Arbeiter Partei*, ovvero il Partito Nazionalsocialista Tedesco dei Lavoratori, noto in breve come Partito Nazionalsocialista e, ancor più sinteticamente, come Partito Nazista.

[6] *Sturm Abteilung*, ovvero Sezione d'Attacco, braccio militare del Partito. Da non confondersi con le più famose SS, *Schutz Staffel*, anche se inizialmente queste vengono formate proprio selezionando elementi delle SA. Anche perché furono proprio le SS a decapitare l'organizzazione delle SA il 30 Giugno 1934, in quella che è passata alla storia come "la notte dei lunghi coltelli(*der Nacht der langen Messer*)".

[7] Ne parliamo, tra l'altro, nel compleanno dedicato ad Harald Bohr, fratello di Niels: "*Una Vita da Mediano*", RM063, Aprile 2004.

capolavoro di dialettica matematico-razzista. Nella lettera in cui rispondeva a Landau spiegando le ragioni del boicottaggio diceva, tra le altre cose:

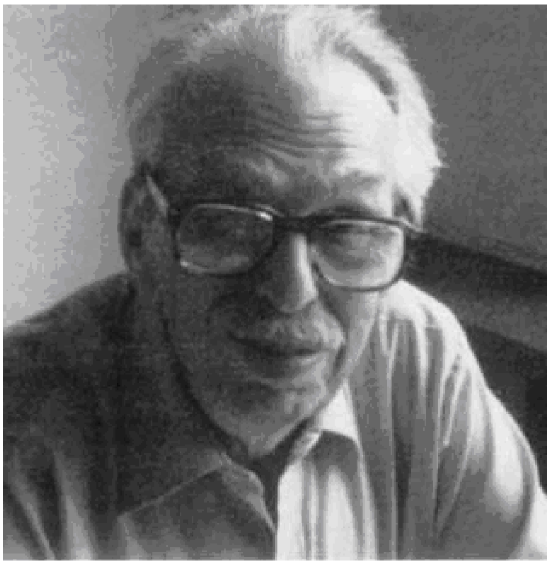
> *Voi sostenete che quanto è successo ieri è stata una dimostrazione di antisemitismo. Il mio punto di vista era, e continua ad essere, che una dimostrazione di antisemitismo potrebbe essere diretta meglio verso qualsiasi altra persona piuttosto che contro di voi. Io non sono interessato a creare delle difficoltà a voi in quanto ebreo, ma solo a proteggere, sopra ogni cosa, gli studenti tedeschi del secondo semestre dall'essere istruiti nel calcolo differenziale e integrale da un insegnante di razza così diversa dalla loro. Io, come tutti, non dubito affatto della vostra capacità di insegnare a studenti di qualsivoglia origine gli aspetti puramente astratti della matematica, ma so che molti corsi accademici, specialmente quelli relativi al calcolo differenziale e integrale, hanno allo stesso tempo anche un valore educativo, perché introducono il discente non solo ad un mondo concettuale, ma anche verso una diversa* forma mentis. *E poiché questa dipende in modo sostanziale dalla composizione razziale dell'individuo, ne segue che ad uno studente ariano non deve essere concesso di essere formato da un insegnante ebreo.*

Era solo uno studente, allora. Si laureò poco dopo, e anche nella scelta del relatore per la discussione della tesi fece pesare la sua passione politica, rifiutando di collaborare con il docente che più era esperto del campo e preferendogli un professore che palesava maggiori simpatie verso il nazismo. Ottenne l'abilitazione, e si trasferì a Berlino nel 1937. Cattiva politica e buona matematica possono convivere: Teichmüller era infatti indubbiamente un matematico straordinario. In soli sei anni scrisse 34 articoli estremamente importanti per la teoria delle funzioni geometriche: introdusse la mappatura quasi-conforme e i metodi differenziali geometrici nell'analisi complessa, ed è immaginabile che, se la Storia non avesse deciso di farlo nascere in tempi così terribilmente complicati, il suo contributo alla matematica avrebbe potuto essere molto maggiore. Ma il 1939 porta con sé l'inizio della Seconda Guerra Mondiale, e Paul Teichmüller corre alle armi. Partecipa all'invasione della Norvegia, poi trova posto nell'unità di Crittografia della Wermacht. Quando, dopo Stalingrado, il Terzo Reich chiama a raccolta tutti gli uomini abili alle armi, Teichmüller decide di lasciare la crittografia per correre al fronte. La sua unità viene inviata presso Kharkov[8], e lì prende parte ai combattimenti sul fronte orientale: gli scontri erano davvero intensi, e Kharkov viene persa e riconquistata più volte. Mentre era tornato a casa per una licenza, una forte controffensiva sovietica riconquista la città il 23 Agosto del 1943, e il reparto di Teichmüller viene praticamente spazzato via. Nonostante non ci fosse più una unità da raggiungere, il matematico nazista riparte da Berlino con l'intenzione di ricongiungersi ai suoi commilitoni. Le sue ultime notizie arrivano da Poltava, non troppo distante dalla sua destinazione; poi, nessuno ne sa più niente. La sua breve vita si perde nel grande marasma dell'avanzata russa e della ritirata tedesca.

Nel primo secolo dopo Cristo, Plutarco visse da greco immerso nella cultura dell'Impero Romano, che era in pieno vigore. Forse fu proprio a causa di questa diarchia culturale che gli venne l'idea per la sua opera più celebre, le *Vite Parallele*, dove esamina ventitré coppie di personaggi famosi, cercandone ed evidenziandone similitudini e differenze. Ogni coppia è infatti composta da un famoso greco e un famoso romano, messi in relazione secondo i criteri dello scrittore: Alessandro Magno e Giulio Cesare; Teseo e Romolo; Pericle e Quinto Fabio Massimo; e così via, coppia dopo coppia. Fosse vissuto nel XX secolo e si fosse interessato ai matematici più che ai condottieri, è verosimile che Plutarco sarebbe stato colpito dallo strano parallelismo che si legge tra le vite di Paul Teichmüller, matematico nazista morto a trent'anni, e Lipa Bers, matematico ebreo

[8] In Ucraina, adesso. A quel tempo, era Unione Sovietica occupata dai tedeschi.

russo/lettone/americano che visse quasi ottanta anni, la maggior parte dei quali negli Stati Uniti d'America.


4 *Lipman (Lipa) Bers*

Lipman (detto Lipa) Bers nacque a Riga il 23[9] Maggio 1914, neanche un anno dopo la nascita di Paul Teichmüller[10]. La sua era una famiglia di insegnanti: la madre era la preside dell'unica scuola elementare della città che usava la lingua Yiddish, e il padre insegnava nell'analogo liceo di lingua ebraica. In quel tempo Riga era territorio russo, parte integrante dell'impero zarista, ma come si è visto la terra di Russia era pronta a divampare, nel secondo decennio del Novecento, incendiata da rivoluzioni e guerre quasi ininterrotte. Riga era uno dei centri che, durante la Rivoluzione d'Ottobre, cambiò spesso di mano tra l'Armata Rossa e l'Armata Bianca: per evitare tali sconvolgimenti, la famiglia Bers decide allora di trasferirsi a Pietrogrado[11]. La fine della Prima Guerra Mondiale restituisce l'indipendenza alle tre Repubbliche Baltiche, e per un po' Lipa e famiglia tornano a Riga, nella rinata Repubblica di Lettonia; ma la madre deve trasferirsi per lavoro a Berlino, e il piccolo Lipman ovviamente la segue. Qui comincia gli studi: scopre presto di essere portato per la matematica, al punto di decidere fin da allora che sarà questa la materia che studierà all'università. Finite le scuole superiori sceglie di studiare a Zurigo, poi completa gli studi universitari nella natia Riga.

Nel 1934, la Lettonia sembra voler scimmiottare l'Italia e soprattutto la Germania, perché sale al potere Karlis Ulmanis, che istituisce un governo dittatoriale. Ma se Teichmüller divenne subito entusiasticamente seguace del suo tiranno tedesco, il ventenne Lipa Bers non ha nessuna intenzione di fare altrettanto. Fin da allora era un attivista politico di stampo socialdemocratico, non tollerava le dittature e scendeva in piazza per la difesa dei diritti umani. Se c'è una cosa alla quale tutte le dittature sono particolarmente attente è la repressione interna degli oppositori, e in breve viene spiccato un mandato d'arresto nei confronti del giovane matematico: Bers fa appena in tempo a scappare, rifugiandosi a Praga con Maria Kagan, la ragazza che qualche anno dopo sarebbe diventata sua moglie. La Cecoslovacchia nel 1934 è un paese abbastanza libero e con università buone e funzionanti: è qui che Lipa si laurea, nel 1938, con una tesi sulla teoria dei potenziali. Ma, per molti versi, il 1938 rappresenta l'inizio della fine per l'Europa e soprattutto per gli ebrei: Bers è costretto a muoversi verso occidente per sfuggire alle persecuzioni razziali. Arriva prima a Parigi, ma non può restarci molto; la

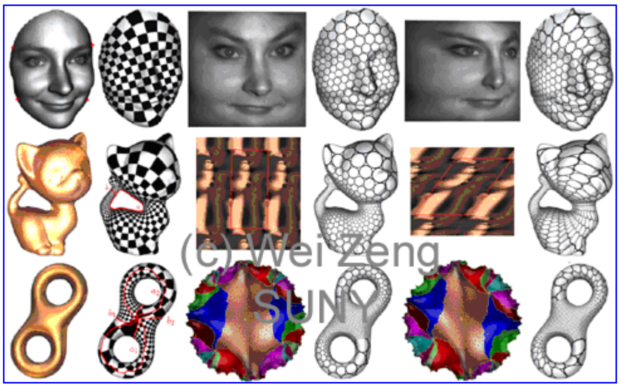
[9] Altre fonti, non meno autorevoli della solita University of St.Andrews che siamo soliti consultare per le date, sostengono però che Lipa sia nato non il 23, ma il 22 Maggio.

[10] Teichmüller nacque infatti il 18 Giugno del 1913: questo basta a dimostrare che il compleanno di questo mese di Maggio, seppur doppio, è oggettivamente dedicato a Lipman Bers, altrimenti avremmo aspettato il mese prossimo per pubblicarlo. Ammettiamo che la preferenza che accordiamo a Bers è causata esclusivamente dalla maggiore simpatia che proviamo per lui rispetto a quella (scarsa) che proviamo verso Teichmüller.

[11] È fin dall'inizio che parliamo di città che cambiano nome: anche a rischio di annoiare, non possiamo però non ricordare che il nome Pietrogrado (Petrograd) è quello che venne dato a San Pietroburgo nel 1914, quando lo scoppio della Grande Guerra aveva acceso sentimenti nazionalistici anti-tedeschi nei russi, che provvidero a rendere meno tedescheggiante la grande città sul Baltico. Più tardi, in onore del fautore della rivoluzione, Pietrogrado assunse il nome di Leningrado, con il quale è stata conosciuta per quasi tutto il secolo. Il ritorno alla denominazione San Pietroburgo è storia recente.

guerra è scoppiata, e i tedeschi stanno dilagando sul fronte occidentale. Quando Parigi cade nelle mani dei nazisti, Lipman Bers, con la moglie e la figlia Ruth nata da poco si rifugia nella parte di Francia ancora libera dall'occupazione tedesca. Aveva nel frattempo richiesto i visti per l'emigrazione negli USA, che gli arrivano appena prima del completamento dell'occupazione di Francia. Con la stessa intensità emotiva con cui Teichmüller correva verso la guerra, Bers ne fuggiva: e fece appena in tempo. Arrivò a New York nel 1940.

Erano tempi duri anche negli USA, comunque: come è noto, un grandissimo numero di scienziati e ricercatori attraversarono l'Atlantico in cerca di asilo, e una curiosa situazione a cui non si è soliti pensare è che la sovrabbondanza di persone estremamente dotate e competenti saturò molto rapidamente i posti disponibili nelle università americane, al punto che validissimi studiosi rimasero sostanzialmente disoccupati. Fu il caso di Lipa, che pur essendo un matematico già noto e famoso, nei primi tempi faticò a trovare un'occupazione[12]. Fino al 1942 studia da solo – o meglio da disoccupato – poi trova impiego presso alcuni atenei americani: prima la Brown, poi la Syracuse University. Si interessa di campi quanto mai variati: dalla dinamica dei fluidi, che nei tempi in cui si cercava di produrre aerei supersonici aveva una sua urgente ragion pratica, allo studio delle singolarità di equazioni ellittiche non-lineari. Poi, finalmente, raggiunse il gotha teorico dell'America del dopoguerra: l'Institute for Advanced Studies di Princeton.



5 *Esempi di mappatura quasi-conforme*

(rubati dal sito di una giovane ricercatrice della SUNY, Wei Zeng, che speriamo ci perdoni). La mappatura quasi-conforme ha importanti applicazioni in medicina, nella diagnostica per immagini.

C'è un curioso aneddoto che spiega come scelse il campo di ricerca al quale dedicarsi mentre era a Princeton: una memoria di Lavrentev[13] che lo interessava attribuiva una disuguaglianza fondamentale per le sue ricerche ad Ahlfors[14]. Quest'ultimo venne a Princeton per una conferenza sul tema, alla quale naturalmente Bers assistette. Durante l'esposizione, Ahlfors dimostrò la disuguaglianza, e Bers gli chiese dove l'avesse pubblicata. Il finlandese rispose che non l'aveva fatto, e alla replica di Bers "*…ma Lavrentev ve la attribuisce!*", dichiarò che probabilmente il russo aveva dato per scontato che l'avesse fatto, senza verificare la cosa nella letteratura. Più tardi, lo stesso Lavrentev confermò la diagnosi, e Lipa concluse che l'oggetto meritava i suoi studi. Come raccontò durante una sua lezione: "*Decisi immediatamente che, se questa teoria conduceva ai risultati belli e potenti che avevo visto e se, ciò nonostante, veniva sviluppata in questo spirito da gentiluomini senza alcuna battaglia per la priorità, era qualcosa che si meritava che io vi dedicassi il resto della mia vita.*"

[12] Forse fu per questo che pronunciò una frase che è spesso ricordata: "*I matematici si dividono in due categorie: quelli bravi e i testoni. Io faccio parte dei testoni*".

[13] Mikhail Alekseevich Lavrentev (1900-1980), matematico russo.

[14] Lars Valerian Ahlfors (1907-1996), matematico finlandese.

L'argomento che tanto appassionò Lipman Bers era la teoria delle funzioni pseudo-analitiche e la mappatura quasi-conforme[15]. Nel procedere delle sue ricerche, Bers scopre continuamente, con sorpresa, che gran parte delle sue conclusioni sono già state descritte in precedenza da un matematico tedesco: Paul Teichmüller. Durante quasi tutta la sua vita, Lipa si deve confrontare con le brillanti scoperte del tedesco: le amplia, generalizza, dà dimostrazioni di quello che adesso è noto in letteratura come "Teorema di Teichmüller", le applica alle superfici di Riemann. In altre parole, contribuisce in maniera decisiva a riconoscere e a far conoscere l'eccezionale lavoro che il suo coetaneo nazista aveva prodotto nei momenti in cui si interessava più alla matematica che alle leggi razziali. La strana situazione – un ebreo che prosegue e mette in buona luce il lavoro d'un persecutore di ebrei – veniva spesso fatta notare a Lipa; lui era solito rispondere citando proprio Plutarco, con la frase della "Vita di Pericle" riportata in testa a quest'articolo.

A differenza di Teichmüller, Bers ebbe una maturità ed una vecchiaia serena. Era un insegnante eccezionale, di una chiarezza sopraffina, ed era solito dimostrare teoremi alla lavagna combinandoli con una gran quantità di motti di spirito e costruendo una specie di tensione da libro giallo nell'approssimarsi dei passaggi cruciali della dimostrazione. Era davvero molto amato dai suoi studenti. Fu insignito di molti titoli e onorificenze, arrivò alla presidenza della American Mathematical Society, e fu eletto membro di una gran quantità di Accademie americane e straniere. Non smise mai, però, di partecipare alle battaglie per i diritti umani: gli studenti che protestavano nei campus negli anni '60 e '70 non erano sorpresi di vederlo spesso marciare insieme a loro.

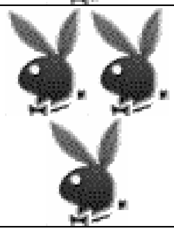
Per rimarcare la differenza tra l'ebreo e il nazista, vale la pena di riportare, così come abbiamo fatto poco sopra per Teichmüller, un brano non matematico della prosa di Lipman Bers:

> *"Nel diventare attivista per i diritti umani si assumono un certo numero di obblighi pesanti. Un attivista per i diritti umani che odia e teme il comunismo deve comunque avere a cuore i diritti umani degli uomini di sinistra dell'America Latina. Un attivista per i diritti umani che simpatizza per i movimenti rivoluzionari dell'America Latina deve anche preoccuparsi per gli abusi perpetrati contro i diritti umani a Cuba e in Nicaragua. Un musulmano devoto deve curarsi anche dei diritti umani dei seguaci della religione Bahai in Iran e della piccola comunità ebraica in Siria, mentre un ebreo fedele a Israele deve anche preoccuparsi dei diritti umani degli arabi di Palestina. E noi, cittadini americani, dobbiamo essere particolarmente sensibili alle violazioni dei diritti umani delle quali il nostro governo è direttamente o indirettamente responsabile, e altrettanto alle violazioni dei diritti umani nel nostro stesso paese, perché anche queste accadono."*

Mettendoli a confronto, sembra quasi impossibile trovare spiriti e dialettiche più diverse; due indubbie intelligenze, certo, ma dirette verso visioni del mondo diametralmente opposte. E non può non sorprendere ancora di più lo strabiliante potere del linguaggio matematico: nemici della stessa epoca, su fronti e confini diversi, con una assoluta differenza di posizione di fronte al mondo, sono riusciti ad essere perfettamente assonanti nella produzione delle loro ricerche e opere matematiche. Forse la matematica è qualcosa di più che un linguaggio: ma anche se la si considerasse solamente tale, è impossibile non stupirsi di fronte alla sua capacità di mettere in comunicazione anime tanto diverse.

[15] Sia detto a futura discolpa: "mappatura quasi-conforme" è la nostra arbitraria e letterale traduzione di "*quasiconformal mapping*". È possibile che il termine tecnico italiano sia diverso ma noi, dall'alto della nostra sublime ignoranza matematica, non lo sappiamo.

2. Problemi

	Rudy d’Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Era una Notte Buia & Tempestosa?			
Sì, lo era, ma questo è peggio			

2.1 Era una Notte Buia & Tempestosa?

No, non avete sbagliato rubrica. Semplicemente, in quanto estensore di alcune parti di questa rivista, ho deciso *[Se non si è capito: Rudy speaking]* per quanto possibile, di *non* scrivere i vari pezzi “quando serve”, ma “quando trovo il materiale”[16]. Questo problema è stato reperito, giustappunto, in una NB&T, e faceva pure freddo: ne è stata decisa l’ambientazione, il tutto è stato trasformato in un appunto su un foglietto che è stato archiviato e ripescato quando si è reso disponibile il tempo per scriverlo.

Tutta questa premessa per dirvi che mentre stiamo pestando sui tasti, il termometro segna la bellezza di *ventotto* gradi, il sole splende e le nuvole sono sparite dall’orizzonte: mi sento un filino dissociato, come potreste aver notato dal miscuglio di prime persone (singolari e plurali) che sono state sin qui esibite.

Comunque: nel problema piove. Di brutto e di stravento.

Per ovviare alla prima qualifica delle idrometreore (piove di brutto), avete a disposizione *quattro* ombrelli; ma visto che, come accennato, il monossido di diidrogeno arriva anche in obliquo (...e da tutte le parti! non ci facciamo mancare niente, a schifezza della giornata), gli ombrelli da soli servono a poco: fortunatamente, avete a disposizione anche un telo di plastica sotto il quale accogliere voi e i vostri amici (che sono in un bel numero e senza ombrelli): la vostra intenzione è di mettere il telo di plastica sopra gli ombrelli aperti, per avere una zona ragionevolmente riparata, e per dare una certa qual solidità alla struttura decidete che ognuno degli ombrelli (aperti, circolari con raggio unitario e tenuto con il manico verticale) debba essere in contatto con altri due ombrelli, eccezion fatta per il primo e l’ultimo che sono in contatto con un solo altro simile: volendo rallegrare i vostri amici (che la prossima volta col cavolo, che vengono in montagna con voi), mettete la cosa nella forma “in pratica, per $i = 1, 2, 3$, O_i deve essere in contatto con O_{i+1}“[17].

Siete intenzionati a coprire l’area massima, rispettando questa regola: meglio star lontano dai vostri accompagnatori, in condizioni di questo genere.

[16] Il che porta, tra le altre cose, ad avere Cover per un paio d’anni, Zugzwang! per quasi tutto il millennio (grazie ad Angiolino, a Sidoti e a mia suocera, quella delle torte – ne ho una sola, spiritosi!) ma ad essere preoccupato per i Paraphernalia: quelli, per scriverli, ci vuole lo stimolo di una *deadline*.

[17] Tutto questo perché non sapete come si dice in italiano *convex hull*. Qualcuno ha un’idea? Copertura convessa? Comunque, è quello.

Bene, che forma date alla struttura ombrellifera? E che area coprite?

2.2 Sì, lo era, ma questa è peggio.

E stavolta non abbiamo neanche gli ombrelli. In compenso, abbiamo dei paletti avanzati da un vecchio problema[18]: due di lunghezza tre, due di lunghezza cinque, uno di lunghezza due e uno di lunghezza quattro. Inoltre, abbiamo anche a disposizione un robusto telo di plastica.

Questa volta, la nostra intenzione è di organizzare una tenda approssimativamente tetraedrica (dove "approssimativamente" significa che non si sogna neanche di essere un tetraedro regolare, e non ci poniamo problemi relativi alla stabilità) avente il massimo volume: sotto la pioggia, con un inchiostro "lavabile e non tossico" (come c'è scritto su tutte le scatole di pennarelli) e dotati solo di un cartiglio di dimensioni infime, vostro compito è progettare la forma di questa tenda.

Oh, valgono anche le soluzioni comodamente calcolate in salotto sorseggiando pensosi un cognac stravecchio e accarezzando il *golden retriever*[19]. Non aspettate che piova, per risolverlo!

3. Bungee Jumpers

Provate che $\sqrt[3]{2}$ non può essere espresso nella forma $p+q\sqrt{r}$, per $p,q,r \in Q$ (razionali).

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

I casi sono due: o voi siete troppo prolifici dal punto di vista letterario, o noi abbiamo troppi amici.

4.1 Matematica in Relax

Chiunque frequenti il *blog* di Maurizio Codogno (http://www.xmau.com/notiziole) e incappi in una recensione, ha una certezza a dir poco matematica: l'ultima frase sarà una critica (nel senso negativo del termine) del libro in oggetto, seguito dalla considerazione che forse, tutto sommato, potrebbe valere la pena di comprarlo[20]; la cosa ci ha sempre lasciato piuttosto perplessi anche perché, potendo il nostro neurone mantenere circa un concetto alla volta, quello che tende a restare non è il possibilista condizionale che chiude la frase, ma il giudizio solitamente negativo che lo precede. Quindi, cominciamo dai punti negativi.

Il primo, gravissimo ed imperdonabile, purtroppo non possiamo imputarlo a .mau.: il nostro ufficio postale, come tutti sanno, è casa di Doc, il quale apre evidentemente i pacchetti che vengono inviati a lui: quando ha consegnato il libro a Rudy, questo *era privo della fascetta*! Odiamo ripeterci, ma "imperdonabile" ci pare l'unica parola adatta[21].

La struttura del libro è pienamente chiarita dal sottotitolo: "99 *problemi da risolvere e capire con l'aiutino e il post-scriptum*": e qui Rudy, che sta scrivendo queste note, si ritrova spazio per un aneddoto, una battutaccia e un apprezzamento.

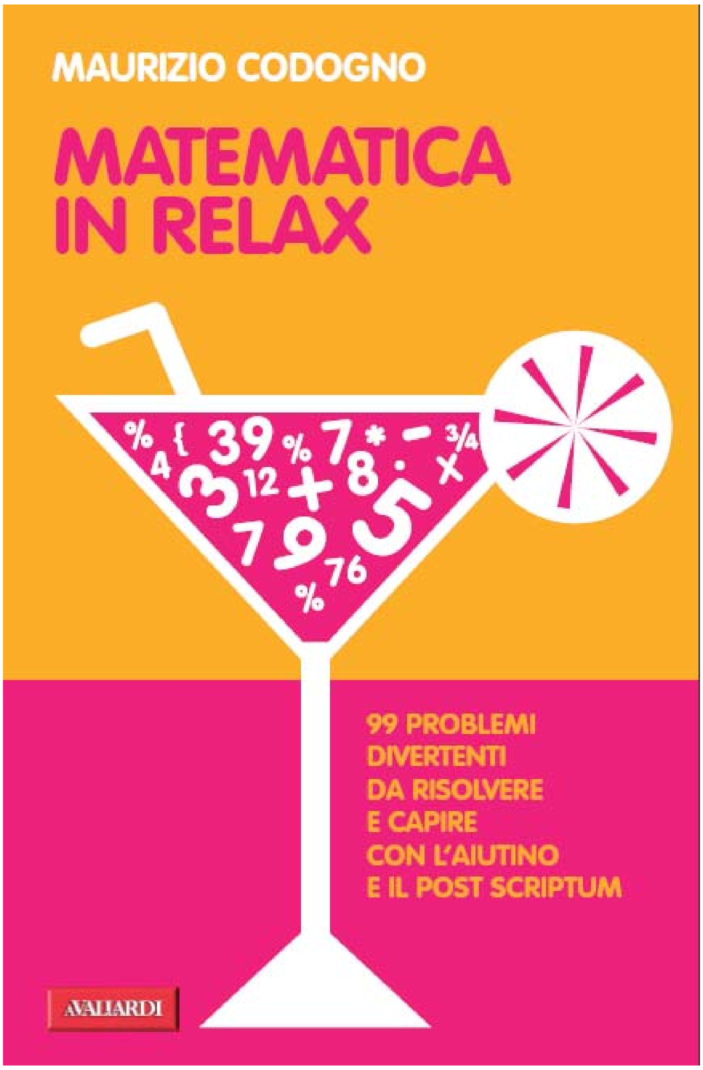
[18] No, non vi diciamo quale: troppo facile, altrimenti!

[19] Questo ***non*** è un aiutino.

[20] Nei casi peggiori, di farselo prestare: sottinteso che, se non avete intenzione di rendere il libro, potete sempre far presente all'amico la recensione di .mau. e spiegargli che non ha perso molto.

[21] No, *non citiamo* la fascetta. Sì, Rudy è ancora arrabbiato adesso.

La sera in cui Doc ha consegnato il libro a Rudy (senza fascetta... humpf!), era una delle rarissime occasioni in cui l'intero Comitato di Redazione è riuscito ad incontrarsi per un paio d'ore di birreria: parlando d'altro, Treccia si è esibita in un "...e soprattutto, che non si debba sempre saltellare da una parte all'altra per andare a vedere la soluzione del problema!".



Vi consigliamo di prendere un mezzo pubblico, andare in libreria, comprare il libro, incontrarvi con un amico e convincerlo a riaccompagnarvi a casa sempre con i mezzi pubblici: in questo modo, sarete in possesso di *tre* biglietti usati, che rappresentano il numero strettamente necessario di segnalibri per riuscire a leggere il libro di .mau.: infatti, è organizzato in una sezione *Problemi*, per ciascuno dei quali c'è un rimando alla sezione *Aiutini* dalla quale, se proprio non ce la fate, vi trovate costretti a saltare alle *Soluzioni*: nella Sua Infinita Bontà, .mau. fa seguire il *Post-Scriptum* alla soluzione, quindi il quarto biglietto è inutile.

Bene, non resta che l'apprezzamento: questo, lo abbiamo considerato un punto enormemente positivo del libro, quindi lo prendiamo un po' alla lontana e sul filosofico.

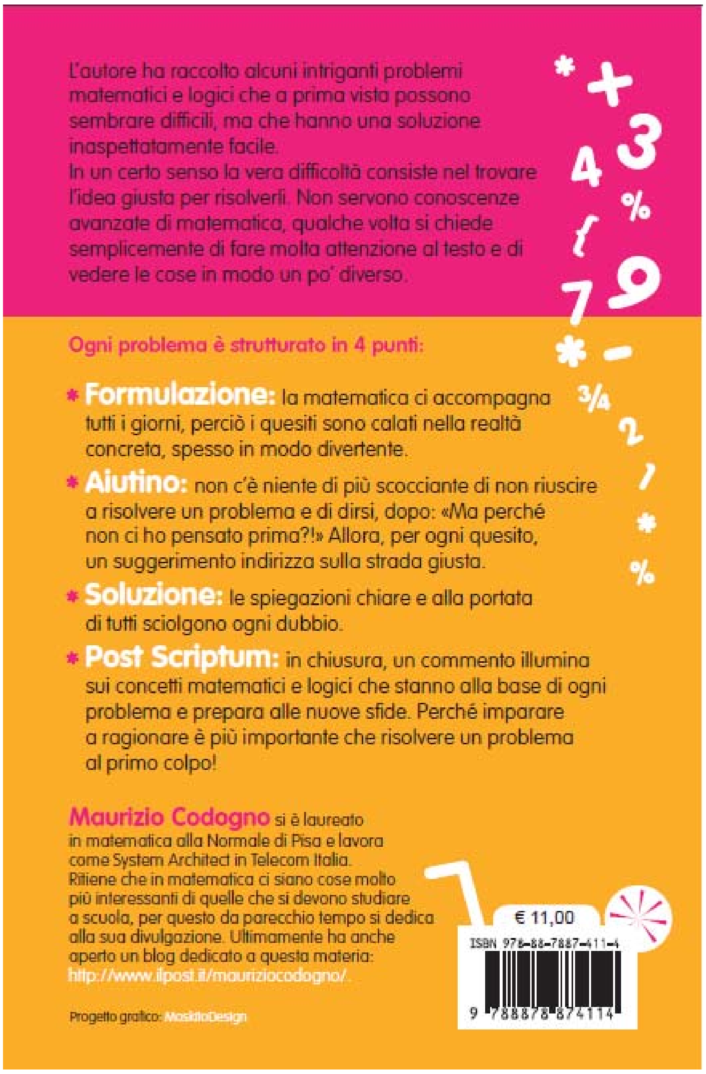
Ma quando comprate un libro di problemi di matematica, per cosa lo comprate? Per i problemi o per le soluzioni? Francamente, quando arriviamo alla fine dei problemi (avendo opportunamente sbirciato le soluzioni) e l'indice della mano sinistra che ci fa da segnalibro è ancora scandalosamente vicino all'inizio, ci restiamo un po' male, anche se la cosa ha una sua logica: un problema "bello" richiede, di solito, spiegazioni e soluzioni ben più lunghe della sua esposizione.

Ci siamo tolti lo sfizio di andare a compulsare due delle nostre raccolte preferite di problemi[22] e abbiamo calcolato quanto pesa la componente "problemi" in ognuno di essi: bene, nel primo avete, su un totale di 148 pagine, 63 pagine dedicate ai problemi, il che significa un fattore 0,426; nel secondo, un tomazzo di 452 pagine, uno striminzito 79 rappresenta la componente problemistica: fattore 0,175. E nessuno dei due libri vi dice *quanti* problemi contiene.

[22] No, non vi diciamo quali: una ci arriva da .mau., è considerato "raro" e non vorremmo suscitare invidie; l'altro è illegale, in quanto lo abbiamo fotocopiato interamente (fuori stampa, quindi forse non è così illegale, ma per precauzione non ve lo diciamo lo stesso).

Prendiamo ora il libro di .mau.. *In primis*, sin dal sottotitolo sapete che avrete 99 problemi, e sono tutti numerati; *in secundis*, di 212 pagine, 111 sono di problemi! Fattore 0,524, non so se mi spiego: vuol dire che occupano più spazio i problemi delle soluzioni. E se contate nei problemi anche le dieci pagine di “aiutini” (che infatti rappresentano più un problema a sé stante che delle soluzioni: capita raramente che il lettore segua la stessa via risolutiva dello scrittore), arrivate a 0,571. Incredibile.

Non vorremmo a questo punto pensiate che, una volta ricevuto in omaggio il libro, dopo una rapida sfogliata ci si sia seduti al portatile per buttare giù quella che volgarmente viene definita *marchetta*; quindi, vi citiamo le due cose che abbiamo notato.



L'autore ha raccolto alcuni intriganti problemi matematici e logici che a prima vista possono sembrare difficili, ma che hanno una soluzione inaspettatamente facile.
In un certo senso la vera difficoltà consiste nel trovare l'idea giusta per risolverli. Non servono conoscenze avanzate di matematica, qualche volta si chiede semplicemente di fare molta attenzione al testo e di vedere le cose in modo un po' diverso.

Ogni problema è strutturato in 4 punti:

- **Formulazione:** la matematica ci accompagna tutti i giorni, perciò i quesiti sono calati nella realtà concreta, spesso in modo divertente.
- **Aiutino:** non c'è niente di più scocciante di non riuscire a risolvere un problema e di dirsi, dopo: «Ma perché non ci ho pensato prima?!» Allora, per ogni quesito, un suggerimento indirizza sulla strada giusta.
- **Soluzione:** le spiegazioni chiare e alla portata di tutti sciolgono ogni dubbio.
- **Post Scriptum:** in chiusura, un commento illumina sui concetti matematici e logici che stanno alla base di ogni problema e prepara alle nuove sfide. Perché imparare a ragionare è più importante che risolvere un problema al primo colpo!

Maurizio Codogno si è laureato in matematica alla Normale di Pisa e lavora come System Architect in Telecom Italia. Ritiene che in matematica ci siano cose molto più interessanti di quelle che si devono studiare a scuola, per questo da parecchio tempo si dedica alla sua divulgazione. Ultimamente ha anche aperto un blog dedicato a questa materia: http://www.ilpost.it/mauriziocodogno/.

Progetto grafico: MoskitoDesign

€ 11,00

ISBN 978-88-7887-411-4

Il **Problema 71** è molto carino, l'aiutino è un buon indizio che aiuta ma non troppo, la soluzione è ben esposta ma, francamente, quel $\sqrt[4]{27/16\pi}$ che viene sparato lì alla fine non invoglia a fare i calcoli: forse, lasciare il lettore nell'ignoranza del valore esatto (visto che il metodo di calcolo è stato ben esposto nelle righe precedenti) e farglielo calcolare da solo sarebbe stata una migliore strategia: il vedere un numeraccio del genere non fa di sicuro venir voglia di mettersi a verificarlo.

Indi, abbiamo un dubbio per quanto riguarda il **Problema 87**: Tristano è obbligato a scommettere sul rosso o può anche dire che la carta è nera? Perché nel secondo caso, se Tristano sta zitto sin quando Isotta scopre la penultima carta *(e quel marpione ha contato le carte nere precedenti)*, potrà scommettere sull'ultima con la certezza di vincere.

Interrompiamo la recensione per un comunicato urgente dalla camera di fianco: i Validi Assistenti di Laboratorio dei Rudi Mathematici, Alberto e Fred, ringraziano per essere citati nel **Problema 90**. *Anche se secondo loro il problema non si pone, in quanto uno viaggia a cioccolato al latte, l'altro a fondente. Molto meglio il* **Problema 42**, *visto che in questo caso le tavolette di cioccolato sono due.*

Allora, dovremmo chiudere, ma non possiamo: gli ultimi punti non erano pienamente positivi. Allora:

1. Andate a Milano, Stazione Centrale
2. Raggiungete la libreria “Feltrinelli Express”, al piano dei binari (l'ultimo)
3. Al fondo, c'è il reparto “Scienze” (sempre in posti fetenti... bah).

4. In basso a sinistra guardando, l'unico libro per il quale non dovete storcere la testa per leggere il titolo (è visibile la copertina, anziché il dorso) è quello del Nostro. Compratelo.

Secondo noi è .mau. che nottetempo, in Centrale, si aggira e li rigira.

Titolo	Matematica in Relax - 99 problemi divertenti da risolvere e capire con l'aiutino e il post scriptum
Autore	Maurizio Codogno
Editore	A. Vallardi
Data di Pubblicazione	Febbraio 2011
Prezzo	11 Euro
ISBN	978-88-7887-411-4
Pagine	212

5. Soluzioni e Note

Maggio.

Un mese che al suo interno contiene la festa dei lavoratori e il Towel day[23], ma soprattutto il mese *clou* delle celebrazioni redazionali, concludendo la stagione dei compleanni con quello del nostro Postino-Autista-Tesoriere-Tuttofare Piotr (Doc) Silverbrahms.

6 *Chi l'ha visto?*

Sappiamo già che gli farete gli auguri, perché siamo consapevoli che lui, faccia pubblica del nostro team affiatato, è il più amato e coccolato di tutti, ma ve lo ricordiamo lo stesso.

Che raccontarvi? Aprile è stato crudele come promesso, ci ha portato via grandi pensatori che non saranno dimenticati, sinceramente ci auguriamo un maggio più gentile e comprensivo.

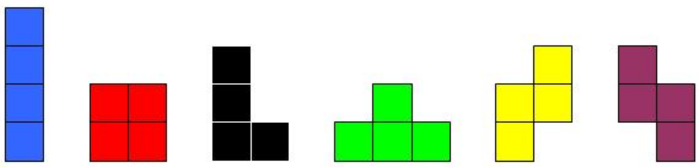
Perdonateci quindi se queste note sono scarne: in compenso i nostri Grandi Solutori sono tornati a rimpolpare il resto della rubrica, per cui passiamo subito al sodo.

5.1 [146]

Sfortunatamente, nessuno ci ha scritto per risolvere il problema del tetris proposto due mesi fa, costringendoci a riprendere una vecchia pratica e passarvi quello che dice il Capo. Ve lo siete voluto!

5.1.1 Vin-Tage

L'augurio è di lunghe giornate piovose, in modo da poter costruire una buona base di conoscenza in merito. OK, era un problema decisamente "aperto", ma che nessuno ci abbia nemmeno provato è, a dir poco seccante. E prima che vi lamentiate che era un problema difficile e mal posto, vi diciamo subito che viene da



7 *I pezzi in gioco*

[23] Non potete non sapere che cos'è, ci rifiutiamo di darvi una spiegazione. Googlatelo.

Martin Gardner, e che l'originale era posto ancora peggio: infatti, chiedeva se esistevano strategie per un qualche giocatore su una qualsiasi scacchiera per i tetramini: dava poi la soluzione in forma estremamente stringata, tanto che la nostra idea originale era di presentarlo come Quick & Dirty. Segue la traduzione del pezzo di Gardner, visto che non ci risulta sia mai stato tradotto in italiano.

[Se considerate gli ultimi due equivalenti] *il primo giocatore vince occupando la casella centrale della scacchiera e poi giocando in modo opposto al secondo giocatore: il primo vincerà solo all'ultima mossa, ma la vittoria è garantita.*

La scacchiera più piccola sulla quale esistano delle strategie per il primo, il terzo e il quarto pezzo hanno rispettivamente ordine 7, 4 e 5 (sempre vittoria per il primo giocatore: come vedremo dopo, il secondo giocatore non vince mai); stranamente, il secondo pezzo è pari su scacchiere di qualsiasi ordine[24].

In giochi di questo tipo, il primo avversario può sempre evitare di perdere. Infatti, supponiamo il secondo giocatore abbia una strategia vincente: il primo giocatore può allora eseguire una mossa arbitraria, diventando automaticamente il secondo giocatore: nel caso ad un certo punto la strategia richieda effettivamente di giocare in quella *cella, semplicemente farà un'altra mossa arbitraria. Ossia, se il secondo giocatore avesse una strategia vincente, il primo giocatore potrebbe rubarla e vincere, il che è una contraddizione.*

Esistono svariati problemi irrisolti rispetto a questa forma di filetto: ad esempio, il professore di cui parliamo in nota garantiva un premio a chi, entro il 1990, fosse riuscito a dimostrare una delle due seguenti affermazioni relativamente ad un oggetto formato da uno dei due ultimi pezzi in figura con la "gamba" prolungata di altri due quadretti:

- *Esiste una scacchiera di ordine n sulla quale il primo giocatore è vincente*
- *Su qualsiasi ordine di scacchiera, la partita è patta.*

Il fatto che nel primo caso il premio fosse di cinquanta dollari per raddoppiare nel secondo caso, ci fa pensare che Harary abbia delle ipotesi in merito.

Tutta questa famiglia di giochi ha una variante immediata: entrambi i giocatori disegnano lo stesso simbolo, e vince il primo che crea il polimino concordato: evidentemente qui non sono possibili i pareggi, e il gioco può sembrare semplice: al momento, le uniche notizie che abbiamo sono che il primo giocatore vince sempre se il pezzo obiettivo è fatto come una linea di lunghezza tre (il primo in figura senza un pezzo): l'analisi della scacchiera di ordine quattro è decisamente complessa, e quelle di ordine cinque sono ancora terra incognita.

5.2 [147]

5.2.1 La primavera è come il Natale...

Questo è il problema del mese, per quanto riguarda il numero di soluzioni… ma prima di tutto riprendiamo il testo:

> *Il Capo sfida i VAdLdRM a implementare un gioco con un foglio elettronico: generiamo un numero casuale distribuito uniformemente tra zero e uno; poi generiamone un altro e andiamo avanti sin quando i numeri decrescono, fermandoci quando ne estraiamo uno maggiore del precedente. Quante generazioni di numeri casuali vi aspettate di fare prima di fermarvi? E in media qual è il numero più basso che ottenete?*

[24] Nel 1987 ***Frank Harary***, che insegna(va) Teoria dei Grafi all'Università del Michigan, aveva promesso di pubblicare le dimostrazioni formali di queste affermazioni in un libro di prossima uscita: non abbiamo ulteriori notizie in merito.

Naturalmente il Perfidissimo Capo ha pensato un'estensione degna di lui:

> *Sempre generando numeri casuali, si parte da zero e si genera un numero che si richiede maggiore del numero precedente; il secondo numero generato deve essere minore del precedente, il terzo deve essere maggiore, e avanti così, alternando le richieste. Qual è la durata media del gioco?*

Bene, cominciamo con il regalo di compleanno di ***Cid***, una soluzione apprezzatissima che pubblico per prima:

> Il valore atteso del numero di generazioni coincide con il numero: $e = 2{,}71828...$ In media, il numero più basso che si ottiene è uguale a: $3 - e = 0{,}281718...$ La durata media del secondo gioco è uguale a: $3{,}408...$
>
> <u>Dimostrazione</u>
>
> La probabilità che il gioco termini dopo *k* generazioni di numeri casuali è uguale alla probabilità che tutti i numeri precedenti vadano in ordine decrescente moltiplicata per la probabilità che l'ultimo numero generato non sia più piccolo di tutti i numeri generati in precedenza.
>
> Siccome i numeri sono generati mediante una distribuzione casuale uniforme, la probabilità che il numero *n*-esimo sia il più piccolo tra i primi *n* è uguale a: $\frac{1}{n}$.
>
> La probabilità che il *k*-esimo numero non sia il più piccolo tra i primi *k* numeri generati è uguale a: $\frac{k-1}{k}$.
>
> La probabilità che il gioco termini dopo *k* generazioni è uguale a: $\frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{k-1}{k} = \frac{1}{(k-2)!} \cdot \frac{1}{k}$.
>
> Il valore atteso risulta quindi uguale a: $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(k-2)!} \cdot \frac{1}{k} \cdot k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \right) = e$
>
> In un insieme di *k* valori distribuiti uniformemente tra 0 e 1, il valore minimo ha mediamente un valore uguale a $\frac{1}{k+1}$ quindi per trovare il numero più basso che mediamente si ottiene devo fare la sommatoria dei prodotti della probabilità di terminare in *k* volte moltiplicata per $\frac{1}{k+1}$. Quindi il numero più basso che si ottiene, in media, è: $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(k-2)!} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k+1} \right) = 3 - e$
>
> <u>Riguardo al secondo gioco</u>:
>
> Per calcolare la durata media del secondo gioco, sono partito calcolando le probabilità di finire in k volte per valori bassi di *k*
>
> Ho trovato i seguenti valori: $P_1 = 0$, $P_2 = \frac{1}{2}$, $P_3 = \frac{1}{6}$, $P_4 = \frac{1}{8}$, $P_5 = \frac{3}{40}$, $P_6 = \frac{7}{144}$, $P_7 = \frac{31}{1008}$, $P_8 = \frac{113}{5760}$, $P_9 = \frac{647}{51840}$, $P_{10} = \frac{9613}{1209600}$.

Osservando i valori di P_k , speravo di riuscire a determinare una regola generale per calcolare i valori di P_k per *k* che varia da 1 a ∞, purtroppo non ci sono riuscito, per cui mi sono limitato ad approssimare il valore atteso nel seguente modo: sono partito calcolando: $\sum_{k=1}^{10}(k \cdot P_k) = \frac{3053}{945} = 3{,}2307\ldots$, poi notando che: $\frac{P_{k+1}}{P_k}$ tende ad un valore costante, calcolo la seguente approssimazione per i termini restanti della successione di P_k. Per $h \geq 0$ ritengo che $P_{10+h} \approx P_{10} \cdot \left(\frac{P_{10}}{P_9}\right)^h$, quindi il valore atteso è circa uguale a $\sum_{k=1}^{10}(k \cdot P_k) + \sum_{k=11}^{\infty} P_{10} \cdot \left(\frac{P_{10}}{P_9}\right)^{k-10} = \frac{3984866264473}{1169144932320} \approx 3{,}408....$

Con questo metodo di approssimazione, si riescono ad ottenere solo quattro cifre significative del risultato; pertanto nel risultato della frazione ho preso in considerazione solo le prime quattro cifre più significative.

Una versione molto veloce è giunta anche da ***Alberto R.***:

Siano X1, X2, ...X*n* *n* numeri prodotti dal randomizzatore elencati in ordine di tempo: X1 primo generato, X2 secondo generato etc.

Se li disponiamo in ordine di grandezza gli indici risulteranno permutati, ma delle *n*! permutazioni possibili ed equiprobabili, una sola risponde alla condizione di successione decrescente imposta per proseguire il gioco. Concludiamo che 1/*n*! è la probabilità che si presentino almeno *n* numeri decrescenti.

A noi, però, serve la probabilità P(*n*) che si generino esattamente *n* numeri decrescenti, cioè l' (*n*+1)esimo deve essere quello che interrompe il gioco.

Applicando la regoletta: Prob(esattamente *n*) = Prob(almeno *n*) – Prob(almeno *n*+1) otteniamo

P(*n*) = 1/*n*! – 1/(*n*+1)! = *n*/(*n*+1)!

Il valor medio di *n* è la somma della serie *n*·P(*n*) che converge ad *e*–1.

Per quanto riguarda il valor medio dell'ultimo numero generato, occorre considerare che n numeri casuali con densità di probabilità uniforme in un intervallo (poniamo 0-1) dividono l'intervallo stesso in *n*+1 parti statisticamente uguali, quindi il più piccolo di essi Xmin (che definisce l'intervallo 0-Xmin) vale mediamente 1/(*n*+1), e ciò indipendentemente dal fatto che i numeri siano usciti in successione decrescente o crescente o comunque caotica. Nel nostro caso, quindi, se il gioco si è arrestato dopo l'uscita di *n* numeri decrescenti, Xmin coincide con Xn e il suo valor medio sarà la somma della serie P(*n*)·1/(*n*+1) che converge a 0.40037967700 (cos'è questo numero?)

Nel gioco modificato la condizione X1 > X2 > X3 > X4 >.... è sostituita dalla nuova:

X1 > X2 < X3 > X4 <.... che è una successione sali e scendi, diciamo "a denti di Sega".

Detto S(*n*) il numero di siffatte permutazioni, il problema si risolve ripetendo paro paro il ragionamento del caso precedente, ma usando S(*n*)/*n*! in luogo di 1/*n*! come probabilità di ottenere almeno *n* numeri rispondenti alle condizioni imposte. Peccato che, nonostante i miei sforzi, non sono riuscito a trovare la funzione S(*n*).

Posso solo dire che per n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 S(n) vale rispettivamente 2, 5, 16, 61, 272, 1385, 7936, quindi S(n)/n! decresce in modo sensibilmente più lento di 1/n! cioè il gioco dura più a lungo, ma qui mi fermo.

E – *last but not least* – la versione di ***Trentatré***:

Se $x \equiv x_1,\ x_2,\ x_3 \dots x_N$ sono i numeri casuali in [0..1] delle successive estrazioni, una sequenza di estrazioni può essere rappresentata come il punto $P(x, x_2, x_2 \dots x_N)$ in uno spazio di coordinate a N dimensioni. Lo spazio di tutti i punti possibili è un ipercubo di lato e volume unitario.

Se il numero x è soggetta al vincolo $(a < x < b)$, la probabilità di x si può scrivere

$$q(a < x < b) = b - a = \int_a^b dx\,.$$

La probabilità che una sequenza di estrazioni soddisfi alle condizioni $(a_K < x_K < b_K)$ è uguale al volume V dei punti P soggetti alle stesse condizioni, cioè

$$p = \int dV = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N$$

che è anche il prodotto delle singole probabilità. Nel problema ogni condizione sulla variabile x_K dipende solo dalla variabile precedente x_{K-1}; pertanto $\int dV$ risulta immediatamente integrabile (a partire da destra).

<u>problema I</u>

Numeri casuali di valore x_K (K = 1, 2, 3…) decrescenti fino al valore x_{N+1} maggiore di x_N.

Con p_N : probabilità dell'arresto dopo N+1 estrazioni ($x_{N+1} > x_N$) , l'arresto avviene in 2 estrazioni se $x_2 > x$, in 3 estrazioni se $x_2 < x$ e $x_3 > x_2$ ecc. - dalle precedenti

$$p_1 = q(0 < x < 1) \cdot q(x < x_2 < 1) = \int_0^1 dx \int_x^1 dx_2 = \int_0^1 dx(1-x) = 1/2$$

$$p_2 = q(0 < x < 1) \cdot q(0 < x_2 < x) \cdot q(x_2 < x_3 < 1) = \int_0^1 dx \int_0^x dx_2 \int_{x_2}^1 dx_3$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x dx_2 \cdot (1 - x_2) = \int_0^1 dx\,(x - x^2/2) = 1/3 \text{ ecc.}$$

Il processo genera (a partire da destra) un polinomio $S(x)$ a cui vanno applicati successivamente integrali delle tre forme A: $\int_0^1 dx$, B: $\int_0^x dx$ e a C: $\int_x^1 dx$. Simbolicamente si può scrivere

$p_1 = AC,\ p_2 = ABC \dots p_N = AB^{N-1}C$ (B^K : integrale B ripetuto K volte)

Le difficoltà nascono dall'integrale C (che aumenta di 1 i fattori di $S(x)$) , ma vale la $\int_0^1 dx = \int_0^x dx + \int_x^1 dx$ cioè $C = A - B$.

Si ha pertanto $p_N = AB^{N-1}(A - B) = AB^{N-1}A - AB^N$ ma

$A = 1,\ AB = 1/2,\ AB^2 = 1/3!$ e in generale $AB^N = 1/(N+1)!$ da cui

1) $$\boxed{p_N = \frac{1}{N!} - \frac{1}{(N+1)!} = \frac{N}{(N+1)!}}$$ o in percentuale

$$p_N(\%) = 50.00\,|\,33.33\,|\,12.50\,|\,3.33\,|\,0.69$$

Vale naturalmente la

$$\sum_{N=1}^{\infty} p_N = \sum_{N=1}^{\infty}\left(\frac{1}{N!} - \frac{1}{(N+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots = 1 \cdot$$

La media del numero x_N è data da $\langle x_N \rangle = \dfrac{\int x_N\, dV}{\int dV} = \dfrac{1}{p_N}\int x_N\, dV$, per esempio

$$\langle x_1 \rangle = \frac{1}{p_1}\int_0^1 (x)\,dx \int_x^1 dx_2 = 2\int_0^1 dx\,(x - x^2) = 1/3$$

$$\langle x_2 \rangle = \frac{1}{p_2}\int_0^1 dx \int_0^x (x_2)\,dx_2 \int_{x_2}^1 dx_3 = 3\int_0^1 dx \int_0^x x_2(1-x_2)\,dx_2 = 3\int_0^1 (x^2/2 - x^3/3)\,dx = 1/4 \cdot$$

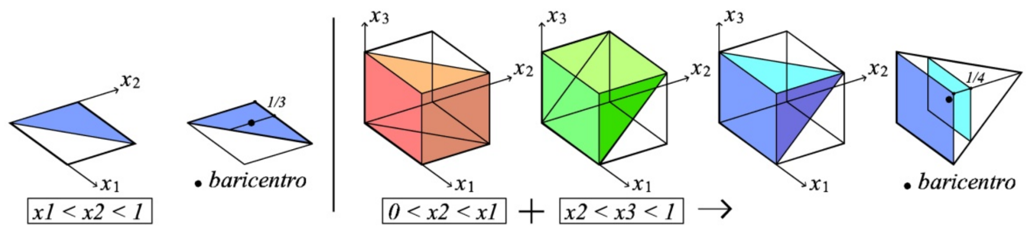
In generale si può scrivere, per $N > 1$, $\quad p_N \langle x_N \rangle = AB^{N-2}DC \quad$ con $\quad D = \int_0^x x\,dx$ ma

$$DC = \int_0^x x\,dx \int_x^1 dx = \int_0^x x\,dx(1-x) = \frac{x^2}{2!} - 2\frac{x^3}{3!} = B^2 - 2B^3$$ e quindi

$$p_N \langle x_N \rangle = AB^N - 2AB^{N+1} = \frac{1}{(N+1)!} - 2\frac{1}{(N+2)!} = \frac{N}{(N+2)!}$$ e dividendo per p_N

2) $$\boxed{\langle x_N \rangle = \frac{1}{N+2}}$$

Le 1) e 2) hanno (per i casi N = 1, 2) una semplice interpretazione geometrica (v. figura). Nel caso N = 1 il "volume" V dei casi favorevoli è un triangolo, di area $V = p_1 = 1/2$. Nel caso $N = 2$ il vincolo $(0 < x_2 < x_1)$ limita i punti nell'area rosa e il vincolo $(x_2 < x_3 < 1)$ nell'area verde; la intersezione dei due genera la piramide blu di volume $V = p_2 = 1/3$. Il valore di $\langle x_N \rangle$ è uguale alla distanza del baricentro dalla base (1/3 per il triangolo, 1/4 per la piramide).



problema II

Numeri casuali di valore x_K (K = 1, 2, 3…) con $x_2 > x_1$, $x_3 < x_2$ $x_4 > x_3 \ldots$ fino a che x_{N+1} non viola le regola.

Con p_N: probabilità dell'arresto dopo N+1 estrazioni, l'arresto avviene in 2 estrazioni se $x_2 < x$, in 3 estrazioni se $x_2 > x$ e $x_3 > x_2$ ecc. - come nel sopra si ha

$$p_1 = q(0 < x < 1) \cdot q(0 < x_2 < x) = \int_0^1 dx \int_0^x dx_2 = \int_0^1 x\,dx = 1/2$$

$$p_2 = q(0 < x < 1) \cdot q(x < x_2 < 1) \cdot q(x_2 < x_3 < 1) = \int_0^1 dx \int_x^1 dx_2 \int_{x_2}^1 dx_3$$

$$= \int_0^1 dx \int_x^1 dx_2 \cdot (1 - x_2) = \int_0^1 dx\,(1/2 - x + x^2/2) = 1/6 \text{ ecc.}$$

Simbolicamente : $p_1 = AB$, $p_2 = ACC$, $p_3 = ACBB$, $p_4 = ACBCC$ ecc.

Per la natura del problema (si possono cambiare tutti sensi delle diseguaglianze senza cambiare il risultato) , nella sequenza che segue la *A* si possono scambiare *B* e *C* - valgono infatti le

3) $\qquad p_1 = AB = AC$, $p_2 = ACC = ABB$, $p_3 = ACBB = ABCC$ ecc.

Gli integrali si possono trasformare applicando la 3) e le seguenti regole

- eliminazione dei *C* con la $C = A - B$
- eliminazione degli *A* finali e sostituzione $A^k \to A$ (per la $A = \int_0^1 dx = 1$)
- separazione dei gruppi AB^k (ogni *A* trasforma la parte a destra in una costante)
- sostituzione $AB^k \to 1/(k+1)!$

Si ottiene

$$p_1 = AB = AC = 1/2$$

$$p_2 = ACC = AAC - ABC = p_1 - ABA + ABB = p_1 - 1/2! + 1/3!$$

$$p_3 = ACBB = AB^2 - AB^3 = p_2 - 1/4!$$

$$p_4 = ACBCC = ABCC - AB^2CC = p_3 - AB^2AC + AB^3C = p_3 - p_1/3! + 1/4! - 1/5!$$

$$p_5 = ACBCBB = ABCB^2 - AB^2CB^2 = p_4 - AB(A-B)B^2 = p_4 - AB^2AB^2 + AB^5 = p_4 - p_2/3! + 1/6! \text{ ecc.}$$

Valgono cioè le relazioni ricorsive

4) $\qquad p_1 = 1/2!$

$$p_2 = p_1 - 2/3!$$

$$p_3 = p_2 - 1/4!$$

$$p_4 = p_3 - p_1/3! + 4/5!$$

$$p_5 = p_4 - p_2/3! + 1/6!$$

$$p_6 = p_5 - p_3/3! + p_1/5! - 6/7!$$

$$p_7 = p_6 - p_4/3! + p_2/5! - 1/8!$$

$$p_8 = p_7 - p_5/3! + p_3/5! - p_1/7! + 8/9! \text{ ecc.}$$

da cui si calcolano i p_N ; i valori espliciti per $N = 1..8$ sono

5) $$\boxed{(N+1)!\,p_N = 1,\ 1,\ 3,\ 9,\ 35,\ 155,\ 791,\ 4259\ldots}$$

In percentuali

$$p_N(\%) = 50.00\,|\,16.66\,|\,12.50\,|\,7.50\,|\,4.86\,|\,3.08\,|\,1.96\,|\,1.25$$

Sommando le 4) si ottiene la funzione generatrice

6) $$F(X) = \sum_{N=1}^{\infty} p_N X^{N+1} = 1 + \frac{(X-1)(1-\sin X)}{\cos X}$$

da cui si ha, come deve essere

$$\sum_{N=1}^{\infty} p_N = F(1) = 1.$$

Dalla 6) i p_N si possono ottenere per derivazione con $(N+1)!\,p_N = \left(F^{(N)}(X)\right)_{X=0}$.

La media del numero x_N è ancora $\langle x_N \rangle = \dfrac{\int x_N\,dV}{\int dV} = \dfrac{1}{p_N}\int x_N\,dV$; per esempio

$$\langle x_1 \rangle = \frac{1}{p_1}\int_0^1 (x)\,dx \int_0^x dx_2 = 2\int_0^1 dx\,x^2 = 1/3$$

$$\langle x_2 \rangle = \frac{1}{p_2}\int_0^1 dx \int_x^1 (x_2)\,dx_2 \int_{x_2}^1 dx_3 = 6\int_0^1 dx \int_x^1 x_2(1-x_2)\,dx_2 = 6\int_0^1 (1/6 - x^2/2 + x^3/3)\,dx = 1/2\,.$$

La sequenza di integrali di $p_N \langle x_N \rangle$ è la stessa di p_N, dove al penultimo integrale si aggiunge la variabile (x) - per 3) la sequenza di p_N ($N > 1$) si può sempre terminare con BB e basta la sostituzione $BB \to \int_0^x (x)\,dx \int_0^x dx = x^3/3 = 2B^3$. Per i numeri $q_N = (p_N/2)\langle x_N \rangle$ si ha pertanto

$$p_2 = ABB \to q_2 = AB^3$$

$$p_3 = ACBB \to q_3 = ACB^3$$

$$p_4 = ABCBB \to q_4 = ABCB^3$$

$$p_5 = ACBCBB \to q_5 = ACBCB^3$$ ecc.

Eliminando gli integrali C nel solito modo si ottengono le

7) $$q_1 = 1/3!$$

$$q_2 = 1/4!$$

$$q_3 = q_1/2 - 2\cdot 3/5!$$

$$q_4 = q_2/2 - 1/6!$$

$$q_5 = q_3/2 - q_1/4! + 3\cdot 5/7!$$

$$q_6 = q_4/2 - q_2/4! + 1/8!$$

$q_7 = q_5 / 2 - q_3 / 4! + q_1 / 6! - 4 \cdot 7 / 9!$

$q_8 = q_6 / 2 - q_4 / 4! + q_2 / 6! - 1/10!$ ecc.

che consentono di calcolare i q_N ricorsivamente; i primi valori di $\langle x_N \rangle = 2q_N / p_N$ sono

8) $$\boxed{\langle x_N \rangle = \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{8}{15}, \frac{14}{27}, \frac{128}{245}, \frac{323}{620}, \frac{3712}{7119}, \frac{11804}{22645} \ldots}$$

I numeri ottenuti corrispondono tutti ai risultati "sperimentali" con prove ripetute.

I valori di $\langle x_N \rangle$ in 8) sono alternativamente superiori e inferiori al valore limite

$$\langle x_N \rangle_{N \to \infty} = \frac{\pi^2 - 8}{\pi(\pi - 2)} = 0.521301\ldots$$

(Ma la dimostrazione è troppo lunga …).

Nientedimeno! Del resto ***Gnugnu*** aveva anche scoperto che, nel secondo caso:

Un cascame della lavorazione: il rapporto tra due successive s_n tende, al crescere di n, a $\pi/2$.

Ce n'è per un altro mese di lavoro, direi!

5.2.2 Compleanno Movimentato

Per il problema di aprile, il Capo mi ha mandato nello spazio, ma per fortuna si è anche dato da fare per procurarmi una torta:

Alice si trova a galleggiare in una zona dello spazio in cui la gravità generata dal resto dell'universo è praticamente nulla. Rudy e Piotr hanno progettato una torta talmente grande che ha un'attrazione gravitazionale propria, se arriva a distanza ragionevole, comincia ad attrarre Alice. Dato un punto A (Alice, ovvio) nei dintorni della torta, che forma dovrebbe avere la torta per garantire il massimo campo gravitazionale in A?

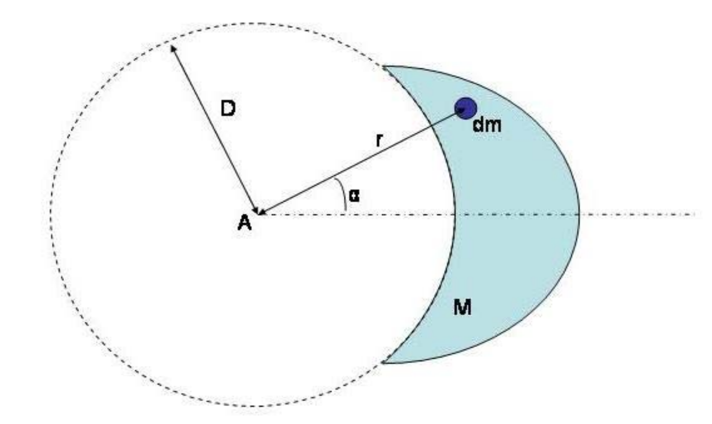
Il Capo (insieme a Piotr e Alice) si trovava in orbita il mese scorso perché nello scrivere l'articolo per Le Scienze si è montato la testa e ha deciso di andare a trovare Paolo Nespoli. Per fortuna siamo tutti tornati con i piedi per terra questo mese, che per festeggiare il Doc vorrei trovarmi senza scafandro... anche perché in quel modo non si può certo mangiare la torta!

Ma veniamo al dunque, cioè alla soluzione che ci è giunta da ***Andrea***, o meglio dal ***Console***:

I quesiti fisico-geometrici li trovo irresistibili! Questo in particolare mi ha incuriosito parecchio, e ho notato che, mettendosi in una particolare condizione (visto che per fortuna l'enunciato è volutamente generico) non è neanche difficile da risolvere.

Si chiede che forma debba avere un oggetto di massa M affinché produca la massima attrazione gravitazionale per un generico punto A. Ovviamente di grande importanza è tenere conto della distanza fra l'oggetto e il punto A. La "furbata" consiste nel non considerare il centro di massa dell'oggetto ma nel definire invece che un oggetto è posto a distanza D da un punto A quando nessun punto del suddetto oggetto si trova ad una distanza inferiore a D da A. Prima di tutto un disegnino per visualizzare il concetto e definire la nomenclatura.

Detto questo, si possono fare alcune considerazioni di carattere intuitivo (che sono quelle che nascondono in genere i peggiori errori e che atterriscono il matematico rigoroso, ma visto che non sono in grado di dimostrarle le lascio così):



8 *Il disegnino di* ***Andrea***.

- *assoluta simmetria assiale del problema*; non c'è infatti motivo che giustifichi una non simmetria del corpo di massa *M*
- COROLLARIO: in virtù della simmetria, le componenti delle forze orientate in direzione diversa da quella assiale si annullano reciprocamente;
- *il confine più vicino ad A del corpo di massa M risulta adagiato sulla superficie di una sfera di raggio D e centro A*. Immaginando infatti una generica semiretta che parte da A e incontra il corpo di massa *M*, ci renderemo conto di come, al fine di massimizzare l'attrazione gravitazionale verso *A* di ogni particella infinitesimale dm posta su tale semiretta, sia sempre più conveniente che tale particella si trovi il più vicino possibile ad A: non è insomma plausibile che ci siano punti "vuoti" nell'intervallo di distanza [D, $D+\varepsilon$] da *A*, per ogni ε e per ogni direzione per la quale la semiretta uscente per *A* incontri il corpo di massa *M*.
- *considerato il piano passante per A e ortogonale all'asse di simmetria del corpo di massa M (che passa per A), il corpo di massa M si trova interamente in uno solo dei due semispazi*. Per convincersene basta considerare che un elemento dm che si trovasse nell'altro semispazio (rispetto a quello in cui si trova "il grosso" del corpo) darebbe origine ad una forza gravitazionale che non potrebbe contribuire all'attrazione fra *A* e il corpo di massa *M* (anzi tenderebbe, considerandolo assieme al suo simmetrico, ad attrarre *A* nel verso opposto).

A questo punto si può passare alla brevissima parte matematica. Con riferimento alla prima immagine, possiamo dire che un corpo di massa *M* darà, a parità di massa, la massima attrazione gravitazionale quando i suoi punti si troveranno racchiusi all'interno di una curva equipotenziale. Per ottenere questa curva è sufficiente eguagliare l'attrazione gravitazionale per il generico elemento *dm* che si trova lungo l'asse di simmetria del corpo a distanza *s* da *A* e quella per un analogo *dm* (stessa massa) posto ad un angolo α (vertice in *A*) rispetto a tale asse e posto a distanza *r* da *A*. Avremo così che:

(1) $G\,M\,dm\,/\,s^2 = \cos\alpha \cdot (G\,M\,dm\,/r^2)$

(2) $r = s\sqrt{\cos\alpha}$

in pratica l'angolo α sarà compreso fra i punti in cui le curve polari

(3) $\rho = s\sqrt{\cos\alpha}$ (con $s>D$)

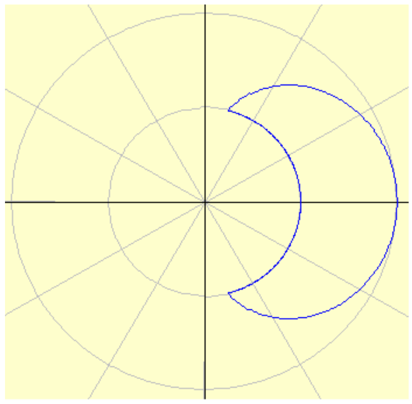
e

(4) $\rho = D$

si incontrano, cioè per

(5) $a = \pm\arccos\left[(D/s)^2 \right]$

Questa è infine la forma della torta:


9 *La forma della torta del **Console***.

Integrando queste curve su a si può agevolmente (beh, più o meno, a parte gli integrali ellittici) trovare una relazione fra s e il volume della torta.

Chiuderei questa analisi osservando che, quando la torta è relativamente (rispetto al suo volume) lontana, avrò $D \sim s$ e quindi α prossimo a 0. In questo caso la torta ottima assumerà incredibilmente una forma a sottiletta; viceversa, una torta molto vicina sarà più tondeggiante…

Ora potrei chiedermi se cambierebbe qualcosa pensando di utilizzare un vincolo sulla posizione del baricentro anziché quello sulla "distanza della particella più vicina": beh le cose cambiano e parecchio, ma non saprei dire di più perché ad intuito, basta che la torta abbia una propaggine, anche molto sottile (e quindi facile da controbilanciare dal punto di vista del baricentro), che raggiunge il punto *A*, e subito l'attrazione diventa infinita… posso immaginare che comunque la figura avrà in ogni caso un profilo convesso (immaginando infatti di farla a fettine infinitesimali lungo l'asse di simmetria, infatti, un "cerchio" avrà sempre maggiore forza di gravità rispetto ad una "ciambella" di pari superficie)

È necessario però qualche vincolo in più (tipo la forma del contenitore della torta :D) per rendere il problema interessante.

E per chi non ha capito l'allusione, non facciamo nessun commento, che è evidente che il ***Console*** ci segue in tutte le nostre pubblicazioni.

Siete pronti allo spazio delle idee di ***Franco57***? La sua soluzione è la prossima:

Ho ipotizzato che la torta abbia una densità di massa uniforme (il che vale solo per le torte venute bene, quindi credo che sia ragionevole) e tutto quello che possiamo fare è scolpirne la forma con il posizionamento del lievito.

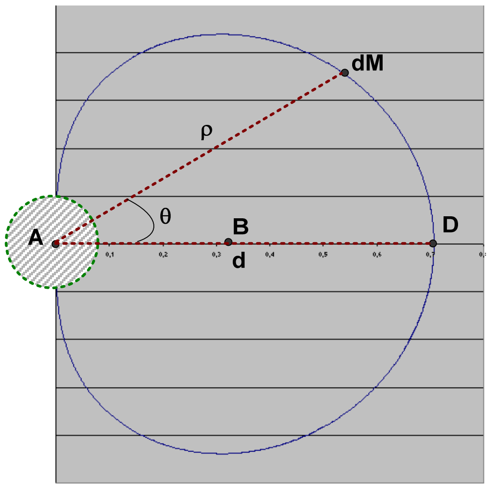
Credo che la torta abbia la forma di una specie di gigantesco uovo di Pasqua (il che è perfettamente in linea col periodo) pieno e molto cicciuto.

Infatti preso il punto *A*, il contributo dg alla gravità totale da attribuire ad una particella di torta dM distante ρ è lungo il baricentro quindi agisce solo in quella direzione, vale perciò $dg = G\frac{dM}{\rho^2}\cos\theta$, essendo G la costante di gravitazione universale e θ l'angolo tra la congiungente A con dM e la congiungente A con il baricentro B della torta.

Per avere la massima attrazione gravitazionale su A, la torta deve quindi riempire le porzioni di spazio che danno stesso contributo per valori via via crescenti. Se ne conclude che il bordo deve rispettare l'equazione $\frac{\cos\theta}{\rho^2} = costante$ in coordinate polari per ogni sezione piana che passi per la retta *AB*.

La torta ha cioè la forma del solido ottenuto ruotando la figura sull'asse AB.

La costante è nient'altro che il valore $\frac{1}{\rho^2}$ per $\theta = 0$, cioè vale $\frac{1}{d^2}$ dove d è la massima distanza tra A il punto D. Lo studio di funzione conferma la forma disegnata in blu con l'ausilio dei grafici del foglio elettronico.

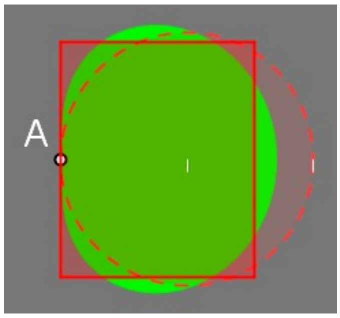


10 *La forma della torta di **Franco57**.*

Sembra però che Alice sia ad una certa distanza dalla torta. Per rispettare questo vincolo ritagliamo una sfera di questa distanza con Alice al centro entro la quale non ci può essere torta (in verde). Ancora una volta, esternamente alla sfera, per i motivi già esposti, la forma deve essere delimitata dalla solita equazione $\frac{\cos\theta}{\rho^2} = \frac{1}{d^2}$.

Ma non ci fermiamo qui, no. Perché una torta di compleanno è un piatto che nello spazio si prepara con malizia ed ironia, e quindi tra i cuochi che si sono lasciati coinvolgere nell'esperimento, non può mancare ***Gnugnu***:

> La forma della torta in grado di esercitare la massima attrazione su Alice cambia con la distanza tra i due corpi e, anche escogitando un dolce a geometria variabile, è per me troppo complicato trovare quella che rende minimo il tempo di avvicinamento.
>
> Il caso più semplice si verifica nel momento in cui avviene il contatto tra i due corpi.
>
> Due microgocce, uguali, di glassa sulla superficie del regalo devono esercitare su A forze aventi la medesima componente parallela alla risultante; altrimenti spostando molecole di zucchero dall'una all'altra sarebbe possibile aumentare l'attrazione.
>
> La torta deve essere pertanto un solido di rivoluzione attorno alla retta di applicazione della forza risultante. Possiamo usare un sistema di riferimento avente questa retta, orientato nel verso della forza, come asse delle ascisse, origine in A e unità di misura pari al raggio della sfera di volume uguale a quello del regalo. Tagliamo la torta con un piano qualsiasi passante per l'asse e determiniamo l'equazione del contorno della sezione ottenuta. Una massa puntiforme posta in qualsiasi $P(x,y)$, diverso da A, esercita su Alice una forza proporzionale al reciproco del quadrato della distanza e per ottenerne la proiezione basta moltiplicare per il rapporto tra ascissa del punto e distanza:
>
> $$F \propto \frac{1}{x^2+y^2},\ F_x \propto \frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\ \text{che diventano}\ F = F_x \propto \frac{1}{b^2}$$
>
> in $B(b,0)$, intersezione della superficie con l'asse x. L'equazione del perimetro sarà allora, con $x > 0$:
>
> $$\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{b^2} \rightarrow b^2x = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \rightarrow \sqrt[3]{b^4x^2} = x^2+y^2 \rightarrow y^2 = \sqrt[3]{b^4x^2} - x^2\ . \quad [1]$$



11 *La prima figura di* ***Gnugnu***.

Nella figura alla sezione del solido (in verde), sono sovrapposte (in rosso) quelle della sfera e della torta, nella consueta forma cilindrica, col rapporto raggio-altezza che produce la miglior attrazione.

In questa posizione le differenze fra le forze di attrazione prodotte dai tre solidi sono molto piccole: la minore, quella prodotta dalla sfera, è circa il 97.5% della più grande.

Curiosamente se il cilindro ha lo stesso raggio della sfera e, di conseguenza, altezza uguale ai 4/3 di questo, i due solidi producono in A la medesima forza.

Per determinare il valore di b basta calcolare il volume del solido ed eguagliarlo a quello della sfera di raggio unitario.

$$V = \pi \int_0^b \left(\sqrt[3]{b^4x^2} - x^2\right)dx = \pi \left[\frac{3}{5}\sqrt[3]{b^4x^5} - \frac{x^3}{3}\right]_0^b = \pi\left(\frac{3}{5}b^3 - \frac{b^3}{3}\right) = \frac{4}{15}\pi b^3,$$

b dovrà essere uguale alla radice cubica di 5, poco meno di 1.71.

Quando la torta dista d dalla destinataria siamo costretti ad eliminare dal solido tutti i punti appartenenti alla sfera di centro A e raggio d. Per compensare la perdita di volume, b dovrà aumentare e possiamo calcolare, in funzione di d, i suoi valori, iniziando a determinare il volume del nuovo solido al variare di b.e d.

Sostituendo nella penultima delle [1] il primo membro dell'equazione $x^2 + y^2 = d^2$ otteniamo $\sqrt[3]{b^4x^2} = d^2 \rightarrow \quad b^4x^2 = d^6 \rightarrow \quad x = \frac{d^3}{b^2}$ che è l'ascissa delle intersezioni fra il solido e la sfera. Questo valore diventa l'estremo inferiore dell'integrale e dovremo ancora togliere il volume del segmento sferico fino a $x = d$.

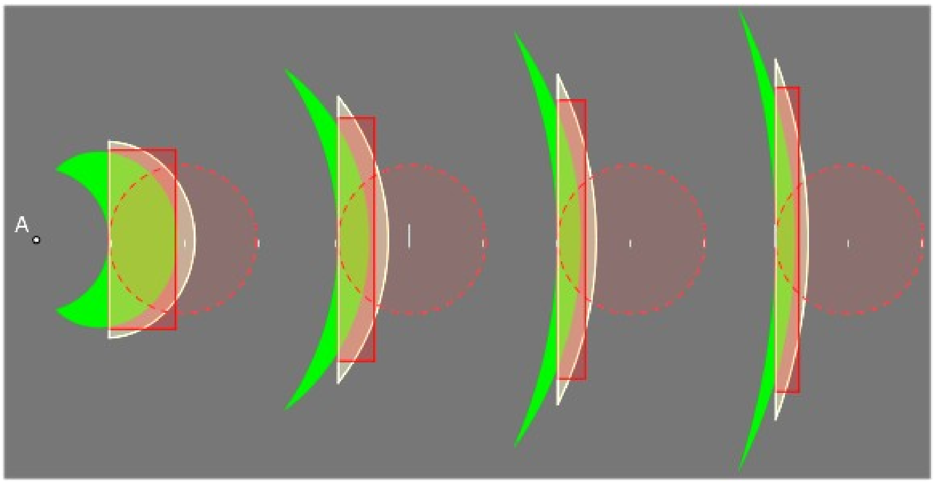
$$V(d,b) = \pi \left[\frac{3}{5}\sqrt[3]{b^4x^5} - \frac{x^3}{3}\right]_{\frac{d^3}{b^2}}^{b} - \pi\int_{\frac{d^3}{b^2}}^{d} \left(d^2 - x^2\right)dx =$$

$$\pi\left(\frac{4}{15}b^3 - \frac{3}{5}\frac{d^5}{b^2} - d^3 + \frac{d^5}{b^2} + \frac{d^3}{3}\right) = \pi\frac{4b^5 + 6d^5 - 10d^3b^2}{15b^2}.$$

Eguagliando questo risultato al volume della sfera di raggio unitario otteniamo:

$2b^5 - 5\left(d^3 + 2\right)b^2 + 3d^5 = 0$. Equazione, purtroppo, di quinto grado. Fortunatamente GeoGebra è in grado di risolvere, numericamente, roba di questo tipo e disegnare le torte al variare di d.

Nella figura seguente compaiono le sezioni a distanza 1, 4, 7 e 10 da A.

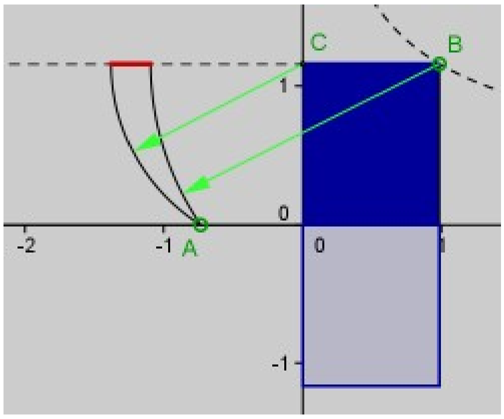


È inutile cercare gli occhiali per al visione in 3D! I colori, per nulla eleganti, sono stati scelti solo per permettere di intravedere la forma delle quattro torte e per festeggiare il 150°. Per dirla col *Maestro*: sarà per aver cinquant'anni in meno, sarà il profumo dei ricordi che cambia in meglio… la nostalgia per Italia 61 rimane!

Il solido bianco, sorta di lente piano-convessa, prima non compariva, perché per d=0 coincide con quello verde, da cui differisce unicamente per la mancanza dell'incavo sferico. Non credo sia il caso di riportare ulteriori noiosi calcoli, ma nello studio del problema è spuntata un'altra relazione che mi ha sorpreso.

Per cercare la forma (rapporto fra altezza e raggio) del cilindro omogeneo che esercita, su un punto A del suo asse, la maggio forza gravitazionale, basta riportare su una direttrice qualsiasi, usando le circonferenze aventi per centri le intersezioni di questa con le due basi, il punto A.

I punti trovati hanno distanza proporzionale alla forza prodotta. La curva che compare nel primo quadrante (eq: $xy^2 = k$) serve solo per mantenere costante il volume quando si sposta B.



12 *L'ultima figura di **Gnugnu**.*

Alice è volata nello spazio profondo. Rudy, coetaneo dello Sputnik, ha escogitato un bel metodo per inviarle una cosmotorta. Dispone delle risorse necessarie per: procurarsela, farla arrivare nei pressi dell'obiettivo, ruotarla opportunamente, fermarla (relativamente ad A) ed abbandonarla alla mercé dell'attrazione gravitazionale. Una piccola spinta? No, grazie! Risorse esaurite. La responsabilità per la torta in faccia ricadrà solo su Newton & Co.

E, avendo ricevuto la mia torta in faccia, sono pronta a salutarvi. Godetevi maggio, e scrivete, scrivete ancora!

6. Quick & Dirty

L'allievo che vi hanno mandato a ripetizione di matematica ha un modo particolarmente eterodosso di sommare le frazioni: infatti, il calcolo che fa bella mostra di sé sul foglio è una cosa di questo tipo:

$$\frac{1}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{18}{45}$$

Prima di essere preso a scudisciate (secondo i più moderni metodi pedagogici), il vostro allievo riesce a mormorare un "ma ho controllato con la calcolatrice, e viene esatto!", e vi fermate un attimo a cercare *per quali valori* (cifra singola diversa da zero per ogni valore) il metodo funziona; e questo permette al somarello di sfuggire alla vostra ira.

Quello che volete risolvere è l'equazione:

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{10a+c}{10b+d};$$

ossia

$$ac(10b+d)=bd(10a+c).$$

a parte le 81 *soluzioni banali in cui* $a=b$ *e* $c=d$, *ci sono le* 7 *doppie soluzioni* $\{1,2,5,4\}$, $\{1,4,8,5\}$, $\{1,6,4,3\}$, $\{1,6,6,4\}$, $\{1,9,9,5\}$, $\{2,6,6,5\}$ *e* $\{4,9,9,8\}$. *"Doppie" in quanto scambiando il primo con il secondo e il terzo con il quarto ne trovate altre sette.*

7. Zugzwang!

7.1 Apit-Sodò

Essendo in vena di offerte speciali e di *futures* su questa rubrica, vi promettiamo *tre* giochi al prezzo di due: nel senso che cominciamo con uno, alla prossima puntata ve ne raccontiamo un altro e, alla fine del prossimo pezzo, mettiamo i due insieme per parlare di un terzo.

Questo, secondo le nostre fonti, dovrebbe essere nato nel decimo secolo dalle parti della Malesia e, dati i legami che noi abbiamo con questa parte del mondo, lasciamo a voi decidere se sia nato nelle esotiche *sundarbans* o in un più prosaico e torinese corso Casale (al civico ducentodiciassette).

Comunque, per quanto riguarda il nome, non cominciate a pensare a conturbanti principesse vestite unicamente di qualche tonnellata di perle e smeraldi; nasce dai due modi con cui potete prendere le pedine dell'avversario, e... Ma procediamo con ordine.

As usual, per prima cosa la ***scacchiera*** e i ***pezzi***. Per la prima andiamo sul semplice, una normale scacchiera da scacchi basta e avanza ("avanza" nel senso che non vi serve distinguere le caselle nere da quelle bianche, ma le usate tutte e sessantaquattro). In compenso, vi servono sedici pedine per parte, quindi un set da dama non basta.

Passiamo come al solito alla ***posizione iniziale***: le pedine di un colore vengono ordinate su un lato della scacchiera, una per ogni casella.

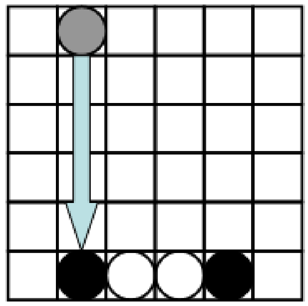
Ad ogni ***turno*** (alternati, come al solito), il giocatore muove una propria pedina di quante caselle vuole in orizzontale o in verticale; unica limitazione, tutte le caselle di passaggio e la casella di arrivo devono essere libere.

Si ***vince***, come a dama, quando l'avversario non ha più pedine

Noi sappiamo benissimo che avete uno stile di vita ben diverso dal nostro (per il quale le abboffate iniziano ai primi di novembre e terminano verso metà maggio) quindi, dato il periodo dell'anno, abbiamo la certezza che la vostra domanda principale in questo momento sia: ***quando si mangia***?

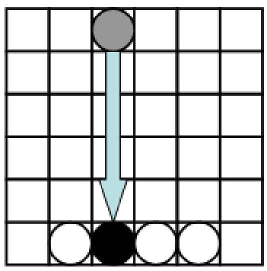
E qui viene in campo il nome del gioco: esistono due modi per "mangiare" (termine che, come sapete, ci piace poco e utilizziamo solo se possiamo farci sopra qualche fetente battuta, come nel paragrafo precedente).

Il primo è noto come ***apit***, o "presa per inquadramento": in questo modo, si catturano tutte le pedine contenute in una fila (riga o colonna) ininterrotta tra la pedina che ha mosso e un'altra delle proprie pedine: trovate un esempio in figura, dove le *due* pedine bianche vengono prese: in pratica, se muovendo la pedina nera dalla posizione iniziale indicata con il grigio alla posizione finale riuscite a bloccare un certo numero di pedine avversarie contigue in riga o colonna contro un'altra vostra pedina, prendete.



13 *Apit*

Il secondo è noto come ***sodò***, o "presa per intrusione", e a questo punto dovreste aver capito il nome del gioco; trovate una presa di questo tipo nella figura a lato. Sempre per dirla alla svelta, se la vostra pedina riesce ad insinuarsi tra due blocchi contigui di pedine avversarie, ve le mangiate tutte.



14 *Sodò*

Due note veloci: tanto per cominciare, se le file di pedine da mangiare sono interrotte da una pedina delle vostre, mangiate solo sino a quella; secondariamente, posto che sia dubbio se la presa che state facendo è per *apit* o per *sodò*, ***noi*** (nel senso che il nostro manuale non ne parla) decidiamo che deve essere per *apit*: la cosa ci sembra più logica, ma se volete provare a giocare al contrario, come sempre liberissimi. Sempre nell'ambito delle regole non enunciate, non sappiamo se sia valido *soffiare*: siccome la cosa ci pare problematica, propenderemmo per il no.

Ah, ultima regola: lasciate a casa il *kampillong*, quando giocate.

8. Pagina 46

Per assurdo, supponiamo sia vera la:

$$\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r} \qquad p, q, r \in Q.$$

Se eleviamo al cubo entrambi i membri, otteniamo:

$$2 = p^3 + 3p^2 q\sqrt{r} + 3pq^2 r + q^3 r\sqrt{r},$$

ossia:

$$2 = p\left(p^2 + 3q^2 r\right) + q\left(3p^2 + q^2 r\right)\sqrt{r}. \qquad [2]$$

Mostriamo ora che il nostro assunto $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$ implica che $\sqrt[3]{2}$ sia razionale.

Per prima cosa, se $q = 0$, allora $\sqrt[3]{2} = q$, che è razionale; se invece $q \neq 0$, dobbiamo verificare due sottocasi.

Supponiamo, in prima istanza, $3p^2 + q^2 r \neq 0$. Dalla [2] otteniamo allora:

$$\sqrt{r} = \frac{2 - p\left(p^2 + 3q^2 r\right)}{q\left(3p^2 + q^2 r\right)}.$$

Da cui si ricava:

$$\sqrt[3]{2} = p + q = \frac{2 - p\left(p^2 + 3q^2 r\right)}{q\left(3p^2 + q^2 r\right)},$$

il che equivale a sostenere che $\sqrt[3]{2}$ è razionale.

Di converso, se $3p^2 + q^2 r = 0$, allora:

$$q^2 r = -3p^2,$$
$$2 = p\left[p^2 + 3\left(-3p^2\right)\right] = -8p^3,$$

e anche questo equivale a sostenere che $\sqrt[3]{2} = -2p$ è razionale.

Resta quindi da provare che $\sqrt[3]{2}$ *non* è un numero razionale. Se $\sqrt[3]{2}$ fosse pari ad una frazione irriducibile $\frac{m}{n}$, allora avremmo $2 = \frac{m^3}{n^3}$, ossia $m^3 = 2n^3$. In questo caso m^3 (e, conseguentemente, m) dovrebbero essere pari, e quindi m^3 dovrebbe essere divisibile per 8; potremmo allora scrivere $n^3 = \frac{m^3}{2}$ e, essendo $\frac{m^3}{2}$ pari, dovrà esserlo anche n^3. Ma questo contraddice l'assunto che $\frac{m}{n}$ sia irriducibile, e questa contraddizione dimostra l'infondatezza dell'assunto iniziale e prova la dichiarazione del problema[25].

[25] Il metodo utilizzato per provare l'irrazionalità di $\sqrt[3]{2}$ è, con piccole variazioni, il metodo classico per provare l'irrazionalità di $\sqrt{2}$.

9. Paraphernalia Mathematica

9.1 I risparmi di San Giuseppe

"Chi crede a una crescita esponenziale che possa continuare all'infinito in un mondo finito o è un pazzo o è un economista".

Kenneth Boulding (1910-1993), economista.

È ufficiale: i Rudi si stanno immergendo nella realtà. Questa sezione della rivista ha già coperto argomenti come le previsioni del tempo, il riscaldamento globale, gli tsunami, la partita doppia e qualche accenno di come investire in borsa. Cerchiamo sempre di mantenerci neutrali, ma evidentemente non ci riusciamo, soprattutto in tempi ricchi di eventi non propriamente piacevoli.

Questo pezzo è nato da una conversazione di Alice con un collega sulla crisi economica mondiale: il collega (tedesco) ha tirato fuori un articolo Heinrich Haußmann che proponeva un simpatico Gedankenexperiment[26], ed abbiamo deciso di proporvelo (con qualche adattamento), sperando di non urtare la sensibilità di nessuno.

La storia che andiamo a raccontarvi comincia in un altro momento storico particolarmente delicato: più di duemila anni fa in una Giudea sotto il controllo del governo romano in piena espansione. La maggior parte degli elementi iniziali della storia sono ben noti: Maria e Giuseppe sono richiamati a rispondere ad un censimento e si trovano a Betlemme al momento in cui Maria dà alla luce il figlio Gesù. Sappiamo che alla nascita di Gesù i Re Magi giunsero a Betlemme con oro, incenso e mirra. Ma non si sa bene che ne fu dei doni dei tre saggi… qui comincia il nostro gioco. Per quanto si trattasse di materiali rari, soprattutto per una famiglia di ceto medio come poteva essere quella di un falegname, si può supporre che l'incenso e la mirra possano essere stati usati per la cura del bebè… ma ci si può chiedere che ne sia stato dell'oro. La Sacra Famiglia ben presto dovette lasciare il paese e richiedere asilo politico in Egitto, per evitare serie conseguenze per la salute del bambino Gesù. In condizioni tanto precarie, partendo verso l'ignoto, è improbabile che un uomo accorto come Giuseppe avrebbe portato con sé tutti i suoi averi, soprattutto sapendo quanto insicuri fossero i percorsi per i viaggiatori al tempo e quanto probabile sarebbe stato l'incontro con briganti e ladroni sul percorso, e non avendo alcuna idea di quando sarebbero potuti tornare.

Del resto la famiglia lasciava un paese ricco di mercanti e faccendieri, la cui indipendenza era garantita in parte anche dal governo romano: era infatti nei migliori interessi dell'oppressore mantenere attivi i traffici ed i commerci locali per poter ottenere il massimo dalle imposte e gabelle. In Palestina, poi, il prestito per un interesse era già un'usanza consolidata. Allora supponiamo che il falegname – dopo averne presa una parte per il viaggio e le necessità contingenti – abbia investito una certa quantità dell'oro come misura precauzionale, per il momento del ritorno, presso quello che allora era un banchiere locale.

Per mere esigenze pratiche (insomma, per rendere facile il conto), supponiamo che la somma investita fosse un grammo d'oro, per un interesse del 5% all'anno. Qui possiamo pensare a tutte le speculazioni possibili, ma siccome Giuseppe era un uomo accorto, si deve essere accordato per un valore dell'investimento da calcolare sempre in equivalente in oro, così da non incorrere in problemi dovuti alla valuta o alle guerre che all'epoca erano all'ordine del giorno, soprattutto sotto la dominazione romana.

[26] Esperimento ideale, come quello del gatto dentro la scatola di Schrödinger (di cui parliamo nel compleanno di RM103): il trucco non è stato inventato dai tedeschi, Galileo per esempio ne ha fatto gran uso nei suoi dialoghi.

Sappiamo anche che al ritorno la famiglia si diresse direttamente a Nazareth, non passando per Betlemme per evitare problemi con il governo, e questa potrebbe essere una ragione per aver mancato di riscuotere gli interessi accumulati. Oppure nel lungo viaggio l'equivalente del libretto di risparmio si era perso, impedendo così al buon falegname di reclamare il dovuto. Di tutto questo non si trova traccia nei racconti evangelici, per cui dobbiamo proseguire con illazioni, anche se l'episodio di Gesù che litiga con i mercanti al tempio potrebbe essere un segno che il Nostro sia effettivamente tornato con libretto alla mano a reclamare il dovuto e non abbia ottenuto quello che si aspettava.

Comunque, visto che sappiamo tutti quanti che duemila anni non sono nulla per il nostro Salvatore, immaginiamo per un momento che l'investimento sia stato concesso a Giuseppe, e che il figlio, 2000 anni dopo, si presenti alla banca di origine a reclamare i suoi interessi. Quanto metallo giallo avrà accumulato?

Il conto si fa, in effetti, abbastanza in fretta, usando la semplice formula degli interessi composti: se C è il capitale iniziale, aumenta ogni anno di un interesse i

$$C_{t+1} = C_t + iC_t = (1+i)C_t$$

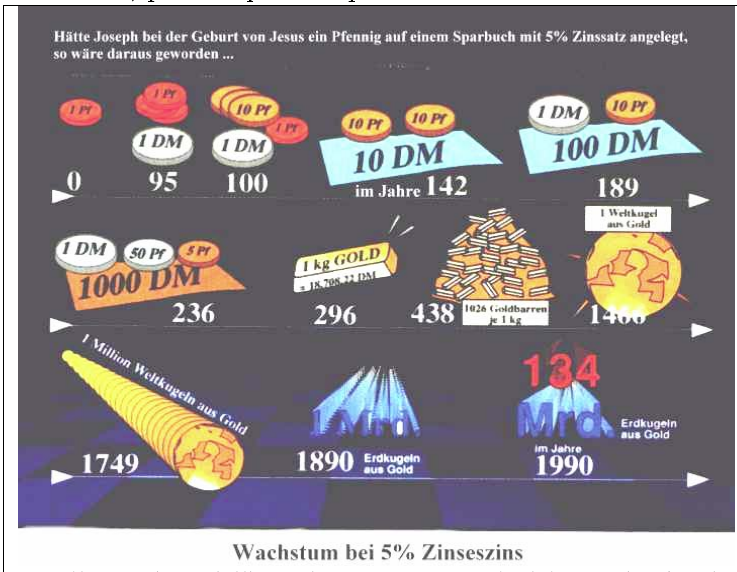
$$C_t = C(1+i)^t$$

dove t è il numero di anni. Per avere un'idea più precisa proviamo a fare una tabella con i=5% e C=1 grammo d'oro.

Anno	kg oro	Peso in Terre = $(5{,}973 \cdot 10^{24})$kg	Note[27]
0	0,001		Nascita di Gesù
65	0,024		Età pensionabile del Salvatore
95	0,103		Centuplicato il capitale!
100	0,132		
142	1,021		Un chilo d'oro…
189	10,111		Dieci!
236	100,155		Un quintale!
284	1'041,744		Una tonnellata!
567	1'033'552'573		Un miliardo di chili
1311	$6{,}014 \cdot 10^{24}$	1	Una Terra d'oro
1359	$6{,}255 \cdot 10^{25}$	10,5	
1642	$6{,}206 \cdot 10^{31}$	1'039'574	Un milione di Terre
1736	$6{,}090 \cdot 10^{33}$	1'020'114'344	Un miliardo di Terre
2000	$2{,}391 \cdot 10^{39}$	$4 \cdot 10^{14}$	4 quadrilioni di Terre

[27] La nota alle note non può mancare: solo per dire che abbiamo fatto i conti velocemente e con excel, e non siamo sicuri della precisione ottenuta… ma i numeri rendono l'idea.

Siccome dopo qualche centinaia di anni i numeri devono essere scritti con l'esponenziale e ci sembrava difficile averne un'idea concreta, abbiamo provato a confrontarli con un oggetto sufficientemente grande di cui abbiamo trovato un valore in rete: il peso della Terra, circa 6 quadrilioni[28] di kg. Ebbene già nel 1311 Gesù avrebbe potuto riscuotere l'intero pianeta in oro, che avrebbe potuto decuplicare in una cinquantina d'anni. Alla morte di Galileo, nel 1642, gli interessi avrebbero già accumulato un totale di un milione di nostri pianeti azzurri in metallo prezioso. Insomma, per fortuna all'alba del millennio il Creditore non si è ancora fatto vedere, perché quattro quadrilioni di Terre in oro è un numero così spaventoso che non riusciamo ad immaginarlo.

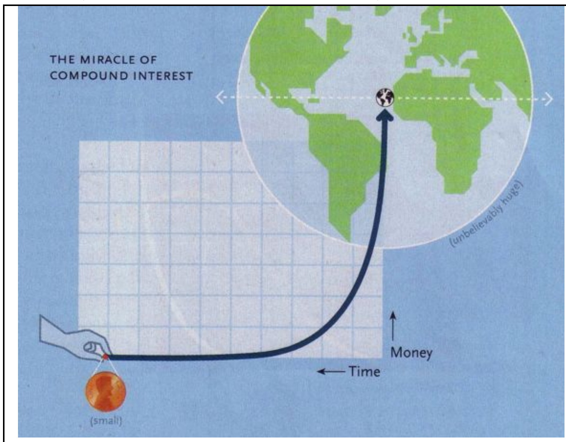


15 *Illustrazione dell'esperimento concettuale del Josephspfennig di Heinrich Haußmann*[29]

Del resto, se invece il buon Giuseppe avesse scelto di estrarre per tutto il tempo gli interessi dal conto avrebbe ottenuto una cifra molto più moderata. Ogni anno avrebbe raccolto – da un capitale C con interessi i – solo $C \cdot i$ grammi d'oro, dopo duemila anni un etto del prezioso metallo, non di più.

La storia che vi abbiamo appena raccontato ha una morale, ed è in realtà un esempio illustrativo di quanto l'attuale sistema economico si basi su un tipo di crescita non sostenibile.

Heinrich, nel suo piccolo esperimento, aveva in realtà preso l'ispirazione da Richard Price, filosofo ed economista, che nel suo *"An appeal to the public, on the subject of the national debt"* nel 1772 aveva affrontato la differenza tra interessi semplici e composti ed illustrato le infinite possibilità offerte dal prestare denaro per un interesse, libro che conteneva anche un paio di righe sull'esempio del prestito di San Giuseppe. Price non era un matematico, i suoi lavori più notevoli trattano di etica ed economia, ma aveva una grande amicizia con Bayes – che aveva aiutato ad editare alcuni lavori di statistica – e non era affatto digiuno della Scienza dei Numeri.



16 *Il miracolo dell'interesse composto…*

Il Nostro era in particolare preoccupato per il crescente debito pubblico, che tra l'altro coincideva con il diminuire della forza lavoro (in parte per guerre e carestie a ripetizione, in parte per la diminuzione delle nascite). L'idea di Price (che fu anche

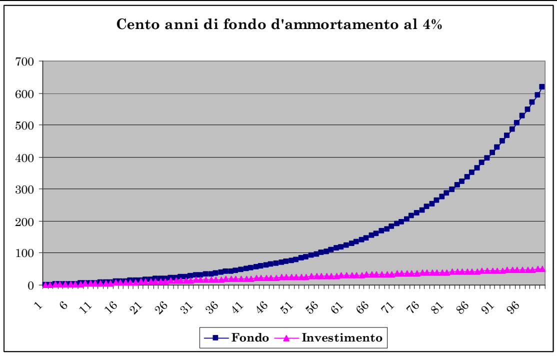
[28] Il quadrilione è il numero che in Europa equivale a un bilione di bilioni, cioè un milione alla quarta (1.000.000.000.000.000.000.000.000 o 10^{24}), non come in America che vale molto meno.

[29] I numeri variano leggermente dalla nostra tabella perché l'autore ha immaginato il credito in denaro (marchi tedeschi a suo tempo) e trasformato il tutto in oro in seguito. Gli ordini di grandezza sono però gli stessi.

applicata con successo ad un certo punto della storia inglese) era di utilizzare un fondo di ammortamento per eliminare il debito pubblico.

Il concetto di *fondo d'ammortamento* è in realtà ancora in uso in numerose aziende: quando si acquista per esempio uno strumento costoso, si mette da parte una somma di denaro che con l'andare degli anni si incrementa in modo tale da essere in grado di sostituire o riparare lo strumento quando è necessario. Ed è poi quello che pensiamo di fare quando lasciamo parte dei nostri stipendi in contributi per la pensione, che dovrebbero essere usati – raggiunta l'età pensionabile – per pagare le nostre pensioni.

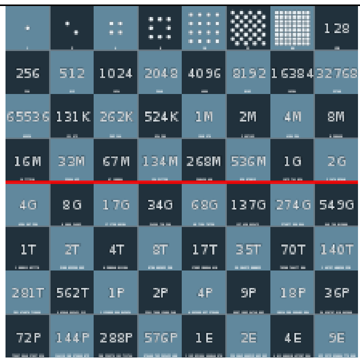
L'esperimento nel saggio di Price è il seguente: supponiamo di utilizzare parte dei soldi delle tasse dei contribuenti dello Stato per fornire un prestito di mezzo milione[30] all'anno, con un interesse del 4% annuo. Dopo 56 anni il fondo avrebbe investito in tutto 28 milioni, ma sul fondo sarebbero a questo punto presenti quasi 100 milioni, in pratica guadagnando 72 milioni.



17 *Imprestare denaro conviene…*

E, come fa giustamente notare Price[31], cinquanta o cento anni non sono gran cosa per una nazione, e uno Stato dovrebbe sempre sapere quando investire: certo è importante non estinguere il fondo in tempi difficili, come durante le guerre, perché non solo in periodo di guerra i tassi d'interesse tendono a crescere, ma quel che è più fatale per un fondo d'ammortamento è interrompere la progressione.

Influenzato da un'idea del genere il banchiere e mercante Peter Thelluson (1737-1797) decise di investire alla sua morte la maggior parte dei suoi investimenti e congelarli fino alla nascita dei suoi *pronipoti*. In caso di mancanza di eredi, stabiliva che i denari dovessero essere utilizzati per *cancellare il debito pubblico*, e questo già rende l'idea della crescita astronomica che già in pochi anni poteva raggiungere. L'uomo era estremamente ricco, quindi il lascito ai diretti discendenti non era piccolo, ma ugualmente i figli, e i nipoti dopo di loro, impugnarono il testamento per poter disporre della maggioranza del denaro lasciato dal gentiluomo: i procedimenti legali arricchirono avvocati per decenni, così gran parte della somma che alla fine si era accumulata dovette essere usata per pagare le spese legali. Il procedimento ebbe un'eco enorme al tempo, addirittura per evitare casi simili il parlamento inglese passò una legge per arginare l'accumulazione dei beni, o meglio il numero di anni per cui un fondo potesse essere lasciato ad accumulare interessi composti.



18 *La scacchiera con il grano.*

Del resto è nota la leggenda dell'inventore degli scacchi, che in ogni versione ha una diversa nazionalità ed ha a che fare con un diverso tipo di autorità, ma arriva sempre alla stessa conclusione: il re (o pascià o governante) chiese all'uomo come volesse essere ricompensato per una tale incredibile invenzione e lui – valente matematico – propose di utilizzare la scacchiera stessa per calcolare il suo compenso. Il calcolo doveva seguire la seguente regola: per la prima casella della scacchiera avrebbe ricevuto un chicco di grano (o di riso, o altro…), per la seconda due, per la terza quattro, e via così, raddoppiando ad ogni casella. Il calcolo, come si può

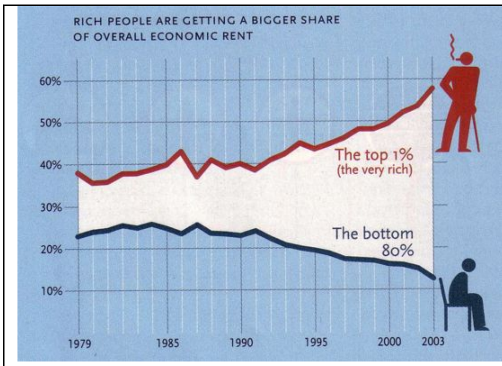
[30] Lui parlava di sterline e nel 1716, ma si può applicare con le dovute proporzioni.

[31] Il suo testo si trova completamente in rete, anche se in formato poco moderno.

facilmente immaginare, avrebbe potuto portare l'inventore ad impossessarsi di tutto il grano del regno per gli anni a venire: qualcuno ha calcolato che l'intera scacchiera rappresenterebbe una quantità di riso pari alle dimensioni del monte Everest.

I Babilonesi, già duemila anni prima di Giuseppe, erano esperti di economia: negli esercizi degli scribi si possono trovare calcoli su quanto tempo occorre investire un certo valore con un determinato tasso affinché il valore ne possa essere duplicato. Per esempio avendo una *mina* d'argento, che rendeva 1/60 al mese, 12/60 all'anno[32], quanto tempo occorre aspettare per duplicarla? La risposta[33] era il tempo classico di durata dei prestiti dei banchieri del tempo ai commercianti. Ma quanto tempo si può andare avanti con un tasso del genere? Il nostro calcolo con un misero 5% ci ha già fatto tremare e gli scribi facevano calcoli molto complessi e probabilmente erano già giunti alla conclusione che ad un certo punto il problema più grosso sarebbe stato trovare qualcuno a cui fare il prestito: l'economia reale non può crescere allo stesso ritmo dell'interesse teorico.

Nei quattromila anni che sono trascorsi da allora, c'è sempre stata qualche guerra ad interrompere la progressione e ridurre la distanza tra quelli che posseggono denaro da prestare e coloro che prendono denaro in prestito. Ma quanto ancora possiamo andare avanti? Non c'è nell'umanità il sano desiderio di smettere di farsi guerre e semplicemente vivere in pace?



19 *Chi ha più da imprestare diventa più ricco, chi prende a prestito riesce sempre meno a valersene.*

E se volessimo provare a utilizzare la logica di Price per salvare il nostro bilancio nazionale, dobbiamo sperare che non venga in mente ad altri Paesi di fare lo stesso. Siamo ormai – volenti o nolenti – in tempi di economia globale. A chi dovrebbe fare il prestito, il globo?

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[32] Sì, 20% all'anno, un tasso da strozzinaggio al giorno d'oggi, ma niente di strano a suo tempo. Il denaro rendeva parecchio, a quanto pare.

[33] Questo PM praticamente non ha matematica, la formula per scoprire il valore la trovate verso l'inizio, però.