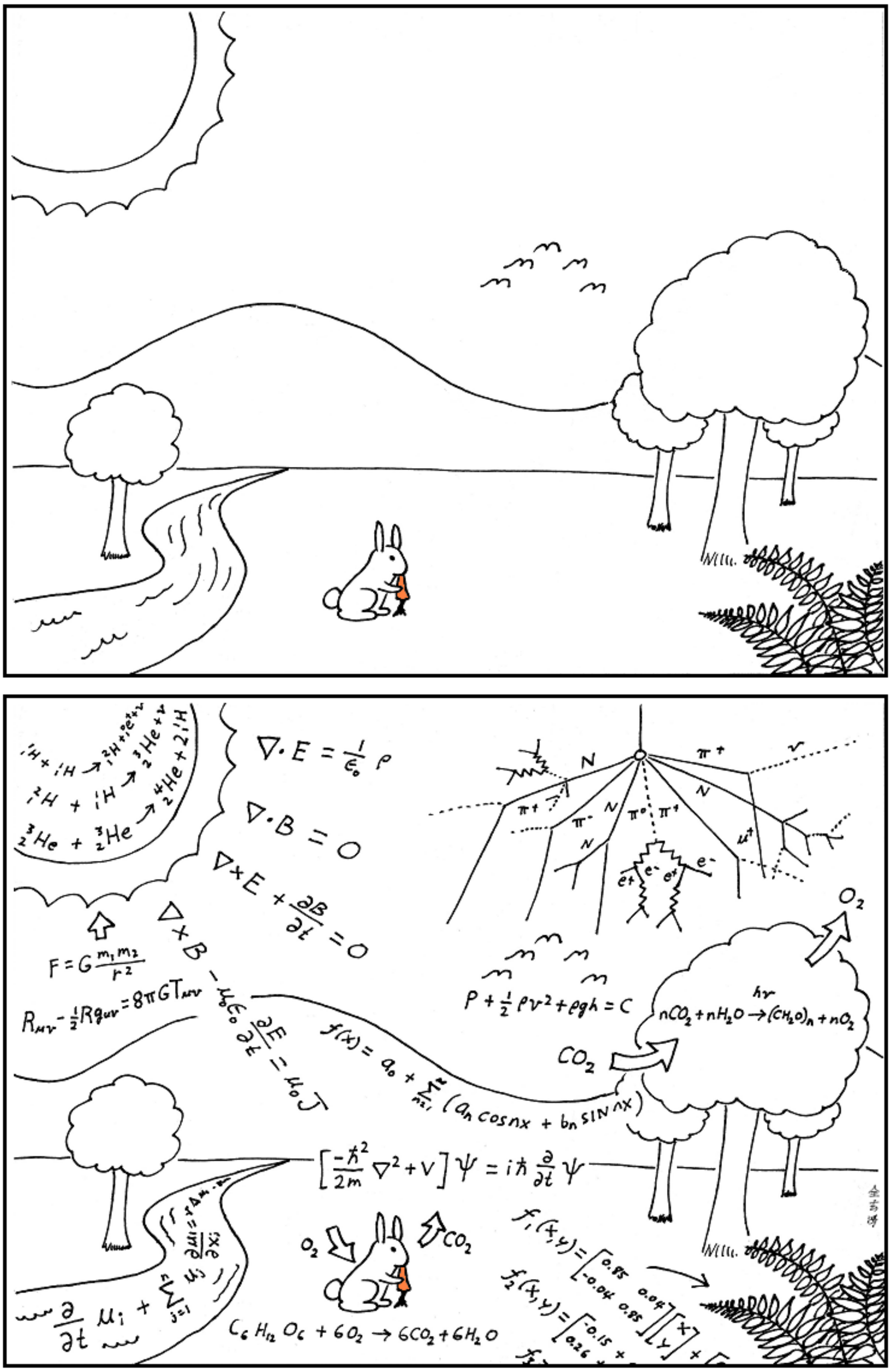
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 147 – Aprile 2011 – Anno Tredicesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM146 ha diffuso 2764 copie e il 31/03/2011 per Google eravamo in 8'820 pagine.

L'autore del blog ***Abstruse Goose*** è anonimo; il suo disegno "come gli scienziati vedono il mondo", comunque, ci fa solo annuire pensosamente. A noi, è più chiara la seconda immagine...

1. Rivoluzionari

Non ci sono stati che tre matematici
che abbiano fatto epoca:
Archimede, Newton ed Eisenstein.
(il Principe dei Matematici, circa 1820)

Era ed è ancora famoso, soprattutto tra i cultori della storia tedesca. Dicono che Adolf Hitler fosse un suo grande estimatore, al punto di avere sempre appeso un suo ritratto dietro la scrivania, perfino nei suoi ultimi giorni, dentro il bunker della Cancelleria a Berlino. E se la diceria è vera, non c'è praticamente dubbio che si tratti del più famoso ed inquietante ritratto che di lui ci è giunto: quello in cui, con il volto di tre quarti, guarda l'invisibile osservatore con lo sguardo freddo e altero, certo che, chiunque stia a rimirare il suo ritratto, certo non potrà essergli superiore, e forse neppure degno di reale attenzione.

1 *Federico il Grande*

Friedrick der Grosse, Federico il Grande: un attributo impegnativo, e i tedeschi sono di solito parchi nell'assegnare aggettivi magniloquenti. Ma certo la personalità di Federico II Hohenzollern, re di Prussia, è talmente complessa e iperbolica da giustificare l'epiteto. Rientra ampiamente nel novero dei rappresentanti che ancora oggi gli storici chiamano "despoti illuminati", anzi secondo alcuni è addirittura il vero inventore del concetto di dispotismo illuminato: una forma di governo che in qualche modo non metteva minimamente in discussione l'autorità unica e assoluta del sovrano, ma che lasciava in fondo liberi i sudditi su tutti quegli aspetti della vita che non implicavano un'interazione diretta con le autorità. Il risultato fu una insolita tolleranza, almeno commisurata a quella in voga nel XVIII secolo, negli aspetti privati dei sudditi, che non erano vincolati, ad esempio, ad osservare un determinato credo religioso, non subivano persecuzioni per ragioni di razza o fede, ma senza che peraltro potessero mettere in discussione alcuno degli ordini, diretti o indiretti, che provenivano dal trono. Sembra un compromesso delicato ma, del resto, era il re stesso ad essere complicato: figlio di un re vecchio stampo, Federico Guglielmo I, che è passato alla storia soprattutto per la sua mania di formare per suo diletto un reggimento speciale di granatieri giganteschi che reclutava in giro non solo per tutta la Prussia, ma anche nel resto d'Europa[1], Federico il Grande ebbe con il padre un rapporto talmente travagliato che avrebbe fatto la felicità di Sigmund Freud e di tutti i suoi discepoli, se il sovrano prussiano avesse mai avuto la possibilità e la ventura di sdraiarsi su uno dei loro lettini psicanalitici. Tanto il padre era rozzo e provinciale, tanto Federico sognava per sé un avvenire denso di avventure intellettuali e culturali; tanto il padre godeva di piaceri semplici e sostanzialmente cari al popolino prussiano, tanto lui adorava parlare francese

[1] Era disposto a pagarli anche cari, quando li vedeva in forze ad altri eserciti: e, inutile dirlo, erano anche il regalo che più gradiva, quando qualche ambasciatore di nazione amica glieli offriva in dono.

e scambiare lettere con i filosofi transalpini, primo fra tutti Voltaire. Quando Federico Guglielmo scoprì infine una relazione probabilmente troppo intima tra il figlio e il suo amico Katte, talmente intensa e forte da indurre il giovane Federico alla diserzione e alla fuga, non esitò a rinchiudere il principe nelle celle d'una fortezza, meditando a lungo anche sull'eventualità di giustiziarlo. Non giunse poi a tanto, anche per l'intercessione di molti saggi consiglieri, ma non si trattenne certo dal decapitare Katte, assicurandosi che il figlio assistesse, per monito futuro, alla scena.

L'episodio probabilmente cambiò definitivamente il carattere del giovane, indurendolo oltre misura. Federico mantenne vivo il suo amore per le arti, la filosofia, la musica: era un flautista d'eccezionale bravura, e celeberrimo resta il suo incontro con Johann Sebastian Bach, quando da un tema musicale composto dal sovrano (il cosiddetto "tema regio") il grande musicista di Eisenach ricavò una delle sue opere più famose ancora oggi, l'Offerta Musicale[2]; ma la sua generale considerazione per il genere umano nel suo complesso quasi certamente ne risentì.

2 *Federico al flauto, Bach al clavicembalo (ma qui è Carl Philip Emanuel, non Johann Sebastian)*

Tutt'altro che guerrafondaio durante la fanciullezza e la gioventù, si ritrovò a capo di una nazione che finì ben presto nel bel mezzo delle guerre più importanti del suo secolo: e, in maniera inaspettata per tutti gli osservatori delle capitali europee, la trasformò in una grande potenza militare. In quest'aspetto, che è comunque quello che più decisamente marca la sua storia, fu certamente un rivoluzionario: cambiò la struttura del suo esercito, rendendolo il più temibile d'Europa, e arrivando in fondo a militarizzare tutta la sua nazione, trasformandola quasi in una unica, grande caserma. Stravolse le tattiche militari in auge all'epoca, e certo eresse, tra il Brandeburgo e la Prussia Orientale, quello stato dal quale poi germogliò la tardiva unificazione della Germania. Alcune delle più famose citazioni di film di guerra e d'azione vengono direttamente da lui, anche se in genere lo spettatore cinematografico è convinto che il primo a pronunciarle sia stato Clint Eastwood o Conan il Barbaro, come "*Non sparate finché non distinguete il bianco dei loro occhi*" o l'ancor più rappresentato "*Cani, volete vivere per sempre?"*[3], indirizzato dal re ai suoi granatieri durante la battaglia di Kolin, nel 1757, quando vide che esitavano nel gettarsi all'attacco.

Frasi di rimarchevole impatto militare, senza dubbio, e infatti sono ancora ricordate: ma anche spietatamente illuminanti su quale fosse l'opinione che il grande re aveva degli uomini, dei suoi stessi soldati e chissà, forse anche di sé stesso. Per contro, deve essergli riconosciuto che non era un sovrano che comandava sdraiato sui comodi cuscini della sua reggia: la cruda frase di Kolin la pronunciò sfoderando la sciabola, e non dalle retrovie. Citazione per citazione, vista la natura di queste pagine, non possiamo però esimerci dal citare (e silenziosamente dissentire da) questa sua opinione sull'algebra, scritta in una

[2] Nell'improbabile caso che chi ci legge non lo sappia già, la maniera migliore per godersi la storia dell'incontro tra Federico il Grande e Johann Sebastian Bach è probabilmente quella di leggere almeno l'inizio di "*Godel Escher Bach – un'Eterna Ghirlanda Brillante*" di Douglas Hofstadter.

[3] "*Ihr Racker, wollt ihr ewig leben*" – così chi sa il tedesco può forse intendere meglio lo spirito dell'esortazione.

sua lettera diretta all'amico Voltaire: "*Anche conoscendo tutta l'algebra del mondo, un uomo resta un idiota se non conosce nient'altro. Può darsi che nel giro di dieci anni la società possa trarre vantaggio dalle curve che questi algebristi visionari quadrano laboriosamente. Mi congratulo in anticipo con la posterità; ma, a dire il vero, in tutti questi calcoli io non vedo altro che stravaganze scientifiche. Ciò che non è né utile né bello è senza scopo: e le cose utili sono già state tutte scoperte, e per quel che riguarda quelle belle, spero che il buon gusto non lasci ammettere l'algebra tra di esse.*"[4]

Utile e bello: nel suo vocabolario, probabilmente questo significava più direttamente "utile per la guerra e la ragione di stato e bello per il suo regale senso artistico". In ogni caso, forse ancora più del disprezzo per l'algebra e i suoi esegeti, è significativo quel suo "*le cose utili sono già state tutte scoperte*", che palesa un disincanto davvero eccessivo e perfino un po' arrogante, abbastanza insolito per uno come lui che, in fondo, in merito agli aspetti intellettuali dell'esistenza non era certo di mentalità chiusa.

Aveva certo un coraggio sfacciato: durante la Guerra di Successione Austriaca si appropriò senza preavviso della Slesia. Nel lungo, complesso e variegato conflitto che ne seguì si ebbero grandi battaglie, capovolgimenti di fronte e alleanze, morte, distruzioni ma, in buona sostanza, alla fine tutto tornò come prima, con una sola grande eccezione: proprio la Slesia, che rimase definitivamente prussiana. L'ancor più terribile Guerra dei Sette Anni che seguì poco dopo nasce quasi come una congiura di tutte le nazioni d'Europa, con l'eccezione della lontana Inghilterra, avente lo scopo di eliminare Federico e distruggere fisicamente, spartendola tra le potenze vicine, la piccola Prussia. Nonostante la spaventevole differenza di uomini e mezzi, e seppure attraverso sanguinose battaglie non sempre vinte, incredibili colpi di fortuna e improvvisi cambi della sorte, Federico e la Prussia riuscirono a cavarsela, creando così definitivamente il mito dell'invincibilità prussiana. Uno dei momenti militarmente più esaltanti delle campagne di Federico il Grande si ebbe il 5 Novembre 1757, a Rossbach, dove 22'000 prussiani sbaragliarono letteralmente più di 40'000 francesi, uccidendone un quarto e lasciando per contro sul campo solo un mezzo migliaio di loro caduti. La Francia e l'esercito francese erano ai quei tempi lo spauracchio d'Europa, e tutto il continente rimase esterrefatto alla notizia del massacro, anche se le imprese militari di Federico erano già notissime e ammirate.

I francesi dovettero aspettare l'arrivo di un altro rivoluzionario, per cancellare quella macchia nel loro onore militare; anzi, proprio il figlio della più famosa delle rivoluzioni, anche se fu proprio questi a trasformare la Repubblica rivoluzionaria nata nel 1789 in qualcosa di completamente diverso. Come Federico, Napoleone Bonaparte era un genio militare e un despota assoluto che non riconosceva neppure l'ombra dell'idea che qualcuno potesse essergli superiore; però, ed è significativo, spesso il corso fu sentito dire che l'unico maestro in campo militare che riconosceva (a parte Alessandro Magno, ma quello era più un mito da inseguire che un esempio da imitare) era proprio l'Hohenzollern. Il 14 ottobre 1806, neanche mezzo secolo dopo Rossbach, a Jena, l'Empereur distrusse l'esercito prussiano. Con un esercito superiore per uomini e mezzi (96.000 francesi contro 48.000 prussiani e sassoni), Napoleone riuscì in mezza giornata a sbaragliare il nemico, nonostante il suo maresciallo Ney, solitamente abilissimo, pasticciasse attaccando prematuramente e mettendo a rischio l'intera operazione. Metà dei tedeschi rimasero uccisi sul campo, mentre i francesi persero una quantità irrisoria dei loro effettivi. Del resto, i prussiani combattevano ancora secondo le tattiche e lo spirito impartito al loro esercito da Federico il Grande, e le rivoluzioni sono tali solo

[4] Come accennato, Federico II conosceva benissimo il francese, e in questa lingua scriveva a Voltaire. Il testo originale recita: "*Avec toute l'algèbre du monde on n'est souvent qu'un sot lorsqu'on ne sait pas autre chose. Peut-être dans dix ans la société tirera-t-elle de l'avantage des courbes que des songe-creux d'algébristes auront carrées laborieusement. J'en félicite d'avance la postérité; mais, à vous parler vrai, je ne vois dans tous ces calculs qu'une scientifique extravagance. Tout ce qui n'est ni utile ni agréable ne vaut rien. Quant aux choses utiles, elles sont toutes trouvées; et, pour les agréables, j'espère que le bon goût n'y admettra point d'algèbre.*"

finché sono nuove: la Grande Armée napoleonica era il frutto di una nuova visione della guerra, organizzata in strutture autonome[5] che contenevano al loro interno divisioni di tutte e tre armi del tempo (fanteria, cavalleria e artiglieria), e avevano una mobilità e un'indipendenza tattica decisamente superiori. E in più avevano la visione strategica di un grande generale sul campo, e non solo gli insegnamenti remoti di un condottiero ormai trapassato. Napoleone, seppur molto fiero del successo conseguito nel giro di mezza giornata e senza neppure mettere in campo tutte le sue forze, rimase quasi stupito della facilità con la quale aveva annientato i famosi soldati prussiani; ma il suo stupore crebbe a dismisura quando venne a conoscenza di aver vinto solo metà – e neppure la più importante – della battaglia.

Nelle stesse ore in cui lui sbaragliava l'esercito comandato dal duca di Brunswick, la parte principale dell'esercito germanico, composta da 63'000 uomini e guidata direttamente dal principe Federico Luigi di Prussia, stava giungendo a Jena. A meno di venti chilometri dal campo di battaglia, ad Auerstädt, si trovarono di fronte il terzo corpo d'armata del maresciallo Davout, di 26'000 soldati; quei soldati che Napoleone credeva di non aver neanche avuto bisogno di usare per vincere lo scontro. Il miope maresciallo Davout – ma miope solo in senso letterale, perché vedeva male e portava gli occhiali, non certo miope dal punto di vista strategico e militare – si trovò ad affrontare la parte più addestrata e numerosa dell'esercito nemico, e con un rapporto di forze del tutto sfavorevole, pari quasi a uno contro tre. Ciò nonostante riuscì a resistere, e infine a vincere, senza ricevere nessun rinforzo da parte degli ignari compagni d'arme che stavano facilmente vincendo nella vicina Jena, né dal corpo d'armata del titubante Bernadotte, che non prese parte a nessuno dei due scontri.

Quando i messaggeri portarono la notizia dello scontro di Auerstädt a Napoleone, questi dapprima si rifiutò semplicemente di crederci: "*Dite al vostro Maresciallo che ci vede doppio*", rispose sdegnato e con una buona dose di crudele arroganza, visto l'accenno evidente alla miopia del suo generale. Quando poi si rese conto dell'incredibile realtà, riconobbe pienamente i meriti di Davout, ringraziandolo ed elogiandolo pubblicamente, facendo in modo che fosse il suo corpo d'armata ad entrare per primo a Berlino, e nominandolo in seguito Duca di Auerstädt[6].


3 *Napoleone a Rossbach*

Prima di lasciare la Prussia ormai sconfitta, Napoleone non mancò di fare una deviazione a Rossbach, dove cinquant'anni prima i francesi furono umiliati da Federico il Grande e comandò che il cippo commemorativo della vittoria prussiana fosse rimosso, e condotto a Parigi.

Nei giorni subito seguenti alla duplice battaglia di Jena-Auerstädt, tra le migliaia di singole tragedie personali che si consumano inevitabilmente a valle di quei giganteschi massacri che costituiscono la carne e lo spirito di ogni guerra, se ne verificò una non

[5] Si tratta dei "corpi d'armata": inventati da Napoleone, e tutt'ora in uso.

[6] Napoleone, re ed imperatore di sangue non propriamente aristocratico, aveva un modo del tutto particolare – anche questo in un certo senso rivoluzionario – di distribuire titoli nobiliari. Mentre tutti i sovrani riconoscevano ai propri nobili un titolo legato ai possedimenti terrieri, sostanzialmente di origine feudataria, Bonaparte costruì un'aristocrazia militare i cui titoli discendevano non dai possedimenti geografici, ma dai particolari atti di eroismo manifestati in battaglia. Così, il maresciallo Ney diventò "*Principe della Moscova*", Lannes "*Duca di Montebello*", Berthier "*Principe di Wagram*", e così via. Unica e spiritosa eccezione (a parte i casi in cui suoi marescialli divennero davvero monarchi di regni d'Europa, come il caso di Murat, Bernadotte e altri) fu quella riservata al maresciallo Victor, che per il suo carattere allegro e guascone veniva soprannominato "Beau soleil", ovvero bel sole. Napoleone gli assegnò il titolo di "*Duca di Belluno*", essenzialmente per godere del gioco di parole francese che assimila Belluno (in francese *Bellune*) a "belle lune", bella luna. Quasi una degradazione…

particolarmente significativa dal punto di vista storico[7], ma che merita di essere raccontata.

Uno dei principali comandanti prussiani – se non il principale tout court, con buona pace del regale principe Federico Luigi – sul campo di battaglia di Jena-Auerstädt era Karl Wilhelm Ferdinand, duca di Brunswick. Era un uomo ormai vecchio, soldato di valore, aveva fatto in tempo a combattere la Guerra dei Sette Anni agli ordini di Federico il Grande, ma ormai aveva più di settanta anni. A Jena fu ferito gravemente da un colpo di moschetto, perse la vista da entrambi gli occhi, e in seguito alle ferite si ammalò subito gravemente. Una delegazione di suoi ufficiali fu subito mandata al campo del comando francese, impetrando che fosse concesso al duca di poter rientrare nelle sue terre, per morire in pace ed essere sepolto vicino ai suoi avi. Per quanto Napoleone non fosse insolito ad atti di pietà, specialmente nei casi in cui questi erano rivolti verso militari che onorevolmente conducevano la guerra, quella volta rifiutò la supplica, e lo fece anche ferocemente, coprendo d'insulti il vecchio avversario. Gli ambasciatori risparmiarono al duca l'ultima offesa, e in qualche modo si prodigarono per riuscire a condurre comunque il loro comandante in patria. Un triste corteo con il duca moribondo, forse già morto, attraversò in quell'ottobre 1806 le terre di Brunswick.

Questo episodio ferì molto, anche se più per la perdita in sé che per l'imperiale insulto napoleonico, l'animo di un altro grande rivoluzionario, forse ancora più grande dei due condottieri fin qui messi a confronto: come per i casi di Federico il Grande e Napoleone Bonaparte, la sua rivoluzione ha effetti palesi ancora oggi ma, a differenza delle loro, la sua non ha causato né guerre, né distruzioni, né la morte di alcuno, e questo potrebbe bastarci per giudicarla eticamente superiore.

4 *Gauss in un ritratto giovanile*

Johann Carl Friedrich Gauss nacque proprio a Brunswick[8] il 30 Aprile 1777. Le origini della sua famiglia sono poverissime e tutt'altro che nobili: suo nonno era contadino, cosa che significava, nella Prussia dell'inizio '700, essere poco più che un servo della gleba. Suo padre, Gerhard Diederich, non era molto diverso: giardiniere e guardiano di canale. Da parte materna v'era qualche segno di minore indigenza e attenzione alla cultura, e fu probabilmente dalla mamma Dorotea che il piccolo Gauss ereditò la sua curiosità verso il mondo.

Certo è che il ragazzino di Brunswick aveva una mente davvero eccezionale: diversi aneddoti sulla sua fanciullezza mirano a tramandarne l'incredibile prontezza. Si racconta che, pur non essendo stato istruito da nessuno nei calcoli, già all'età di tre anni, dopo aver capito da solo il significato delle cifre e le regole dell'addizione, segnalò al padre un errore in un conto che il genitore stava facendo sui fogli di paga dei manovali. Non si sa quanta verità storica ci sia nell'episodio,

---

[7] Resta il fatto che la memoria dell'episodio è comunque giunta fino a noi, quindi, quasi per definizione, una certa valenza storica ce l'ha comunque.

[8] Brunswick, forse avremmo dovuto dirlo prima, è la forma inglese – e quindi ormai di gran lunga la più internazionalmente usata – dell'originale tedesco Braunschweig. È comunque certo che il termine indica sia il ducato, la regione insomma, che la città capitale. Riteniamo quindi corretto scrivere sia "la città di Brunswick, nella regione Brunswick" sia "la città di Braunschweig, nella regione Braunschweig". Ci pare invece un po' troppo formale, se non proprio strano o errato, leggere, come ci è capitato, "la città di Braunschweig nella regione di Brunswick"

ma di certo è ormai entrato nell'aneddotica ufficiale del genio tedesco. Di certo, l'episodio più celebre che vede protagonista Gauss bambino è quello che racconta di come un giorno il suo pigro maestro di scuola, volendo regalarsi una mezza mattinata di pace, affibbiò alla sua classe di ragazzini delle elementari l'ingrato compito di sommare tutti i numeri da 1 a 100. Mentre i suoi compagnucci si perdevano nell'affrontare le noiose 99 addizioni una dietro l'altra, sembra che il piccolo Carlo Federico notasse che, se presi a coppie piccolo-grande (1+100), (2+99), (3+98), etc., queste davano sempre lo stesso risultato 101. Concluse che, essendo le coppie 50, bastava portare al pigro maestro la sua lavagnetta con il risultato di 101x50=5050 per risolvere il problema. E così fece, lasciando esterrefatto il poco disponibile insegnante.

L'episodio è tanto famoso che è quasi impossibile parlare di Gauss senza narrarlo un'ennesima volta: altrettanto impossibile, anche in questo caso, è stabilire quanto ci sia di vero, quanto di aggiunto, quanto di romanzato nelle centinaia di versioni che è facile trovare anche in rete. Visto quel che ha fatto dopo, comunque, non stupisce poi troppo che Gauss possa aver intravisto, seppur così piccolo, direttamente l'uguaglianza $\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$. Curiosamente però, E.T. Bell nel suo celeberrimo libro di biografie di matematici[9], racconta la storia in maniera un po' diversa, a meno che non si tratti proprio di un differente episodio della vita di Gauss. Secondo Bell il maestro di Gauss si chiamava Büttner, era effettivamente di maniere rozze e brutali, e teneva il corso di aritmetica a ragazzini di dieci anni che non avevano in pratica mai fatto di conto in precedenza. Però il compito che Büttner assegnò in quel fatidico giorno non era esattamente la richiesta di sommare i primi cento interi; più crudelmente, la lunga somma di cento addendi era composta da numeri grandi (ad esempio 81297 + 81495 + 81693 + … + 100899) che avevano però la nascosta caratteristica di differire sempre uno dal seguente della stessa quantità. In questi termini, l'aneddoto è oggettivamente più esplosivo: anche per un Gauss di ben dieci anni (e non sei o sette, come si racconta spesso nella versione che parla della somma dei primi cento interi) accorgersi della progressione aritmetica implicita nella sommatoria e usare le proprietà di queste per scrivere il risultato esatto finale è cosa da ragazzo prodigio. Anzi, da autentico genio in erba.

Tutte le versioni dell'aneddoto riconoscono poi che il brutale Büttner non era comunque del tutto cieco, e rimase fortissimamente colpito dalle capacità del ragazzo. Più ancora di lui rimase impressionato il suo giovane assistente di appena 14 anni, Johann Martin Bartels, che in seguito divenne un matematico bravo abbastanza da finire nei testi di storia della matematica e che per fortuna della nostra scienza a quel tempo insegnava proprio nella Katherine Volksschule, la scuola elementare vicino a casa di Gauss. Büttner e Bartels si dettero da fare presso la famiglia e le istituzioni perché il giovane Carl Friedrich potesse continuare gli studi presso il locale ginnasio. I ragazzi poveri hanno bisogno di aiuto (e tutte le nazioni del mondo hanno bisogno della scuola pubblica, verrebbe da aggiungere); anche se la gran parte dei ragazzi prodigio non riescono a mantenere la loro eccezionalità in età più adulta, alcuni continuano ad illuminare con la loro mente straordinaria tutta la loro esistenza. Al pari di Mozart, Gauss fu uno di questi.

Alla fine del Ginnasio, nel 1791, il neanche quindicenne Gauss mostrava tutte le sue capacità e la disposizione per continuare la sua carriera di studioso: ma andare all'università e mantenersi contemporaneamente vivo era, a quei tempi[10], cosa che riusciva solo a persone ricche o quantomeno agiate. È a questo punto che entra in gioco il Duca di Brunswick. Venuto a conoscenza dell'incredibile potenziale del suo giovane suddito, il duca Ferdinando non ci pensò due volte: lo invitò a corte, ci parlò un po', e

[9] Eric Temple Bell, "*Men of Mathematics*", 1937. In italiano, se riuscite a trovarlo, è pubblicato da Sansoni con il titolo "*I Grandi Matematici*".

[10] Sì, sì, certo: qui in Italia stiamo facendo molti progressi, abbiamo ottime possibilità che "quei tempi" tornino ad essere presto anche i "nostri tempi". Fortunati che siamo…

infine decise di passargli uno stipendio affinché potesse entrare al Collegium Carolinum[11] della sua capitale e completare tutti i suoi studi. Non sappiamo se il nobile si aspettasse in fretta dei risultati notevoli dal suo protetto: certo è che, tanto per far vedere di che pasta fosse fatto, Gauss in quell'accademia scoprì la legge di Bode – naturalmente in via indipendente da Bode – il teorema del binomio, un teorema sulle medie, e il teorema dei numeri primi.

Da Brunswick al cuore della formazione scientifica tedesca, infine: nel 1795 Gauss entra all'Università di Göttingen. Qui scopre che i suoi insegnanti non sono comunque in grado di insegnargli granché: in compenso incontra anche quello che sarà uno dei suoi migliori amici per tutta la vita, Farkas Bolyai, padre di quel Janos Bolyai[12] che legherà per sempre il suo nome alle geometrie non-euclidee.

Lasciò Göttingen nel 1798, senza aver conseguito la laurea. Non che avesse perso tempo, comunque: mentre era lì, aveva scoperto il modo di costruire con riga e compasso un eptadecagono regolare, cosa che non era riuscita ai matematici antichi, e che mostrò definitivamente al mondo che anche nel regno di Euclide c'erano ancora cose da scoprire; nessuno, prima di lui, aveva scoperto qualcosa in più di quello che il padre della geometria aveva scritto nei suoi *Elementi* molti secoli prima. Tornò a Brunswick, il duca lo rincontrò, gli confermò lo stipendio e gli chiese formalmente di ottenere una laurea. E Gauss per soddisfare il suo grande protettore finalmente si laureò, seppure *in absentia*, presso la vicina università di Helmstedt, con una tesi sul Teorema Fondamentale dell'Algebra.

Era il 1799: a quel tempo, Gauss aveva già scritto, anche se ancora non pubblicato, il suo capolavoro, le *Disquisitiones Arithmeticae*; un libro estremamente ricco di acutezza matematica e di nuovi teoremi, forse il testo più importante della matematica moderna. Per giungere alla pubblicazione, dovette ricorrere ancora una volta all'aiuto del duca Ferdinando, se si accollò le spese di stampa, nel 1801. Le *Disquisitiones* lo resero davvero famoso in tutto il mondo della matematica. Qualche tempo dopo, Alexander von Humboldt[13] domandò a Laplace quale fosse il maggior matematico tedesco, e Laplace ci pensò un po' su prima di rispondere "*Pfaff*[14]". Humboldt, che era in caccia di appoggi per proporre Gauss come direttore dell'osservatorio di Göttingen rimase un po' interdetto, e chiese un po' imbarazzato al francese: "*E Gauss*?". Laplace lo guardò di traverso e replicò: "*Che c'entra? Gauss è il più grande matematico del mondo…*".

Se le Disquisitiones Arithmeticae contenevano tesori imprevisti, gran parte delle scoperte di Gauss non raggiunsero mai la stampa, e non per cattiva volontà dei tipografi o per problemi di costi. Il motto del genio tedesco era "*Pauca sed matura*", poche cose, ma perfette: il suo personale diario era strapieno di appunti riguardanti ogni scibile della matematica, e gran parte di questi, seppur di importanza fondamentale, non videro mai la luce. Anzi, gli procurano anche qualche problema: il caso del giovane Bolyai, che dopo aver scoperto una forma di geometria non euclidea si sentì annunciare dall'amico del padre che egli ci era già arrivato una trentina d'anni prima, era tutt'altro che raro. Gran parte delle scoperte dei matematici del XIX secolo sembra fossero già state esplorate, se

[11] Se vi chiedete come andasse il giovincello nelle materie umanistiche, è presto detto: vergognosamente bene. I suoi professori di lingue classiche rimanevano ad ascoltarlo a bocca aperta, e Gauss stesso meditò a lungo se fosse meglio, per lui, darsi alla matematica o alla filologia.

[12] Nel nostro piccolo, di Janos Bolyai abbiamo parlato in RM083, Dicembre 2005, nel compleanno intitolato "*Quintum Non Datur*" dedicato a lui e a Lobachevsky. In quel pezzo si accenna all'amicizia tra Farkas Bolyai e Gauss, alla preoccupazione di Farkas quando venne a scoprire che Janos intendeva dedicarsi allo studio del postulato delle parallele, e anche allo scorno del giovane Janos quando scoprì che, pur non avendo pubblicato in merito quasi niente, Gauss lo aveva virtualmente preceduto nell'esplorazione della geometria non euclidea.

[13] Ne abbiamo parlato in RM145, "*Invito a Nozze*", compleanno dedicato a Dirichlet (non a caso, allievo di Gauss).

[14] Johann Friedrich Pfaff era stato, sia detto per inciso, il relatore della tesi di dottorato di Gauss.

non proprio sviscerate, dal figlio del giardiniere di Brunswick: i lavori di Abel[15], Jacobi, e cento altri erano in parte già stati visitati da Gauss, Legendre[16] scatenò ferocissime diatribe di priorità, perché pubblicava cose mai scoperte prima, che però in qualche modo sembravano già trattate dal tedesco. L'appellativo di "*principe dei matematici*" che presto gli comminarono non era davvero esagerato.


5 *Johann Carl Friedrich Gauss*

Ma non era solo la matematica che lo occupava: quando Giuseppe Piazzi scoprì Cerere, sull'onda dell'entusiasmo ancora recente per la scoperta di Urano da parte di William Herschel[17], tutta la comunità matematica si gettò all'inseguimento dello sfuggente pianetino, la cui orbita sembrava davvero impossibile da calcolare. Era in effetti un lavoro improbo, date le condizioni: virtualmente impossibile, anzi, a giudicare dai grandi nomi che vi avevano provato e miseramente fallito. Ma Gauss possedeva strumenti matematici superiori: ritrovò Cerere, e il modo per non perderla più nel cielo. Seguendo la sua via, altri pianetini come Vesta, Giunone, Pallade furono scoperti, palesando una miriade di pianetini tra le orbite di Marte e Giove. Quasi per fare uno sberleffo alla filosofia, i calcoli di Gauss vennero pubblicati proprio in contemporanea ad uno scritto di Hegel, dove il grande filosofo tedesco prendeva in giro i matematici che si affannavano alla ricerca di altri pianeti oltre Urano, perché non si rendevano conto che sette era il numero filosoficamente giusto e perfetto per i pianeti.

E poi la statistica, la fisica, i contributi essenziali alla teoria dell'elettromagnetismo: l'interpretazione dei numeri complessi, tutta la teoria delle funzioni ellittiche, la rifondazione della teoria dei numeri… se questo articolo viaggia leggero raccontando quasi esclusivamente aneddoti, più che elencare scoperte, è perché anche solo la lista dei lavori fondamentali di Gauss occuperebbero troppo spazio.

Resta da dire in che misura lui, che dal punto di vista politico e sociale era verosimilmente un liberale dal punto di vista etico e sociale e un conservatore dal punto di vista strettamente politico – non fosse altro per l'affetto che provava verso il duca Ferdinando – potesse essere un rivoluzionario. Lo fu perché la sua fu una rivoluzione essenziale nel metodo del procedere matematico: gran parte della matematica del Settecento si basava sulla manipolazione di formule, sull'abilità degli artifici del calcolo, perdendo di vista il rigore e la pienezza delle definizioni. Gauss, che secondo molti critici fu il primo dei "rigoristi" moderni, portò l'attenzione sul necessario rigore assoluto che doveva essere richiesto ad una dimostrazione matematica. Non fosse stato così severo con gli altri e soprattutto con sé stesso, forse avremmo potuto vedere pubblicate gran parte delle misteriose scoperte dei suoi appunti: qualche romantico ottimista disse che, se tutto

[15] Di cui abbiamo parlato in RM055, in "*Rue S.te Marguerite, No 41*".

[16] Protagonista di *"Le opere e le facce"*, RM140.

[17] Più che di lui si parla della sorella, ma anche di queste scoperte, in RM146.

quello che Gauss scoprì fosse stato reso pubblico, la matematica avrebbe guadagnato almeno mezzo secolo di storia.

Non fu un grande insegnante, ma ebbe una pletora di allievi davvero maestosa: Dedekind[18], Dirichlet[19], Sophie Germain, e molti altri. L'ultima tesi che controfirmò fu quella di un giovane promettente matematico di nome Bernhard Riemann[20]. Eppure, quello che egli riteneva il più dotato era un matematico relativamente poco famoso, anche perché morì davvero giovane: Ferdinand Gotthold Max Eisenstein, che non arrivò neppure a trent'anni di età. Di lui Gauss, che pure non era prodigo di lodi arrivò addirittura a dire: *"Non ci sono stati che tre matematici che abbiano fatto epoca: Archimede, Newton ed Eisenstein"*. La frase resta inspiegabile[21], alle nostre orecchie: ma forse, se la tubercolosi avesse risparmiato l'allievo preferito di Gauss lasciandogli ancora un mezzo secolo da vivere, potremmo scoprire che il vecchio di Brunswick sapeva bene, una volta di più, quello che diceva.

Quasi per contrappasso, tutta la comunità matematica è adesso ragionevolmente concorde che la frase di Gauss su Eisenstein è del tutto perfetta, se si accetta un'unica sostituzione di nome: l'affermazione "*Non ci sono stati che tre matematici che abbiano fatto epoca: Archimede, Newton e Gauss*", per quanto fragile come tutte le frasi troppo categoriche, non ha ancora trovato nessuno in grado di contraddirla seriamente.

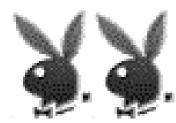
[18] Protagonista del compleanno di RM081, *„Idee a probabilità infinita"*.

[19] Come già detto, cfr RM145.

[20] A lui è dedicato *„Pellegrinaggio a Thule"*, in RM068.

[21] Forse anche per questo, nella lista delle nostre celebrazioni, Eisenstein non ha ancora ottenuto un posto: non è il caso di Archimede (RM058 *"Fuoco, Acqua e Infinito"*) e Newton (RM071, *"Il tempo e il denaro"*).

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
La primavera è come il Natale…			
Compleanno movimentato			

2.1 La primavera è come il Natale...

...tutti sono più buoni, tant'è che anche l'estensore di queste note comincia con un aiutino. Ho il grosso sospetto di avervi già presentato la prima parte (e questo, anche se non sembra, è l'aiutino).

Presumiamo che, da affezionati cultori dell'*Open Source*, siate al corrente del *fork* relativo a OpenOffice: a seguito di fusioni/acquisti/alleanze che potevano prospettare l'indisponibilità futura di alcune parti del software, è nato *LibreOffice* e i Validi Assistenti si sono affrettati a caricarlo sulle loro macchinette.

Appurato che non interferiva con i giochini, la cosa ha immediatamente perso per loro di importanza, ma avevo intenzione di fare un test più approfondito e, dato che lo strumento più usato è il foglio elettronico[22], ho costretto i due VAdLdRM a implementare un gioco velocissimo.

"Generiamo un numero casuale distribuito uniformemente tra zero e uno; poi generiamone un altro e andiamo avanti sin quando i numeri decrescono, fermandoci quando ne estraiamo uno maggiore del precedente; quello che vorrei sapere è quante generazioni di numeri casuali vi aspettate di fare prima di fermarvi".

"Oh, Fred, grandi notizie! Finalmente abbiamo un gioco che finisce di sicuro!"

"...E anche piuttosto alla svelta, direi. OK, proviamo"

Effettuate alcune centinaia di veloci simulazioni, hanno lasciato all'augusto genitore l'onore e l'onere di calcolare due elementi estremamente secondari del gioco: infatti, secondo me non solo vi dovreste aspettare un ben preciso numero di generazioni, ma (e questa siamo convinti di non avervela mai chiesta) in media il numero più basso che ottenete (quello subito prima di fermare il gioco, per intenderci) dovrebbe assestarsi su un certo valore.

[22] In realtà il tool che uso di più è il bellissimo Formula Editor, ma per il problema mi serve il foglio elettronico. Su, fate i bravi, e non fate troppe domande.

Va detto che questa volta i VAdLdRM non si sono lamentati per la lunghezza del gioco, come accade di solito; anzi, questa volta le rimostranze sono state di segno opposto:

“Fred, questo gioco finisce subito, e sta diventando noioso; non ti viene qualche idea per allungarlo?”

“Mah, aspetta... forse, se modifico questa formula qui, e quest’altra qui...”

A quanto pare sono arrivato appena in tempo per sopprimere le velleità dei due *hacker*:

“Cosa state combinando con quel foglio elettronico? Ho appena finito i conti del gioco”.

“Tranquillo, sono giusti. Ho cambiato la formula di controllo e voglio vedere se il gioco viene più lungo o più corto. Adesso, parte da zero e genera un numero che si richiede *maggiore* del numero precedente; il secondo numero generato deve essere *minore* del precedente, il terzo deve essere *maggiore*, e avanti così, alternando le richieste. Secondo me, dura di più”.

...E così, mi sono chiuso nel *Math Manor* per cercare di calcolare la durata media di questo secondo gioco; anche a me sembra duri più del primo, in questo confortato dal foglio di calcolo (sì, il generatore di casuali funziona), ma come al solito preferirei avere il valore esatto. Al momento, sto riempiendo il block-notes di strane sequenze del tipo $0 < x_1 > x_2 < x_3 \ldots$ In vista dell’ora di cena, potete darmi una mano? Fred sta gongolando in un modo insopportabile, tutto contento per aver trovato un problema tosto per il paparino...

2.2 Compleanno Movimentato

Per una serie di motivi che impiegheremmo più di un mese a spiegare ma che vi saranno chiari in un paio di minuti dopo il primo giorno del mese prossimo[23], abbiamo qualche problema a portare la torta ad Alice (vi ricordate che questo mese è il suo compleanno? Fatele gli auguri: lei, contrariamente al Vostro Umile Narratore – che ringrazia quelli che glieli hanno inviati e si scusa per le mancate risposte, ma questo è stato un mese decisamente “caldo” sotto tutti i punti di vista tranne quello meteorologico – risponde).

Infatti per i motivi di cui sopra Alice si trova a galleggiare (opportunamente scafandrata e dotata di ogni comfort che l’astronautica moderna possa fornire) in una zona dello spazio in cui la gravità generata dal resto dell’universo è praticamente nulla, tranquillamente orbitante e assolutamente non preoccupata: sa, infatti, che io e Doc ci stiamo prendendo cura di lei.

– Dunque, dobbiamo farle arrivare la torta.

– O almeno farla arrivare da quelle parti. Abbiamo progettato una torta talmente grande che ha un’attrazione gravitazionale propria. Se arriva a distanza ragionevole, comincia ad attrarre Alice.

– Già. Ma... e se ci mettesse troppo?

– Paura che la torta non arrivi in tempo? Tranquillo, è il pensiero che conta, e la vedrà da mooolto lontano, date le dimensioni.

– No, No. E se andasse a male? Pensa che figuraccia...

– Rudy, vai tranquillo. Nessuna muffa terrestre resisterebbe, e non c’`e vita nello spazio profondo...

– Uh? Devo citarti la *Formula di Coso*, ComeSiChiama, quello della formula per le civiltà extraterrestri?

[23] Qui, evidentemente, “criptico” è un’attenuazione. Se fate i bravi, a maggio ve lo raccontiamo.

– Calmati. All'*Equazione di Drake*, posso sempre rispondere con la *Domanda di Fermi*: "Se ci sono, dove si sono nascosti?". Adesso ti sentirai più tranquillo, spero.

– No, ma sto studiando una scappatoia.

– Portarla tu in bici?

– Molto spiritoso. No, sto riprogettando la torta. L'importante è distribuire opportunamente il lievito...

– Cosa stai cercando di fare?

– Semplice: dato un punto A (Sta per "Alice") nei dintorni della torta, voglio che la torta abbia una forma tale da garantire il massimo campo gravitazionale attrattivo in A; in questo modo, Alice verrà attratta alla massima velocità possibile dalla torta...

– E cosa c'entra il lievito? La massa è sempre uguale.

– Per precauzione: che atterri sul morbido...

Bene, mentre stanno arrivando dei signori gentili vestiti di bianco con una comoda camicia in lattice di gomma, riuscite a spiegare ai nostri eroi che forma dovrebbe avere la torta per garantire il massimo campo gravitazionale in un punto dato A (che continua a stare per "Alice")? Promesso, il mese prossimo vi spieghiamo cosa sta succedendo.

3. Bungee Jumpers

Provate i seguenti:

(a): Se due numeri A e B possono essere scritti come la somma dei quadrati di quattro interi, allora anche il prodotto $A \cdot B$ può essere rappresentato in questo modo.

(b): Ogni numero naturale può essere scritto come la somma di non più di quattro interi.

> *Il nostro consiglio, prima di sbirciare la soluzione, è di dare un'occhiata a quanto pubblicato sui Bungee Jumpers di RM139 e RM140; come sapete odiamo*[24] *i riferimenti incrociati e le autocitazioni, ma secondo noi una cosa così pericolosamente vicina alla Congettura di Goldbach vale lo sforzo.*

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

Ci dev'essere qualcosa nell'aria, in questa primavera; o forse proprio nel tessuto cronomorfico del 2011, se mai esistesse davvero una roba del genere. Fatto sta che sembra essere in atto una vera rivoluzione, o quantomeno una dirompente evoluzione.

Guardate le rubriche di questo numero d'Aprile: da una parte le Soluzioni & Note, da sempre parte cruciale e centrale di ogni RM, che questo mese faticano a riempire un numero minimo di pagine. Dopo di che venite qua, in questa rubrica nata per essere saltuaria, occasionale e quasi festiva, come le feste nazionali che capitano ogni 3/2 secoli: è nata per recensire solo i libri in cui hanno messo mani i lettori di RM, e quanti mai potranno essere? Certo non molti.

Eppure, guardate: la rubrichetta di recensioni ha una bella coda lunga di lavorazione (nel senso che almeno per i prossimi due o tre mesi è probabile che ve la ritroviate), mentre la sacra spina dorsale della Rivista, le soluzioni ai problemi, languono.

Siamo (o perlomeno ci piace spacciarci per) matematici, e non possiamo farci scappare le più evidenti correlazioni: ovviamente i lettori di RM sono cresciuti, o si sono evoluti, e da solutori di problemi si sono autopromossi ad autori di libri. La cosa ci fa piacere, inutile

[24] *Macché, il Capo adora i riferimenti di qualsiasi tipo, e se sono incrociati ancora meglio [NdA].*

negarlo: ci piace molto godere della gloria, anche quando, come in questo caso, evidentemente solo di gloria riflessa si tratta. Però ciò non toglie che saremmo molto più contenti se le S&N continuassero ad avere crisi di crescenza, e non di carenza.

Quindi, su, su… mandateci libri, scrivete, pubblicate, prolificate e prolificatevi: però, diamine, tra la redazione di un capitolo e l'altro, tra una promozione in libreria e una presentazione alla radio, che ne direste di mandarci qualche soluzione in più ai nostri problemi?

4.1 Come i Funghi Sbronzi d'Acqua

«Tu capisci con naturalezza l'astrusità – gli ha detto passandogli una mano sui capelli con uno sguardo malinconico – e fai fatica a comprendere l'evidenza. »

Immaginate che vi annuncino l'esistenza di un libro il cui protagonista è un professore di matematica, e che il nome di questo professore sia Buonamente. Immaginate anche, tanto per avere una collocazione di massima nello spaziotempo reale che ci ospita, di far parte della redazione di una e-zine di matematica ricreativa, e che questo libello vi sia stato inviato dall'autore per avere un giudizio spassionato sul suo lavoro. Da queste semplici premesse, cosa vi aspettate che contenga, il libro? Come credete sia strutturato, prima ancora di aprirlo? Come immaginate che si svolga la storia che contiene, se già sapete che comunque che si tratta di un romanzo, e non di una collezione di problemi?

La risposta è facile: vi aspettate un racconto essenzialmente didascalico, uno di quelli il cui il protagonista Buonamente – lieto succedaneo di altri personaggi che avrebbero potuto chiamarsi Dottor Logaritmo, Professor Ipotenusa o addirittura Mago Radice Quadrata – inizia i propri scolari in maniera arguta e divertente ai molti misteri della matematica. Libri (sia ben chiaro: assolutamente meritevoli e di cui si sente perfino un po' la mancanza, qui in Italia) insomma di divulgazione, destinati ai non iniziati, meglio se giovani. Risposta facile, davvero: e totalmente sbagliata.

Francesco Buonamente, il protagonista, è davvero un professore di matematica, ma non è un bravo insegnante. I suoi studenti lo ammirano ma non lo capiscono, e lui del resto non capisce, e quasi mai ammira, loro. Il suo stesso nome lo sente come un peso, quasi come una beffa del destino, e non lo riconosce certo come propria etichetta. Anche se la sua è davvero una "buona mente", sarà solo quando scopre di avere un omonimo – probabilmente addirittura un avo – antico musicista, con il quale condivide pienamente le generalità, che in qualche modo si riappacificherà col suo cognome: e la "*Sonata Seconda a Tre Violini*" del suo antenato riuscirà perfino a rallegrarlo alla fine del racconto.

Racconto peraltro che non spazia certo lungo tutta la vita del protagonista, anzi. La storia è racchiusa tutta in una mattina, forse anche meno. Una mezza giornata ordinariamente dedicata alla scuola. In queste poche ore, le 220 pagine del libro si snodano esplorando i pensieri che, su molteplici dimensioni, popolano il cervello di una persona che non si può definire altrimenti che "normalmente eccezionale": normale perché mostra di avere sensazioni comuni a tutte le persone, (fastidio, noia, paura, tensioni, voglie, entusiasmo, desiderio sessuale, iperboli immaginative, incidenti di percorso, voglia di fumare), e comunque certo eccezionale perché quelle sensazioni non può fare a meno di analizzarle, sezionarle, immaginarle diverse e alternative; e soprattutto rimane del tutto incapace di organizzarle, di inquadrarle nella loro naturale gerarchia della necessità pratica e immediata.

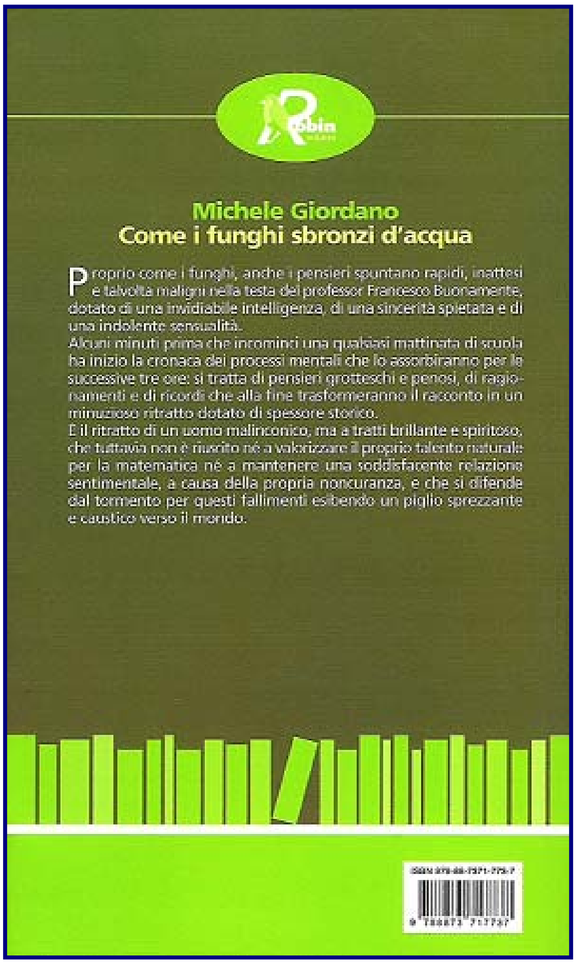
Nelle decine di percorsi trasversali e alternativi della "buona mente" si riconosce, in ultima analisi, la stessa forma narrativa che, seppure ampiamente modernizzata e con meno pretese rispetto a quella dei romanzi che l'hanno resa famosa, quella del "flusso di coscienza", noto agli amanti di giganti della letteratura come Joyce o Virginia Woolf. C'è però una differenza sostanziale: le coscienze che si riversano impetuose su carta in quei romanzi sono essenzialmente artistiche e creative, qui invece quella che Michele Giordano, l'autore, disegna in Buonamente è una coscienza profondamente razionale, anche se altamente emotiva, e perennemente frustrata dall'incapacità di razionalizzare la sua vita.

Tutto è almeno duplice, nel romanzo, come una particella quantistica che si divide tra forma ondulatoria e aspetto corpuscolare, senza mai collassare a favore di uno dei due aspetti: la bidella Pinuccia è odiosa con le sue scarpe viola e repellente per i suoi modi, ma in qualche modo carnalmente desiderabile; la supplenza imprevista è terrorizzante, ma si rivela in fondo quieta, anche se un incidente con uno studente lo ferirà al volto, agli occhiali e all'orgoglio. Però è proprio quell'incidente a rivelargli uno sguardo sollecito e preoccupato che lo ammansirà, e che altrimenti non avrebbe avuto. Il colloquio con i genitori, temutissimo fin da quando si affaccia alla mente, si rivela davvero triste e logoro con la prima persona, ma si scioglie poi come un tuffo nel passato e come una brillante possibilità di futuro con la seconda. La lezione insolita e spettacolare – almeno negli intenti forse troppo ottimistici del professore – non riscuote dai ragazzi l'attenzione sperata, ma al tempo stesso gli rivela un'obiezione fatale, nel suo pragmatismo, da parte di uno studente neanche particolarmente brillante.

Nulla è deciso, ma tutto è correlato: *"Gli appare allora palese, nella maniera più chiara che abbia mai sperimentato, che ciò di cui soffre acutamente, in circostanze come questa, è la propria difficoltà a dominare la moltitudine di pensieri che gli dilagano nella mente, ai quali lui vorrebbe concedere tutta l'udienza che meritano, mentre l'incalzare degli eventi lo obbliga a selezionarli, e in gran parte a reprimerli, per non restarsene lì imbambolato e fare la figura dello sprovveduto e dell'idiota."*

Cose che capitano spesso, alle menti razionali: sentire la necessità di fare ordine, e sentirsi impotente verso l'evidente impossibilità di riuscirci. *Come i funghi sbronzi d'acqua* non è solo il titolo del libro, né solo la prima strofa d'una filastrocca antica che Buonamente si ritrova in testa e canta con grande imbarazzo dei suoi studenti durante le sue lezioni: è anche e soprattutto l'immagine dei pensieri stessi che nascono imprevisti, e imprevisti crescono, muoiono, dilagano, senza che sia davvero possibile osservarli, vederli crescere e coglierli al momento giusto. Se non per caso.

È probabile che sia facile, per i lettori di questa rubrica, riconoscersi nei percorsi mentali fotografati da Michele Giordano: ancora più facile, probabilmente, per coloro che esercitano o hanno esercitato davvero la professione di insegnante. Non v'è nessuna concessione ai luoghi comuni dell'insegnamento: non il bravo maestro, non lo studente incompreso, non la passione per la missione educativa. C'è solo il dentro e fuori la mente, e i suoi disperati tentativi di mettere in connessione, in comunicazioni l'interno e l'esterno della scatola cranica.



Se c'è un difetto palese, nel racconto, è solo nell'estremo finale: e non perché ci si aspetti il lieto fine, o il *deus ex-machina* che possa improvvisamente sciogliere la tensione meglio di quanto sappia fare una sigaretta fumata dal protagonista con i pochi colleghi che reputa amici sulla terrazza del Liceo Feynman dove lavora. È piuttosto quella sorta di abbandono un po' precoce della storia, quel deviare nelle ultime pagine l'attenzione verso un altro romanzo (forse già scritto, forse ancora da scrivere dall'autore, forse davvero del tutto inesistente) che si lascia immaginare debba seguire, precedere o sostituire quello che sta finendo. Perché Francesco Buonamente aveva diritto di finire il suo intervallo, godersi la musica del suo avo, decidere di cambiare o non cambiare vita restando il personaggio centrale della storia narrata, senza passare il testimone a qualcun altro.

Ma va da sé: vedere, a pagina 18, il geniale professor Buonamente che ricorda d'aver risolto a mente un problema che RM ha pubblicato anni fa; vedere la gentile citazione della cosa nella pagina finale della "*Nota al Testo*", almeno per quello che ci riguarda, rimuove del tutto anche questa piccola, veniale obiezione.

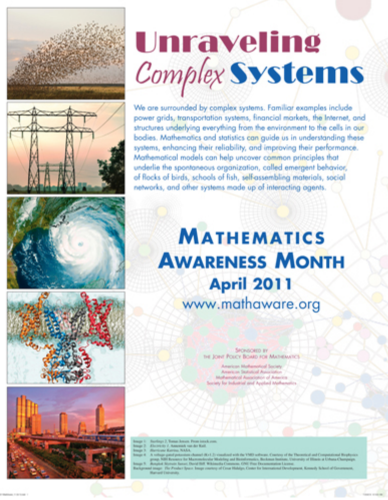
Titolo	Come i Funghi Sbronzi d'Acqua
Autore	Michele Giordano
Editore	Robin Edizioni
Collana	La Biblioteca di Domani
Data di Pubblicazione	Febbraio 2011
Prezzo	14 Euro
ISBN	978-88-7371-773-7
Pagine	233

5. Soluzioni e Note

Aprile.

Non sappiamo quanti di noi ci seguano anche su Le Scienze e sul blog relativo: probabilmente se lo fate vi troverete ad essere un po' annoiati, perché – animati dal buon spirito che in matematica non si butta mai via niente – riproponiamo spesso rubriche già apparse tra queste pagine.

Comunque, se qualcosa di importante accade in rete e arriviamo in tempo a saperlo per scriverlo in queste note, cerchiamo di scriverlo, e lo stesso facciamo – spesso più tardi – in newsletter, sul sito e sul blog: quindi non vi stupite se vi sembra di sentire l'eco tra i nostri scritti, soprattutto questo aprile.



6 *Il poster del Mathematics Awareness Month 2011.*

Aprile infatti è il mese designato dalla AMS per essere il mese della consapevolezza matematica: ogni anno viene sviluppato un tema diverso, e quello del 2011 sono i sistemi complessi... insomma, qualcosa di ben aldilà delle nostre capacità di poveri dilettanti della matematica ricreativa. Però ad aprile il nostro blog ospiterà anche il Carnevale della Matematica, per cui intendiamo fare un sacco di pubblicità e dare riscontro a tutti quelli che scrivono di matematica e permettono al grande pubblico di apprezzarne la bellezza e l'utilità. Vi invitiamo quindi anche qui a scrivere sui vostri blog – se ne avete uno – o a utilizzare l'apposito blog[25] creato da ***.mau.*** per la bisogna.

Tra l'altro i nostri webmaster stanno facendo incredibili migliorie al nostro sito, ed ora abbiamo un meccanismo aggiornato per segnalarvi gli eventi e quello che succede in giro per l'Italia: siccome noi siamo pigri e poco attenti, segnalateci tutto quello che vi sembra interessante, e cercheremo di aggiungerlo.

Perdonateci se siamo sempre in ritardo ultimamente: ci proviamo, ma abbiamo qualche complicazione tecnica che prende la maggior parte del nostro tempo ma che – purtroppo – è responsabile del 99% dei nostri salari, quindi non può essere ignorata. Cercate di volerci bene lo stesso.

5.1 [146]

Il mese di marzo ci ha portato pochissime soluzioni. Meglio, una sola soluzione e una nota, così questa rubrica sarà cortissima. ***Cid*** ci manca già tantissimo. Ma vediamo prima la soluzione. Per l'altro problema, se non riceviamo nulla il mese prossimo, cercheremo di obbligare il Capo a darci la sua versione... che non piacerà a nessuno... per cui per favore mandateci qualcosa di pubblicabile prima che ci tocchi litigare di nuovo!

5.1.1 Gennaio è sempre un gran mese

Il problema dell'ottimizzazione del taglio dei capelli del Capo e dei suoi figli (o Valenti Assistenti, come li chiama lui), si può riassumere così:

> *Luigi e Gino, i parrucchieri, vedono arrivare i tre lungo criniti, a cui devono fare shampoo e taglio. Lo shampoo possono farlo prima o dopo il taglio, richiede cinque minuti, e non possono fermarsi per darsi il cambio. Cosa che invece possono fare*

[25] http://matematti.iobloggo.com/

durante il taglio, che richiede dieci minuti. I due non possono lavorare in due sulla stessa testa: qual è la strategia da adottare per utilizzare il minor tempo possibile?

Potrebbe sembrare sufficiente torturare i parrucchieri con un primo problema, ma il Capo ha voluto andare oltre e proporre una seconda parte:

Supponiamo Gino non sia ancora un esperto, e impieghi da solo un tempo superiore a quello di Luigi a tagliarmi i capelli (lo shampoo lo fanno tutti nello stesso tempo); per esempio i 5/3. Se li si lascia lavorare entrambi sulla testa di Rudy, quanto tempo impiegheranno? Esiste una formula generale, dato il rapporto dei tempi nei quali farebbero tutto da soli?

Ora vediamo la soluzione… Quella di ***Alberto R.***, prima parte:

La triplice operazione di lavaggio-tosatura sarà completata nel tempo minimo pari a 3(5 + 10)/2 = 22.5', se, e solo se, nessuno dei due barbieri resta mai inattivo.

Siano S e T lo Shampoo e il Taglio, a, b, c i tre clienti. Le operazioni indicate sulla stessa riga sono contemporanee. Ecco una possibile soluzione:

Sa	Sb	5'
(1/2)Ta	Sc	5'
(3/4)Tb	(3/4)Tc	7.5'
(1/4)Tb	(1/4)Ta	2.5'
(1/4)Tc	(1/4)Ta	2.5'
tempo totale =		22.5'

Niente male, vero? ***Alberto R.*** ha risolto anche la seconda parte:

Nella seconda parte del quesito sia Luigi che Gino (i due barbieri) fanno uno shampoo in 5', ma, per un taglio, Gino impiega (5/3)10' contro i 10' di Luigi. In compenso è ammesso il lavoro congiunto sulla stessa testa.

È chiaro che lasceremo a Gino tutti gli shampoo che saranno da lui completati in 15', mentre, contemporaneamente, Luigi farà 1.5 tagli.

Resta da fare una tosatura e mezza ad opera di un superbarbiere dotato di quattro mani[26] in grado di eseguire un taglio in 6.25'[27].

Il nostro superbarbiere completerà il lavoro in 6.25 x 1.5 = 9.375'.

Tempo totale 24.375'.

Grazie e complimenti ad Alberto. Non è arrivato nient'altro, però.

5.1.2 Bungee Jumpers da RM146

E qui andiamo alla nota: ci ha scritto ***Caronte*** a proposito della prima parte. Riprendiamo il testo, così si capisce anche il commento:

Dimostrate che, indipendentemente dalla scelta dei numeri $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ *, è sempre valida la seguente relazione:*

[26] Quattro mani, quattro braccia, quattro occhi, quattro gambe, ma, si spera, una sola bocca. Perché il mio barbiere non la tiene mai chiusa? Perché, due volte all'anno, devo subire conferenze di borgheziana acutezza su politica, fisco, ecologia, giustizia, scuola, trasporti...? Dove sono finiti i bravi barbieri di mezzo secolo fa che parlavano solo di tette, di culi, di caccia, di pesca, di sport e, qualche volta, riuscivano pure a stare zitti?

[27] L'inverso della somma degli inversi. Come due resistenze elettriche in parallelo.

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2} \geq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^2}.$$

Ebbene, ecco cosa scrive il nostro ***Caronte***:

> La disuguaglianza citata non è altro che una parafrasi di quella che, probabilmente, è la più famosa delle disuguaglianze, nota come disuguaglianza triangolare, la sua presentazione più elementare essendo appunto "in un triangolo un lato è minore della somma degli altri due", mentre una sua formulazione più avanzata è "il modulo di una somma (di vettori, in uno spazio ad un numero arbitrario di dimensioni) è minore o uguale alla somma dei moduli (dei vettori componendi)".

E con questo è tutto! Buon aprile, e scriveteci di più!

6. Quick & Dirty

> Sul "solito" Stewart, abbiamo trovato un problemino che ci ha riportato a vecchi ricordi e piccole invidie che mettiamo in nota[28] per non rendere chilometrico questo Q&D.

L'allievo che vi hanno mandato a ripetizione di matematica ha un modo particolarmente eterodosso di sommare le frazioni: infatti, il calcolo che fa bella mostra di sé sul foglio è una cosa di questo tipo:

$$\frac{1}{4}\times\frac{8}{5}=\frac{18}{45}$$

Prima di essere preso a scudisciate (secondo i più moderni metodi pedagogici), il vostro allievo riesce a mormorare un "ma ho controllato con la calcolatrice, e viene esatto!", e vi fermate un attimo a cercare *per quali valori* (cifra singola diversa da zero per ogni valore) il metodo funziona; e questo permette al somarello di sfuggire alla vostra ira.

7. Pagina 46

(a): L'asserzione del problema segue dalla seguente identità:

$$\begin{aligned}
&\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2\right)\\
&=\left(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4\right)^2+\\
&\left(x_1y_2-x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3\right)^2+\\
&\left(x_1y_3-x_3y_1+x_4y_2-x_2y_4\right)^2+\\
&\left(x_1y_4-x_4y_1+x_2y_3-x_3y_2\right)^2.
\end{aligned} \qquad [1]$$

che si verifica facilmente.

[28] Trattasi di un vecchio "Classici di Topolino" in cui (per salvare la casa) Paperino diventa maestro e spiega le quattro operazioni in modo particolarmente bislacco: ricordiamo solo che, per verificare una moltiplicazione palesemente sbagliata, viene addizionato un certo numero di volte il moltiplicando sommando le unità e poi addizionando le decine come se fossero unità al risultato; siamo *sicuri* che *un certo* lettore sarà in grado di individuare il racconto. Da quel volume vengono due delle tre citazioni paperinesche preferite da Rudy: "ama il vino e il cane" e "una mensa sana incorpora i sani" come traduzione, rispettivamente, di "*arma virumque cano*" e "*mens sana in corpore sano*"; la terza, proveniente da altro volume, è "volgare ostentazione di plutocratica sicumera", e da questa nasce l'invidia: infatti *quel certo* lettore è riuscito a trovare la vignetta... Siamo *sicuri* che si lancerà nella ricerca e spiegazione del metodo matematico paperinesco.

L'identità presentata in `[1]` è piuttosto complessa, notiamo che si tratta di una variazione su un problema già presentato:

> Se ciascuno degli interi A e B può essere rappresentato come somma di due quadrati, allora anche la loro somma può essere rappresentata nello stesso modo[29].

Questo problema è stato risolto ricorrendo all'identità:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(a_1^2+b_1^2\right)=\left(aa_1+bb_1\right)^2+\left(ab_1-ba_1\right)^2.$$

Che può essere generalizzata come:

$$\left(aa'+bb'\right)\left(a_1a_1'+b_1b_1'\right)=\left(aa_1'+bb_1'\right)\left(a_1a'+b_1b'\right)+\left(ab_1-ba_1\right)\left(a'b_1'-b'a_1'\right).$$

Se in quest'ultima identità poniamo:

$$\begin{aligned} a &= x_1+ix_2, & a_1 &= y_1+iy_2, \\ a' &= x_1-ix_2, & a_1' &= y_1-iy_2, \\ b &= x_3+ix_4, & b_1 &= y_3+iy_4, \\ b' &= x_3-ix_4, & b_1' &= y_3-iy_4, \end{aligned}$$

in cui sia $i=\sqrt{-1}$, si giunge all'identità del problema dato.

(b): Potendo ogni intero essere espresso come prodotto di numeri primi, il risultato ottenuto al punto (a) permette di ridurre questo problema alla dimostrazione che ogni numero primo può essere espresso come la somma dei quadrati di quattro interi.

Nella parte (2) del problema precedentemente citato avevamo dimostrato che:

> Tutti i numeri primi nella forma $4n+1$ possono essere scritti come somma di due quadrati, mentre nessun numero della forma $4n+3$ può essere espresso in questo modo.

Da un altro problema precedente[30] sappiamo che esiste un numero m tale che mp possa essere espresso come somma di al più quattro interi, ossia:

$$mp=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$$

(l'espressione si riporta al caso precedentemente dimostrato per $x_3=1$ e $x_4=0$); senza perdere in generalità, consideriamo $m<p$. Mostreremo che se $m>1$, allora m può essere ridotto, ossia che possiamo sempre trovare un numero $n<m$ tale che anche np può essere espresso come somma di al più quattro quadrati.

La dimostrazione è lineare per il caso di m pari, in quanto in questo caso

$$mp=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$$

risulta pari, e deve quindi presentarsi uno dei seguenti casi:

1. Tutti e quattro i quadrati a secondo membro sono pari;
2. Due dei quadrati a secondo membro sono pari, gli altri due dispari;
3. Tutti e quattro i quadrati a secondo membro sono dispari.

[29] BJ&P46 di RM139, agosto 2010, parte (1).

[30] BJ&P46 di RM140, settembre 2010.

In ognuno di questi casi i quattro numeri x_1, x_2, x_3, x_4 possono essere raggruppati in due coppie (siano, ad esempio, (x_1, x_2) e (x_3, x_4) i cui membri sono o entrambi pari o entrambi dispari; quindi, i numeri:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right), \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right), \left(\frac{x_3 - x_4}{2}\right)$$

saranno tutti interi, e potremo scrivere:

$$\frac{m}{2} \cdot p = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3 - x_4}{2}\right).$$

Ossia, anche il numero $\frac{m}{2} \cdot p$ può essere espresso come somma dei quadrati di al più quattro interi.

Il caso di m dispari si presenta più complesso.

Indichiamo con $y_k\ (k = 1,2,3,4)$ i quattro resti minimi in valore assoluto che appaiono quando x_k viene diviso per m, ammettendo i resti negativi[31]:

$$x_k = mq_k + y_k \qquad k = (1,2,3,4),$$

dove $|y_k| < \frac{m}{2}$.

Abbiamo allora:

$$x_k^2 = m^2 q_k^2 + 2mq_k y_k + y_k^2 = mQ_k + y_k^2 \qquad (k = 1,2,3,4),$$

dove $Q_k = mq_k^2 + 2q_k y_k$ è un intero. Da cui, se $q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$, si ha:

$$mp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = mq + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$$

e, se $n = p - q$,

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = mn.$$

In queste relazioni deve essere $m < n$, in quanto

$$mn = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 < 4\left(\frac{m}{2}\right)^2 = m^2;$$

non solo, ma $n \neq 0$, in quanto altrimenti tutti gli x_k sarebbero divisibili per m e $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = mp$ sarebbe divisibile per m^2; il che è impossibile, visto che p è primo e m è diverso da 1 e minore di p.

Mostriamo ora che anche il numero np può essere espresso come somma di non più di quattro quadrati, verificando che sia mp che mn possono essere espressi come somma di questo tipo. Dall'identità dimostrata nella parte (a), segue che il prodotto $mp \cdot mn = m^2 np$ può essere espresso come somma dei quadrati di quattro numeri:

[31] Se, a seguito della divisione per *m*, otteniamo un valore maggiore di *m*/2, incrementiamo il quoto di 1 e otteniamo un resto negativo, questa volta minore in valore assoluto di *m*/2.

$$
\begin{aligned}
m^2np = \ & (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2 \\
& + (x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)^2 \\
& + (x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_4 - x_4y_2)^2 \\
& + (x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2)^2.
\end{aligned}
$$

Mostreremo ora che entrambi i membri di quest'ultima eguaglianza possono essere divisi per m^2. Se sostituiamo a secondo membro per tutte le x_k l'espressione $mq_k + y_k$, vediamo che tutte le espressioni sotto le parentesi sono divisibili per m: infatti la prima espressione è divisibile in quanto $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = mn$ è evidentemente divisibile per m, mentre gli altri membri lo sono attraverso la sostituzione $x_k = mq_k + y_k$ causa la cancellazione di tutti i prodotti del tipo y_1y_2 e similari.

Dividendo quindi l'ultima eguaglianza per m^2, otteniamo:

$$np = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

come era richiesto di dimostrare.

Allora, se il numero m nell'equazione:

$$mp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_4^2$$

è diverso da 1, può sempre essere decrementato; il che significa che esisterà sempre un numero positivo $n < m$ per cui varrà sempre una regola dello stesso tipo e, se $n \neq 1$, potremo ulteriormente decrementare il valore di n.

In questo modo, otterremo una sequenza di valori strettamente decrescente di interi $m > n > n_1 > \ldots$ e, in un numero finito di passi, arriveremo a:

$$p = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2,$$

che è la tesi.

8. Paraphernalia Mathematica

Una premessa, per cominciare: era intenzione di Rudy scrivere un ben preciso pezzo, affrontando un argomento che era in sospeso da molto tempo; il titolo che ha intenzione di attribuire, però, è diventato piuttosto di cattivo gusto, quindi rinviamo. E, una volta tanto, titoliamo con l'argomento. Del quale parleremo piuttosto poco.

8.1 Tsunami

Letteralmente, in giapponese, "onda del porto"; siamo abituati a considerare il porto un approdo sicuro, al riparo dalla furia degli elementi, e ci si chiede quale sia il motivo che ha spinto a chiamare uno dei più devastanti fenomeni marini con un nome così tranquillo: come al solito, la prenderemo alla lontana, e per buona parte di questo pezzo parleremo di tutt'altro.

Quando si parla di "onda", in matematica, la prima cosa che viene in mente è la cosiddetta "Equazione Classica delle Onde" ossia la:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Questa è una "semplice" equazione differenziale che si sposta dal caso monodimensionale al caso tridimensionale (quindi a una realtà fisica a noi più vicina) con l'equazione:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c\Delta u = 0$$

dove Δ è noto come l'operatore "Laplaciano": in pratica, le derivate seconde lungo le tre direzioni o, se vi piacciono le definizioni complicate, $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u$; lo diciamo adesso e lo diamo per scontato nel seguito: i risultati sono facilmente esportabili al caso tridimensionale, quindi d'ora in poi lavoreremo con il caso monodimensionale lasciando come "facile esercizio al lettore" (seeeh...) l'estensione.

In realtà di "Equazioni d'Onda" in giro ce ne sono un mucchio: è nostra intenzione dare un'occhiata e (possibilmente) cercare di capire come si studiano fornendo alcuni dettagli (che non dimostreremo: le dimostrazioni sono complicatissime e noiosissime, anche se con effetti devastanti) su quella, in particolare, che ammette come soluzione uno *tsunami*; se siete interessati ai dettagli tecnici, chiedete e forniremo.

Dicevamo che di "Equazioni d'Onda", ne esistono svariate, ciascuna delle quali descrive diversi fenomeni: la tassonomia matematica ne distingue alcuni tipi, che qui riportiamo per il caso monodimensionale; cominciamo, per amor di completezza, con il ripetere quella appena vista, nota come ***Equazione delle Corde Vibranti***:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \qquad [1]$$

Un'altra equazione d'onda piuttosto famosa è la cosiddetta ***Equazione Lineare di Schrödinger***:

$$i\hbar\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \qquad [2]$$

Non fatevi spaventare dalla robaccia davanti alle derivate: con l'opportuna ridefinizione delle unità di misura, vi ritrovate un'equazione per cui le uniche differenze dalla [1] sono l'ordine della derivata rispetto al tempo (secondo nella prima, primo nella seconda) e il segno davanti alla derivata spaziale. Non sembra, ma questo cambia un mucchio di cose.

Il fatto che si sia specificato "lineare", dovrebbe farvi sospettare che esista l'***Equazione Non Lineare di Schrödinger***:

$$i\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\mu|u|^{p-1}u. \qquad [3]$$

Tranquilli, anche qui: μ è una funzione segno, che quando vale +1 fa sì che la funzione venga definita *non localizzata*, mentre nel caso inverso, logicamente, viene definita *localizzata*. No, non ve lo spieghiamo.

E con quelle viste sin qui, qualche cornata al muro durante gli anni universitari dovreste averla data; quella che secondo noi però è la più bella, raramente la si vede: si tratta dell'***Equazione di Airy***:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0. \qquad [4]$$

Dalla mancanza di coefficienti, dovreste accorgervi che è un'equazione studiata più che altro da un punto di vista teorico: mentre la presenza di un termine "ridicolo"[32] fa pensare che la prossima abbia un qualche riferimento con la realtà (lo ha: è quella dello *tsunami*). Stiamo parlando dell'***Equazione di Korteweg-deVries***, abbreviati in ***KdV***:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+6u\frac{\partial u}{\partial x}=0. \qquad [5]$$

Della quale esiste una generalizzazione, non a caso nota come ***Equazione Generalizzata di KdV***:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial\left(u^p\right)}{\partial x}=0. \qquad [6]$$

Adesso non spaventatevi: per p=2, a meno di coefficienti, dovreste ottenere la [5]; caso mai vi interessasse, per p=3 ottenete quella che si chiama(va) ***Equazione KdV Modificata*** mentre, se vi piacciono le complicazioni, per p=5 nascono una serie di problemi noti come *problemi della massa critica*.

Ma andiamo con ordine.

Tanto per cominciare, semplifichiamoci la vita. Presupporremo che le soluzioni si "comportino bene", ossia abbiano una serie di caratteristiche che ci faranno comodo durante le dimostrazioni (che non vi daremo): derivabili, senza singolarità, eccetera.

I matematici, di solito, richiedono almeno una cosa, per stare sul semplice: che le soluzioni siano rappresentabili in $\Re^n$. Volendo stare sul "reale", dovrebbero essere rappresentabili in $\Re^{n-1}\times\Re$, dove il secondo termine è un "fibrato" sul primo, ma lasciamo perdere: ne parlerà qualcun altro un'altra volta, di questa sottile distinzione.

[32] L'estensore di queste note (Rudy) considera la comparsa di numeri interi maggiori di tre in una formula come una stranezza (nulla contro gli irrazionali, viviamo in una valle di lacrime, quindi π ha pieno diritto di presenza): ancora oggi il "ventisette" nella formula dei gas reali lo lascia perplesso, e gli amici ancora ricordano l'aria di sarcastica riprovazione (si dice?) quando, durante il corso di Struttura della Materia, si è ritrovato a dover lavorare con una formula che aveva dentro un *ottanta*. Insomma, cerchiamo di essere seri! Logicamente, non si ricorda di che formula stia parlando: certe cose, vanno rimosse.

I fisici, invece, volendo restare aderenti alla realtà, richiedono che le soluzioni tendano a zero per spazio e tempo tendenti a infinito: il che (essendo fisici o ingeneri per formazione) ci sembra abbastanza logico[33].

Adesso, torniamo alla matematica. Quelle che abbiamo visto sono tutte ***Equazioni di Evoluzione***: ossia, se avete la posizione iniziale dell'onda nella forma $u(0,x)=u_0(x)$, le equazioni hanno soluzione per qualsiasi t>0, ossia potete capire come evolverà l'onda nel futuro. Non solo, ma queste equazioni ammettono tutte *inversione temporale*: il fatto che esista una soluzione per $u(x,t)$ implica automaticamente che ne esista una per $u(-x,-t)$, ossia le nostre condizioni iniziali determinano le soluzioni anche nel passato.

La cosa potrebbe sembrare lapalissiana, ma non lo è: solo le equazioni di evoluzione hanno questa caratteristica. Altre equazioni, cosiddette di *dissipazione*, permettono di ottenere solo le soluzioni nel futuro: un esempio che si vede tutti i giorni è l'*equazione di trasmissione del calore*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0.$$

Torniamo alle nostre equazioni, e cerchiamo qualche altra proprietà interessante.

Tanto per cominciare, sono tutte ***Equazioni Conservative***: esiste un "qualcosa" che si conserva nel tempo. In particolare esiste un *funzionale*, detto l'***Hamiltoniana***[34] del sistema, che è un numero reale, e la cosa si esprime come:

$$H(u(t)) = H(u(0)) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial H(u(t))}{\partial t} = 0.$$

L'espressione della conservazione dell'Hamiltoniana è semplicissima, purtroppo non altrettanto l'espressione delle diverse Hamiltoniane.

Ognuna delle equazioni viste ha poi, nello specifico, anche altre *simmetrie* sue proprie: e questo, per il Teorema di Noether[35], significa che ci sono anche altre grandezze che si conservano. Ma torniamo all'Hamiltoniana.

Cosa significa, il fatto che si conservi un qualchecosa? Beh, la conseguenza fondamentale nasce dal fatto che (citiamo noi stessi) "[L'Hamiltoniana] non è altro che l'espressione dell'energia totale in termini delle variabili di posizione e di quantità di moto".

Ossia, in un qualsiasi momento la soluzione $u(t)$ è *simile* alla $u(0)$, in quanto porta la stessa energia totale. Questo autorizzerebbe a concludere che le nostre equazioni evolvano nel tempo in un modo piuttosto "statico" (o, quantomeno, decisamente periodico); purtroppo non è così, perché tutte queste equazioni hanno un'altra caratteristica, quella della ***Dispersione***.

Dalla teoria delle equazioni differenziali dovreste ricordare che, se due funzioni sono soluzioni dell'equazione data, qualsiasi combinazione lineare delle due equazioni lo è anch'essa: quando si parla di onde, quello che differenzia le due soluzioni è la ***frequenza***, e si verifica con (relativa) facilità che frequenze diverse si muovono con velocità diverse, e quindi la nostra onda generica, nel tempo, si "disperde".

Proviamo con un esempio, complicato ma non troppo.

[33] ...e per noi il "fibrato" non è una complicazione: trattasi, infatti, del mondo reale.

[34] Ne abbiamo parlato (poco: Hamilton non ci è simpaticissimo) nel PM di RM086 (marzo 2003) "*Meno c'è da fare, più siamo contenti*".

[35] Di Emmy Noether abbiamo parlato in "*Questione di Attributi*", il compleanno di RM086 (sempre marzo 2003); del suo teorema non ancora, ma non disperiamo di riuscirci, prima o poi. Ci sono volontari?

Vediamo le *soluzioni di onda piana*:

$$u(t,x) = Ae^{it\tau + x\cdot\xi}$$

in cui abbiamo un'ampiezza $A \neq 0$, una frequenza temporale $\tau \in \Re$ e una frequenza spaziale $\xi \in \Re^d$ (motivo per cui a esponente compare un prodotto scalare: sì, è un *fibrato*). Questo aggeggio risolve esattamente l'equazione di Airy [3] se imponiamo $\tau = \xi^3$, che è quindi la ***relazione di dispersione per l'equazione di Airy***; riscrivendo quindi la soluzione in termini di relazione di dispersione, si arriva alla conclusione che la nostra onda ha una *velocità di fase* $-\xi^2$: ossia le onde a frequenza più alta hanno una velocità di fase più alta e la direzione della velocità è verso sinistra, ossia verso i negativi. Il calcolo per gli altri modelli ve lo lasciamo volentieri (attenti che quando c'è di mezzo un potenziale o le equazioni non sono lineari è tutt'altro che semplice: in questi casi ci si limita a piccole ampiezze o ad alte frequenze, ignorando gli altri contributi).

Come ogni fisico sa (o meglio, *dovrebbe sapere*), l'informazione non è portata dalla velocità di fase, ma dalla *velocità di gruppo*: qui i calcoli di solito diventano approssimativi, e nel caso dell'equazione di Airy si ottiene il valore $-\xi^2$: diversa dalla velocità di fase, ma almeno dal punto di vista qualitativo (il fatto che sia una potenza e che abbia segno negativo) si comportano nello stesso modo.

Il metodo di considerare le soluzioni come sovrapposizione di onde piane funziona con tutte le equazioni viste (anche se ogni tanto bisogna prendere alcune scorciatoie); si vede però che in alcuni casi (quelli non lineari e quelli che contengono un potenziale) abbiamo due tipi di soluzioni: una che decade, per $t \to \infty$, come $O\left(t^{-\frac{d}{2}}\right)$, e sono i cosiddetti ***stati liberi*** (o *stati radiativi*, se preferite una versione più simile all'inglese), e un'altra componente che decade esponenzialmente, e questi sono noti come ***stati legati***: detto in parole più semplici, le soluzioni di un'equazione o si disperdono completamente per $t \to \infty$ o (in presenza di un potenziale esterno) si decompongono in una sovrapposizione di stati liberi che si disperdono e in uno stato legato che mostra oscillazioni di fase ma, per il resto, è stazionario.

Adesso, tiriamo un sasso nello stagno.

Fatto?

Dovreste aver visto che l'ampiezza delle onde diminuisce nel tempo, sino ad annullarsi; alcune, però, si comportano in modo strano.

La cosa venne notata per la prima volta dall'architetto navale ***John Scott Russell***: l'avanzamento di una chiatta in un canale poco profondo aveva generato un'onda che, a prima vista, non aveva assolutamente l'intenzione di "decomporsi in una sovrapposizione di stati liberi", ma continuava imperterrita a procedere lungo il canale; leggenda (probabilmente vera) vuole che Russell sia saltato a cavallo e si sia messo ad inseguire l'onda, vedendola propagarsi immutata sin quando (ad un incrocio) non la perse di vista[36].

Il primo tentativo di definire un modello di quest'onda portò alla conclusione che il sistema fosse instabile, attribuendo la generazione dell'onda, più che alla chiatta, alla birra del vicino *pub* visitato da Russell; i successivi studi di Korteweg e deVries, correggendo alcuni errori nei primi calcoli, portarono alla dimostrazione che onde di questo genere potevano generarsi; imponendo infatti che la soluzione fosse del tipo

[36] E a questo punto dovrebbe essere chiaro il motivo per cui i giapponesi la chiamano "onda del porto".

$u(x,t) = f(x - ct)$, allora f diventa soluzione dell'equazione KdV nel momento stesso in cui risolve l'equazione (attenti alle derivate):

$$-cf' + f''' + 6ff'' = 0.$$

La quale, se supponiamo che f decada all'infinito, si trasforma nella più semplice

$$-cf + f'' + 3f^2 = 0.$$

Che sappiamo risolvere (o meglio, qualcuno la sa risolvere...), ottenendo:

$$u(x,t) = c \ \mathrm{sech}^2\left(c^{\frac{1}{2}}(x - ct - x_0)\right).$$

Per ulteriori dettagli, consigliamo la ricerca delle *Funzioni (esplicite) di Schwartz*, di cui questa sopra è un esempio.

Abbiamo quindi ottenuto una famiglia di funzioni che sono soluzione della nostra equazione: anche se a prima vista non sembra, queste soluzioni sono abbastanza semplici, poiché un unico parametro (c) controlla tutte le grandezze caratteristiche dell'onda, mentre x_0 è la posizione iniziale. Infatti, l'altezza e la velocità sono proporzionali a c e la lunghezza va come c^{-1}, la qual cosa riveste già un certo interesse, vista l'implicazione che per quanto riguarda queste onde quelle con massima ampiezza *sono più strette e si muovono più veloci*.

Anche in questo caso, gli stati legati si muovono verso destra, mentre quelli liberi verso sinistra; sorge spontaneo chiedersi cosa succede quando andiamo a rompere le scatole a un'onda del genere o, in termini scientificamente più precisi, quando aggiungiamo ad un'onda del genere una perturbazione. Il risultato, se ci passate la battuta, è insignificante dal punto di vista matematico ma terribile dal punto di vista fisico: la perturbazione viene rapidamente buttata negli stati liberi, e la nostra onda solitaria prosegue *indisturbata*. E sola. Da cui, il nome ***solitone***.

Notate che abbiamo detto "perturbazione", intendendo quindi una sorta di rumore non meglio definito; la domanda che ci si pone immediatamente, a questo punto, è: ma cosa succede, se ad un solitone aggiungo un altro solitone?

Per usare una parafrasi matematicamente corretta, è un caos. Possono aversi, in funzione della non linearità delle equazioni, i comportamenti più diversi: lo scenario più ottimista (e fortunatamente più probabile) è quello della generazione di una serie di solitoni più "piccoli" (meno energetici e con velocità diverse tra loro) con il trasferimento di una parte dell'energia agli stati liberi; al capo opposto, uno scenario (definito "esotico", quindi scarsamente probabile) prevede una forma di *respirazione* (*breathing*) della somma di solitoni, con la comparsa (quasi-)periodica di solitoni "dal nulla". Questo ultimo comportamento è possibile solo quando considerate l'equazione KdV nella forma **[6]** con $p \geq 5$: da questo, la definizione delle equazioni con $p<5$ come ***subcritiche***, $p=5$ ***critiche*** e $p>5$ ***supercritiche***: la cosa è nota sotto il nome di ***Congettura di Risoluzione Solitonica***, e il fatto che sia definita "Congettura" è quantomeno preoccupante. Esistono pochi metodi per risolvere anche solo i casi particolari dell'equazione, ma di recente si sono fatti alcuni progressi in questo campo, in particolare si è riusciti ad analizzare alcuni casi multisolitoni.

Chiudiamo una volta tanto con un'immagine (della NASA) piuttosto preoccupante: quelle increspature nella parte alta dell'immagine sono solitoni che si stanno propagando. La parte preoccupante è che quello è lo *stretto di Gibilterra*.

7 *Un solitone vicino*

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms