Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 146 – Marzo 2011 – Anno Tredicesimo

1. La signora delle comete ..... Error! Bookmark not defined.

2. Problemi **10**

2.1 Gennaio è sempre un gran mese 10
2.2 Win-tage 11

3. Bungee Jumpers **12**

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa **12**

4.1 La magia dei numeri 13

5. Soluzioni e Note **15**

5.1 [143] 15
5.1.1 Facciamo di nuovo rimbalzare le palle 15
5.2 [145] 16
5.2.1 GURPS! 16
5.2.2 Tre al prezzo di due 23

6. Quick & Dirty **34**

7. Pagina 46 ..... **35**

8. Paraphernalia Mathematica **37**

8.1 Sgt. Bessel's Lonely Hearts Club Band 37

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM145 ha diffuso 2754 copie e il 02/03/2011 per Google eravamo in 6'910 pagine.

Questo si chiama ***Aspiral Clock***, ed esce dalle menti simpaticamente malate di ***Will Aspinal*** e ***Neill Lambeth***. Ormai dovreste essere abituati a certe stranezze, quindi non vi spieghiamo neanche come funziona (comunque quelli vicini a "12" e a "11" sono buchi, non altre palline). Ma secondo voi, gente che ha delle idee del genere, la posizione delle ore l'ha *calcolata* o l'ha segnata al momento giusto?

1. La signora delle comete

Gli eroi son tutti giovani e belli.
(F.Guccini, *La locomotiva*)

In quella che potrebbe essere la scena più famosa di tutta la storia del cinema, si vede Ingrid Bergman in tailleur e cappello a tesa larga pronta ad allontanarsi, sola nella notte nebbiosa, verso il bimotore che l'aspetta sulla pista dell'aeroporto di Casablanca. Di fronte a lei, sullo schermo si staglia il profilo di Humphrey Bogart chiuso nell'impermeabile e con gli occhi seminascosti dalla tesa del suo borsalino, mentre già si intravede di spalle la sagoma dell'inflessibile capitano Renault che aspetta che si concluda l'addio struggente. Infine Rick/Humprhey scandisce la celebre battuta "*Se questo aereo decollerà e tu non sarai con lui, te ne pentirai. Forse non oggi, forse non domani, ma presto… e per il resto della tua vita*"[1], e lo spettatore, insieme a Ingrid/Ilsa, capisce che ormai i giochi sono fatti, e alla protagonista non resta altro che salire sulle scalette dell'aereo.

1 *Bogart e Bergman in "*Casablanca*"*

La scena, romantica ed evocativa, suscita emozione e commozione, ed un pezzo del cuore degli spettatori si sente in partenza insieme alla Bergman, trascinata dagli eventi su quell'aeroplano che non potrà fare altro che chiudere gli sportelli, rullare, alzarsi dal suolo e volare via nelle tenebre. In tutto ciò, c'è un aspetto del tutto banale e reale che però non viene mai colto o citato, per quanto ovvio esso sia: ovvero che Ingrid Bergman su quell'aereo, in realtà, non c'è mai salita. La voce stentorea di Michael Curtiz, il regista, avrà tuonato un soddisfatto "*Stop! The take is good*", o qualcosa del genere, e Ingrid avrà fatto un veloce dietrofront per dirigersi ai camerini. Dietro di lei, frotte di tecnici avranno spento le luci che simulavano gli oblò dell'aereo (sempre che si trattasse di un vero aereo, e non di una buona sagoma di compensato, e Humphrey si sarà tolto il fastidioso trench, lanciato da qualche parte il cappello, accendendosi forse un'autentica sigaretta da pausa di lavorazione. Del resto, era il periodo burrascoso in cui la sua terza moglie gli rendeva la vita davvero difficile, arrivando perfino a rifilargli una coltellata nella schiena; improbabile che colui che Hollywood ha incoronato come "la più grande stella maschile americana di tutti i tempi" avesse davvero in animo di perdersi, come Rick, negli occhi trasognati di Ilsa, che dopo la fine del ciak saranno tornati ad

[1] Grande battuta, ma che non vale l'altra che pronuncia sempre Rick: "*Vi faccio notare che il revolver è puntato al cuore: è il posto meno sensibile che ho*". Resta invece fuori concorso la citazione in assoluto più legata a Casablanca, ovvero la celeberrima "*Suonala ancora, Sam*"; non tanto perché appunto eccessivamente nota, quanto per il fatto che non viene mai realmente pronunciata nel film di Michael Curtiz. Rick dice solo: "*L'hai suonata per lei, puoi suonarla per me. Suona.*", mentre Ilsa chiede: "*Suonala, Sam. Suona* 'As Time Goes By'". Chi dice davvero "*Suonala ancora, Sam*" è Groucho Marx, nella parodia "*Una Notte a Casablanca*". E, dopo di lui, mille altri.

essere i meno trasognati e appassionati, ma comunque fantastici e forse indaffarati occhi di Ingrid.

È certo che rinunciare alla catarsi propria dello spettatore e forzarsi ad pensare, mentre sullo schermo corrono le immagini del film, a quello che davvero c'è intorno alle persone e agli oggetti che ci raccontano una storia è attività del tutto masochistica. Anche ingenerosa, a ben vedere: la costruzione di un film, che è sogno e racconto al tempo stesso, ha bisogno del gran lavoro di tecnici e di artisti, dell'erogazione di una grande quantità di professionalità. Pochi secondi sullo schermo, poche centinaia di fotogrammi richiedono spesso una quantità inimmaginabile di giorni/uomo, e il minimo che si può chiedere (e per il bene dello spettatore stesso) è che questi si disponga a lasciarsi trasportare nel film, allentando lo spirito di osservazione, e soprattutto critico, del mondo circostante.

Anche perché è notorio che per non farsi spaventare dai thriller o dagli horror è sufficiente distogliere lo sguardo, dirigerlo verso le crepe del soffitto o concentrarlo verso quel signore un po' obeso che si sta dirigendo di corsa verso il bagno del cinema, probabilmente sorpreso da un imprevisto attacco di colite. Basta poco, quasi niente, per uscire dalla catarsi: ma non vale davvero la pena farlo, perché l'unico risultato garantito è quello di aver sprecato i soldi del biglietto.


2 *Come prima, ma più reale*

Ciò non di meno, una volta godutosi lo spettacolo, può essere salutare ricordare che quello che si è visto è sempre drammaticamente molto meno reale della realtà, a meno che non si sia appena usciti da un cinema in cui è stato proiettato un documentario. Soprattutto, è bene non lasciarsi andare a confronti diretti e immediati: basta entrare in un vero ospedale per accorgersi che è radicalmente diverso da quello che viene mostrato nelle millanta serie di telefilm ad ambientazione medico-ospedaliera; e non solo perché gli arredi sono meno lucidi, le apparecchiature meno moderne e i medici meno fascinosamente corrucciati. Di certo, il personale che si incontra è meno bello – tutto sommato per fortuna – e la cosa non dovrebbe sorprendere, visto che negli ospedali veri ci sono medici e infermieri veri, persone normali, e non attori che, per questioni meramente professionali, fanno della propria bellezza una voce di curriculum.

Però lo si legge spesso nei volti dei visitatori occasionali, quel confronto indebito: occhi che scrutano la cellulite delle ostetriche e la calvizie degli urologi quasi fosse una pecca professionale; l'assenza di finaliste al concorso di Miss Italia alla reception quasi fosse un indice di scarsa qualità nelle prestazioni che l'ASL è in grado di erogare. Qualcuno, forse in grado di distinguere solo un pezzo della realtà ma non tutta l'estensione della fiction, si limita a concludere "*In America gli ospedali sono meglio*", affermazione che, chissà, potrebbe anche essere vera comunque, ma che è davvero difficile asserire solo perché l'inserviente che porta i pasti in corsia è piccolo e vecchio e non ha il profilo greco.

Ma, in verità, la ricerca della somma delle doti è caratteristica non solo delle finzioni che siamo abituati a goderci al cinema o in TV. La seduzione sembra possedere una strana forma di contagio, che porta l'oggetto che si ammira e desidera ad essere considerato la *summa* di tutta una serie di virtù: l'immaginazione affettiva ci impedisce un uso corretto e imparziale del giudizio, e si tende a considerare non solo bello chi è bello, non solo intelligente chi è intelligente, non solo affascinante o saggio chi è affascinante o saggio; perché in una sorta di sollevamento rivoluzionario delle emozioni si tende, entusiasticamente, a coagulare tutte le doti bene assortite nell'oggetto dell'ammirazione, quasi che considerare brutto e scontroso il genio che compie una scoperta scientifica o l'eroe che libera un popolo dalla tirannia corrispondesse ad una inaccettabile mancanza di rispetto.

"*Gli eroi sono tutti giovani e belli*", canta Francesco Guccini in una ballata: e se l'affermazione – se non altro per mere ragioni statistiche – non potrà essere sempre vera nella realtà oggettiva dei fatti, è certamente vera in quello strano territorio che è l'immaginario collettivo. Se Maria di Nazareth deve essere rappresentata come una vergine quindicenne, è in fondo naturale che sia dipinta come giovanissima e quasi conseguentemente bellissima: ma un ebreo trentatreenne della Galilea del primo secolo, quando la vita media era ampiamente inferiore ai quarant'anni, potrebbe certamente fare a meno dei lunghi capelli biondi e degli occhi azzurri e del volto giovanile dell'immagine canonica del Cristo. Anche perché se davvero c'è qualcuno che non dovrebbe necessitare della bellezza per rafforzare il suo carisma è proprio il figlio di Dio. Ma gli oggetti di venerazione religiosa sono casi molto speciali, in cui è lecito lasciare ai devoti la assoluta libertà di rappresentazione; senza contare che sono proprio le immagini sacre dei secoli antichi a mostrarci che, in fondo, questa esigenza di bellezza è relativamente recente; non mancano, nel medioevo, immagini di un Gesù Cristo più normale che bello, più sofferente che sereno.

La ricerca della perfezione assoluta, anche laddove non è necessaria, rende però un cattivo servizio a noi stessi, e non solo alla realtà storica: perché talvolta anche la conoscenza accessoria – che come tale sembra essere territorio libero per la esaltazione narrativa o consolatoria – può essere significativa, e indulgere ai bonari abbellimenti può far perdere di vista elementi essenziali nella conoscenza dell'oggetto di interesse. Certo il peccato non è quasi mai grave; ma può darsi che sia talvolta importante sapere che Garibaldi era davvero un bell'uomo, un affascinante *tombeur des femmes* che frantumava, anche in contumacia e a distanza, i cuori femminili dei due mondi. Allo stesso modo, può essere importante ricordare che Napoleone non era poi basso come di tende a credere[2], ma di certo non avevo lo stesso appeal fisico del rivoluzionario che guidava le camicie rosse: e mettere Marlon Brando ad interpretarlo è una libertà certo accettabile per le hollywoodiane ragioni del box-office, ma forse eccessiva se si volesse bene riproporre le reali vicissitudini del corso.

La tentazione è probabilmente quella di voler caricare di elementi positivi il ritratto di coloro che si ammira, quasi a corroborare ulteriormente, a giustificare noi stessi a posteriori e per gratificare i motivi dell'ammirazione. Anche in queste pagine si è spesso indugiato in questo vezzo: in fondo, nel raccontare le vite dei matematici famosi non ci dispiace voler far trasparire l'affetto e la stima verso coloro che hanno reso grande la nostra scienza preferita: e in fondo il rischio di far apparire queste celebrazioni un po' agiografiche è davvero ben poca cosa, visto che non abbiamo certo pretese di scrivere un saggio accademico.

[2] Anche se si trovano fonti che affermano ancora che *l'Empereur* fosse alto solo 155 (o addirittura meno di 150) centimetri, sembra proprio che Napoleone fosse alto almeno 168, se non proprio 170 centimetri, altezza assolutamente in linea con la media per quel periodo storico. A contribuire alla leggenda della sua bassezza sembrano aver concorso diversi fattori: innanzitutto la propaganda denigratoria inglese, che gli attribuiva tutti i difetti possibili, primo fra tutti quello della scarsa altezza; in secondo luogo un problema di unità di misura, perché il pollice francese (*pouce*) corrispondeva a circa 2,71 cm., contro i 2,54 dell'*inch* inglese, e un'altezza espressa in pollici francesi si ritrova subito decurtata di una decina di centimetri se tradotta direttamente, senza conversione, in pollici inglesi; e infine, per colpa della Vecchia Guardia, che costituiva la sempiterna scorta d'onore di Napoleone: era composta da marcantoni molto più alti della media (come, del resto, sono ancora i nostri corazzieri del Quirinale) e, circondandolo in tutte le occasioni ufficiali, facevano apparire il Bonaparte particolarmente piccolo. Del resto, ancora oggi i fan di Aldo, Giovanni e Giacomo si riferiscono spesso ad Aldo chiamandolo "quello alto", anche se in realtà Aldo Baglio, rispetto all'altezza media nazionale, non è certo una vetta, anzi.

Resta il fatto che l'attribuzione di doti suppletive rischia di modificare l'immagine reale del soggetto, e in alcuni casi questo potrebbe essere scorretto ai fini della comprensione del personaggio. E di certo è scorretto sempre nei confronti di chi legge e chi scrive, perché potrebbe essere una ginnastica salutare abituarsi a erogare tutta la giusta quantità di stima che un personaggio merita esattamente per quello che è, e non per come ci piace immaginarlo. Da questo punto di vista, può essere istruttivo cercare di ricordare l'opera oscura, e non troppo spesso raccontata, di una persona che non era bella, almeno dal punto di vista del fascino fisico, e che certamente era molto più bassa di Napoleone. Probabilmente aveva anche un brutto carattere: ma, nonostante tutto ciò, ci ha lasciato comunque buone ragioni per farsi ammirare.

3 *Caroline Lucretia Herschel*

Caroline Lucretia Herschel nacque il 16 marzo 1750 ad Hannover, in quella zona di Germania che storicamente è stata a lungo legata al Regno Unito e alla corona inglese[3]. Venne alla luce in una famiglia che aveva nella musica il suo interesse principale: il padre, Isaak, era un suonatore d'oboe nella banda delle Guardie della Fanteria di Hannover, e fece una carriera musicale che lo portò a diventare il direttore della banda. Per quanto di origini abbastanza plebee, teneva in gran conto la formazione culturale dei proprio figli e tentò di garantire un buon livello di istruzione sia ai quattro maschi sia alle due bambine. In questo trovò però l'opposizione della moglie, Anna Ilse, che se anche poteva condividere l'intenzione del marito nell'educazione dei figli maschi, trovava sostanzialmente sconveniente che le due ragazze potessero interessarsi a qualcosa di diverso dall'economia domestica.

Tutti e quattro i fratelli di Caroline divennero pertanto musicisti: suo padre Isaak cercava comunque, di nascosto dalla moglie, di mostrare alla piccola Caroline alcuni aspetti interessanti del creato: nei diari della Herschel si ritrova il ricordo di lei bambina a spasso col genitore in una notte chiara e senza luna, in cui tutte le costellazioni brillavano intensamente ed era perfino visibile una cometa.

Quando Caroline era ancora una bambina di sette anni, l'Hannover fu invaso dalle truppe francesi. Suo padre – certo musicista ma pur sempre soldato – si ritrovò impegnato nelle campagne della guerra, e non era quasi mai a casa; uno dei suoi fratelli maggiori, Wilhelm (ma resterà famoso con il suo nome inglese, William), decise di trasferirsi pertanto lontano dalla guerra, in Inghilterra, per potersi occupare di spartiti e contrappunti anziché di cannoni e cariche di cavalleria. Caroline, come si conviene alle bambine, restò nella casa famigliare. Qui tornò suo padre, ridotto male in salute a causa della guerra, e Caroline visse fino a diciassette anni facendo di fatto l'inserviente e l'infermiera in famiglia. Anche perché, attorno al 1760, era stata colpita dal tifo: la

[3] Al tempo di Caroline, le corone di Hannover (o Hanover) e d'Inghilterra erano proprio unite, entrambe appartenenti a re Giorgio II. Più in generale, l'attuale dinastia regnante nello *United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland* ha il nome di Windsor che suona felicemente anglico, ma in realtà tale nome è stato preso solo durante la Seconda Guerra Mondiale per evitare l'eccesso di accento germanico nel reale "Sassonia Coburgo Gotha" della casa reale inglese. Il triplice toponimo germanico deriva dal nome del marito dell'indimenticata Regina Vittoria, che tanto amava il suo sposo Alberto da volere che il nome della dinastia fosse quello della famiglia del consorte: ma lei, discendente diretta di Giorgio I, era esplicitamente una, anzi l'ultima, degli "Hannover".

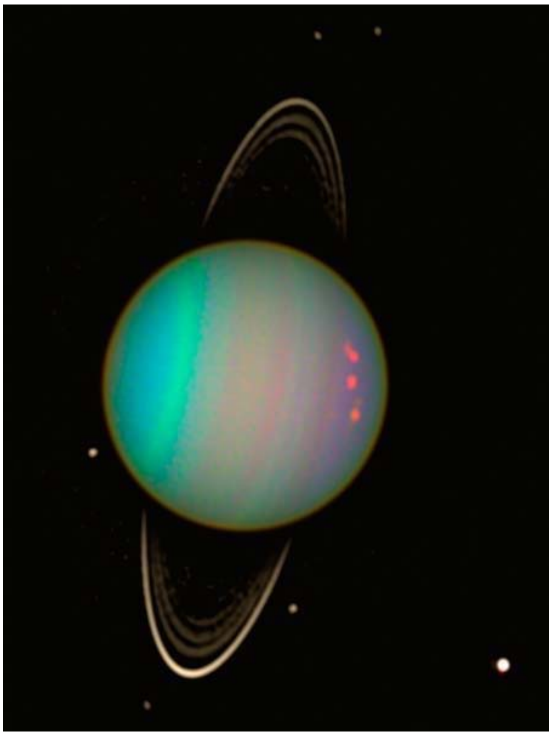
malattia minò il suo sviluppo, lasciandone incompleta la crescita: Caroline Lucretia, da adulta, arrivava a malapena all'altezza di un metro e trenta centimetri. Non era bella, ed era certo particolarmente piccola: questo convinse i genitori che non avrebbe certo mai potuto sposarsi; e, soprattutto dopo la morte di Isaak, nel 1767, Caroline fu indirizzata ai lavori propri della governante e della cameriera.

Dal destino assolutamente anonimo che le si prospettava davanti arrivò a salvarla, nel 1772, l'invito di suo fratello William a raggiungerla in Inghilterra, a Bath, nel Somerset; egli era diventato uno stimato insegnante di musica, e in fondo Caroline Lucretia aveva una gran dote che poteva mettere a frutto: era una splendida cantante. Il fratello maggiore tenne diverse lezioni private di canto a beneficio della sorella, e con successo: mentre la sua fama di insegnante di musica e organizzatore di festival musicali cresceva, la sua giovane e minuscola sorella imparava ad eccellere nel canto, al punto di ricevere anche un'offerta di lavoro stabile da parte del Festival di Birmingham. Lei rifiutò, comunque: era molto legata solo al fratello, e probabilmente non aveva necessità né voglia di altri contatti o amicizie.

4 *Il telescopio che William Herschel progettò per Caroline*

Come talvolta – ma certo non molto spesso – accade, le professioni di fratello e sorella furono inaspettatamente sconvolte dal crescere e divampare dei loro passatempi. Forse memori delle passeggiate notturne che di tanto in tanto facevano in Germania col padre Isaak, sia William sia Caroline coltivavano il diletto per l'astronomia. William poi, che sarà stato un cattivo soldato ma era certo un buon fabbricante di strumenti di pace, si dedicò con passione alla costruzione di telescopi, specialmente quelli con elevate capacità ottiche e alte prestazioni tecniche. Erano tempi in cui gli strumenti più sofisticati potevano essere costruiti da singoli individui, veri artigiani guidati dalla passione: e l'astronomo dilettante William Herschel, di professione musicista, si fece rapidamente un nome per la produzione di ottimi telescopi particolarmente efficienti. Curiosamente, William mancava però di una dote essenziale per un fabbricante di telescopi: ovvero dell'abilità e della pazienza necessaria per la molatura degli specchi, e della perseveranza necessaria nell'assemblare con cura e precisione i vari pezzi che progettava. Per sua somma fortuna aveva in casa, e a completa e assoluta disposizione, una persona che proprio in queste attività mostrava una straordinaria predisposizione: Caroline. La piccola Lucretia cominciò così la sua avventura nell'astronomia: come fornitrice di manodopera specializzata per il passatempo del fratello.

Quel che poi accadde era forse allora del tutto imprevedibile, ma in fondo coerente con le premesse. Gli astrofili William e Caroline dipendevano forse uno dall'altro, ma in coppia formavano una squadra di incredibile potenziale astronomico. Tra il 13 e il 17 Marzo 1781 William compie una serie di osservazioni di un particolare corpo celeste, che lui identifica come una cometa: come tale lo presenta in una relazione alla Royal Society, anche se ammette di essere perplesso perché non notava ancora nessun accenno di chioma, e l'orbita che sembrava seguire non appariva troppo eccentrica. Osservazioni successive dello stesso Herschel e calcoli sulla natura dell'orbita eseguiti da A.J. Lexell sembrarono infine confermare l'orbita come essenzialmente circolare, e di conseguenza il corpo celeste come un pianeta. Altri lo avevano probabilmente osservato in precedenza, ma senza riconoscerlo come tale: Flamsteed che lo scambiò per una stellina della costellazione del Toro, e naturalmente Lemonnier, che potrebbe accampare diritti di primogenitura nella scoperta. Anche se l'idea di William di chiamare il nuovo pianeta "*Georgium Sidus*" (la Stella di Giorgio, in onore al re Giorgio III d'Inghilterra) non ebbe per fortuna un gran seguito, il regale patrocinatore propose a Herschel uno stipendio di 200 sterline l'anno per diventare astronomo di corte. Non c'era di che scialare, ma abbastanza per vivere seguendo le stelle; e William (naturalmente con Caroline al seguito), accettò. Nel frattempo, anche se praticamente nessuno metteva in dubbio che lo scopritore del nuovo pianeta – il primo sconosciuto agli antichi – fosse Herschel, fu il nome proposto da Bode a prendere piede: e il nuovo cortigiano del sole, più esterno di Saturno, ebbe il nome del divino genitore di Saturno stesso: Urano.



5 *Urano come né William né Caroline lo hanno mai visto.*

William divenne pertanto un nome famoso per l'astronomia, mentre Caroline Lucretia restava un nome famoso solamente per il fratello. Nonostante la mancanza di una buona istruzione di base, però, Caroline faceva continui progressi nell'osservazione astronomica. Aveva iniziato con la molatura degli specchi, ma piano piano aveva cominciato ad aiutare il fratello in lavori meno manuali, anche se comunque apparentemente di non eccelso livello intellettuale. Sfogliando e leggendo i cataloghi astronomici del fratello, era diventata brava nel registrare in modo molto accurato i risultati delle osservazioni notturne di William. E fu proprio William, a un certo punto, a esortarla, quasi a forzarla, a procedere nello studio con osservazioni proprie. Le costruì un telescopio apposta per lei, e la mise in caccia degli oggetti del cielo. E Caroline Lucretia si dimostrò una brava cacciatrice. Aveva a disposizione un telescopio newtoniano con lunghezza focale intorno ai 70 centimetri, e con questo strumento scoprì almeno otto comete. Si aggiudicò in fretta il soprannome di "Signora delle Comete" e, per contro, la prima cometa da lei scoperta si meritò in nomignolo di "*first lady's comet*", la prima cometa di una signora.

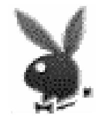
Lucretia divenne così abbastanza nota – e stimata – nell'ambiente astronomico internazionale: cosa inaudita per l'epoca, ottenne perfino uno stipendio dal Re – 50 sterline – come "assistente del fratello". Aveva come caratteristiche principali la precisione, la pazienza e l'abnegazione: quando William si accorse che il catalogo stellare allora maggiormente in auge, quello di Flamsteed, conteneva un gran numero di errori e imprecisioni, denunciò la necessità di una paziente revisione di tutte le osservazioni registrate, ma si guardò bene dall'affrontare il noiosissimo compito. Vi si cimentò Caroline, con una cura e una precisione davvero incommensurabili: nel 1798, finalmente, presentò alla Royal Society il suo "Indice delle Osservazioni di Flamsteed delle Stelle Fisse", aggiungendo anche i dati di 560 stelle non catalogate in precedenza. La Royal Society ricambiò con una medaglia speciale in suo onore, ed eleggendola, prima donna della storia, come "membro onorario" della Società.

Non era alta, non era bella. Non era troppo brava a fare di conto – non imparò mai a memoria le tabelline, e consultava sempre la tavola pitagorica durante i suoi calcoli – non era forse neppure troppo curiosa, imparava solo la parte di teoria che sapeva servirle per il suo lavoro: bravissima nella geometrica astronomica sferica, probabilmente del tutto ignara di quasi ogni altro aspetto della matematica. Non era, forse, neanche troppo aperta verso il mondo: ebbe una lunga crisi col fratello quando questi finalmente si sposò, e lei si sentì da questo, almeno in certa misura, tradita.

Non era molte cose, non aveva certo tutte le doti del mondo. Ma ne aveva di importanti: sapeva leggere il cielo, e usare la matematica che le serviva; seppe far pace con la cognata, e distrusse allora accuratamente tutte le pagine del diario in cui ne parlava male; seppe usare bene i calcoli che faceva certo con difficoltà, per scoprire e vedere nel cielo cose che nessun uomo aveva mai visto prima.

Non era perfetta, aveva i suoi difetti, e proprio per questo va apprezzata fino in fondo: era una grande donna di centotrenta centimetri.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Gennaio è sempre un gran mese			
Win-tage			

2.1 Gennaio è sempre un gran mese

Nel senso che gennaio, nella famiglia di Rudy, vede l'accumularsi di *tre* eventi che mantengono una rigorosa cadenza annuale.

Tanto per cominciare, comincia l'anno (e questo succede a tutti, salvo alcune eccezioni di cui vi dovremmo aver parlato[4] il 17 febbraio).

Indi, verso la fine del mese, ricorre un genetliaco: quello del VAdLdRM "meno vecchio" (e anche qui, se non vi chiamate Hollerith[5], restiamo nella norma).

Ma l'evento *clou* che contraddistingue questo mese e che scatena i più sfrenati festeggiamenti e le più beneauguranti pacche sulle spalle da parte dei conviventi, è il fatto che in un giorno accuratamente selezionato tra il primo e il sei gennaio, *Rudy va a farsi tagliare i capelli!*

Ora, la *Settimana Enigmistica* della settimana in cui scriviamo riporta la strabiliante notizia che *"i capelli di un uomo crescono, in media, di* 15 *centimetri l'anno*"; capite quindi che il *tonsor* di Rudy, oltre ad armarsi dell'abituale dose di stoicismo necessaria per resistere alla stessa battuta dell'anno precedente ("...me li tagli come l'altra volta..."), tende a prepararsi anche fisicamente alla bisogna. Non solo, ma sembra che il metodo di Rudy abbia fatto scuola: in quel periodo, *da Luigi* (il barbiere) arrivano anche altri matti con chiome altrettanto lunghe e altrettanto non uniformemente distribuite (nel senso che hanno tutti suppergiù l'età di Rudy, quindi la zona superiore comincia a mostrare una certa qual scarsezza pilifera; fortunatamente, questi altri hanno il buon gusto di non fare la stessa battuta cretina).

Questa volta, intravedendo Rudy girare l'angolo, Luigi e Gino (il *suo* Valido Assistente: si chiama Luigi anche lui, ma è più giovane, sulla sessantina) hanno cominciato a prepararsi spiritualmente, con scene alla Karate Kid ("*Esiste la paura in questo Dojo?" "NO, Sensei!"*), ma tutta la loro carica adrenalinica è stata annientata alla vista di altri due lungicriniti epigoni rudeschi, tre cespugli di quelle dimensioni erano troppo anche per i due eroi.

[4] L'arzigogolo del tempo verbale nasce dal fatto che non l'abbiamo ancora fatto, mentre scriviamo queste note, ma dovremmo averlo fatto, mentre le leggerete. Ecco, volevo semplificare la cosa e sono riuscito a complicarla.

[5] Per chi non ha sottomano il Calendario di RM: Hollerith è nato il 29 febbraio.

Gino: "Restiamo calmi. Vorranno, come al solito, shampoo e taglio..."

Luigi: "E lo shampoo possiamo farlo prima o dopo il taglio: quei tre si lavano la testa tutti i giorni."

Gino: "Comunque per uno shampoo ci vogliono cinque minuti, e non possiamo certo fermarci a metà o lasciarli lì per un po' o darci il cambio."

Luigi: "Cose che invece possiamo fare durante il taglio, che richiede dieci minuti."

Gino: "E non possiamo neanche lavorare in due sulla stessa testa, e vorranno andarsene il più presto possibile."

Con un rapido *shift* da cinefilo, Luigi assume uno sguardo spiritato e grida: "...Si...Può...Fare!". Afferra gli attrezzi del mestiere (tosaerba sapientemente adattati alla bisogna: in questo momento, ricorda il Jack Nicholson di *Shining*) e spiega velocemente a Gino la sua strategia.

Per farla breve: dopo un tempo ragionevole, tutti e tre gli ormai ex lungicriniti presentavano delle invidiabili sfumature "all'umberta" (a Torino si dice così, rigorosamente con la minuscola) e si avviavano verso i dovuti festeggiamenti. Che strategia hanno usato i nostri due tricosterminatori?

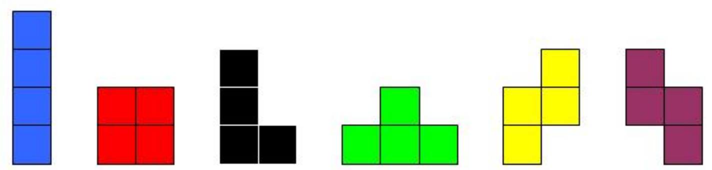
Mentre tornava a casa, essendo ancora sobrio, Rudy ha cominciato a pensare: "Supponiamo Gino non sia ancora un esperto, e impieghi da solo un tempo superiore a quello di Luigi a tagliarmi i capelli (lasciamo perdere lo shampoo, che quello lo fanno tutti nello stesso tempo); diciamo i 5/3, per dire un numero. Se li lascio lavorare entrambi sulla mia testa, quanto tempo impiegheranno? Esiste una formula generale, dato il rapporto dei tempi nei quali farebbero tutto da soli, e considerato che i miei epigoni assumeranno la stessa tollerante posizione?"

Siccome l'operazione della tonsura è per Rudy piuttosto traumatica, non ha la minima intenzione di fare i conti almeno sino al gennaio prossimo; voi, però, dovreste metterci molto meno...

2.2 Win-tage

Lo sappiamo che si scrive "vintage", ma siccome gira sotto Windows, è giusto così.

Stiamo parlando di Tetris; i due VAdLdRM ci stanno giocando in questo momento, e dall'altra camera è un continuo potitipotitipitotipitotupi nelle orecchie di Rudy che sta cercando di pensare ad altro, ma niente da fare. Quindi, vi beccate un problema sul Tetris.



6 *Cinque (dei sette) casinisti (gli altri sono umani e non contano)*

Di sicuro, vi ricordate i pezzi, comunque ve li mettiamo nel disegno qui di fianco.

"Rudy, sei sicuro dei colori?" No, ma non posso controllarli: se mostro anche solo il minimo interesse per questa maledizione dell'umanità, mi sfidano e mi stracciano.

Dunque, con calma e a sintassi libera, come tutti i creativi. Ciascuno sono quattro quadretti, che è quasi metà nove. Gioco ci cova. Trovato.

Se parlo di *Filetto* (*TicTacToe*, per gli anglofili), di sicuro cominciate a sbadigliare; supponiamo, però, che lo scopo dei due giocatori non sia quello di fare la solita "fila", ma di ottenere per primo, a forza di croci o di cerchi, uno dei pezzi qui sopra, mettendosi d'accordo prima su quale sia il pezzo *target*.

"Guarda che ottenere il primo su una scacchiera 3x3 sembra piuttosto difficile..." Vero, e se volete la mia opinione potete anche considerare uguali gli ultimi due.

Problema, anzi alcuni: esistono delle strategie vincenti per un qualche giocatore? E, nel caso, esistono dei pezzi "vincenti", ossia che ottengo sempre applicando una determinata strategia? E se gioco su scacchiere più grosse?

Adesso, un doppio *caveat*: conosciamo le risposte (e – parzialmente – le soluzioni) solo per scacchiere da 3, 4, 5 e 7 caselle di lato; non solo, ma in questo campo esistono un mucchio di problemi irrisolti, soprattutto se anziché usare i tetramini passate a oggetti di ordine superiore... Quindi, se ce la fate a dimostrare qualcosa, date un colpo di telefono a Erdös: sarà felicissimo di scrivere un articolo con voi, in merito...

3. Bungee Jumpers

Questa parte della rivista solitamente è il regno della seriosità, ma non riusciamo a trattenere questa piccola nota: i due problemi sono stati scelti perché del primo (che ha un aspetto complesso) abbiamo trovato una soluzione assurdamente semplice nella sua eleganza; il secondo, invece, sembra *non c'entrare niente, ma...*

1. Dimostrate che, indipendentemente dalla scelta dei numeri $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, è sempre valida la seguente relazione:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \geq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2}.$$

2. Una piramide viene detta *piramide retta* se, quando un cerchio è iscritto nella base, l'altezza della piramide cade al centro del cerchio. Provate che qualsiasi piramide retta ha una superficie laterale minore di qualsiasi altra piramide avente la stessa altezza e base dello stesso perimetro.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

La periodicità di questa rubrica è ormai un modo di dire: "frequente come un EuNBeT" ci è capitato di leggere in una mail di un caro abbonato qualche tempo fa. Ma dobbiamo essere proprio onesti: da quando abbiamo cominciato con questa idea insana di recensire libri dei nostri di amici e lettori non facciamo che ricevere segnalazioni e, cosa ben più importante, libri veri da leggere e godere.

Questo testo è un caso particolare: è arrivato in modo imprevisto a casa di uno dei redattori, e mesi dopo, è stato spedito dall'autore stesso ad un altro: con due copie in circolo per la nostra redazione virtuale, non potevamo proprio esimerci…

4.1 La magia dei numeri

Il mondo non morirà
per mancanza di meraviglie,
ma per mancanza di meraviglia.

La citazione che trovate qui sopra l'abbiamo trovata proprio sul sito di Mariano Tomatis, che si definisce "scrittore professionista che si occupa di saggistica con un particolare interesse per ciò che è insolito e paradossale". Appassionato di illusionismo, crede che il compito del divulgatore coincida con quello del mago: incoraggiare la gente a vivere in uno stato di continua meraviglia.

7 *Mariano Tomatis*

Questo è quello che dice lui, ovviamente: la realtà supera sempre un po' quello che le parole possono raccontare. Mariano ha girato l'Italia proponendo conferenze spettacolo, in cui giocava con il pubblico e allo stesso tempo dimostrava quanto i numeri e la matematica possano creare l'illusione della magia.

Ma è proprio in quest'accoppiata di termini che si cela l'importanza della missione di Mariano: illusionismo, magia, illusione di magia: è solo attraverso una attenta e razionalissima disamina dei meccanismi di meraviglia dell'animo umano che si riesce a coniugare con correttezza (sia etica, sia educativa) il razionale e il meraviglioso. Perché i meccanismi che stanno alla base della meraviglia, specialmente nelle menti giovani, sono quasi sempre connessi col mistero, e il mistero con il magico, quasi non ci fosse davvero una capacità di suscitare meraviglia nella stupefatta osservazione del mondo che ci circonda, quello reale. Mariano, fin dall'inizio della sua non più breve carriera di indagatore razionale degli aspetti meravigliosi del mistero, ha sempre cercato – in conferenze, articoli, libri e spettacoli – di mostrare come il misterioso abbia in realtà delle meraviglie che sono conoscibili e razionali, e soprattutto che il razionale assomma in sé una quantità di meraviglie da non temere la concorrenza di qualsivoglia disciplina esoterica.

La matematica, scienza e linguaggio della meraviglia stessa, è pertanto un terreno adattissimo alla sua penna. Matematica di base, scienza di base: quanto basta e avanza per stupire davvero, e anche per togliere stupore e mistero a chi ha velleità irrazionali. Pensateci: quanti giochi del tipo "pensa un numero…" conoscete? Quante volte vi è capitato di pensare che sia possibile trasmettere il pensiero? O avete mai provato, con la sola forza di volontà, a costringere una moneta a cadere sul lato della testa? E credete nell'esistenza degli extraterrestri?

Sembrano questioni da giornale scandalistico – o forse no, ormai i giornali scandalistici non sono più così interessanti, si limitano a fotografare torme di deficienti famosi – ma Mariano ha fatto sua la missione di parlare di tutti questi argomenti, per portare allo scoperto i trucchi dell'illusionista. Ma non per dissacrare il buon mestiere di chi usa la meraviglia per incuriosire: in fondo, la quasi totalità degli illusionisti è davvero degna di lode, perché stupisce e induce al meraviglioso, ma sempre ammette, anche se non lo rivela, che il trucco – razionalissimo e ripetibilissimo trucco – c'è. Ed è spesso trucco ingegnoso: lo scopo è quello di trasferire la meraviglia dalla magia inspiegabile, a quella spiegabile, che per definizione non è più magia: ma non è certo meno incantevole.

Ma bando alle ciance, cosa contiene "La magia dei numeri"? Beh, basta guardarne l'indice:

Introduzione

1. Leggere il pensiero – La telepatia (con sottotitoli del tipo "Le bionde sono più telepatiche?")

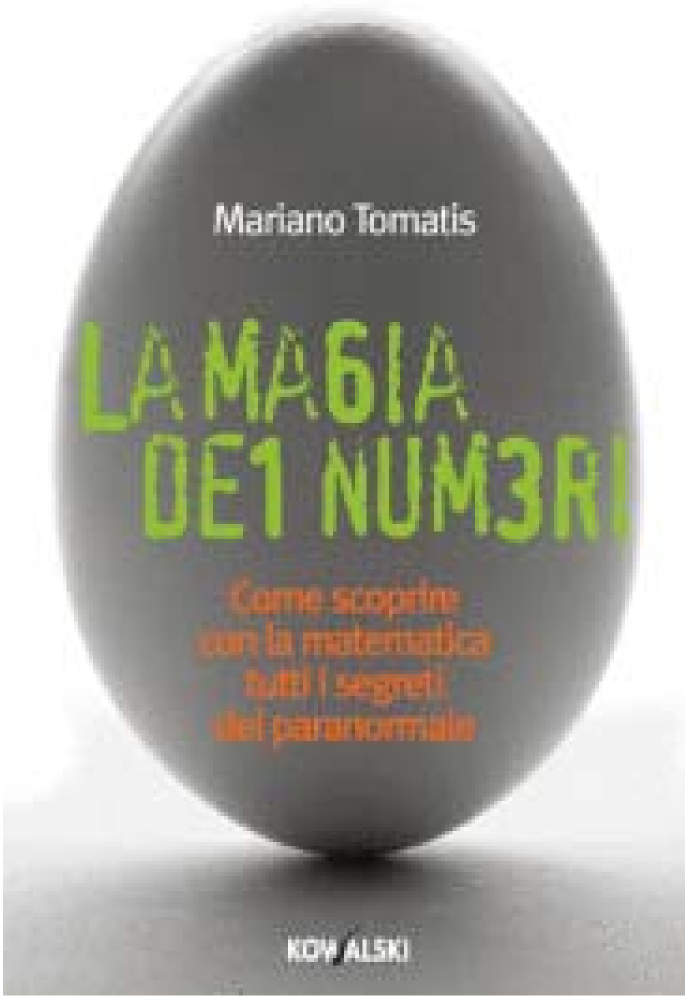
2. Il terzo occhio – La chiaroveggenza (con tanti trucchi per arricchirsi)

3. Prevedere il futuro – La precognizione (che tocca anche i segreti di "Lost")

4. Spostare gli oggetti con la mente – La telecinesi (in cui si spiega anche il fenomeno del "La fortuna del principiante")

5. Dischi volanti e cerchi nel grano – L'ufologia (fino ad arrivare ai cerchi nel grano)

6. Geometrie sacre e tesori nascosti – La numerologia (dalle piramidi alle cacce al tesoro e oltre)



Ogni capitolo è corredato di una serie di "letture consigliate" per approfondire gli argomenti, ma soprattutto ogni capitolo è un percorso magico per scoprire che la magia, se esiste, è un'illusione; o meglio ancora: se esiste, non è più magia.

Tra un capitolo e l'altro s'impara a conoscere Medioman, una persona dalle caratteristiche così banali e noiose e che però – sorprendentemente – riesce ad essere ampiamente più potente di Uri Geller, il grande piegatore telepatico di cucchiai. E poi, che ci crediate o meno, s'incontrano gli alieni, quelli che segnano i campi di grano con la evidente e scontata intenzione di conquistare la Terra. E, come se non bastasse, s'impara a predire i risultati delle partite di calcio o di qualsiasi evento sportivo, in modo da poter scommettere in tutta sicurezza e vincere… no, non finisce qui, ma vi vogliamo lasciare il piacere di scoprire il resto: così magari vi togliete la curiosità di scoprire per quale ragione Mariano Tomatis scrive certe cose su un libro invece di scommettere in continuazione e diventare l'uomo più ricco del mondo.

Ogni capitolo è veloce e divertente, il libro snello e, per propria natura e missione, tutt'altro che difficile. Potreste scoprirvi delle cose stupefacenti, ma anche decidere di utilizzarlo solo per organizzare qualche gioco in famiglia, o per scaldare l'ambiente a una festa.

Durante tutto il libro, Mariano sembra ripetere un concetto che permea – o quantomeno ci piacerebbe permeasse – anche ogni pagina di RM: "La magia esiste davvero, ed è quella che la matematica tesse ogni giorno nel mondo intorno a noi".

Titolo	La magia dei numeri
Autore	Mariano Tomatis
Editore	Kowalski
Data di Pubblicazione	Marzo 2010
Prezzo	13,50 Euro
ISBN	9788874967827
Pagine	223

5. Soluzioni e Note

Marzo.

Il mese del ritorno della primavera, si spera, ma anche del primo compleanno della redazione, come ben sapete: il Capo fa finta che passerà tutto in sordina, ma in realtà ci resta male quando non riceve i vostri auguri... quindi mandateglieli!

8 *Tanti auguri a Rudy.*

Del resto sia lui sia il Doc sono in brodino di giuggiole da quando sono tornati dalla loro conferenza per la Mathesis: da non crederci quanto si vantano di aver parlato di fronte a una cinquantina di persone, che a sentir loro era una folla di professori e – soprattutto – attraenti professoresse. Speravo di ricevere in mail qualche commento degli astanti: ve l'avevo chiesto il mese scorso, ma nessuno si è preoccupato di fare una foto ai tapini da farmi mettere qui, e neppure di dirmi niente... in realtà sembrano tutti confermare il successo dei miei compari... che sia vero?

Lasciamo perdere, e passiamo alle novità del mese... ma come faccio? Febbraio è passato in un baleno, e a parte la conferenza dei tipacci, non si è parlato di molto altro. Una cosa che renderà il mio spazio di S&N molto più breve è senz'altro la decisione di ***Cid*** di ridurre il suo sforzo attivo nel risolvere i problemi di RM, mi mancherà, ma almeno sono sicura che continuerà a seguirci e a scriverci, e ne sono contenta.

Vi ricordo ancora che il sito è sempre in evoluzione, e vi invito ad andarlo a visitare, soprattutto la sezione di Bookshelf. E qui mi fermo, e passo direttamente a parlare dei problemi.

5.1 [143]

5.1.1 Facciamo di nuovo rimbalzare le palle

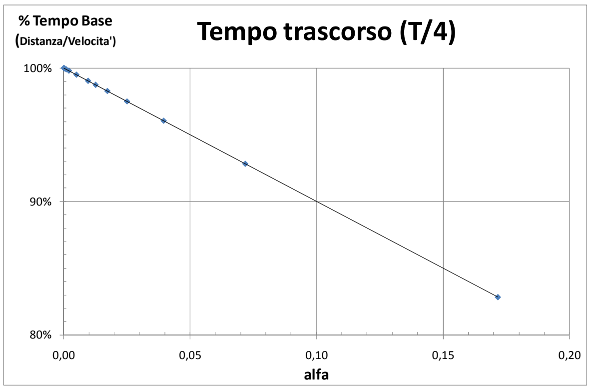
Vi ricordate questo problema tutto ideale? Ora ve lo ripropongo:

> *Supponiamo di avere un blocco di (grande) massa M, che sta scivolando senza attrito con una velocità V su un piano, e sta andando verso un muro.*
>
> *Ad un certo punto, collide in modo perfettamente elastico con una pallina magica di massa (piccola) m, inizialmente in quiete ad una distanza L dal sunnominato muro. Evidentemente, la pallina parte, rimbalza contro il muro, torna indietro, ri-rimbalza contro il blocco, riparte verso il muro,... eccetera.*

Ci aspettiamo che dopo un po' il blocco si fermi e venga, eventualmente, respinto indietro. Quanto riesce ad avvicinarsi al muro? E, in quel momento, quante volte la pallina avrà rimbalzato sul blocco?

In RM144 avevamo ricevuto tante belle soluzioni, e avevo pubblicato quelle di ***Rub*** e ***Gnugnu***, con tanto di simulazione in geogebra di quello che succede. Beh, ***Rub*** ci ha scritto ancora:

> Un buon problema ha sempre aspetti interessanti, celati tra le righe…la nostra Palla Rimbalzante consente al blocco di comportarsi (quasi) come un oscillatore armonico, che in un tempo pari ad un SemiPeriodo di oscillazione torna al punto di partenza con velocità uguale ed opposta a quella iniziale.
>
> Quanto vale il Periodo?
>
> Avendo risolto esattamente le equazioni del moto del blocco, in funzione del rapporto tra le masse, è possibile calcolare il tempo necessario per arrestarsi (un QuartodiPeriodo=$T/4$). Ed è in questo punto che appare la "Sorpresa Inaspettata": avendo V e D come velocità e distanza iniziali, m = massa palla, M = massa blocco ed $a=m/M$, ponendo in grafico il valore di $T/4$ (espresso in percentuale di D/V, il tempo di arresto senza la pallina) in funzione di α, otteniamo un andamento "esattamente lineare", non approssimato, come in figura.



9 *Figura di* ***Rub***.

> Ovvero abbiamo che
>
> $$T/4=(D/V)(1-a)=(D/V)(M-m)/M$$
>
> Perché abbiamo questa relazione esatta? Una legge fisica ha sempre una spiegazione, ma al momento mi sfugge. Qualcuno la vede?
>
> Per curiosità finale, uguagliando il valore del periodo a quello di un oscillatore armonico di massa M connesso con una molla di costante K, possiamo concludere che la palla si comporta come una molla, esercitante una forza direttamente proporzionale alla distanza, con costante elastica equivalente direttamente proporzionale alla differenza delle masse, e pari a:
>
> $$K=(4/\pi^2)\ (D/V)^2(M-m)^2/M$$
>
> Peccato per quella brutta dipendenza da D e da V, che rendono il problema dipendente dalle condizioni iniziali e quindi costituisce un *vulnus* al modellino del cosiddetto "oscillatore a palla"... non si può avere tutto!

Probabilmente qualcuna delle risposte ricevute l'altra volta conteneva già la risposta a questo dilemma, ma lo stesso: scriveteci se volete ancora commentare.

5.2 [145]

5.2.1 GURPS!

Il capo si è dato ai giochi di ruolo, e ce ne propone uno inventato da lui:

Rudy si è inventato i personaggi chiamati Vampiri Quadratici: la loro caratteristica è di combattere unicamente contro altri Vampiri (quadratici o meno che siano) e, in caso di vittoria, di assorbirne i Dadi di Combattimento.

Infatti, se un VQ possiede ***X*** *DdC e combatte contro un VQ che ne possiede* ***Y****, possiamo, in base ad una semplice legge matematica, stabilire le probabilità di vittoria di ciascuno dei due: basta a questo punto tirare il dado, e chi vince si mangia i DdC dell'altro e continua l'avventura.*

Volendo cominciare sul semplice, Rudy ha provato con una legge lineare, ossia quando i due fanno a botte ***X*** *ha probabilità* $X/(X+Y)$ *di vincere (confondiamo i nomi dei VQ con i loro rispettivi DdC), mentre* ***Y*** *avrà probabilità* $Y/(X+Y)$. *Solo che qualcosa non gli torna: supponiamo tre VQ, aventi DdC distribuiti come* $X=2$, $Y=1$, $Z=1$, *secondo voi,* ***X*** *deve aspettare che* ***Y*** *e* ***Z*** *facciano a botte per poi sfidare il vincitore o prendersela con uno, sperare di batterlo e poi prendersela con l'altro?*

Supponete ora di avere otto VQ, con vario numero di DdC, riuscite a trovare una (o più) sequenze di combattimenti che diano "speranze di vita" ad uno dei VQ diverse rispetto alle altre?

Usando ora una legge quadratica, ossia supponendo che la probabilità di vittoria di ***X*** *sia data da* $X^2/(X^2+Y^2)$, *come vanno a finire in questo caso i combattimenti di cui sopra?*

Sempre utilizzando il modello quadratico, supponiamo di avere quattro VQ, tutti forniti di un solo Dado di Combattimento; di questi, tre sono piuttosto remissivi, e non hanno intenzione di iniziare un combattimento se non dopo essere stati sfidati e aver vinto il primo combattimento (a quel punto diventano degli attaccabrighe); l'ultimo, invece, è un attaccabrighe sin dall'inizio. Che probabilità ha di vincere ognuno dei VQ?

Sempre con i quattro di cui tre calmi e un piantagrane, supponiamo il piantagrane abbia 1 DdC, mentre i tre calmi hanno rispettivamente 1, 2 e 4 DdC: in che ordine deve lanciare le sfide, il piantagrane, per massimizzare le sue probabilità di sopravvivenza?

Il problema aveva tante biforcazioni e tante parti. Tra quelli che vi ci sono cimentati, diamo il benvenuto a ***Vittorio*** pubblicando la sua soluzione[6]:

Quesiti 1 e 2. In entrambe le situazioni *X* ha la stessa probabilità di vittoria finale che è pari a 1/2. Questo non è un caso, bensì la conseguenza della linearità delle probabilità di vittoria in ogni singolo scontro. Dimostriamo, infatti, che, qualunque sia il numero dei *VQ* e qualunque sia il numero di *DdC* in loro possesso, la probabilità di vittoria finale di ogni *VQ* non dipende dalla strategia di gioco, ossia da quanti e quali combattimenti ogni *VQ* decida di ingaggiare.

Sia n il numero dei *VQ*. Denotiamo con X_i, per $1 \leq i \leq n$, sia il numero di *DdC* a disposizione dell'i-esimo *VQ* che il *VQ* stesso. Indichiamo con $W=\sum_{i=1}^{n} X_i$ il numero totale di *DdC* posseduti dai *VQ*. Mettiamoci nei panni di un generico *VQ* X_i e supponiamo che egli decida di ingaggiare combattimenti, con $1 \leq a \leq n-1$. Sia Y_j, con $1 \leq j \leq a$, il numero di *DdC* posseduti dall'antagonista di X_i al j-esimo

[6] Mi scuso in anticipo se la soluzione conterrà delle imprecisioni: il cambio formato mi ha costretto a riscrivere le formule, che – se non sono corrette – sono certo tali per colpa mia [NdA].

combattimento. Chiaramente, se X_i è l'ultimo *VQ* rimasto in vita, deve valere $\sum_{j=1}^{\alpha} Y_j = W - X_i$. La probabilità che X_i vinca tutti gli *a* combattimenti è

$$\prod_{j=1}^{\alpha}\left(\frac{X_i + \sum_{k=1}^{j-1} Y_k}{X_i + \sum_{k=1}^{j} Y_k}\right) = \frac{X_i}{X_i + Y_1} \cdot \frac{X_i + Y_1}{X_i + Y_1 + Y_2} \cdot \ldots \cdot \frac{X_i + \sum_{j=1}^{\alpha-1} Y_j}{W} = \frac{X_i}{W}$$

che dunque risulta essere indipendente sia da *a* che dai valori Y_j per $1 \leq j \leq a$.

<u>*Quesito 3*</u>. Quando la probabilità di vittoria di ogni singolo combattimento diventa quadratica, questa proprietà non risulta più verificata. Dimostriamo un risultato più generale, ossia, che, già in presenza di soli 3 *VQ*, non esiste alcun caso in cui le uniche due strategie possibili per ognuno dei *VQ*, ossia sostenere 1 o 2 combattimenti, danno la stessa probabilità di vittoria finale. Riparafrasando la dimostrazione precedente abbiamo che X_i vince sostenendo un unico combattimento con probabilità

$$\frac{X_i^2}{2X_i^2 + W^2 - 2WX}$$

e sostenendo 2 combattimenti con probabilità

$$\frac{X_i^2\left(X_i^2 + 2X_iY_1 + Y_1^2\right)}{\left(X_i^2 + Y_1^2\right)\left(X_1^2 + 2X_iY_1 + Y_1^2 + Y_2^2\right)}.$$

Imponendo $W = X + Y_1 + Y_2$ otteniamo che queste due probabilità sono uguali solo quando $X_i = \frac{\sqrt{Y_2(4Y_1 + Y_2)} - 2Y_1 - Y_2}{2}$ e questo valore non può essere mai positivo quando sia Y_1 che Y_2 sono positivi.

<u>*Quesito 4*</u>. Chiaramente, ci saranno 3 combattimenti. Chiamiamo *X* il *VQ* belligerante e chiamiamo Y_i, con $1 \leq i \leq 3$, il *VQ* tranquillo che prende parte all'*i*-esimo combattimento. Facendo il classico alberello che implementa il Teorema della Probabilità Totale, abbiamo facilmente che *X* e Y_1 vincono con probabilità 9/25, Y_2 vince con probabilità 9/50, mentre Y_3 vince con probabilità 5/50.

<u>*Quesito 5*</u>. In questo caso chiamiamo nuovamente *X* il *VQ* belligerante e chiamiamo Y_i il *VQ* tranquillo che possiede *i DdC*. Se *X* attacca gli Y_i in ordine crescente su *i*, ha la possibilità di effettuare 3 combattimenti sempre ad armi pari, realizzando così una probabilità di vittoria finale pari a 1/8. Negli altri 5 casi possibili, *X* non ottiene mai una probabilità maggiore.

Complimenti a ***Vittorio*** per questa prima soluzione! Vi passiamo anche quello che ci ha scritto ***Millenium Bug***:

> Con la probabilità nella forma X/(X+Y), la sequenza dei combattimenti mi pare ininfluente e la probabilità di vittoria dipende dalla distribuzione iniziale dei DdC tra i vari VQ. Supponiamo infatti di avere n VQ con questa distribuzione di DdC: X1, X2, X3, ... Xn. Se il primo combatte nell'ordine con gli altri, vincerà la prima volta con probabilità P1=X1/(X1+X2). Nel caso vinca il primo combattimento, vincerà il secondo con P2=(X1+X2)/(X1+X2+X3). Quindi vince i primi due con probabilità P12=X1/(X1+X2+X3), essendo gli esiti indipendenti. Proseguendo così, si trova che la probabilità di vincere tutti i combattimenti è P=X1/S, dove S è la somma di tutti gli Xi. Supponendo di cambiare l'ordine di combattimento non cambia evidentemente nulla.

Stessa cosa se facciamo prima combattere tra loro 2 o più degli altri VQ, accorpando i loro DdC in uno solo: di questi non ci interessa chi vince, dal momento che alla fine si avrà sempre un solo VQ con lo stesso numero di DdC, pari alla somma di quelli posseduti dai combattenti.

Per il caso di veri VQ (VVQ), cioè quelli che applicano la regola quadratica della probabilità, il discorso è diverso.

Il numero di DdC dei VQ è sempre non nullo, per cui per ogni combattimento tra X e Y possiamo definire t=Y/X. Da cui la probabilità di vittoria di X è $P=1/(1+t^2)$. Se confrontiamo con quella lineare precedente P=1/(1+t) tracciando il grafico delle due funzioni, vediamo che il vantaggio di un VVQ con più DdC è molto più marcato rispetto ai VQ: è quindi essenziale cercare di ingaggiare combattimenti con i VVQ che hanno un numero di DdC inferiore o, per lo meno, molto vicino al nostro, altrimenti la probabilità scende drasticamente. Quindi la strategia migliore è quella di essere il più possibile attaccabrighe e combattere nell'ordine da chi ha meno DdC a chi ne ha di più.

Nel caso il nostro VQ abbia 1 DdC e gli altri 1, 2 e 4, questa strategia porta a:

- primo combattimento 1 contro 1: P=1/2, se vince, il VQ rimane con 2 DdC
- secondo combattimento 2 contro 2: sempre P=1/2, se vince, il VQ rimane con 4 DdC
- terzo combattimento 4 contro 4: sempre P=1/2

Quindi il VQ attaccabrighe ha una probabilità 1/8 di sconfiggere tutti gli altri 3.

Se invece affrontasse subito quello con 4 DdC, la probabilità di vincere il solo primo incontro sarebbe già minore: 1/17.

Similmente se attacca briga con quello che ne ha 2: 1/5 e gli rimangono ancora da affrontare gli altri 2, di modo che alla fine scendiamo ancora sotto 1/8.

Infine, vi passiamo la versione del ***Panurgo***, che ha fatto un numero esagerato di grafici...

Nel gioco del Vampiro Funzionale, il VF è tale quando nella singolar tenzone con un altro VF la sua probabilità di vittoria è proporzionale ad una funzione continua $f : N^+ \mapsto N^+$ del numero di dadi di combattimento in suo possesso: ovvero, se A e B sono due VF che possiedono rispettivamente a e b dadi di combattimento

$$p(A \mid ABI) = \frac{f(a)}{f(a)+f(b)}$$
$$p(B \mid ABI) = \frac{f(b)}{f(a)+f(b)}$$

Il vincitore si impadronisce dei dadi del perdente; il dominio di f è limitato a N^+ perché se un VF non possiede dadi di combattimento non può giocare; la continuità e il codominio limitato a N^+ sono necessari per ottenere sempre una probabilità compresa tra 0 e 1.

Un torneo fra tre VF (A, B e C) può svolgersi in tre modi distinti:

1. $(AB)C$: A combatte contro B e il vincitore combatte contro C;
2. $(AC)B$: A combatte contro C e il vincitore combatte contro B;
3. $(BC)A$: B combatte contro C e il vincitore combatte contro A.

Nel primo caso la probabilità di vittoria di A è

$$p\left(A\,|\,(AB)C\,I\right)=\frac{f(a)}{f(a)+f(b)}\times\frac{f(a+b)}{f(a+b)+f(c)}$$

nel secondo è

$$p\left(A\,|\,(AC)B\,I\right)=\frac{f(a)}{f(a)+f(c)}\times\frac{f(a+c)}{f(a+c)+f(b)}$$

e nel terzo è

$$p\left(A\,|\,(BC)A\,I\right)=1\times\frac{f(a)}{f(a)+f(b+c)}$$

In ciascun caso il primo fattore è la probabilità di passare il primo turno mentre il secondo è la probabilità di vincere il secondo turno dopo aver passato il primo.

La domanda è: quali sono, se esistono, le funzioni f per le quali la probabilità di vittoria di A è indipendente dalla modalità con cui si svolge il torneo?

Confrontando la prima probabilità con la terza otteniamo

$$\frac{f(a+b)}{f(a+b)+f(c)}=\frac{f(a)+f(b)}{f(a)+f(b+c)}$$

Le due frazioni non possono essere semplificate in generale quindi deve essere

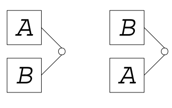
$$\begin{cases} f(a+b)=f(a)+f(b) \\ f(a+b)+f(c)=f(a)+f(b+c) \end{cases}$$

La prima delle due è l'equazione di Cauchy la cui soluzione è, come è noto, $f(t) = kt$. Osserviamo inoltre che tale soluzione soddisfa contemporaneamente sia la condizione $f(a+b)+f(c)=f(a)+f(b+c)$ sia la condizione $p\left(A\,|\,(AB)C\,I\right)=p\left(A\,|\,(AC)B\,I\right)$, in quanto le due probabilità sono ora simmetriche per lo scambio tra B e C: l'indipendenza della probabilità di vittoria di A dallo svolgimento del torneo è dimostrata.

Ma, un momento! Qui abbiamo appena dimostrato qualcosa in più: in un torneo *qualsiasi* tra Vampiri Lineari (Vampiri Funzionali con f lineare) la probabilità di vittoria di ciascuno di essi è indipendente dalla struttura del torneo stesso. Infatti, un torneo qualsiasi è, dal punto di vista del VL che lo vince, una successione di turni alcuni dei quali sono stati passati combattendo e altri aspettando l'esito di combattimenti tra altri VL e noi abbiamo appena visto che, per ciascuna coppia di combattimenti successivi, aspettare o combattere non fa differenza: questo risponde alla prima parte che prevede $f(t) = t$.

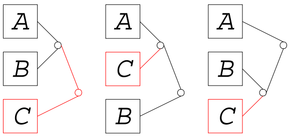
La seconda parte prevede Vampiri Quadratici con $f(t) = t^2$ e le modalità con cui si svolge il torneo influenzano il risultato: prima di imbarcarci nell'analisi proviamo a contarle.

Abbiamo già visto che con tre vampiri sono possibili tre diversi tornei; se consideriamo una coppia di vampiri osserviamo che vi sono due possibilità

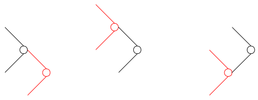


Ma dire che A combatte con B è lo stesso che dire che B combatte con A quindi i due grafi precedenti devono essere equivalenti.

Il torneo a tre può essere ottenuto aggiungendo un incontro al torneo a due, cosa che può essere fatta in tre modi



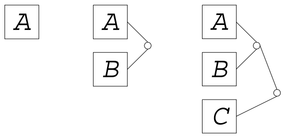
ovvero (*AB*)*C*, (*AC*)*B* e (*BC*)*A*: otteniamo gli stessi tornei che avevamo ottenuto precedentemente permutando i vampiri.

Se non etichettiamo le foglie dei grafi 

osserviamo che i primi due grafi sono equivalenti mentre il terzo è equivalente per simmetria.

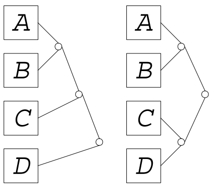
Ci basta dunque elencare i grafi non equivalenti per qualche simmetria e permutare le etichette delle foglie con l'accortezza di non considerare le permutazioni equivalenti per simmetria (es. *AB* e *BA*).

I tornei con 1, 2 e 3 vampiri hanno i grafi



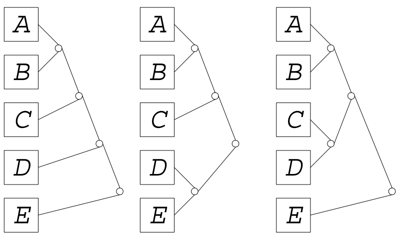
Cui corrispondono $1!/2^0 = 1$, $2!/2^1 = 1$ e $3!/2^1 = 3$: all'esponente del 2 al denominatore è il numero di simmetrie di ciascun grafo.

Vediamo ora come può essere il torneo a quattro vampiri: vi sono due grafi distinti

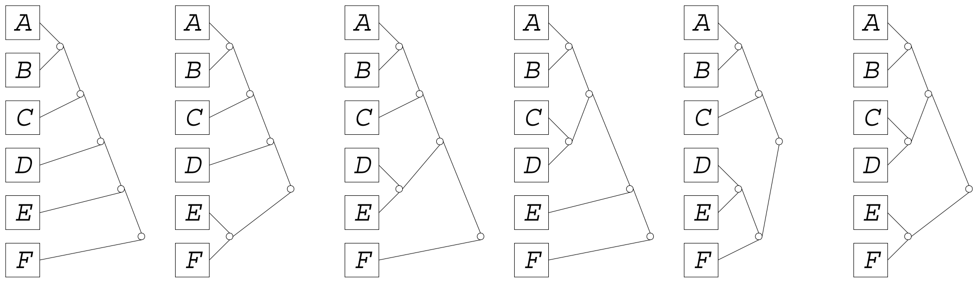


il primo con una simmetria, $AB \mid BA$, cui corrispondono $4!/2^1 = 12$ tornei, il secondo con tre simmetrie, $AB \mid BA$, $CD \mid DC$ e $(AB)(CD) \mid (CD)(AB)$, cui ne corrispondono $4!/2^3 = 3$ per un totale di 15 tornei.

I tornei di cinque vampiri sono



e sono $5!\left(2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3}\right) = 105$; quelli di sei



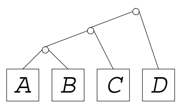
e cioè $6!\left(2^{-1}+2\times 2^{-2}+2\times 2^{-3}+2^{-4}\right)=945$.

La successione 1,1,3,15,105,945 corrisponde alla successione A001147 dell'enciclopedia online delle sequenze intere (OEIS), numeri fattoriali doppi $(2k-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)$, dove $k = n - 1$ corrisponde al numero di incontri: la forma chiusa è

$$T_n=\frac{(2k)!}{k!2^k}=\frac{(2n-2)!}{(n-1)!2^{n-1}}$$

I tornei di sette vampiri sono, lo ho verificato contandoli alla mia maniera, 10395; quelli di otto sono (con verifica) 135135: non me la sento di analizzare questo caso in cerca della strategia migliore.

Più semplice è il caso di quattro vampiri di cui uno aggressivo, corrispondente alle sei permutazioni di $((AB)C)D$, tenuto fisso A



Se tutti i vampiri sono della stessa forza l'ordine non conta e la probabilità di vittoria del VQ litigioso è

$$p(A\,|\,I)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{9}{10}=\frac{9}{25}$$

e, generalizzando a n VQ,

$$p(A\,|\,n\,I)=\prod_{j=1}^{n-1}\frac{j^2}{j^2+1}=\frac{\Gamma(i)\Gamma(-i)\Gamma^2(n)}{\Gamma^2(1)\Gamma(n+i)\Gamma(n-i)}$$

una formula chiusa gentilmente offerta da Mathematica.

Nel caso dei valori 1, 1, 2 e 4 abbiamo

$$p\left(A\,|\left((AB)C\right)D\,I\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}=0{,}125$$

$$p\left(A\,|\left((AB)D\right)C\,I\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{9}{10}=\frac{9}{100}=0{,}09$$

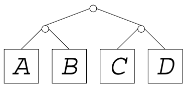
$$p\left(A\,|\left((AC)B\right)D\,I\right)=\frac{1}{5}\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{9}{100}=0{,}09$$

$$p\left(A\,|\left((AC)D\right)B\,I\right)=\frac{1}{5}\times\frac{9}{25}\times\frac{49}{50}=\frac{441}{6250}=0{,}070\ldots$$

$$p\left(A\,|\left((AD)B\right)C\,I\right)=\frac{1}{17}\times\frac{25}{26}\times\frac{9}{10}=\frac{45}{884}=0{,}050\ldots$$

$$p\left(A\,|\left((AD)C\right)B\,I\right)=\frac{1}{17}\times\frac{25}{29}\times\frac{49}{50}=\frac{49}{986}=0{,}049\ldots$$

e, come sembra anche intuitivo, conviene attaccare prima i più deboli; questa strategia non è necessariamente la migliore quando il torneo è ramificato



infatti

$$p\left(A\,|\,(AB)(CD)\ I\right) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{10} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

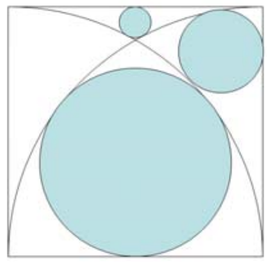
$$p\left(A\,|\,(AC)(BD)\ I\right) = \frac{1}{5}\times\frac{9}{34} = \frac{9}{170} = 0{,}052\ldots$$

$$p\left(A\,|\,(AD)(BC)\ I\right) = \frac{1}{17}\times\frac{25}{34} = \frac{25}{578} = 0{,}043\ldots$$

e, in questo caso, conviene attaccare il secondo in grado.

Mi fermo qui, ma dovete ammettere che le soluzioni erano tutte bellissime.

5.2.2 Tre al prezzo di due

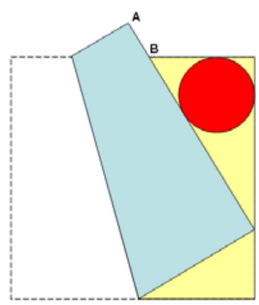


10 *I due del "tre per due"*

Il Capo si è dato a tutte le sue passioni principali con questo problema, con disegni, sangaku, origami, cerchi... ed è stato premiato da soluzioni eccellenti, ma andiamo per ordine: c'erano due pezzi per questo problema, il primo con un sangaku

Trovate il disegno del sangaku in figura qui a fianco, e lo scopo è quello di ricavare i rapporti tra i tre cerchi azzurri.

Il secondo con l'*origami*, il piatto forte:



11 *Il piatto forte*

Per prima cosa, prendete il solito foglio di carta quadrato da origami (che, per comodità, supporremo bicolore), e tracciate un cerchio (rosso, mi raccomando) di raggio R in un angolo; poi piegate come indicato.

Quello che ci interessa è ricavare $\overline{AB}$ *in funzione delle altre variabili: il raggio del cerchio, il punto sul lato verticale dove fate arrivare l'angolo,... insomma, di tutto quello da cui può dipendere.*

In questo caso sarà molto difficile scegliere delle soluzioni da pubblicare, perché sono tutte bellissime, divertenti, colorate, ognuna a modo suo. Prendete per esempio quella di ***Millenium Bug***:

Con teorema di Pitagora e aiutandosi con un po' di algebra si trova che i raggi dei tre cerchi, in rapporto al lato del quadrato sono: 3/8, 1/6, 1/16.

Procedendo nello stesso modo ho fatto i calcoli anche per il problema originale citato in nota: ho qui i miei appunti scritti settimana scorsa ma ci sono un po' di pasticci e non ho voglia di ripetere i calcoli: se capisco bene la mia scrittura, il lato del quadrato sotto i due archi dovrebbe essere i 3/5 di quello grande e il cerchio sopra di esso ha raggio 13/40.

Sono poi passato al problema dell'origami. Vado sempre di prepotenza con algebra e Pitagora. Trovo che il raggio del cerchio è uguale al segmento AB. Se volete sapere di più, per un quadrato unitario, chiamando x la distanza tra l'angolo inferiore destro e il punto in cui ripiego l'angolo inferiore sinistro, ottengo:

$$AB = R = x(1-x)/(1+x).$$

No, niente dimostrazioni né disegni, altrimenti si perde la purezza dei sangaku (questa te la sei voluta Rudy, eh eh eh).

Fantastico, vero? Io la penso esattamente come lui. Ma non sono qui per avere opinioni, ovviamente, solo per presentarvi le soluzioni. E così vi passo anche la versione di un altro nuovo solutore, ***Bibo***, direttamente dal mercato finanziario alla soluzione dei sangaku:

Iniziamo a definire le seguenti equazioni:

1. $x^2+y^2=L^2$
2. $(x-L)^2+y^2=L^2$
3. $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$

Si tenga presente che la 2. posso scriverla come 2. $x^2+y^2=2Lx$.

Dove con 1 & 2 ho indicato i due rami di circonferenza all'interno del cerchio. La 3 invece è l'equazione generica della circonferenza che dobbiamo trovare con le tre incognite.

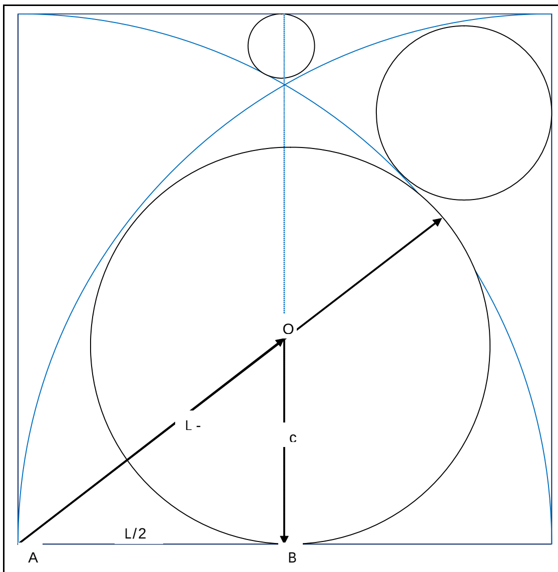
Trovo il luogo dei punti equipotenti comuni. E che vuol dire? il punto equipotenti tra due circonferenze è l'equazione che si ottiene dal sistema delle equazioni tra due circonferenze. In questo caso ne ho due di luoghi, 1&3 e 2&3.

A) la 1&3, che da 4. $2ax+2ay=L^2+c^2-a^2-b^2$.

B) la 2&3, che da 5. $2ax+2ay=2Lx+c^2-a^2-b^2$.

A questo punto metto a sistema la 4&5 in modo da trovare il luogo comune ad entrambe le coppie di circonferenze. Il risultato è 6. $x=\frac{L}{2}$. Allora sulla retta 6 si dovrà trovare il centro dei due cerchi da trovare.

A questo punto considero la figura 1. Il triangolo AOB. Il segmento AO= al raggio cerchio (L) – il raggio del cerchio che ricerco (c), il segmento OB = raggio del cerchio da trovare (c) che è ortogonale al quadrato e infine come trovato sopra il segmento AB = L/2. Applicando Pitagora a questo triangolo si ricava $AB^2 + OB^2 = AO^2$, ovvero $\frac{L^2}{4}+c^2=(L-c)^2$, da cui $c=\frac{3}{8}L$.



12 *Figura* 1 *di* ***Bibo***

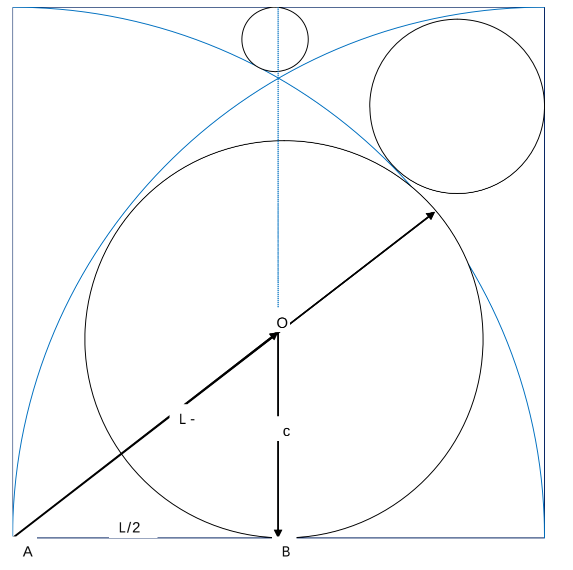
Il primo cerchio allora avrà raggio pari a 3/8 del lato quadrato e se si assume l'origine di un sistema di coordinate cartesiane in A = (0,0) si ottiene la seguente equazione

$$\left(x-\frac{L}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{8}L\right)^2=\frac{9}{64}L^2.$$

A questo punto considero la figura 2. Il triangolo AOB. Il segmento AO= al raggio cerchio (L) + il raggio del cerchio che ricerco (c), il segmento OB = lato quadrato (L) – raggio del cerchio da trovare (c) e infine il segmento AB = L/2. Applicando Pitagora a questo triangolo si ricava AB² + OB² = AO²

Ovvero $\frac{L^2}{4}+(L-c)^2=(L+c)^2$,

da cui $c=\frac{L}{16}$.



13 *Figura* 2 di ***Bibo***

Il secondo cerchio allora avrà raggio pari a 1/16 del lato quadrato e se si assume l'origine di un sistema di coordinate cartesiane in A = (0,0) si ottiene la seguente equazione $\left(x-\frac{L}{2}\right)^2+\left(y-\frac{15}{16}L\right)^2=\frac{1}{256}L^2$.

Bhe a questo punto seguendo il solito canovaccio con la figura tre trovo anche il terzo cerchio….solo che qui dovrò usare due triangoli. Il primo è il solito AOB, che ha AO = L+c, OB= b, AB = L–c. Usando Pitagora AO² = OB² + AB² ottengo $b^2+(L-c)^2=(L+c)^2$, da cui la 7. $b^2=4Lc$.

Il secondo è il triangolo BOC che ha OC = L–c, OB= b, BC = c. Usando Pitagora OC² = OB² + BC² ottengo $b^2+c^2=(L-c)^2$, da cui 8. $b^2=L^2-2Lc$.

Mettendo a sistema la 7&8 si ottiene $b=\frac{\sqrt{6}}{3}L$ e $c=\frac{L}{6}$.

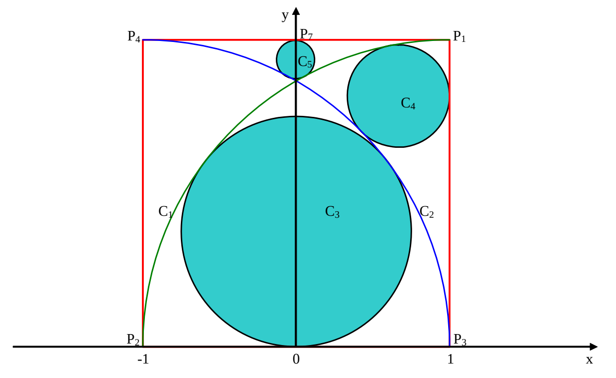
Il terzo cerchio allora avrà raggio pari a 1/6 del lato quadrato e se si assume l'origine di un sistema di coordinate cartesiane in A = (0,0) si ottiene la seguente equazione

$$\left(x-\frac{5}{6}L\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{6}}{3}L\right)^2=\frac{1}{36}L^2.$$

CURIOSITÀ. Se si volessi si potrebbe calcolare con profondo spirito zen il luogo dei punti equipotenti&equidistanti dai due cerchi, giusto come un appendice. Ah e poi si potrebbe fare… no per il momento va bene così…

In realtà ci ha poi ancora mandato la soluzione della nota a piè pagina, ma il principio generale si capisce. Principio generale che ha utilizzato anche ***Br1***, tornato dopo un po' di tempo senza farsi sentire con una soluzione di una dozzina di pagine, che proviamo a ridurre un pochino con l'impaginazione per farcela stare.

Cominciamo dalla *Prima Parte*, quella dei 3 cerchietti; mi puzza che ci fosse una qualche brillante soluzione non analitica, tipo *Ta-Dah!!!*, però io l'ho affrontata arrotolandomi le maniche e stilando equazioni, come segue…



14 *Primo disegnino di **Br1***

Il disegnino qui sotto rispecchia quello del 145.pdf, paragrafo 2.2; in aggiunta ci sono un paio d'assi cartesiani con una taratura degli stessi fatta in modo che il quadrato inscrivente abbia lato 2[7], ed il più grande dei cerchietti (C_3) si sieda sull'origine degli assi.

Allora: con il riferimento prescelto, C_1 è un quarto della circonferenza che passa per i punti $P_1(1;2)$, $P_2(-1;0)$; e poi passa anche in $P_5(3;0)$, non mostrato nel grafico (me lo perdonerete, spero)…

Se è vero che l'equazione analitica di una generica circonferenza è quella che segue:

1) $x^2+y^2+ax+by+c=0$

l'imporre che tale circonferenza passi per P_1, P_2 e P_5 comporta per C_1 che:

2) $\begin{cases} 1^2+2^2+1a+2b+c=0 \\ (-1)^2+0^2+(-1)a+0b+c=0 \\ 3^2+0^2+3a+0b+c=0 \end{cases}$

Risolvendo il sistema si trova che: 3) $\begin{cases} a=-2 \\ b=0 \\ c=-3 \end{cases}$, allora l'equazione analitica di C_1 è la seguente: 4) $C_1 \Rightarrow x^2+y^2-2x-3=0$. Con calcoli analoghi per C_2, che passa per i punti $P_3(1;0)$, $P_4(-1;2)$ ed anche in $P_6(-3;0)$[8], si ricava che la relativa equazione analitica è la seguente: 5) $C_2 \Rightarrow x^2+y^2+2x-3=0$. Sia C_1 che C_2, per come è stato tarato il sistema di riferimento, hanno raggio pari a 2.

E veniamo a C_3, il primo dei nostri *oggetti del desiderio*; costui gode di *tre* proprietà, giusto il numero che serve per determinare i *tre* parametri *a*, *b*, e *c* della *generica relazione 1)*;

- C_3 passa per il punto O(0;0), per come il riferimento cartesiano è stato costruito
- C_3 è simmetrica rispetto all'asse y, cioè invertendo il segno *x* nella sua equazione analitica, nulla deve mutare
- C_3 è tangente a C_1 (o C_2, se preferite…); cioè le intersezioni fra C_3 e C_1 (o C_3 e C_2) devono risolversi in una sola soluzione doppia…

Dalle considerazioni di cui sopra, ne deriva che per C_3 si abbia:

[7] Visto che occorre "*ricavare i **rapporti** tra i tre cerchi azzurri*", e visto che i ***rapporti*** stessi non dipendono dall'unità di misura, mi son preso la libertà di scegliere il lato che mi pareva…

[8] Ovvio che nel grafico non c'è neanche P_6…, vedi sopra…

$$6)\ \begin{cases} 0^2+0^2+0a+0b+c=0 \\ x^2+y^2+ax+by+c=x^2+y^2-ax+by+c \\ \begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ x^2+y^2-2x-3=0 \\ \Delta=0 \end{cases} \end{cases}$$

Dalle prime due relazioni si ricava *c*=0 ed *a*=0; sostituendo nel gruppetto della terza si ottiene: 7) $\begin{cases} x^2+y^2+by=0 \\ x^2+y^2-2x-3=0 \\ \Delta=0 \end{cases}$, e, dopo qualche passaggio: 8) $\Delta=4b^2-9=0$, quindi *b*=±3/2. La soluzione "*col più*" è relativa alla circonferenza speculare a C_3 rispetto all'asse *x*, e non ha interesse ai fini del quesito; per C_3 si ha allora: 9) $C_3 \Rightarrow x^2+y^2-\frac{3}{2}y=0$.

Il raggio di C_3 è dato da: 10) $r_3=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}=\sqrt{\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2}{4}}=\frac{3}{4}$.

E veniamo ora a C_4: per essa le tre condizioni da imporre per trovare i valori dei parametri *a*, *b*, e *c* sono:

- C_4 è tangente a C_1
- C_4 è tangente a C_2
- C_4 è tangente al segmento P_1P_3, che è parte della retta di equazione x = 1

Il che si traduce in quanto segue:

$$11)\ \begin{cases} \begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ x^2+y^2-2x-3=0 \\ \Delta_1=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ x^2+y^2+2x-3=0 \\ \Delta_2=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ x=1 \\ \Delta_3=0 \end{cases} \end{cases}$$

Dopo una sbrodolata di passaggi algebrici (che amorevolmente vi risparmio…) si perviene a: 12) $\begin{cases} \Delta_1=4b^4+b^2\left(3a^2-c^2-2ac+6a-10c-9\right)=0 \\ \Delta_2=4b^4+b^2\left(3a^2-c^2+2ac-6a-10c-9\right)=0 \\ \Delta_3=b^2-4a-4c-4=0 \end{cases}$, da cui si ricava: 13) $\begin{cases} a=-\frac{4}{3} \\ b=\pm\sqrt{\frac{32}{3}} \\ c=3 \end{cases}$.

Di nuovo, la soluzione "*col più*" per b è relativa alla circonferenza speculare a C_4 rispetto all'asse x, e quindi la dimentichiamo… Allora l'equazione analitica di C_4 è la seguente: 14) $C_4 \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{4}{3}x - \sqrt{\frac{32}{3}}\,y + 3 = 0$.

Il raggio di C_4 si ricava poi come segue:

15) $r_4 = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} = \sqrt{\frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \sqrt{\frac{32}{3}}^{\,2}}{4} - 3} = \frac{1}{3}$

Manca ancora C_5; le tre condizioni da imporre per trovare i valori dei parametri a, b, e c sono adesso:

- C_5 passa per il punto $P_7(0;2)$
- C_5 è simmetrica rispetto all'asse y, cioè invertendo il segno x nella sua equazione analitica, nulla deve mutare
- C_5 è tangente a C_1 (o C_2, se preferite…); cioè le intersezioni fra C_5 e C_1 (o C_5 e C_2) devono risolversi in una sola soluzione doppia…

Quindi, travasando in formule quanto sopra:

16) $$\begin{cases} 0^2 + 2^2 + 0a + 2b + c = 0 \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = x^2 + y^2 - ax + by + c \\ \begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Dalla seconda delle 16), risulta a=0; poi dalla prima, c=–2b–4. Inserendo tutto ciò nel terzo gruppo di relazioni della 16) si ha: 17) $\begin{cases} x^2 + y^2 + by - 2b - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$.

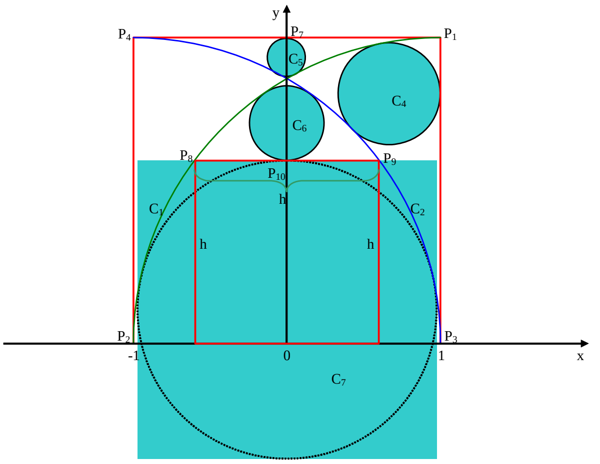
Da cui si ottiene: 18) $\Delta = \left(b^2 + 4b + 2\right)^2 - \left(b^2 + 4\right)\left(b^2 + 4b + 1\right) = 0$, e, dopo qualche ulteriore calcoletto: 19) $\begin{cases} b = -\frac{15}{4} \\ c = \frac{7}{2} \end{cases}$. Per C_5 si ha in definitiva:

20) $C_5 \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{15}{4}y + \frac{7}{2} = 0$

21) $r_5 = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} = \sqrt{\frac{\left(-\frac{15}{4}\right)^2}{4} - \frac{7}{2}} = \frac{1}{8}$

Allora, relativamente ai rapporti fra i raggi dei vari cerchietti, si ha che:

- Il raggio di C_5 è **1/16** di quello di C_1 e C_2
- Il raggio di C_4 è **1/6** di quello di C_1 e C_2
- Il raggio di C_3 è **6** volte quello di C_5



15 *Secondo disegnino di* ***Br1***

E passiamo ora al quesito della nota a piè pagina[9]... La figura sopra riportata va modificata come segue.

Sia h il lato del quadrato più piccolo appena introdotto; il lato superiore di tale quadrato è parte della retta di equazione $y=h$. Tale retta interseca C_1 e C_2 rispettivamente in P_8 e P_9: per ricavare il valore di h basta imporre che la distanza fra tali punti sia proprio h.

Per trovare le coordinate di P_8 e P_9, occorre allora risolvere i sistemi costituiti dalle equazioni che seguono:

$$22)\quad \begin{cases} P_8 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x-3=0 \\ y=h \end{cases} \\ P_9 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2x-3=0 \\ y=h \end{cases} \end{cases}$$

Si ottiene, scartando le soluzioni relative alle intersezioni che cadono al di fuori del quadrato grande:

$$23)\quad \begin{array}{l} P_8\left(1-\sqrt{4-h^2};h\right) \\ P_9\left(-1+\sqrt{4-h^2};h\right) \end{array}$$

Quindi, eguagliando la distanza fra i punti ad h:

$$24)\quad -1+\sqrt{4-h^2}-\left(1-\sqrt{4-h^2}\right)=h$$

Scartando la soluzione negativa per h, si ha poi: 25) $h={}^6\!/_5$.

Adesso, le tre condizioni da imporre per trovare i valori dei parametri a, b, e c relativi a C_6 sono:

- C_6 passa per il punto $P_{10}(0;6/5)$
- C_6 è simmetrica rispetto all'asse y, cioè invertendo il segno ***x*** nella sua equazione analitica, nulla deve mutare
- C_6 è tangente a C_1 (o C_2, se preferite...); cioè le intersezioni fra C_6 e C_1 (o C_6 e C_2) devono risolversi in una sola soluzione doppia ...

Quindi:

[9] Mica poteva mancare una nota a piè pagina per la nota a piè pagina... Vabbè, tanto per riempirla, propongo di andare ad esplorare i cerchietti che seguono:

- Tangente a C_2, a C_4, ed al lato destro del quadrato grande
- Tangente a C_2, a C_6, ed al lato superiore del quadrato piccolo
- Tangente a C_1, a C_5, ed al lato superiore del quadrato grande
- E poi tutta la successione di cerchietti nei vari spicchi compresi fra circonferenze e quadrati... Mi par di ricordare che la faccenda era conosciuta come *Problema dei Falcetti*... Ciò poiché l'aspetto delle figure che si ricavano ricorda il falcetto, o arbelo, usato dai calzolai per tagliar suole e tomaie...

$$26)\ \begin{cases} 0^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2+0a+\frac{6}{5}b+c=0 \\ x^2+y^2+ax+by+c=x^2+y^2-ax+by+c \\ \begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ x^2+y^2-2x-3=0 \\ \Delta=0 \end{cases} \end{cases}$$

Dalla seconda delle 26) risulta a=0; poi, dalla prima, c=–6/5b–36/25. Inserendo tutto ciò nel terzo gruppo di relazioni della 26) si ha: 27) $\begin{cases} x^2+y^2+by-\frac{6}{5}b-\frac{36}{25}=0 \\ x^2+y^2-2x-3=0 \\ \Delta=0 \end{cases}$

Con un po' di calcoli si ottiene:

$$28)\ \Delta=\left(625b^2+1500b-1950\right)^2-\left(625b^2+2500\right)\left(-975b^2-2340b+1521\right)=0$$

Quindi, dopo ulteriori calcoli (che coinvolgono numeri fino a 7 cifre, i quali *miracolosamente* si compensano fra loro…) si perviene a:

$$29)\ \begin{cases} b_1=-\frac{231}{80} & b_2=-\frac{9}{20} \\ c_1=\frac{81}{40} & c_2=-\frac{9}{10} \end{cases}$$

I valori di b e c con pedice 1 corrispondono alla circonferenza cercata (C_6), mentre quelli con pedice 2 alla C_7, che *non* stavamo cercando ma che soddisfa anch'essa le condizioni imposte nelle 26). Espressioni analitiche e raggi di queste due ultime circonferenze sono dati da:

$$30)\ C_6 \Rightarrow x^2+y^2-\frac{231}{80}y+\frac{81}{40}=0$$

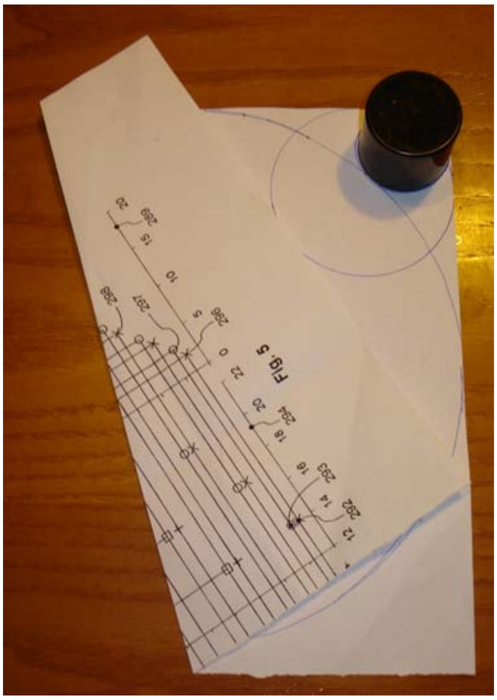
$$31)\ C_7 \Rightarrow x^2+y^2-\frac{9}{20}y-\frac{9}{10}=0$$

$$32)\ r_6=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}=\sqrt{\frac{\left(-\frac{231}{80}\right)^2}{4}-\frac{81}{40}}=\frac{39}{160}$$

$$33)\ r_7=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}=\sqrt{\frac{\left(-\frac{9}{20}\right)^2}{4}-\left(-\frac{9}{10}\right)}=\frac{39}{40}$$

E *that's all*, per i quesiti di riscaldamento…

E veniamo all'*Origami*... Avevo subodorato qualcosa nel leggere la descrizione del quesito, specie quando si parlava del Commercialista che, com'è adesso ben noto, ha una parte vieppiù rilevante per la soluzione. Mi puzzava di inganno già da subito, neh...



16 *L'origami di **Br1***

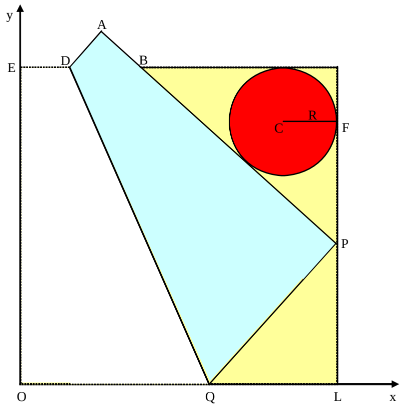
Per prima cosa, mi sono costruito un foglio[10] quadrato da *Origami*, tranciando il rettangolo inutile da un banale foglio A4; poi, sul quadrato ottenuto, ho contornato in un angolo le seguenti circonferenze:

- il tappo della mia schiuma da barba (cerchio piccolo)
- un bicchiere (cerchio medio)
- un piatto da frutta (cerchio grande)

Ciò tanto per vedere cosa capitava in modo empirico... Ebbè, ripiegando il foglio come prescritto, manco a calci nel sedere c'era continuità di soluzioni a parità di raggio del cerchio...

Il foglio ripiegato pareva dover obbedire ad una singola soluzione (oppure a due soluzioni...), per ciascun valore del raggio**;** e quindi appariva chiaro che il modo migliore di affrontare il problema era non tanto il piazzare per prima cosa il cerchio rosso, bensì l'utilizzare come parametro principe la posizione del vertice dell'*Origami* ripiegato lungo il lato verticale destro del quadrato, costituito dall'*Origami* stesso...

Così facendo, il cerchio rosso nell'angolo ne deriva come conseguenza inevitabile; ed ora vediamo un po' come queste divagazioni si traducano in fatti concreti. Qui sotto, una figura che ho provato a render la più simile possibile a quella del 145.pdf[11].



17 *Disegnino dell'origami di **Br1***

Allora poniamo che il foglietto dell'*Origami* abbia lato pari ad 1, cioè OL=OE=1: il punto P(1;z) è vincolato a viaggiare sul lato destro dell'*Origami* stesso, e sia z la nostra variabile indipendente. Si ha: $z \in [0;1]$, e poi PL=z.

[10] Tanto per ricollegarci all'RM del mese scorso, il retro (o meglio, il fronte...) del foglio è la fotocopia di un brevetto, ma non quello di Hedy Lamarr (purtroppo...)

[11] Concordo sulle considerazioni relative ai disegnini PowerPoint; anche in Word stessa solfa...

Il bordo inferiore dell'*Origami* è costituito dai due segmenti QL e PQ, quest'ultimo ripiegato; si ha quindi: 34) $QL + PQ = 1$. Applicando il buon vecchio Pitagora al triangolo PLQ si ha: 35) $PL^2 + QL^2 = PQ^2 = (1 - QL)^2$, da cui: 36) $QL = \frac{1-z^2}{2}$.

Poiché 37) $OQ = 1 - QL$, le coordinate di Q sono: 38) $Q\left(\frac{1+z^2}{2};0\right)$. A questo punto è possibile ricavare l'equazione della retta passante per P e Q; con qualche calcolo si trova che: 39) $r_{PQ} \Rightarrow y = \frac{2z}{1-z^2}x - z\frac{1+z^2}{1-z^2}$.

La retta passante per A, B e P è perpendicolare alla suddetta; si ha per essa, con un paio di passaggi: 40) $r_{AP} \Rightarrow y = -\frac{1-z^2}{2z}x + \frac{1+z^2}{2z}$.

L'ascissa del punto B si ricava ponendo y=1 in quest'ultima equazione; si ha quindi, per il punto B: 41) $B\left(\frac{1-z}{1+z};1\right)$. Adesso si può ricavare la lunghezza del segmento BP…: 42) $BP = \sqrt{\left(\frac{1-z}{1+z} - 1\right)^2 + (1-z)^2} = \frac{1+z^2}{1+z}$ … ed infine, l'agognato AB:

43) $AB = AP - BP = 1 - \frac{1+z^2}{1+z} = z\frac{1-z}{1+z}$.

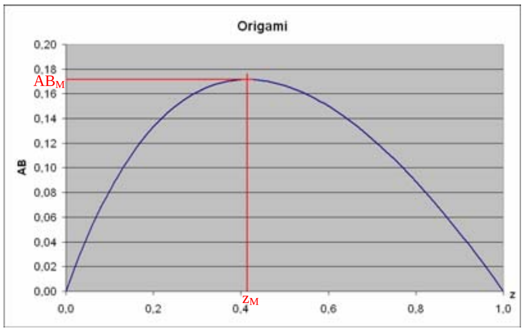
AB risulta nullo per z=0 e z=1, e nell'intervallo [0;1] ha l'evoluzione mostrata nel grafico qui sotto.

Per trovare il massimo di AB, occorre annullare la derivata della 43):

44) $\frac{dAB}{dz} = \frac{d}{dz}\left(z\frac{1-z}{1+z}\right) = \frac{1-2z-z^2}{(1+z)^2} = 0$

Da cui:

45) $z_M = \begin{cases} -1-\sqrt{2} \approx -2{,}4142\ldots \\ -1+\sqrt{2} \approx 0{,}4142\ldots \end{cases}$



18 *Grafico di **Br1***

Scartando il valore negativo, la massima estensione di AB è quindi:

46) $AB_M = (\sqrt{2}-1)\frac{1-(\sqrt{2}-1)}{1+(\sqrt{2}-1)} = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0{,}1715\ldots$

E il cerchio rosso **C_R**? Beh, a questo punto è ovvio che quello non era indispensabile per il quesito dell'*Origami*… Però ha avuto il compito di far da ponte con gli altri quesiti visti sopra, e quindi rendiamogli onore ed andiamo ad esplorarne le caratteristiche…

Tre proprietà che possiamo[12] usare per determinare l'equazione di C_R sono:

- C_R è tangente al lato superiore dell' *Origami*
- C_R è tangente al lato destro dell' *Origami*

[12] Si poteva scegliere anche altro; ad esempio che il centro di C_R giace sulla retta y=x…

- C_R è tangente alla retta r_{AP}

Ciò si traduce nel tri-sistema che segue:

$$47)\quad \begin{cases} \begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ y=1 \\ \Delta_1=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ x=1 \\ \Delta_2=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ y=-\frac{1-z^2}{2z}x+\frac{1+z^2}{2z} \\ \Delta_3=0 \end{cases} \end{cases}$$

Dopo un paio di passaggi per i primi due sotto-sistemi (e qualcuno in più per il terzo…), si ottiene:

$$48)\quad \begin{cases} \Delta_1=a^2-4(b+c+1)=0 \\ \Delta_2=b^2-4(a+c+1)=0 \\ \Delta_3=\left(1+bz-2az^2-bz^3-z^4\right)^2-\left(1+2z^2+z^4\right)\left(1+2bz+2z^2+4cz^2+2bz^3+z^4\right)=0 \end{cases}$$

Dalle prime due relazioni della 48) si possono esprimere b e c in funzione di a; si ricava: $49)\quad \begin{cases} \begin{cases} b_1=a \\ c_1=\frac{a^2-4a-4}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} b_2=-a-4 \\ c_2=\frac{a^2+4a+12}{4} \end{cases} \end{cases}$.

Quindi vi sono 2 soluzioni, in base alle prime due delle tre condizioni sopra esposte per trovare C_R… Se però ci si ricorda della precedente nota a piè pagina, e del fatto che le coordinate del centro di una circonferenza sono quelle che seguono: 50) $C\left(-a/2;-b/2\right)$. Ci si rende conto che, giacendo C sulla retta $x=y$, la coppia di valori a e b da scegliere nelle 49) è quella con pedice 1. Se infatti fossero valide quelle con pedice 2, dovendosi avere $a=b$, dall'espressione di b_2 risulterebbe $a=b=-2$, cioè: 51) $C(1;1)$. Quindi C_R sarebbe vincolata ad essere una circonferenza degenere posta nell'angolo superiore destro dell' *Origami*, cosa che non pare conforme al quesito…

Allora, si prosegue inserendo i valori con pedice 1 nella terza delle 48):

$$52)\quad \Delta_3=\left(1+az-2az^2-az^3-z^4\right)^2-\left(1+2z^2+z^4\right)\left(1+2az+2z^2+4\frac{a^2-4a-4}{4}z^2+2az^3+z^4\right)=0$$

Da qui, dopo inenarrabili calcoli algebrici che coinvolgono potenze fino a z^8, e numerosi impastamenti di Microsoft Word[13], si perviene a:

[13] Equation Editor sarà pure una bellissima implementazione del Nostro Bill Gates; ma si incricca anzichenò ad ogni piè sospinto… O forse sono i *Quesiti dei Rudi* che sono *Troppo Complessi* per Equation Editor…

53) $$\begin{cases} a = -2\dfrac{1+z^2}{1+z} \\ b = -2\dfrac{1+z^2}{1+z} \\ c = \dfrac{2+3z^2+2z^3+z^4}{(1+z)^2} \end{cases}$$

Quindi: 54) $C_R \Rightarrow x^2 + y^2 - 2\dfrac{1+z^2}{1+z}x - 2\dfrac{1+z^2}{1+z}y + \dfrac{2+3z^2+2z^3+z^4}{(1+z)^2} = 0$.

E adesso viene il bello; il raggio R di C_R si può calcolare in (almeno) due modi: con una formula analoga alla 15) (ed alle altre simili), oppure osservando che esso è pari alla differenza fra il lato dell' *Origami* ed una delle coordinate del centro di C_R stesso. Utilizzando il secondo e più semplice metodo[14], si ha:

55) $$R = 1 - \left(-\frac{a}{2}\right) = 1 - \left(-\frac{b}{2}\right) = 1 - \left(-\frac{-2\dfrac{1+z^2}{1+z}}{2}\right) = z\frac{1-z}{1+z}$$

E quindi (*surprise!*): ricordando la 43), R=AB!

Ci sarebbe da andare avanti ancora per ore, con le soluzioni di ***Gnugnu***, ***Franco57***, ancora ***Vittorio***, e anche ***Cid***, che ci ha mandato una nota a mano, e ancora ***Zar***, che conclude con una frase per noi irresistibile:

E, a posteriori, potremmo notare che queste sono evidenti ragioni di simmetria.

All'ultimo, sempre ***Zar***, ci ha mandato un file in geogebra, ma questo lo mettiamo sul sito, così potete scaricarlo pure voi: http://www.rudimathematici.com/extradoc/rudi.ggb.

E con questo basta, devo lasciare un po' di spazio anche per le altre rubriche. Buon inizio di primavera e a rileggerci ad aprile!

6. Quick & Dirty

A Rudy hanno rifilato una rogna di statistica e, ripassando alcuni vecchi concetti, ha ritrovato un grazioso problemino su tre cose facili da confondere di cui, se non vi ricordate le definizioni, ve le andate a ripassare: non le daremo neanche in soluzione.

Questa volta, vorremmo trovaste cinque numeri per cui la ***mediana*** sia maggiore della ***moda*** che sia, a sua volta, maggiore della ***media***.

Con cinque valori, la cosa è impossibile; da sei in su, potete mettere i tre momenti nell'ordine che preferite.

Infatti, con cinque numeri, se la mediana è superiore alla moda i due numeri inferiori alla mediana devono essere uguali, e quindi la media sarà maggiore della moda.

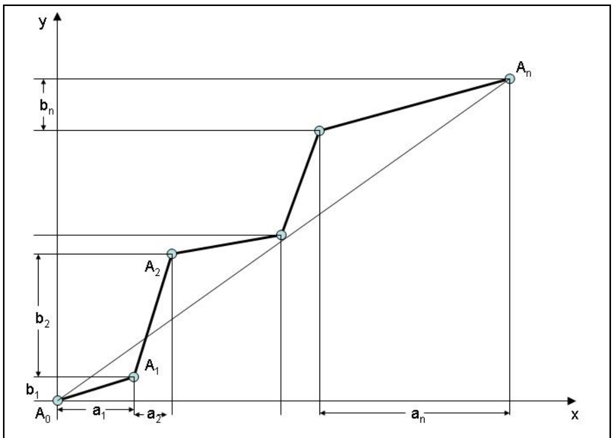
[14] Ma garantisco che il primo fornisce lo stesso risultato…

7. Pagina 46

Prima Parte

Possiamo assumere che tutti i termini $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ siano positivi, in quanto se alcuni di loro fossero negativi questo non influenzerebbe il primo membro ma ridurrebbe il valore assoluto del secondo, rafforzando la diseguaglianza.

Consideriamo la linea spezzata $A_0 A_1 A_2 \dots A_n$ in figura, in cui la proiezione dei segmenti $\overline{A_0 A_1}, \overline{A_1 A_2}, \dots, \overline{A_{n-1} A_n}$ sull'asse $\boldsymbol{x}$ vale rispettivamente $a_1, a_2, \dots, a_n$ mentre la proiezione sull'asse $\boldsymbol{y}$ vale (nello stesso ordine) $b_1, b_2, \dots, b_n$. Dal teorema di Pitagora sappiamo che:



19 *La spezzata*

$$\overline{A_0 A_1} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2};$$
$$\overline{A_1 A_2} = \sqrt{a_2^2 + b_2^2};$$
$$\dots;$$
$$\overline{A_{n-1} A_n} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2};$$
$$\overline{A_0 A_n} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2}.$$

Da cui segue immediatamente la diseguaglianza; la linea spezzata $A_0 A_1 A_2 \dots A_n$ può avere lunghezza pari alla linea $A_0 A_n$ solo se è una linea retta, ossia se è:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n},$$

unico caso, quindi, per cui vale l'uguaglianza.

Seconda Parte

Sia h l'altezza della piramide, siano $a_1, a_2, \dots, a_n$ le lunghezze dei lati di base e siano $b_1, b_2, \dots, b_n$ le altezze delle perpendicolari dal piede dell'altezza (centro del cerchio inscritto per la piramide retta) verso ciascuno dei lati. Il perimetro di base e l'area di base sono pari a:

$$P = \sum_{i=1}^{n} a_i;$$
$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

La superficie laterale della piramide risulta allora uguale a:

$$\Sigma = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \sqrt{b_i^2 + h^2}.$$

Dalla prima parte del problema possiamo ricavare che:

$$\begin{aligned} 2\Sigma &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(a_i b_i)^2 + (a_i h)^2} \\ &\geq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i h\right)^2} \\ &= \sqrt{4S^2 + h^2 P^2}. \end{aligned}$$

L'uguaglianza vale solo se è valida la proporzione multipla:

$$a_1 b_1 : a_2 b_2 : \ldots : a_n b_n = a_1 h : a_2 h : \ldots : a_n h$$

ossia se è $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$, da cui segue immediatamente la tesi.

8. Paraphernalia Mathematica

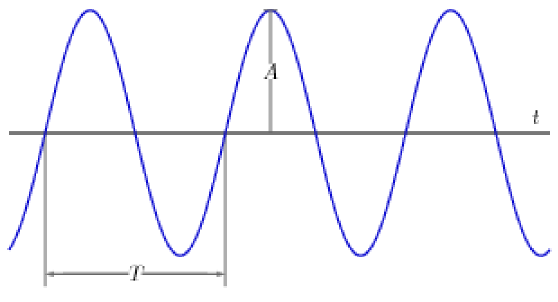
Prima di tutto, una nota scarsamente correlata con quanto segue: se qualcuno, ex Carabiniere o Ingegnere (o tutti e due, ancora meglio) spiega a Rudy cosa sia e come funziona la BLU, pubblicheremo. Rudy ci ha fatto un lavoro sopra per i primi, aiutato dai secondi, ma non ha capito niente.

8.1 Sgt. Bessel's Lonely Hearts Club Band

Uno spettro si aggira per casa di Rudy (quando suona la chitarra); questo spettro [...] è lo Spettro di Fourier.

E questa volta non lamentatevi; vi abbiamo detto subito di cosa parliamo, quindi se non vi interessa potete chiudere subito e ci vediamo la prossima volta. Anche perché Rudy è piuttosto sensibile alle "critiche musicali" (nel senso proprio di quando lo criticano), e di solito aspetta che l'intera famiglia (Virgilio il gatto incluso) passi i week-end in campagna per riprendere in mano la sua fida *terzina*. Comunque tranquilli, stiamo sul teorico. E, come al solito, prendiamola alla lontana.

Un *suono* è, fisicamente parlando, il susseguirsi di variazioni nella pressione dell'aria[15]; l'orecchio è in grado di recepire queste variazioni; per semplificare il lavoro, consideriamo per il momento i cosiddetti *suoni puri*; questo ci permette di introdurre le prime due caratteristiche importanti, l'*ampiezza* A e il *periodo* T e di ignorarne immediatamente una, preferendo al periodo la *frequenza* f, definendola come l'inverso del periodo.

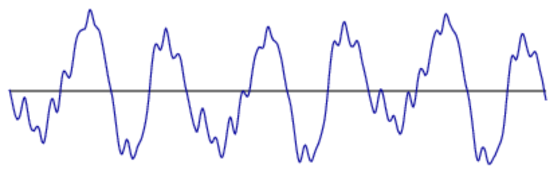


20 *Ampiezza e periodo*

Quando si smette di abbattere alberi e si pensa alle caratteristiche più matematiche dell'onda sonora, ci si accorge che deve entrare in ballo un'altra grandezza, la *fase* p: questa non è una proprietà specifica della vibrazione, ma piuttosto un modo per mettere d'accordo con la vibrazione il nostro asse del tempo; il suono puro, quindi, si esprime attraverso questi oggetti come:

$$f(t) = \sin(2\pi ft + p).$$

Si noti che per quanto riguarda il nostro orecchio, nel caso del suono puro non riusciamo a percepire la fase: per fare questo dobbiamo sommarne almeno due: infatti (se siete intonati, contrariamente a Rudy) quello che riuscite a distinguere è la *frequenza*: la membrana cocleare, di solito, viene rappresentata come un insieme di punti in grado ciascuno di risonare ad una specifica frequenza, e quindi di "accorgersi" che quella frequenza è presente nel suono: l'informazione di quale sia il punto che sta vibrando viene inviata al cervello, che lo interpreta come una determinata frequenza: insomma, al cervello arriva una sfilza di numeri che rappresentano le costituenti sinusoidali di suoni puri.


21 *Un grande "sol"*

Ora, se prendiamo la nostra fida chitarra e pizzichiamo la corda di SOL[16], otteniamo un qualchecosa che somiglia al disegno in figura: c'è una ragionevole periodicità, ma di

[15] Quindi, per rispondere ad una domanda aperta da troppo tempo, un albero che cade fa rumore anche se nessuno lo sente: le variazioni di pressione ci sono comunque.

sicuro non è un suono puro, visto che il nostro SOL puro dovrebbe avere una frequenza di **392** Hertz. La prossima domanda, quindi, consiste nel chiedersi come facciano le nostre orecchie a dare un senso a questa onda.

La risposta sta, come ormai avrete capito, nella trasformazione del suono in serie di Fourier: detta semplicemente, qualsiasi funzione *periodica* di una data frequenza f che si comporti ragionevolmente bene può essere scritta come somma (eventualmente infinita) di seni e di coseni; un po' più formalmente, se $g(t)$ è periodica di frequenza f, allora esistono due insiemi di costanti a_n e b_n tali che:

$$g(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n\pi ft)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(2n\pi ft). \qquad [1]$$

Il che significa, in soldoni, che *qualsiasi* funzione periodica può essere decomposta in un insieme di toni puri.

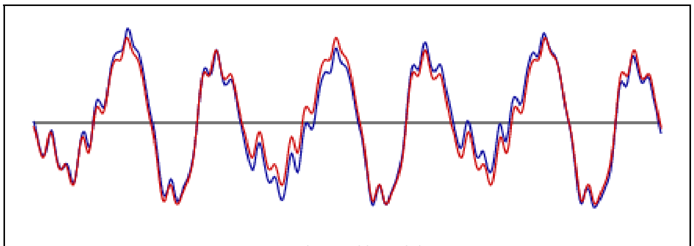
Utilizzando poi la relazione:

$$a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)=c\sin(\omega t+p)\text{, dove } c=\sqrt{a^2+b^2}\ ,$$

otteniamo:

$$\begin{aligned}g(t)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n\pi ft)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(2n\pi ft)\\&=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin(2n\pi ft+p_n).\end{aligned}$$

Il che è particolarmente utile se consideriamo che la nostra membrana è in grado di rilevare le onde *sinusoidali*: ossia, i punti sulla membrana non fanno altro che misurare i vari c_n.

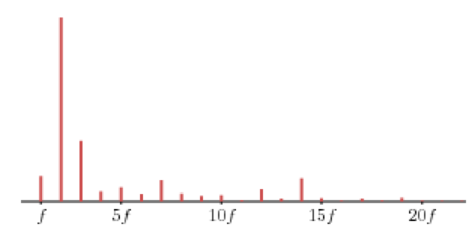


22 *Fourier alla chitarra*

Se prendete il SOL della figura e lo spacchettate in questo modo, assumendo una frequenza fondamentale di 196 Hz (la metà della frequenza pura che ci spetteremmo), ottenete la stessa funzione: in realtà, data la limitatezza dell'orecchio umano, non è necessario arrivare sino all'infinito: considerato che l'orecchio arriva a recepire suoni sino ai 20 kHz, con una cinquantina di termini ottenete già un'ottima approssimazione: nella figura, in rosso avete quanto si ricava dallo sviluppo in serie di Fourier, e in blu il suono originale: il Nostro, a quanto pare, ci prende abbastanza bene.

Siccome non facciamo altro che sommare le varie componenti, questo metodo è noto sotto il nome di *sintesi additiva*; è interessante vedere quanto "pesano" le diverse frequenze, e lo potete vedere nella figura qui di fianco; questo aggeggio è noto come *spettro di Fourier* presso i matematici, mentre i musicisti preferiscono chiamarlo "ricetta sonora": in effetti, i rapporti tra diversi pesi sono quelli che permettono di distinguere una chitarra da un trombone o da qualsiasi altro strumento.

[16] Due note al prezzo di una: tanto per cominciare, rubiamo la notazione del nostro apprezzatissimo Baines (Storia degli strumenti musicali, BUR), e indichiamo con la scritta tutta maiuscola la nota generica. Quella che stiamo usando (se non abbiamo sbagliato i conti) dovrebbe essere indicata come *Sol₄*. Inoltre, ci teniamo a sottolineare che il "SOL in figura" non è nostro, ma di un chitarrista migliore.



23 *Lo Spettro che si aggira*

Tutto molto semplice, vero? Almeno sin quando non cominciate a fare i conti, il che è esattamente quello che frega: per generare pochi secondi di suono, vi serve un calcolo che viaggia allegramente dalle parti del minuto, e questo per ogni strumento; la cosa, ne converrete, non è bella.

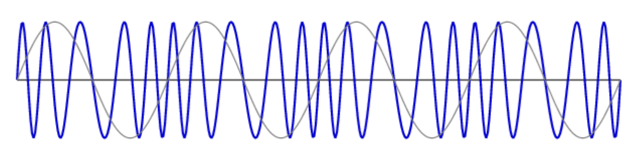
Cominciamo con il rivelare il colpevole: qui, la parte grossa del lavoro l'ha fatta ***John Chowning***, all'inizio degli anni Settanta. Comunque, per capire cosa succede cominciamo da molto prima: per prima cosa, accendete la radio e ascoltate una stazione locale, quelle "in effe-emme", per intenderci, visto che abbiamo proprio intenzione di parlare della Modulazione di Frequenza.

Torniamo alla nostra frequenza pura f_c e aggiungiamo un *vibrato*[17], ossia facciamo variare il tono puro "di un pochino e pianopiano", per poi tornare alla posizione iniziale; per restare sempre sul massimo di semplicità, usiamo *un'altra frequenza pura* f_m: per semplicità, supponiamo per ora $f_m << f_c$.

L'espressione di quello che otteniamo è, a voler essere gentili, orribile, la nostra onda diventa una cosa del tipo:

$$g(t) = A\sin[2\pi f_c t + I\sin(2\pi f_m t)].$$

Insomma, l'argomento della funzione trigonometrica ha, al suo interno, un'altra funzione trigonometrica dello stesso tipo, ma di frequenza decisamente minore: qui un ruolo importante lo gioca anche l'*indice di modulazione I*, e tra un attimo cercheremo di capire a cosa serve: per adesso, considerate che Rudy guarda già con sospetto una funzione trigonometrica da sola, figurarsi quando sono due una dentro l'altra. Forse è meglio se proviamo a capire cosa succede con un disegno: lo trovate da queste parti.


24 *Ma allora, è uno "smirne" o no?*

Cerchiamo ora di capire *in che senso* stiamo facendo variare la frequenza; scrivendo la nostra funzione come $\sin(2n\phi(t))$, la frequenza istantanea si esprime come $\frac{d\phi}{dt}$, e per la frequenza pura non modulata (per cui è $\phi(t) = ft$), abbiamo correttamente che la frequenza istantanea è *f*; ma nel caso della frequenza modulata otteniamo:

$$\phi(t) = f_c t + \frac{I}{2\pi}\sin(2\pi f_m t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi}{dt} = f_c + If_m \cos(2nf_m t);$$

il che ci permette di dire che la frequenza istantanea varia nell'intervallo $f_c \pm If_m$.

La domanda a questo punto è: "A cosa serve tuta questa roba?" Semplicemente, attraverso la modulazione potete creare dei suoni enormemente più "ricchi"[18] con una fatica molto minore.

[17] Con la chitarra (acustica), supponendo di usare una nota che richiede la pressione ad un qualche capotasto diverso da zero, basta spostare il dito della mano sinistra (quello sul capotasto) verso di voi dopo aver pizzicato la corda e poi farlo tornare alla posizione iniziale; a Rudy pare di ricordare che il trucco sia noto come "smirne", ma non è riuscito a ritrovare la citazione. Sulle chitarre elettriche, la maniglia sotto la mano destra serviva alla stessa cosa ("serviva" nel senso che se ne vedono sempre meno, in giro: andava invece molto di moda negli anni Sessanta). E la frequenza "base" si indica con la lettera "c" da *carrier*, visto che è lei che "porta" l'altro suono.

[18] Nel senso di "più simili al suono originale".

Adesso arriva il difficile: prendiamo lo sviluppo in serie di Fourier della funzione

$$\sin(z\sin t)=\frac{a_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nt)+\sum_{n=2}^{\infty}b_n\sin(nt).$$

La funzione che stiamo esaminando ha due simmetrie:

$$\begin{aligned}&\sin(z\sin(-t))=\sin(-z\sin t)=-\sin(z\sin t),\\&\sin(z\sin(t+\pi))=-\sin(z\sin t).\end{aligned}$$

Queste due simmetrie semplificano notevolmente la nostra espressione: la prima infatti elimina tutti gli a_n, mentre la seconda elimina tutti i coefficienti (pari) del tipo b_{2n}; quindi, possiamo esprimere la nostra funzione come *sola funzione dei termini dispari in seno* (primo passaggio) e, considerando che i coefficienti dipendono da *z*, possiamo cambiarne la notazione (secondo passaggio):

$$\sin(z\sin t)=\sum_{n=0}^{\infty}b_{2n+1}\sin((2n+1)t)=\sum_{n=0}^{\infty}J_{2n+1}(z)\sin((2n+1)t).$$

Nello stesso modo si ottiene[19]:

$$\cos(z\sin t)=J_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(z)\cos(2nt).$$

Se ora definiamo:

$$J_{-n}(z)=(-1)^n J_n(z),$$

possiamo scrivere le due espressioni viste sopra in modo più compatto:

$$\begin{aligned}\sin(z\sin t)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)\sin(nt);\\\cos(z\sin t)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)\cos(nt).\end{aligned}$$

E le varie J_n che stiamo trattando non sono altro che le ***funzioni di Bessel***, vero prezzemolo della matematica più vicina alla fisica[20].

Nel prossimo passaggio faremo una serie di conti ragionevolmente elementari (trigonometria di base) per arrivare ad un risultato decisamente interessante: se non volete seguirlo, leggetevi subito la conclusione.

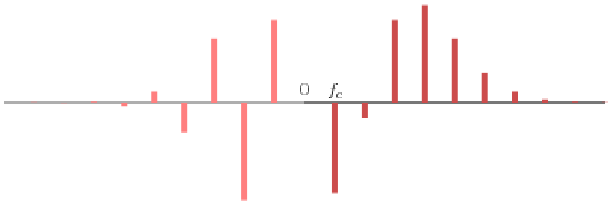
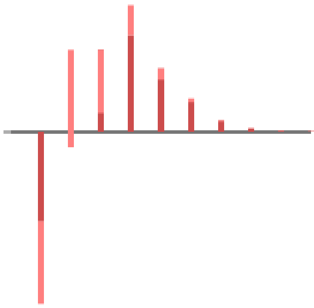
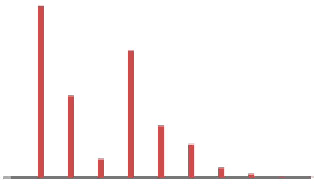
$$\begin{aligned}\sin(2\pi f_c t+I\sin(2\pi f_m t))&=\sin(2\pi f_c t)\cos(I\sin(2\pi f_m t))+\cos(2\pi f_c t)\sin(I\sin(2\pi f_m t))\\&=\sin(2\pi f_c t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(I)\cos(2n\pi f_m t)+\cos(2\pi f_c t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(I)\sin(2n\pi f_n t)\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(I)[\sin(2\pi f_c t)\cos(2n\pi f_n t)+\cos(2\pi f_c t)\sin(2n\pi f_m t)]\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(I)\sin[2\pi(f_c+nf_m)t].\end{aligned}$$

[19] Il termine a pedice zero potrebbe essere portato nella sommatoria, ma è invalso l'uso di tenerlo al di fuori, almeno in questa forma: tranquilli, al prossimo passaggio sparisce.

[20] E (quindi) alla musica: ad esempio, i modi di vibrazione di un tamburo rotondo, sono descritte dalle funzioni di Bessel.

Questo mostro ha un significato estremamente importante: *lo spettro dell'onda modulata in frequenza ha componenti di tipo* $f_c + nf_m$, e le funzioni di Bessel determinano quanto ogni singola componente contribuisca al suono finale.

Tutto ciò potrà essere interessante, ma sono cose note da tempo; cerchiamo adesso di capire quale sia stata l'idea di Chowning: un passo alla volta, e una figura per ogni passo.

Per prima cosa, consideriamo una modulazione di frequenza per cui la portante sia uguale alla modulante, ossia $f_c = f_m$; qui di fianco vediamo lo spettro di Fourier.	
Adesso, invertiamo rispetto allo zero e cambiamo di segno a tutti i coefficienti negativi; in questo modo, veniamo ad avere *due* valori per ogni frequenza rappresentata: nella figura, le bande scure indicano le frequenze positive (che restano tali), mentre quelle chiare sono state riflesse e invertite rispetto allo zero.	
Quindi, calcoliamo il valore assoluto dei coefficienti totali: in un modo molto semplice, abbiamo ottenuto uno spettro complesso.	

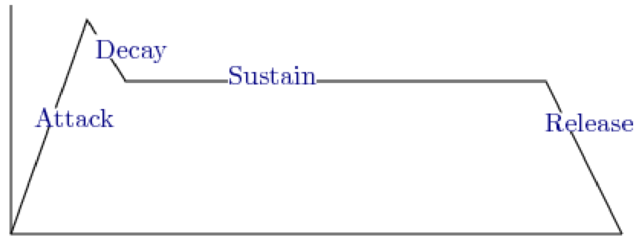
Quello che abbiamo fatto sinora è di considerare una ben precisa frequenza e, attraverso svariate operazioni, ottenere delle ricette sonore più complesse; in realtà, se riprendete la chitarra, vi accorgete di due cose:

1. Il suono comincia particolarmente ricco (e quindi con molte componenti armoniche nella ricetta sonora), ma dopo qualche tempo si riduce sostanzialmente ad una nota di frequenza pura;
2. Anche il volume, che inizia piuttosto forte, cala piuttosto velocemente.

Insomma, se utilizziamo il nostro modello di onda modulata in frequenza, abbiamo che nell'espressione:

$$A\sin[2\pi f_c t + I\sin(2\pi f_{mt})],$$

le nostre costanti A e I sono tutt'altro che costanti, e il timbro risulta controllato da I mentre il volume è controllato da A; la dipendenza dal tempo può essere introdotta imponendo che seguano un determinato *inviluppo*, ossia una determinata variazione nel tempo; il modello più utilizzato, dalle iniziali (inglesi) delle quattro fasi, è detto *inviluppo ADSR*; lo trovate esemplificato nella figura a fianco, con i necessari termini inglesi.



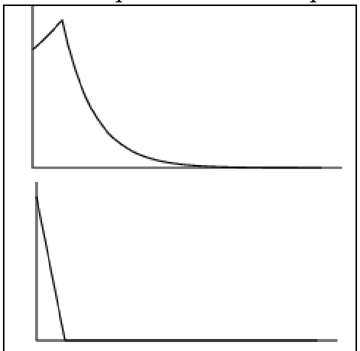
25 *Cosa succede quando suono*

Chowning, forte di questi potenti strumenti di analisi, è passato alla simulazione di svariati strumenti, utilizzando gli opportuni inviluppi e il metodo della modulazione di frequenza.

La simulazione degli *ottoni* diventa possibile utilizzando $f_c = f_m$ e utilizzando lo stesso inviluppo ADSR sia per l'ampiezza sia per l'indice di modulazione.

Per quanto riguarda le *campane*, dovendo perdere rapidamente la ricchezza dello spettro successivamente al tocco, si utilizza un indice di modulazione che decade esponenzialmente; dovendo inoltre avere anche una diminuzione del volume del suono nel tempo, anche per l'ampiezza utilizzeremo un decadimento esponenziale.

Sempre a proposito di campane, abbiamo una caratteristica piuttosto strana: abbiamo visto che, se la frequenza di modulazione è un multiplo razionale della portante, otteniamo degli spettri armonici: ma il suono della campana è fortemente inarmonico (non viene prodotta una nota di un unico tipo); per questo, si sceglie un rapporto tra le due frequenze che sia quello *peggio approssimabile* dal rapporto di due interi: chi di voi ricorda lo sviluppo in frazione continua del rapporto aureo, a questo punto non dovrebbe avere più dubbi: $f_m = \varphi f_c$, e ottenete una meravigliosa campana!


26 *Ampiezza (sopra) e indice di modulazione di un tamburo*

Noi, nel nostro piccolo, tendiamo a fidarci incondizionatamente dell'orecchio musicale di chi riesce a concepire certe idee balzane (e a dimostrare che funzionano), ma ci piacerebbe capire da dove è partito il Nostro per stabilire che un *tamburo*, invece, debba avere $\frac{f_m}{f_c} = \frac{1}{\varphi}$; in attesa che qualcuno con un orecchio musical-matematico ci venga in soccorso vi forniamo, sempre per il tamburo, i grafici dell'ampiezza e dell'indice di modulazione: su questi andiamo già più d'accordo, ma nonostante tutta la nostra simpatia per il rapporto aureo, da dove venga fuori quel coso lì sopra non ci è proprio chiaro.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms