Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 145 – Febbraio 2011 – Anno Tredicesimo

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM144 ha diffuso 2'741 copie e il 30/01/2011 per Google eravamo in 5'410 pagine.

Adusi a lavorare in mobilità ma ancora con una libreria *paper oriented,* il nostro terrore è sempre quello di non esserci portati dietro proprio il libro che ci serviva. ***David Garcia***, con il suo ***ARCHIVE II***, propone una interessante soluzione al problema. Ed evitate anche la classica scena della nasata sul palo.

1. Invito a nozze

Are you one of the beautiful people
Is my name on the list
Wanna be of the beautiful people
Wanna feel like I'm missed
(Mark Everett degli Eels: *Guest List*,
dall'album *Beautiful Freak*)

Pazzo, amante, poeta: tutti e tre
sono composti sol di fantasia.
Il primo vede sempre più demoni
di quanti ne contenga il vasto inferno;
l'innamorato, tutta frenesia,
sa ravvisar perfino in una etiope
la venustà d'un' Elena di Troia;
il poeta, volgendo gli occhi intorno,
come rapito in un dolce delirio,
può contemplare la terra del cielo
e il cielo della terra, e la sua penna,
così come l'estrosa sua inventiva
sa dare corpo a ciò che non conosce,
lo ferma, conferendo a un vuoto nulla
una concreta dimora ed un nome.
(W. Shakespeare,
Sogno di una notte di mezza estate,
Atto V Scena I)

Ci sono cose che cambiano continuamente, anche se in gioventù sembrano eterne e stabilissime. Altre, invece, hanno una capacità di resistere al tempo, di radicarsi nella tradizione, pur essendo per propria natura volatili, transitorie, senza un disegno progettato per durare.

Negli ultimi cinquant'anni non solo l'aspetto formale, ma anche l'istituto stesso del matrimonio ha subito una gran quantità di trasformazioni: l'abito delle spose è quasi sempre bianco, ma ci sono ormai vistosissime eccezioni cromatiche; nella maggioranza dei casi è lungo, ma non fanno gridare allo scandalo le fanciulle che si dirigono verso il fatidico "sì" con le ginocchia scoperte, quando non addirittura in minigonna. E spesso si vedono nugoli di ragazzi e ragazze vestiti tutti uguali, damigelle e damigelli, a fare da corte agli sposi, ricalcando la tradizione dei matrimoni americani che ci arriva dai film di Hollywood, insieme ai matrimoni celebrati nei giardini di casa e alla misteriosa presenza professionale dei *wedding-planner*. Ci si sposa ancora perlopiù in chiesa, ma sono ormai frequentissimi matrimoni celebrati solo civilmente, in luoghi caratteristici della città, e magari officiati da amici che sono riusciti ad ottenere la preziosa delega dal sindaco. E questi sono solo alcuni degli aspetti esteriori: non è certo il caso di descrivere in questa sede i cambiamenti più incisivi e radicali che passano attraverso argomenti delicati e complessi quali il diritto di famiglia, il concetto di famiglia allargata, o il diritto al matrimonio di coppie non eterosessuali.

Altre cose che potrebbero cambiare facilmente, senza che la cosa interessi neanche i trafiletti di cronaca del costume o addirittura neanche sfiori il programma scritto a matita dalle citate wedding-planner, riescono invece a resistere senza sforzo né ragione apparente. Quasi inevitabilmente infatti, all'uscita dal rito, civile o religioso che sia, gli sposi sono accompagnati dal generale tripudio e dalle solite note gioiose della marcia nuziale. Marcia nuziale che è ormai definita di per sé, dal generico sostantivo e aggettivo, quasi ne esistesse solo una, scritta e creata e suonata appositamente per essere tale, senza apprezzabile concorrenza o alternativa. E invece, come spesso accade, la marcia nuziale per antonomasia non nasce con l'intento di essere un vero imenèo, o per lo meno, non per un matrimonio realmente celebrato: e, ancor più curiosamente, è possibile partire dal tripudio nuzial-melodico per giungere a parlare – o quantomeno per trovare una scusa per parlare – di matematica.

Meno sorprendente del possibile legame tra musica per sposalizi e matematici è invece osservare quanto sia essenziale circondarsi delle persone giuste, essere inserito nelle cerchie di amicizie adatte, per riuscire ad ottenere il massimo dalla vita. È un'altra cosa che non cambia dalla notte dei tempi: occorre sempre un parente famoso, un amico influente, o quantomeno un ex compagno di scuola con la moglie che lavora nel posto giusto, un cognato ben introdotto, un amico tassista: fosse anche solo per trovare le strade giuste da prendere nelle ore di punta. Per arrivare al successo, l'individuo, per quanto meritevole, non basta a se stesso: occorre conoscere le persone giuste.

Per quanto evidente e quasi banale, non sembra comunque essere una conoscenza innata; forse è solo dopo una certa pratica di disincanto che si giunge a questa conclusione. Quando si è giovani e idealisti si tende invece a pensare che un giorno, indipendentemente dal luogo e dal censo, dalla famiglia e dall'ambiente, si potrà avere accesso a tutte le opzioni offerte da questo mondo: istruzione, fama, arte, scienza, successo, o anche, semplicemente, la felicità. Si spera di studiare un argomento che ci interessa e di potersi permettere di lavorare nell'ambiente[1]: e tutto sommato ci si immagina che basti elencare le proprie abilità e caratteristiche in un curriculum vitae, attendere l'immancabile ed entusiasta convocazione e trovare il lavoro perfetto, quello che stimolerà ulteriormente la nostra immaginazione e che ci permetterà di coltivare le nostre passioni[2]. E viene poi naturale pensare e sperare che, per accadimento, si potrà incontrare anche la persona giusta con cui condividere desideri ed aspirazioni, con cui costruire un tetto e sotto di esso una famiglia. La maggior parte di noi nasce e cresce con aspirazioni modeste e al tempo stesso elevatissime, nel fragile bilancio delle emozioni: del tutto comuni, perché condivise; e allo stesso tempo specialissime, perché profonde e private: una casa, un lavoro, una famiglia.

Il contorno dei sogni, che è poi la realtà, richiede però fin dall'inizio ai desideri dell'individuo di interagire con la prassi del mondo. Studiare significa avere qualcuno che voglia e possa mantenerci agli studi; ma anche trovare presto un lavoro manuale implica conoscere qualcuno del mestiere che abbia bisogno di un assistente malpagato. Arrivare ad un colloquio in un'azienda significa sempre più spesso dover conoscere qualcuno che possa far risaltare il nostro, peraltro certo appetibile, CV in mezzo ai cento che ogni giorno si accalcano sulle scrivanie degli uffici di Risorse Umane. Ed è in fondo lo stesso anche per gli aspetti più privati: chi ha davvero incontrato il proprio partner in un bar o per strada? Nessuno, o quasi: sono sempre gli amici o i colleghi di lavoro a presentarci la persona della vita. Viviamo con la gente che ci sta vicino, ed è tramite loro che costruiamo il nostro mondo e il nostro modo di vivere.

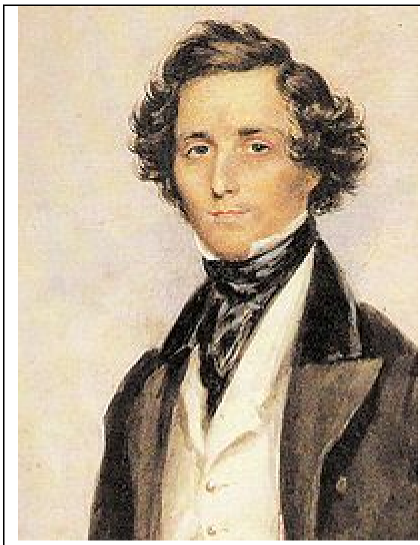
Solo dopo che il nostro ambiente, le nostre conoscenze, le nostre cerchie ci hanno condotto a trovare come costruire la nostra esistenza e con chi trascorrerla, può venir voglia di sentirla davvero, quella marcia nuziale. E magari incuriosirci, a ragion veduta, sulle sue origini.

1 *Marcia Nuziale di Mendelssohn*

[1] A meno che non si sia ormai perdutamente corrotti da modelli televisivi alla moda, nel qual caso sostituire le parole "*studiare un argomento che ci interessa*" con "*diventare famosi in un modo qualsiasi*" e "*lavorare*" con "*spassarsela*".

[2] Aspettative proprie della gioventù: molti ragazzi, ai tempi nostri, sono costretti a disilludersi troppo presto, e questo significa anche, in ultima analisi, rubar loro un pezzo di giovinezza.

La *Marcia Nuziale* fu scritta da Felix Mendelssohn Bartholdy per l'opera *Sogno di una notte di mezza estate*, tratta dall'omonima commedia di William Shakespeare. Non aveva l'intenzione d'essere una rivoluzione stilistica: maestosa, rituale, classica, è frutto di un modo di fare musica molto tradizionale. Mendelssohn ebbe anzi molto da ridire con i suoi contemporanei Wagner, Berlioz, Schumann, Chopin che, travolti dal movimento romantico, si scatenarono in stili nuovi e mode d'avanguardia; fin da giovane rimase attratto soprattutto dall'amore dei classici e dal rispetto delle tradizioni. Non a caso, il suo maggior merito musicale, forse più ancora che la sua propria opera di compositore, sta nel certosino, attento e meritevolissimo lavoro di recupero di musica di autori che, ai suoi tempi, erano trascurati: recuperò e pubblicizzò composizioni di Mozart, e soprattutto richiamò l'attenzione del mondo musicale sulla grande opera di Johann Sebastian Bach.


2 *Felix Mendelssohn*

La musica scritta per la commedia di Shakespeare rientra tutta nella produzione standard del tempo: si tratta in fondo di "*incidental music*", ovvero di ciò che al giorno d'oggi chiameremmo, con terminologia cinematografica, colonna sonora; e visto che il momento topico del *Sogno* è il matrimonio tra Teseo e Ippolita, non sorprende che Felix abbia dovuto (e certo voluto) sottolineare con archi e ottoni il solenne momento nuziale del racconto.

Oltre che con le sue note, Felix Mendelssohn riesce a contribuire alla tesi di quest'articolo anche con la propria vita: non si può infatti negare che fosse splendidamente inserito nel suo ambiente, e che conoscesse le persone giuste. Suo nonno, Moses Mendelssohn[3], era un filosofo illuminista nato da una famiglia ebrea e povera, ma che si era posto l'ambiziosa missione di migliorare l'immagine degli ebrei. In Germania diventò talmente famoso per la sua opera teoretica che nel circolo dei filosofi di Berlino era soprannominato "il Socrate tedesco"; e perfino i regnanti prussiani del tempo si interessarono alla sua filosofia e alle sue idee, al punto di giungere a concedergli lo stato di *Schutzjude*, ebreo protetto, assicurandogli così un permanente permesso di soggiorno a Berlino. Status di cui fece davvero buon uso, se della sua decina di figli i sei sopravvissuti all'infanzia diventarono tutti banchieri o comunque imparentati con famiglie del gotha finanziario tedesco; e tutti erano, anche se non particolarmente decisi a mantenere la fede ebraica, certo fortemente integrati nell'ambiente berlinese, che contribuirono a far fiorire.

Il padre di Felix, Abraham, era banchiere e filantropo: due parole che spesso hanno poco a che fare l'una con l'altra, ma in questa famiglia eccezionale tutto può accadere[4]. La famiglia Mendelssohn creò nella confederazione tedesca un impero bancario di dimensioni e qualità tali che venne distrutto solo dalla tempesta della guerra voluta dal nazismo, nel 1939, dopo più di un secolo di indefessa attività. La *Mendelssohn & Co.,* fondata nel 1815, finanziava infatti ogni genere di attività culturale: accademie musicali, musei, teatri; e a casa Mendelssohn la cultura era davvero al centro dell'attenzione, a cominciare da quella musicale: Fanny, la primogenita, fu pianista di successo e

[3] Suo padre si chiamava Mendel, da cui "figlio di Mendel", *Mendels Sohn*. Quando abbiamo cominciato questa ricerca non ci saremmo mai aspettati di scoprire che da un solo uomo potesse svilupparsi una famiglia così ricca di filosofi, matematici, artisti, scienziati, musicisti. Siccome parleremo solo di pochissimi di loro, vi suggeriamo di controllare la lista, è davvero impressionante: http://en.wikipedia.org/wiki/Mendelssohn_family.

[4] Del resto, l'apparente ossimoro viene continuamente riproposto al giorno d'oggi dal concetto stesso di "*fondazione bancaria*", tramite cui alcuni dei capitali che sono passati dalla società agli istituti di credito tornano alla società sotto forma di finanziamenti culturali. Il punto è, come al solito, scoprire in quale misura percentuale del bilancio ciò accada.

compositrice (e sposò un pittore); il secondogenito, Felix, fu Felix Mendelssohn, e ciò dovrebbe bastare a farne giudicare le capacità musicali; Paul era anch'egli un violoncellista dotato, anche se poi preferì intraprendere la carriera bancaria di famiglia; e infine la sorella minore Rebecka (che potete vedere qui ritratta dal cognato pittore, il marito di Fanny) era molto portata per il canto, anche se la sua fama di soprano non varcò mai le mura famigliari: del resto, con tali fratelli, erano mura davvero alte, in campo musicale.

3 *Rebecka Mendelssohn*

Ma non era certo solo la musica ad essere considerata degna di attenzione nel salotto berlinese di Abraham Mendelssohn; era l'epoca in cui proprio nei convivi intellettuali si produceva e consumava la cultura delle nazioni europee, e la casa del giovane Felix era un vero ricettacolo di grandi personalità delle arti e delle scienze.

Tra gli altri erano ospiti fissi i fratelli William e Alexander von Humboldt: il primo, oltre che ministro del regno di Prussia, era anche filosofo e linguista; suo fratello fu invece una grande figura di naturalista ed esploratore, stella davvero di prima grandezza nella storia della biologia. Alexander fu davvero uno splendido esempio dello scienziato ottocentesco: iniziò studiando le rocce basaltiche del Reno, quindi come geologo, ma non esitò ad imbarcarsi sulla nave *Pizarro* per andare alla scoperta di quello che era allora (e in parte, forse, lo è ancora oggi) un continente davvero misterioso: il Sudamerica. Qui scoprì e classificò una quantità impressionante di specie animali e vegetali e, già che era in viaggio, contribuì in maniera fondamentale a fissare la posizione dei meridiani e dei paralleli, tanto per non dimenticarsi di essere anche navigatore e geografo, oltre che esploratore e biologo. Il continente sudamericano lo celebra con molte statue, e la sua fama è così diffusa da essere narrato da Gabriel Garcia Marquez come una delle poche cose che Melquìades, uno dei personaggi di *Cent'anni di Solitudine*, ricorda nel suo delirio[5].

4 *Alexander von Humboldt*

Marcia nuziale e conoscenze selezionate: i due *fil rouge* di questo racconto si incontrano bene, nel salotto di casa Mendelssohn: specialmente se, oltre a trovare gli amici e lo spirito giusto per rallegrare lo spirito, si riesce a trovarci anche l'anima gemella: e la giovane e bella Becka, la piccola della famiglia, era certo una fanciulla di cui innamorarsi. Probabilmente, Rebecka era un partito davvero ambito, nell'alta società prussiana, e non avrà certo avuto che l'imbarazzo della scelta nel selezionare l'uomo con cui legarsi per la vita. E stupisce allora un po' – o, se si è ottimisti e romantici, rallegra il cuore e conferma la potenza sfacciata dell'amore – lo scoprire che la ragazza decise di legarsi non ad un nobile prussiano o ad un finanziere della dilagante economia tedesca,

[5] "*In realtà, l'unica cosa che riuscì a isolare nei borbottii catarrosi fu l'inesistente martellamento della parola equinozio, equinozio, equinozio, e il nome di Alexander von Humboldt*", scrive Marquez quando narra di Aureliano Buendìa che ascolta il delirio di Melquiades lo zingaro.

ma ad un uomo di origini modeste e non certo aristocratiche: uno studioso e intellettuale, ma certo privo del fascino avventuroso che poteva mostrarle l'amico di famiglia Alexander von Humboldt. Anche perché le sue esplorazioni erano forse non meno ardite, ma sicuramente meno appariscenti; non risaliva l'Orinoco e non si perdeva nella giungla dell'Amazzonia: le sue avventure cominciavano e finivano dentro la sua mente, e le tracce che gli altri potevano vedere dei suoi viaggi verso l'infinito erano solo pochi simboli, astrusi agli occhi dei più. Perché Rebecka si innamorò di un matematico: Lejeune Dirichlet.


5 *Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet*

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet nacque il 13 Febbraio 1805 a Düren, che a quei tempi faceva parte del napoleonico e vastissimo Impero Francese, ma che si trova a metà strada tra le tedesche Colonia e Aachen[6]. La sua famiglia era originaria di Richelet, in Belgio, e da qui il nome di famiglia del nostro protagonista: *le jeune de Richelet*, il giovane di Richelet, era il modo in cui veniva chiamato suo nonno al suo arrivo a Düren.

Come ci si può aspettare, fin dai primi anni di studi, il giovane si appassionò alla matematica e alla storia. Andava in giro con le *Disquisitiones arithmeticae* di Gauss come se fossero una Bibbia, e così armato di entusiasmo e di buone letture si iscrisse all'università a Parigi, dove si ritrovò con insegnanti dai nomi che incutono rispetto al solo pronunciarli: Biot, Fourier, Francoeur, Hachette, Laplace, Lacroix, Legendre[7], Poisson. Scelse di studiare in Francia perché l'università tedesca, all'inizio del diciannovesimo secolo, era seriamente arretrata rispetto a quella francese: l'unico grande nome che avrebbe potuto stimolare Johann era Gauss, che però a quei tempi teneva solo una cattedra di astronomia, e notoriamente non amava insegnare[8]. Qui a Parigi incontrò Maximilien Sébastien Foy, generale di alto rango durante le guerre napoleoniche e poi stimato deputato al parlamento francese, e Dirichlet lavorò per lui per tutto il suo periodo parigino. Con tale prezioso datore di lavoro e mecenate, Johann si abituò a frequentare salotti e a respirare l'aria culturale della maggiore capitale europea, anche se ciò lo costringeva ad insegnare la sua lingua madre, il tedesco, alla propria famiglia come se fosse per loro una lingua straniera.

Ma Parigi non significa solo salotti: alla Sorbona, nel frattempo, Dirichlet aveva già cominciato a brillare di luce propria. Lavorando sulla teoria dei numeri non solo produsse una lunga serie di memorie su progressioni numeriche e sulla teoria dei numeri primi, sul Problema di Cauchy, sulle serie di Fourier, ma riuscì anche a provare in modo originale alcuni casi particolari dell'Ultimo Teorema di Fermat[9], e ad introdurre molti altri concetti[10] che sono ancora attuali in analisi, quali la definizione stessa di funzione.

[6] Aachen è certo città tedesca, ma che quelle terre siano state oggetto di contesa da sempre è ben testimoniato dal fatto che più che col suo nome tedesco la città è forse famosa con quello francese (Aix-la-Chapelle) e certamente con quello storico latino: Aquisgrana.

[7] RM140, Settembre 2010, "*Le Opere e le Facce*"

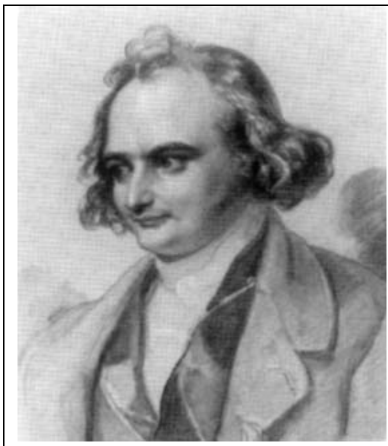
[8] Difficile farsi una ragione del fatto che di questo gigante della matematica non abbiamo ancora parlato, vero?

[9] Se mai questo teorema e questo matematico avessero bisogno di una nota a piè pagina, sarebbe solo per segnalare che ne abbiamo parlato in RM091, Agosto 2006, "*Polenta d'Estate*".

[10] Non possiamo esimerci dal citare uno dei preferiti dal nostro GC: il leggendario "*principio della piccionaia*" è opera sua.

Gli amici, dicevamo: quelli che è bene avere intorno, specialmente se sono influenti e hanno buone idee. Fourier e Poisson, che ebbero tempo di conoscere e apprezzare il giovane tedesco, lo misero in contatto con Alexander Humboldt. L'eroe del Sudamerica si interessò a quel talento tedesco in terra straniera, e lo aiutò volentieri a rientrare in Germania; sempre grazie ai buoni uffici del poliedrico scienziato, Dirichlet ottenne diverse cattedre a Berlino. Non che non lo meritasse di per sé: era un insegnante eccezionale, che contribuì a migliorare lo stato dell'università tedesca, prima a Berlino e poi a Göttingen, dove insegnò a personaggi del calibro di Ferdinand Eisenstein, Leopold Kronecker, Rudolf Lipschitz, Richard Dedekind[11], Bernhard Riemann[12].

Il modesto figlio dell'impiegato dell'ufficio postale è ormai presentabile: è un docente, con un salario adeguato, è stimato nel mondo accademico. Alexander lo porta a casa Mendelssohn. In breve, Rebecka si ritrova con un corteggiatore in più. Non ci è dato sapere come Johann sia riuscito a conquistare il cuore della fanciulla: ci piacerebbe pensare che abbia contribuito anche l'immaginifica invenzione della Funzione di Dirichlet[13], che è talmente impalpabile da non essere mai continua in nessun punto, eppure così semplice e densa da contenere due infiniti di classi diverse, ma è assai più probabile che l'innamoramento abbia seguito percorsi e fascinazioni meno matematici. In ogni caso, nel 1831 Becka e Johann convolano a nozze, e ci piace immaginare che sia risuonata per l'aere la melodia festosa scritta da Felix, fratello e cognato degli sposi. La nuova casa coniugale, grazie soprattutto ai meriti della novella signora Dirichlet che dal padre aveva ereditato il senso politico, la predisposizione per le lingue (al punto di imparare il greco solo per passatempo) e l'amore per la cultura e la scienza, diviene in breve un altro salotto prestigioso e frequentato da studenti promettenti, amici, parenti, artisti, matematici e influenti uomini politici.


6 *Carl Jacobi*

Tra i più cari amici di Lejeune c'era Carl Jacobi: i due si erano incontrati durante i primi anni del ritorno in Germania di Dirichlet, e si frequentavano assiduamente anche se Jacobi insegnava nella lontana Königsberg. Tanto erano legati che nel 1841, quando a Jacobi fu diagnosticato il diabete, Johann si precipitò al suo capezzale e si premurò affinché l'amico ricevesse tutte le cure necessarie: del resto, Dirichlet era ormai un riconosciuto astro nel firmamento dei matematici tedeschi, e aveva in Humboldt un forte alleato, quanto bastava a che i due riuscissero ad ottenere dal re Federico Guglielmo IV i fondi per un soggiorno in Italia per l'amico.

Anche grazie a questi sovrani omaggi, finì che un gruppetto di matematici e amici accompagnò Jacobi nel suo terapeutico viaggio in Italia: Johann e Becka facevano parte della spedizione, e una dei quattro figli della coppia vide la luce proprio a Firenze.

Se la permanenza nel Giardino d'Europa fu piacevole, lo stesso non si può dire per il rientro in patria: Fanny, che aveva preso in mano con il marito il centro culturale della famiglia Mendelssohn dopo la morte dei genitori, fu stroncata da un infarto nel 1847. Fu un colpo terribile per Felix, che seguì la sorella a pochi mesi di distanza, anche lui a causa di un attacco di cuore. I coniugi Dirichlet adottarono allora Sebastian Hensel, il figlio più piccolo della sorella scomparsa, e cercarono di ricoprire il ruolo di Fanny al centro della vita sociale berlinese.

[11] RM081, Ottobre 2005, "*Idee a Improbabilità Infinita*"

[12] RM068, Settembre 2004, "*Pellegrinaggio a Thule*"

[13] La funzione di Dirichlet vale 1 per ogni x razionale e 0 per ogni x irrazionale. Si dimostra facilmente la sua non-continuità in ogni punto.

E ci riuscirono. Nonostante fossero quelli anni di grandi tumulti politici che li costrinsero ad affrontare difficoltà di ogni genere, non ultima la morte del caro amico Jacobi, Becka e Johann furono il perno della cultura della capitale prussiana. Poi, nel 1855, Gauss morì, e la sua cattedra a Göttingen fu subito offerta unanimemente al professor Johann Lejeune Dirichlet.

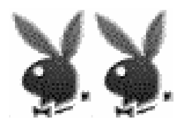
Quelli di Göttingen furono certo anni molto felici: lui finalmente acclamato, con studenti motivati e promettenti e colleghi della nuova generazione che lo ammiravano e stimavano, come Riemann e Dedekind; lei centro vitale e culturale della prima cittadina universitaria dell'Occidente, organizzatrice e fruitrice di musica, eventi, vita.

7 *La tomba di Becka e Lejeune*

La felicità terminò nel 1858: Dirichlet partecipò ad una conferenza in Svizzera, dove improvvisamente fu colto da un attacco di cuore. Seppur in condizioni quasi disperate, riuscì a tornare a casa e sembrava che stesse cominciando a riprendersi, quando inaspettatamente fu Becka ad essere stroncata da un infarto. Fu abbastanza, per il matematico: la voglia di vivere scomparve insieme alla compagna della sua vita. Si spense lentamente, quasi senza fretta, il 5 maggio del 1859. Il suo fraterno amico Alexander Humboldt, quasi a voler ribadire che gli amici si scambiano vita e passioni l'un l'altro, morì il giorno seguente.

Esistono, oltre a quelle nuziali, anche le marce funebri: ma siamo certi che tutti questi amici legati da comuni interessi e passioni, Alexander, Carl, Felix, Johann, Becka, avrebbero preferito salutare il mondo accompagnati dalle note che Mendelssohn scrisse per esaltare la gioia nuziale del *Sogno di una Notte di Mezza Estate*.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
GURPS!			
Tre al prezzo di due			

2.1 GURPS!

Lo conoscete? Significa "Generic Universal RolePlaying System", ed è un sistema per costruire giochi di ruolo: meno limitato dal punto di vista temporale rispetto alla prima cosa che vi viene in mente[14] (nel senso che potete introdurre astronavi, asce neandertaliane, teppisti all'angolo di strada o peronospore allettate dai vostri grappoli), nella versione *Lite* è liberamente disponibile in rete e il manuale è di sole trentadue pagine.

Va detto che in molti casi, la regola principe sembra essere "...ma fate un po' quel che cavolo vi pare...", sotto l'unica condizione che i partecipanti si divertano (il Game Master – possiamo usare questo termine? – no, per definizione lui si stanca sempre).

Rudy, comunque, sta facendo una serie di esperimenti; venendo ad essere (in qualsiasi forma lo si rappresenti) il combattimento la parte principale del gioco (anche nel caso di *quell'altro*), l'idea è quella di costruire delle regole piuttosto bislacche per alcuni personaggi che si è appena inventato: niente di speciale, si tratta di Vampiri Quadratici: la loro caratteristica è di combattere unicamente contro altri Vampiri (quadratici o meno che siano) e, in caso di vittoria, di assorbirne i Dadi di Combattimento[15].

Infatti, se un VQ possiede ***X*** DdC e combatte contro un VQ che ne possiede ***Y***, possiamo, in base ad una semplice legge matematica, stabilire le probabilità di vittoria di ciascuno dei due: basta a questo punto tirare il dado, e il dado è tratto (erano dodici anni che aspettavamo il momento per questa battutaccia...): chi vince si mangia i DdC dell'altro e continua l'avventura.

Volendo cominciare sul semplice, Rudy ha provato con una legge lineare, ossia quando i due fanno a botte ***X*** ha probabilità $X/(X+Y)$ di vincere (confondiamo i nomi dei VQ con i loro rispettivi DdC), mentre ***Y*** avrà probabilità $Y/((X+Y)$.

Solo che, ricordando un vecchio problema piuttosto simpatico, c'è qualcosa che non gli torna: supponiamo tre VQ, aventi DdC distribuiti come $X=2$, $Y=1$, $Z=1$, secondo voi, ***X*** deve aspettare che ***Y*** e ***Z*** facciano a botte per poi sfidare il vincitore o prendersela con uno, sperare di batterlo e poi prendersela con l'altro?

[14] Noterete che non abbiamo nominato il gioco principe per sistemi di questo genere: non vorremmo entrare nella diatriba legale che oppone i due produttori. Comunque, l'idea è quella.

[15] Anche qui, temiamo che il termine più diffuso sia protetto da marchio di fabbrica: tranquilli, dopo spieghiamo tutto. Comunque, a questo punto il motivo del nome "Vampiro Quadratico" dovrebbe assumere una certa logica.

Ecco, se avete fatto il conto (che era facile), potreste provare a risolvere questo problemino: supponete di avere otto VQ, con vario numero di DdC, riuscite a trovare una (o più) sequenze di combattimenti che diano "speranze di vita" ad uno dei VQ diverse rispetto alle altre?

Nel tentativo di complicarsi la vita, Rudy ha deciso di fare alcune prove con una legge quadratica (...e cosa vi aspettate, con dei Vampiri Quadratici?), ossia supponendo che la probabilità di vittoria di $\boldsymbol{X}$ sia data da $X^2/\left(X^2+Y^2\right)$; in questo caso, secondo lui, è possibile costruire delle strategie più divertenti: come vanno a finire in questo caso i combattimenti di cui sopra?

Sempre utilizzando il modello quadratico, dietro stimolo dei Validi Assistenti (che qui Rudy ringrazia per avergli evitato, con le loro entusiastiche simulazioni, tediose programmazioni in Excel), sono nati alcuni interessanti problemi.

Supponiamo di avere quattro VQ, tutti forniti di un solo Dado di Combattimento; di questi, tre sono piuttosto remissivi, e non hanno intenzione di iniziare un combattimento se non dopo essere stati sfidati e aver vinto il primo combattimento (a quel punto diventano degli attaccabrighe); l'ultimo, invece, è un attaccabrighe sin dall'inizio. Che probabilità ha di vincere ognuno dei VQ?

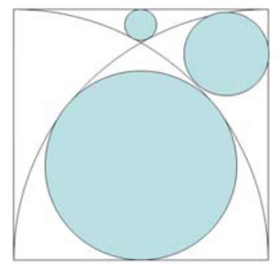
Sempre con i quattro di cui tre calmi e un piantagrane, supponiamo il piantagrane abbia 1 DdC, mentre i tre calmi hanno rispettivamente 1, 2 e 4 DdC: in che ordine deve lanciare le sfide, il piantagrane, per massimizzare le sue probabilità di sopravvivenza?

Ripensateci, la prossima volta che guardate *Twilight*.

2.2 Tre al prezzo di due

Visto che parliamo di problemi e siamo una rivista gratuita, la cosa è allettante; tranquilli, vi raccontiamo la storia e, una volta tanto, è vera.

Come dovreste ricordare (in realtà non se lo ricorda nessuno, ma siccome lui è convinto di essere centro e misura dell'universo, è convinto che tutti se lo *debbano* ricordare) a Rudy sono particolarmente simpatiche le *giapponeserie* (si dice? Ci sono le "cineserie", ci saranno anche queste) e, per quanto riguarda ambiti più strettamente matematici, è particolarmente interessato ai *sangaku* (di cui abbiamo parlato nel PM di RM121, febbraio 2009) e gli *origami* (di cui abbiamo parlato nel PM di RM095, dicembre 2006): quindi, dovreste riuscire ad immaginare i salti di felicità che il Nostro si è messo a fare quando ha trovato un *sangaku* sull'*origami*. Peccato che, secondo lui, sia un pochino troppo semplice.

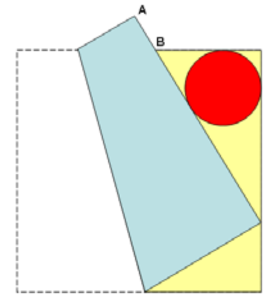


8 *I due del "tre per due"*

Deciso ad aggiungere alla qualità la quantità, è partito in caccia di qualche altro *sangaku* almeno vagamente simpatico, e ne ha trovati un paio simili tra di loro che ha deciso di unificare per vedere cosa viene fuori; da cui, vi ritrovate in realtà tre problemi in luogo dei due che cercava Rudy all'inizio, e quindi il titolo è "tre al prezzo di due".

Come in ogni presentazione ad effetto che si rispetti, cominciamo da quelli dove l'*origami* non c'entra, tenendo il "pezzo forte" per la fine. Trovate il disegno di prammatica in figura qui a fianco, e lo scopo è quello di ricavare i rapporti tra i tre cerchi azzurri[16].

[16] Siccome sappiamo che siete tutti appassionati di filologia, vi diciamo che il primo problema originale prevedeva il cerchio più grande e quello intermedio, mentre il secondo problema originale prevedeva non solo il cerchio piccolo, ma sostituiva al cerchio grande un quadrato e piazzava un cerchio tra i due archi e il lato superiore del quadrato appena costruito. Mettere anche questo nel problema sarebbe come scrivere un *haiku* di cinquantaquattro versi, quindi lo releghiamo in nota. Comunque, se avete letto sin qui potete divertirvi a risolverlo. E fanno *quattro* al prezzo di due... O no?



9 *Il piatto forte*

Tranquilli, adesso arriva l'*origami*. Anche qui serve il disegno, e vi garantiamo che farlo in PowerPoint non è stato facile: quindi, ve lo spieghiamo bene.

Per prima cosa, prendete il solito foglio di carta quadrato da *origami* (che, per comodità, supporremo bicolore), e tracciate un cerchio (rosso, mi raccomando) di raggio $\boldsymbol{R}$ in un angolo; poi piegate come indicato.

Quello che ci interessa è ricavare $\overline{AB}$ in funzione delle altre variabili: il raggio del cerchio, il punto sul lato verticale dove fate arrivare l'angolo, il numero civico del vostro commercialista... Insomma, di tutto quello da cui può dipendere.

No, niente ambientazioni. Altrimenti, si perde la purezza dei *sangaku*.

3. Bungee Jumpers

3.1 Prologo

Prologo? Dove si è mai visto un prologo ad un BJ? Per la natura stessa del Bungee Jumping i prologhi non hanno senso: è un po' come se, prima di buttarsi dal ponte con l'elastico, uno si mettesse a concionare sull'estetica e la necessità ontologica del fiume che scorre sotto il ponte. Però, diamine, è anche vero che non si è mai visto un BJ che non fosse stato scritto dal GC; ed eccezione chiama eccezione, perdinci. Quindi, vi beccate il prologo.

Questo BJ non nasce come BJ: arriva nella mailbox di Rudi Mathematici accompagnato da un messaggio intitolato "*Un'identità di algebra elementare*", e il mittente è uno dei più affezionati lettori di RM, ***Franco57***. Nella sua innata ed esagerata modestia, Franco racconta di essersi divertito a trovare la succitata identità, che ritiene interessante ma probabilmente niente affatto nuova: "*potrebbe essere un esercizio per uno studente universitario*", dice lui. E magari ha ragione: ma in verità la dimostrazione (che trovate naturalmente più avanti, a "*Pagina 46*") con ogni probabilità trascende le nostre misere capacità matematiche, notoriamente molto più basse di quello dello studente universitario medio, quindi il giudizio dovrebbe rimanere sospeso. ***Franco57***, che probabilmente subodorava cotanta nostra impotenza, si è peraltro organizzato una specie di *peer-review*, dando la sua opera in pasto ad uno dei matematici più tenaci e capaci della famiglia di RM: tanto capace che confessiamo apertamente che, se la dimostrazione è giudicata corretta da lui, ci sentiamo autorizzati a prenderla per buona anche noi. Lo sappiamo, è un comportamento profondamente antiscientifico, ma non siamo mica "rudi" per caso, noi. Oltre che tenace e capace, il misterioso reviewer è anche feroce, specie quando si viola inopinatamente il suo status pubblico preferito, che è l'anonimato; quindi, manteniamo il silenzio sulle sue generalità.

Ciò non toglie che, così facendo, l'ottimo ***Franco57*** abbia, in un certo senso, iniziato l'intera e-zine al concetto di *peer-review*, e pertanto adesso possiamo darci delle arie. Magari possiamo anche fare domanda per una caterva di numeri di Erdős: basta che un qualunque solutore con soluzione pubblicata su RM ne abbia uno diverso da infinito, e praticamente tutti gli RMers ne acquisiscono uno di appena un'unità superiore.

Ma forse non basta: quel che è certo, però, che provare a risolvere questo BJ – primo e per il momento unico scritto da un non facente parte la redazione – è davvero difficile, e intrigante. Se vi piacciono le sfide, provateci seriamente, non correte subito a leggere la soluzione.

3.2 L'identità di Franco57

Sia $A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ un insieme[17] di numeri reali; dimostrare che:

$$0 \notin A \Rightarrow \sum_{x \in A} \prod_{\substack{y \in A \\ x \neq y}} \frac{1}{1 - \frac{x}{y}} = 1.$$

E che, per qualsiasi intero k, $0 \leq k \leq n+1$:

$$\sum_{0 \leq i \leq n} {x_i}^k \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{1}{x_i - x_j} = \begin{cases} 0 & 0 \leq k < n \\ 1 & k = n \\ x_0 + x_1 + \cdots + x_n & k = n+1 \end{cases}$$

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

È tempo che noi si faccia *outing* (o *coming out*, come sembra essere più giusto chiamarlo) una volta per tutte: abbiamo superato i dodici anni di vita, e dobbiamo farci carico delle nostre responsabilità. È insomma giunto il momento di confessare che la ragione vera ed ultima per la quale abbiamo creato questa rubrica di recensioni è per riuscire ad entrare in possesso gratuitamente di libri che ci piacciono, e che con ogni probabilità avremmo acquistato. Invece, in questa maniera, capita che qualche amico generoso si ricordi di noi, e con la scusa della recensione noi intaschiamo il libro e non sborsiamo un euro.

Questa volta il successo è stato davvero completo: il testo che adesso fa bella mostra di sé sulla libreria di RM è un autentico classico della matematica, e siamo felicissimi di poterlo sfogliare. C'è anche da dire, però, che il curatore che ce ne ha fatto dono è un amico così caro di tutta la Redazione di RM che ce lo avrebbe regalato di certo anche se questa rubrica non esistesse. Grazie, Filippo.

4.1 Calcolo Geometrico

«Il calcolo geometrico consiste in un sistema di operazioni analoghe a quelle del calcolo algebrico, ma in cui gli enti sui quali si eseguono i calcoli, invece che numeri, sono enti geometrici, che definiremo.
Siano A, B, C, … dei punti nello spazio. »

Il Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino si trova nel cuore della città, a Palazzo Campana, sulla via e sulla piazza entrambe dedicate a Carlo Alberto. È situato a pochi passi dal primo parlamento d'Italia, Palazzo Carignano; è quasi attaccato al Museo Egizio, quasi al baricentro tra le due piazze che scandiscono i battiti del cuore dei torinesi, Piazza Castello e Piazza San Carlo. Ha una storia lunga e davvero interessante: nasce come convento nel 1675, poi si trasforma in caserma, poi addirittura in sede di ministero; durante il fascismo è la Casa Littoria, sede provinciale del PNF, ma nel Luglio del 1943, quindi prima ancora del fatidico 8 Settembre, viene preso d'assalto e liberato. Una tendenza all'anticipazione degli eventi che sembra ritornare nel tempo. Dopo la

[17] Essendo un insieme, sono considerati tutti diversi tra loro.

guerra, preso l'attuale nome che deve ad un partigiano caduto, diventa sede universitaria e ospita dapprima le facoltà umanistiche. Dal 1967 al 1970 è anche la sede del Movimento Studentesco e, a ribadire il suo ruolo storico di avanguardia, i primi atti della contestazione giovanile partono proprio da qui, nel Novembre 1967, anticipando anche il famoso Maggio Francese che sarebbe poi passato alla storia come il grido d'inizio del *Sessantotto*.


10 *Giuseppe Peano*

Quel palazzo è ormai sinonimo, nella toponomastica torinese, di matematica: e l'Istituto che vi ha sede è intitolato a Giuseppe Peano. Non poteva essere altrimenti: per quanto all'ombra della Mole siano nati o cresciuti un numero davvero considerevole di matematici di altissimo rango e di grande fama internazionale, la figura del cuneese brilla di luce talmente forte che il maggiore ateneo del Piemonte non poteva davvero riservare ad altri l'onore di essere ricordato sulla targa fuori dal portone che vede transitare ogni giorno la sua gioventù affascinata dai numeri e dalla geometria.

In quell'Istituto si tengono lezioni, si sostengono esami, si fa ricerca, si producono pubblicazioni di matematica[18]. Di Giuseppe Peano parlammo[19] a suo tempo, in una sede più canonica, almeno nella piccola geografia di RM, di questa rubrica di recensioni: e per raccontarlo a dovere non è bastato nemmeno l'articolo a lui dedicato. Basti allora rammentare qui che colui che incantò Bertrand Russell durante il Congresso Internazionale dei Matematici di Parigi nel 1900 era profondamente convinto che per raggiungere la giusta conoscenza matematica[20] occorresse porre attenzione soprattutto alle regole del linguaggio che si usa, con particolare attenzione al rigore e alla struttura dei concetti che descrive.

Il suo Calcolo Geometrico non è comunque solo un esercizio di questa natura, ma ne conserva lo spirito e ne rappresenta una splendida applicazione: come dicono le prime parole che aprono il testo, l'idea di fondo è quella di applicare il sistema di operazioni proprie del calcolo algebrico agli enti geometrici. In un certo senso, è pertanto quasi un'opera di traduzione, ma una traduzione che, nonostante l'apparente ossimoro, è estremamente originale e innovativa. Non a caso il lavoro viene preceduto da un capitolo indipendente, "*Le Operazioni della Logica Deduttiva*", che stanno come premessa fondamentale – in un certo senso davvero linguistica – al lessico del Calcolo Geometrico vero e proprio.

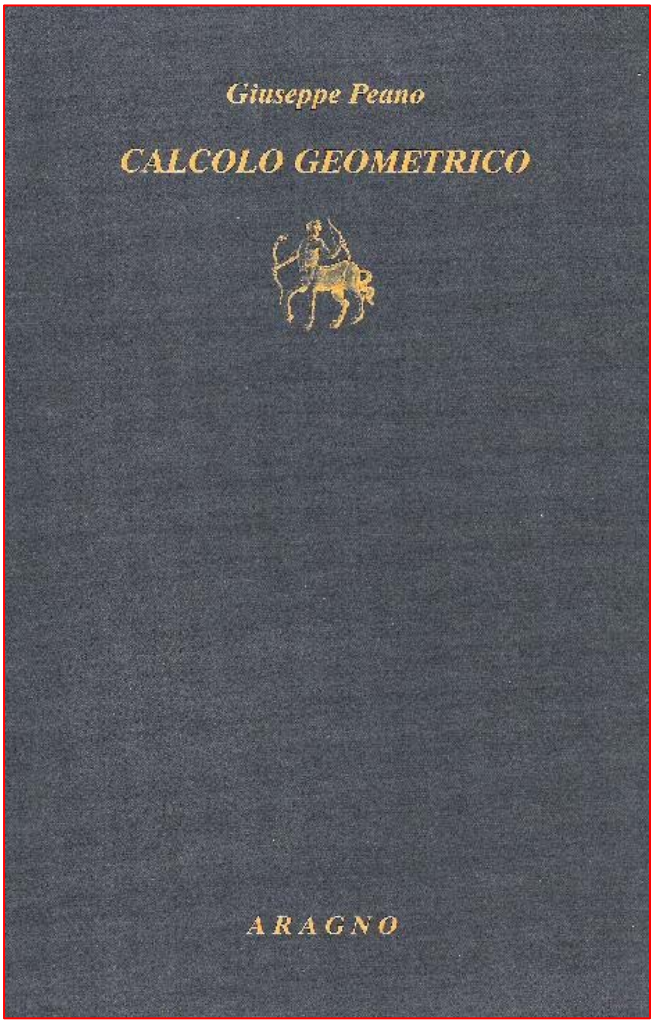
Pubblicato nel 1888, il testo di Peano non fu più edito per oltre un secolo. Anche successivamente, tranne qualche riproduzione parziale o di carattere prevalentemente storico nelle riproposizioni dell'Opera Omnia del matematico cuneese, non era possibile

[18] E conferenze! L'Istituto di Matematica ospita anche l'***Associazione Subalpina Mathesis***, e nella sua Aula "A", praticamente ogni giovedì dell'anno accademico, alle 17.00, si tengono le conferenze organizzate dall'Associazione. Tanto per citarne una a caso, ed esclusivamente a titolo di esempio, il prossimo 17 Febbraio ce ne sarà una dallo strano titolo "*Dalle Calende Greche al 30 Febbraio: il duro mestiere dei contatori di giorni*", tenuta da un paio di loschi figuri che si spacciano per redattori di una prestigiosa rivista di matematica ricreativa.

[19] RM67, Agosto 2004, "*Sineddochi*".

[20] A dirla tutta, probabilmente il nostro Giuseppe pensava che non solo per quella matematica, ma proprio per la conoscenza *tout court* fosse necessario stabilire delle coerenti e ferree regole di linguaggio: la parte finale della sua vita fu quasi interamente dedicata alla creazione di *Interlingua*, un linguaggio universale.

trovare un'edizione del Calcolo Geometrico. È stato necessario aspettare che la passione di Filippo Demonte-Barbera riuscisse a trasformare di nuovo in carta e inchiostro un testo davvero importante nella storia della matematica, non solo italiana.



Di Filippo Demonte-Barbera abbiamo già parlato in questa rubrica in occasione della presentazione della sua traduzione italiana di *Flatterlandia*[21], di Ian Stewart: ma è probabile che i lettori di RM lo riconoscano meglio col suo allonimo, ***Gavrilo***, con il quale ha spesso contribuito alle soluzioni dei problemi di RM e nel proporre affascinanti aneddoti della storia della matematica. Se a Filippo piace senza dubbio tutta la matematica, è però comunque indubbio che abbia una passione davvero smisurata per la geometria, specie per quella di inizio secolo, quando la scuola italiana era tra le prime del mondo. Il lavoro di ricostruzione e cura che ha posto nel portare alla luce quest'opera del suo concittadino (al pari di Peano, ha origini cuneesi, anche se ora frequenta altre lande del Piemonte) è stato veramente mirabile, ben lontano dal limitarsi ad una rilettura acritica.

Basti ricordare che ha contribuito alla risoluzione di una specie di "giallo storico-matematico": Lev Polak, chimico e storico della scienza, sostiene che il *Calcolo Geometrico* di Peano derivasse dagli *Elements of Vector Analysis* di Gibbs: come racconta nella prefazione del libro, Filippo si è dedicato ad una accurata disamina dell'epistolario delle parti in causa, dimostrando che non esiste prova alcuna di tale debito da parte di Peano nei confronti di Gibbs o, per suo tramite, di Hamilton[22].

Un gran lavoro, insomma: Filippo ha perfino messo al lavoro sua moglie Laura, che deve aver davvero fatto uso di tutto il suo amore e soprattutto di tutta la sua pazienza per seguire le bozze di una così astrusa – per lei non matematica – serie di simboli. Ma ci sentiamo di rassicurarla: ne è davvero valsa la pena.

---

[21] RM112, Maggio 2008.

[22] L'indagine ha dato origine ad un lavoro specifico di Filippo: F.Demonte-Barbera, "*Did Gibbs influence Peano's Calcolo Geometrico?*", pubblicato in H.J.Petsche, A.C.Lewis, J.Liesen, S.Russ (editors), "*Herman Grassman, From Past to Future: Grassman's Work in Contest*", Basilea, 2010. Sotto forma di conferenza, il contenuto è stato presentato alla *Grassmann Bicentennial Conference* di Postdam e Stettino. Per gli interessati, e speriamo siano molti, Filippo riproporrà la conferenza per la sezione eporediese della Associazione Subalpina Mathesis, (in italiano, stavolta) il prossimo 16 Febbraio, ad Ivrea, all'ITIS Olivetti, ore 15.30, con il titolo "*…ma Gibbs raggirò Peano? Un giallo nella storia del calcolo vettoriale*". Guarda caso, sempre per la ASM, ma per la sezione primaria di Torino, e proprio il giorno dopo, il 17 Febbraio, si terrà la conferenza di due loschi figuri che… ah no, no, l'abbiamo già detto un paio di note fa, vero?

Titolo	Calcolo Geometrico
Titolo Completo	*Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassman preceduto dalle Operazioni della Logica Deduttiva*
Autore	Giuseppe Peano
Editore	Aragno
Collana	Biblioteca Aragno
Curatore	Filippo Demonte-Barbera (*Gavrilo*)
Data di Pubblicazione	2010
Prezzo	12 Euro
ISBN	9788884194626
Pagine	188

5. Soluzioni e Note

Febbraio.

Mese corto per definizione, ogni anno segna l'inizio dei nostri festeggiamenti. Da qui fino a primavera siamo tutti presi a celebrare ed il Capo (si spera, la serie briberonica sta avendo fin troppo successo) risfodera i suoi problemi con i pasticcini e le torte.

11 *Tanti auguri a noi.*

Pensare che per gli antichi era mese che portava sfortuna, disgrazia e più si accorciava e meglio era... a noi questo mese da parecchi anni porta non solo fortuna, ma auguri, soddisfazioni e allegria. Speriamo bene.

Ma dicevo, un mese corto: certo gennaio lo è stato altrettanto, visto che siamo usciti con gran ritardo e in affanno, come ogni anno, quindi – se tutto va bene – questo febbraio della stagione di RM riuscirà ad essere più lungo del suo predecessore.

Che dirvi? Ah, le novità.

Cominciamo con il dirvi che il nostri nuovi webmaster si sono dati un gran daffare e hanno ristrutturato già gran parte del sito: non abbiamo ancora finito, però nuove parti appaiono ogni mese, quindi andate a fare qualche clic in giro e segnalateci tutto quello che vi piace e anche se trovate qualche errore, che così lo correggiamo. Sempre a proposito del sito, sul Bookshelf appaiono sempre nuovi documenti, dimostrazioni, congetture: andate a dare un'occhiata! Anche perché questo mese c'è il grande ritorno della saga di ***Martino***, con nuovi capitoli tutti da godere.

Poi (e se state leggendo la rivista in ordine forse l'avete già notato) RM comincia con questo Bungee Jumper e la sua Pagina 46 ad avere articoli *peer-reviewed*! Siamo talmente emozionati che non sappiamo che dire.

Ma prima di procedere, ci hanno scritto anche a proposito delle considerazioni di ***BraMo*** sul 2011; per esempio ***Luigi*** ci dice:

> La presente per ricordare che il 2011, oltre ad essere un numero primo, è la somma di 11 numeri primi consecutivi!
>
> 2011=157+163+167+173+179+181+191+193+197+199+211.

Bene, mancava, ora c'è.

Chiudo questo breve pezzo introduttivo ricordandovi che i miei due compari si esibiranno il 17 febbraio in una conferenza sui calendari, dal titolo bellissimo: "*Dalle Calende Greche al 30 Febbraio. Il duro mestiere dei contatori di giorni.*" La conferenza[23] è nell'ambito del ciclo dell'Associazione Subalpina Mathesis, e sarà a Torino, in via Carlo Alberto 8, Aula A, alle 17. Andateli a vedere, se potete, e scrivetemi come si sono comportati!

5.1 [144]

5.1.1 Qui si dorme...

Appena le polemiche si spengono, il Capo le rianima come può, accidenti. Ed io che sono qui a cercare di metter pace non ci riesco mai. Comunque vediamo il testo del problema, la mia prossima emicrania:

> *La lavagnetta, riesce a contenere ora agilmente i numeri da* 1 *a* 101. *Alberto, che gioca per primo, ne cancella* 9 *a sua scelta; indi, lo stesso compito tocca a Fred, e avanti in questo modo sin quando non restano che due numeri: a questo punto, si prende la differenza (positiva) d tra i due, e si vede cosa succede:*
>
> - *Se* $d > 54$ *, Alberto riceve* $d - 54$ *centesimi da Fred.*
> - *Se* $d = 54$ *, la partita è patta.*
> - *Se* $d < 54$ *, Fred riceve* $54 - d$ *centesimi da Alberto.*
>
> *Secondo voi, chi vince?*

E la seconda parte:

> *Ci sono solo i numeri da* 1 *a* 27*, ma ciascuno di loro a turno (qui comincia Fred) cancella un solo numero, sin quando ne restano solo due: Fred, che ha cominciato per primo, vince se la somma dei due numeri rimasti è divisibile per* 5*, mentre in caso contrario vince Alberto.*
>
> *Qui, chi dei due ha una buona strategia?*

Polemica? Vedremo. Per il momento vediamo la soluzione di ***Zar***, che è arrivata a stretto giro di posta dopo la distribuzione di RM:

> Allora, ci sono 101 numeri, se ne possono togliere 9 alla volta, Alberto è il primo a giocare e anche l'ultimo: può fare 6 mosse, mentre Fred ne fa solo 5 – e già da qui si dovrebbe capire come fa a finire.
>
> Come prima mossa, Alberto elimina i 9 numeri "centrali", cioè quelli da 47 a 55, lasciando così due gruppi di numeri, quelli da 1 a 46 e quelli da 56 a 101. Fred, con cinque mosse, può eliminare 45 numeri, e quindi non è in grado di cancellare completamente uno dei due gruppi: alla fine rimarrà almeno un elemento per gruppo.
>
> I numeri da 1 a 46 possono essere accoppiati a quelli da 56 a 101 in modo tale che Alberto riesca sempre a vincere: anche se Fred gioca la sua migliore strategia, può però eliminare solo un numero dispari di numeri alla volta, e quindi Alberto è sempre in grado di finire la partita arrivando ad avere una delle coppie 1-56, 2-57,..., 46-101.
>
> Quindi Alberto vince sempre (almeno) un centesimo.

Un paio di giorni più tardi è arrivata la seconda parte, sempre di ***Zar***:

[23] Come sarebbe a dire, vi sembra di averlo già sentito? No, non è possibile…

Abbiamo 27 numeri, se ne eliminano uno alla volta, alternativamente, fino a che non ne rimangono 2, quindi ci sono 25 mosse: Fred comincia e Fred finisce – lui ha a disposizione 13 mosse, mentre Alberto ne ha solo 12.

Fred vince se rimangono due numeri la cui somma è multiplo di cinque.

Possiamo dividere i numeri da 1 a 27 in cinque categorie, in base al resto della divisione per cinque (i Veri Matematici le chiamano classi di resto modulo 5, volendo fare i pignolini). Eccole qua:

[1] = {1, 6, 11, 16, 21, 26}

[4] = {4, 9, 14, 19, 24}

[2] = {2, 7, 12, 17, 22, 27}

[3] = {3, 8, 13, 18, 23}

[5] = {5, 10, 15, 20, 25}

Fred otterrà la vittoria se rimarranno soltanto 2 numeri appartenenti rispettivamente alla classe [1] e alla classe [4], oppure alla classe [2] e alla classe [3], oppure due numeri della classe [5].

Alberto dovrebbe riuscire ad eliminare almeno 14 numeri (tutti quelli della classe [4], quelli della [3] e quelli della [5] tranne 1): non ce la può fare da solo. Fred deve fare attenzione a non aiutarlo nell'opera. Può quindi cominciare ad eliminare uno dei numeri della classe [1] oppure della [2] (sono quelle con più elementi), e osservare quello che fa Alberto: ogni volta che Alberto elimina un numero di una classe, Fred può eliminare uno dei numeri della classe gemella. Se la classe gemella è vuota, Fred può eliminare uno dei numeri della classe con più elementi, o della classe [5].

E così vince Fred, questa volta.

Simile spiegazione è arrivata da ***Alberto R.***:

Disponiamo i 27 numeri nella tabella che segue dove i numeri della stessa colonna hanno lo stesso resto modulo 5.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27			

Chi gioca per secondo ha la seguente strategia vincente:

- Non pescare dalla 1^ colonna se la 4^ è vuota, né dalla 4^ se la 1^ è vuota
- Non pescare dalla 2^ colonna se la 3^ è vuota, né dalla 3^ se la 2^ è vuota
- Non pescare dalla 5^ colonna se vi è rimasto un sol numero
- Se più mosse sono compatibili con le regole precedenti va bene una qualunque di esse
- Se le prime tre regole vieterebbero qualunque presa ignorale e scegli a caso, ormai hai vinto comunque!

Il metodo funziona perché lo svuotamento della 1^ colonna rende inutilizzabile qualunque numero della 4^ e viceversa. Situazione analoga per la coppia 2^ / 3^ colonna. Infine un numero della 5^ colonna è utile solo se può essere sommato con un altro della stessa colonna.

In altre parole la strategia del secondo giocatore può essere così sintetizzata: "Non sciupare la mossa prendendo un numero che, data la situazione, è, per il tuo avversario, ormai inutilizzabile".

Dovrebbe essere andata, sappiamo chi vince e come. Un grazie anche a ***Cid***, che al solito non ci ha fatto mancare la sua soluzione, e a ***Edo***, che ci scrive per la prima volta:

> A ha una strategia vincente: almeno 1 centesimo lo vince sempre. F ha una strategia per pagargli soltanto 1 centesimo, ma se A gioca bene, F non può pareggiare, né vincere.
>
> La strategia di A è questa: scavare un "buco" centrale nell'insieme di numeri, creando due "muri di numeri" a delimitare il buco, che "eroderà", ad ogni suo turno, di (almeno[24]) nove numeri.
>
> A ha evidentemente 6 turni per "scavare il buco centrale", e andando di 9 in 9 eliminerà 54 numeri contigui, quindi, anche ammettendo che F giochi bene, e non contribuisca ad allargare il buco, A creerà una voragine di 54 numeri, con una differenza agli estremi di 55, vincendo così un centesimo.
>
> F, dal canto suo, non può evitare che A scavi un buco, ma può cercare di "buttargli giù un muro"! In questo modo, mancando i mattoni (i numeri) da un lato del buco largo 54, la differenza finale sarà fatta tra numeri appartenenti allo stesso muro (dallo stesso lato rispetto al buco), ed è facile dimostrare che la loro differenza sarà al massimo di 45, dando la vittoria a F.
>
> A può però costruire il suo buco in modo tale che, per quanto F si sforzi, non riuscirà a buttargli giù nessun muro. A fa così:
>
> #1 (primo turno di A) A elimina [47,48,49,50,51,52,53,54,55]. I muri sono quindi: [1--------murodisinistra-------46] buco [56-------murodidestra--------101] ossia piazza il buco esattamente in centro: i due muri hanno ugual spessore (46). Si può notare come, avendo F solo 5 turni, per quanto si accanisca contro un muro (es: quello di sinistra), non lo butterà mai giù tutto da solo: un mattone resterà in piedi. A dovrà solo evitare di allargare il buco da quella parte. Come può A evitare di contribuire all'abbattimento del muro? in questo modo: erodendo i muri in modo da mantenerli, alla fine di ogni suo turno, di uguale spessore; mi spiego meglio:
>
> #2 (primo turno di F) F elimina 9 numeri di cui 3 appartenenti al muro di sinistra e 6 appartenenti al muro di destra -->il muro di sinistra sarà spesso 43, quello di destra 40
>
> #3(secondo turno di A) A elimina 9 numeri "erodendo" il lato sinistro del buco di 6 e il lato destro di 3, cosicché i due estremi del buco siano 40 e 59. In tal modo il buco si è allargato di nove, e i due muri sono tornati spessi uguali: 37 numeri ciascuno.
>
> In generale, se F in una sua mossa elimina x numeri del muro di sinistra e $y = 9 - x$ numeri del muro di destra, A nella sua mossa successiva eroderà di x numeri il lato destro del buco e di y numeri il lato sinistro del buco, mantenendo uguali gli spessori.
>
> E' facile vedere a questo punto che i muri avranno – entrambi – dopo ogni mossa di A spessore 46, poi 37, poi 28, poi 19, poi 10 e infine 1, rimanendo quindi in piedi fino alla fine.
>
> Il fatto che F contribuisca o meno all'allargamento del buco non ha effetti sullo spessore dei muri, ma ha effetto sulla larghezza del buco (e quindi sull'entità della vincita finale di A). Si può vedere come, per non avvantaggiare A, F possa cercare di buttare giù i muri "erodendoli dall'esterno": se F ad ogni turno toglierà 9 numeri "esterni" dei 2 muri (per esempio, se dopo la prima mossa di A F toglie 1,2,3,96,97,98,99,100,101), la partita finirà con una differenza di 55, e F limiterà i danni al massimo, dando ad A 1 centesimo.

[24] Dico "almeno" perché F, giocando male, potrebbe contribuire ad eroderli maggiormente, aiutando A ad allargare il buco centrale

Benvenuto ***Edo***! Andiamo avanti, ma non senza ringraziare anche ***Fabrizio B.***[25] e ***Franco57*** per le loro soluzioni.

5.1.2 Dottorato in Briberonica

No, nessun commento al filone scelto dal Capo per questi problemi. Vi passo il testo senza por tempo in mezzo:

> *Vengono nominati otto ispettori per la riscossione della "Tassa sulla Tosse" e dell'"Imposta sulle Imposte" di cui non ci fidiamo troppo e li mandiamo in giro a coppie, anche perché abbiamo la certezza che nel gruppo di otto ce ne siano tre corrotti. Sappiamo il loro numero ma non sappiamo chi siano, mentre i tre "freghifraghi" si conoscono tra di loro.*
>
> *Alcuni Onesti e Probi Cittadini appartengono al gruppo delle persone che devono essere controllate dagli Sceriffi, e l'idea del Capo è che gli OPC offrano agli ispettori una tangente e poi riferiscano a lui sull'accettazione o meno dell'offerta da parte degli ispettori. Questi rispondono ai nomi di Aldo, Bea, Carlo, Davide, Enrica, Francesco, Graziella e Hans: l'idea è di mandarli in giro a coppie, ad esempio Aldo e Bea dal primo parente, Aldo e Carlo dal secondo, Bea e Carlo dal terzo, e così via.*
>
> *Quanti parenti deve mobilitare, per essere sicuro che ogni parente riceva la visita di una coppia distinta di ispettori, se non potete mandare più coppie dallo stesso parente?*
>
> *La seconda domanda è la seguente: noi sappiamo che i corruttibili sono almeno tre, quanti parenti vi servono, per trovarli?*

Credevate fosse finita qui? No:

> *Gli indagati decidono di applicare una strategia cautelativa: decidono che accetteranno il "contributo ufficioso" non solo se sono in coppia con un altro controllore dalla morale elastica, ma lo faranno solo se nessuno dei due nella visita al Cittadino precedente ha ricevuto un "aiutino" (che fossero assieme o no); in questo caso, quanti parenti compiacenti servono al Capo?*

Non c'è stato tempo, l'unico che ha potuto risolvere questi quesiti nella ventina di giorni a disposizione è stato ***Cid***, con la sua usuale pazienza e tenacia. Ecco cosa ci scrive:

> Per la prima domanda basta eseguire la seguente operazione: $\frac{8!}{2!\cdot(8-2)!}=\frac{40320}{2\cdot 720}=\frac{40320}{1440}=28$.
>
> Per la seconda domanda, basta considerare l'insieme degli 8 ispettori costituito da due gruppi di 4 ispettori (ad esempio: un gruppo sarà formato da Aldo, Bea, Carlo e Davide e l'altro gruppo da: Enrica, Francesco, Graziella e Hans)
>
> Per prima cosa conviene analizzare tutte le possibili combinazioni all'interno di uno dei due gruppi, che risultano essere uguali a: $\frac{4!}{2!\cdot(4-2)!}=\frac{24}{2\cdot 2}=\frac{24}{4}=6$.
>
> Se viene fuori una coppia di corruttibili, utilizziamo uno dei due elementi della coppia e lo mettiamo in coppia ai 4 elementi dell'altro gruppo in modo da individuare i corruttibili presenti nel gruppo restante. In totale, in questo caso, servono $(6+4)=10$ onesti e probi cittadini.
>
> Nel caso peggiore, nel primo gruppo è presente un solo corruttibile e quindi le combinazioni di tutti gli elementi del primo gruppo non mi permettono di

[25] Sì, aggiungiamo una B. perché il mese scorso c'era un altro Fabrizio, M., tra i nominati...

individuare una coppia di corruttibili. In tal caso, però, so che nel secondo gruppo devono esserci almeno 2 corruttibili; in quanto nel totale dei due gruppi ne devono venire fuori almeno 3.

A questo punto, con gli elementi del secondo gruppo formo due coppie distinte; se in questo gruppo vi fossero almeno tre corruttibili, con altri due onesti e probi cittadini individuo almeno una coppia di corruttibili, e successivamente utilizzando uno dei due elementi della coppia e mettendolo in coppia ai 6 ispettori restanti riesco ad individuare quali siano gli altri corruttibili. In totale, in questo caso, servono $(6+2+6)=14$ onesti e probi cittadini.

Se invece nel secondo gruppo fossero solo due i corruttibili (e quindi il terzo si trovasse nel primo gruppo), risulterebbe possibile che queste prime due ispezioni nel secondo gruppo non permettano di trovare una coppia di corruttibili; conviene quindi dopo le prime due combinazioni realizzare altre tre delle sei possibili combinazioni, se trovo una coppia di corruttibili mando un corruttibile a fare ispezioni in coppia con tre tra gli elementi del primo gruppo e di conseguenza o trovo il corruttibile del primo gruppo in una di queste tre ispezioni o non lo trovo e quindi si tratta dell'elemento del primo gruppo che non ha partecipato a una delle ultime tre ispezioni. In totale, in questo caso, servono $(6+5+3)=14$ onesti e probi cittadini.

Infine, se non trovo una coppia di corruttibili su cinque combinazioni del secondo gruppo significa che la combinazione mancante è quella che fornisce una coppia di corruttibili, quindi mandando un elemento della combinazione mancante a fare ispezioni in coppia a tre tra gli elementi del primo gruppo o trovo il corruttibile del primo gruppo in una di queste tre ispezioni o non lo trovo e quindi si tratta dell'elemento del primo gruppo che non ha partecipato a una delle ultime tre ispezioni. In totale, in questo caso, servono $(6+5+3)=14$ onesti e probi cittadini.

Da ciò si verifica che in qualsiasi situazione bastano 14 onesti e probi cittadini per individuare chi sono i corruttibili tra gli 8 ispettori.

Per la terza domanda, faccio notare che se si dovesse trovare un corruttibile durante le sei possibili combinazioni del primo gruppo di quattro elementi, avremmo due corruttibili e sei sospetti.

Chiamando C1 e C2 i due corruttibili e S1, S2, S3, S4, S5 e S6 i sei sospetti, possiamo dopo le prime sei combinazioni formare le seguenti coppie:

C1, C2 (i due corruttibili non chiedono l'aiutino perché l'hanno appena chiesto)

C1, S1

C2, S2

Segue (C1, C2) solo nel caso in cui una delle due coppie precedenti ha chiesto un "aiutino", e in questo caso la coppia C1, C2 non chiede l'aiutino perché uno dei due lo ha appena chiesto.

C1, S3

C2, S4

Segue (C1, C2) solo nel caso in cui una delle due coppie precedenti ha chiesto un "aiutino", e in questo caso la coppia C1, C2 non chiede l'aiutino perché uno dei due lo ha appena chiesto.

C1, S5

C1, S6

In totale sono, al massimo, $(6+1+2+1+2+1+2)=15$. Quindi servono non più di 15 onesti e probi cittadini se ci sono almeno 2 corruttibili nel 1° gruppo.

Se il primo gruppo contiene al massimo un corruttibile, con gli elementi del secondo gruppo formo due coppie distinte:

A) Se sono entrambe coppie di corruttibili, invio nuovamente una delle due coppie che così stavolta non chiederà "aiutini", poi invio un elemento di questa ultima coppia in coppia con i quattro elementi del primo gruppo in modo di individuare quello corruttibile. In totale, in questo caso, servono $(6+2+1+4)=13$ onesti e probi cittadini.

B) Se una delle due coppie è di corruttibili, invio nuovamente questa coppia che così stavolta non chiederà "aiutini", poi invio un elemento di questa coppia in coppia con i restanti due elementi del secondo gruppo in modo da individuare se c'è un corruttibile e l'altro elemento in coppia con i quattro elementi del primo gruppo in modo di individuare quello corruttibile. In totale, in questo caso, servono $(6+2+1+2+4)=15$ onesti e probi cittadini.

C) Se nessuna delle due coppie è di corruttibili, significa che nel secondo gruppo vi sono esattamente due corruttibili e nel primo gruppo c'è un corruttibile. Formo ora altre combinazioni (al massimo 3) con gli elementi del secondo gruppo per cercare un corruttibile, se lo trovo ripeto la combinazione della coppia (che così stavolta non chiederà "aiutini") e poi invio uno dei corruttibili a tre elementi del primo gruppo. Se non trovo il corruttibile del primo gruppo in una di queste tre ispezioni significa che è l'elemento del primo gruppo che non ha partecipato a una delle ultime tre ispezioni. In totale, in questo caso, servono $(6+5+1+3)=15$ onesti e probi cittadini.

Se infine non trovo una coppia di corruttibili su cinque combinazioni del secondo gruppo significa che la combinazione mancante è quella che fornisce una coppia di corruttibili, quindi mandando un elemento della combinazione mancante a fare ispezioni in coppia con tre tra gli elementi del primo gruppo o trovo il corruttibile del primo gruppo in una di queste tre ispezioni o non lo trovo e quindi si tratta dell'elemento del primo gruppo che non ha partecipato a una delle ultime tre ispezioni. In totale, in questo caso, servono $(6+5+3)=14$ onesti e probi cittadini

Da ciò si verifica che in qualsiasi situazione bastano al massimo 15 onesti e probi cittadini per individuare chi sono i corruttibili tra gli 8 ispettori.

E con questo è veramente tutto. Godetevi il mese (veramente) più corto dell'anno e scriveteci ancora, che delle vostre mail non ci stanchiamo mai.

6. Quick & Dirty

A Rudy hanno rifilato una rogna di statistica e, ripassando alcuni vecchi concetti, ha ritrovato un grazioso problemino su tre cose facili da confondere di cui, se non vi ricordate le definizioni, ve le andate a ripassare: non le daremo neanche in soluzione.

Questa volta, vorremmo trovaste cinque numeri per cui la ***mediana*** sia maggiore della ***moda*** che sia, a sua volta, maggiore della ***media***.

7. Pagina 46

Prima parte

Il primo membro può essere riscritto come:

$$\sum_{0\le i\le n}\prod_{\substack{0\le j\le n\\ j\ne i}}\frac{x_j}{x_j-x_i}.$$

È noto che presi $n+1$ punti $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$ con gli x_i tutti diversi, esiste un unico polinomio di grado $\le n$ che passi per tutti quanti e questo polinomio è il polinomio di Lagrange:

$$P(x)=\sum_{0\le i\le n} y_i\prod_{\substack{0\le j\le n\\ j\ne i}}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}.$$

Infatti per costruzione $P(x)$ ha grado $g\le n$ e si verifica immediatamente che $\forall i(0\le i\le n),\quad P(x_i)=y_i$.

Ora, scegliendo $y_i=1\quad \forall i(0\le i\le n)$ si ha che il polinomio costante $P(x)=1$ è il polinomio di Lagrange. Perciò deve essere $P(0)=1$, che diventa:

$$\sum_{0\le i\le n}\prod_{\substack{0\le j\le n\\ j\ne i}}\frac{-x_j}{x_i-x_j}=\sum_{0\le i\le n}\prod_{\substack{0\le j\le n\\ j\ne i}}\frac{x_j}{x_j-x_i}=1,$$

che è la tesi.

Seconda parte

Caso $k=n$

Se $0\notin A$, con $A=\left\{\frac{1}{x_i}:0\le i\le n\right\}$, dalla prima parte di questo problema abbiamo:

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^{n}\frac{1}{1-\frac{\frac{1}{x_i}}{\frac{1}{x_j}}}\right)=\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^{n}\frac{x_i}{x_i-x_j}\right)=\sum_{i=0}^{n}x_i^n\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\ne n}}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}\right)=1.$$

Se, invece, $0\in A$, è possibile ricondursi al caso precedente in quanto se viene rimosso dall'insieme il termine:

$$\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^{n}\frac{x_i}{x_i-x_j},$$

l'espressione data non cambia valore: infatti, basta notare che se $x_k = 0$, si hanno due casi:

1. $\forall j \neq k,\ \dfrac{x_k}{x_k - x_j} = 0$, e quindi il *k*-esimo termine può essere ignorato nella sommatoria;
2. $\forall i \neq k,\ \dfrac{x_i}{x_i - x_k} = 1$, e quindi il *k*-esimo termine può essere ignorato anche nella produttoria.

Il che dimostra il caso.

Caso $k < n$:

Sia $P_k(x_i)_{0 \le i \le n}$ la funzione definita dal primo membro della tesi; definiamo

$$Q_k(x) = P_k(x_i - x)_{0 \le i \le n} - P_k(x_i)_{0 \le i \le n};$$

la funzione $P_k(x_i - x)_{0 \le i \le n}$ risulta in questo caso ben definita poiché i numeri della sequenza $(x_i - x)_{0 \le i \le n}$ sono diversi tra loro.

Essendo $\forall y_i,\ P_n(y_i)_{0 \le i \le n} = 1$, si ha che $Q_n(x) = 0$; svolgendo algebricamente il prodotto, si trovano i coefficienti del polinomio:

$$\begin{aligned}
Q_n(x) &= \sum_{0 \le i \le n} (x_i - x)^n \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \neq i}} \frac{1}{(x_i - x) - (x_j - x)} - \sum_{0 \le i \le n} x_i^{\,n} \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \neq i}} \frac{1}{x_i - x_j} \\
&= \sum_{0 \le i \le n} \left((x_i - x)^n - x_i^{\,n} \right) \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \neq i}} \frac{1}{x_i - x_j} \\
&= \sum_{0 \le i \le n} \left(\sum_{0 \le k < n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^{n-k} x_i^{\,k} \right) \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \neq i}} \frac{1}{x_i - x_j} \\
&= \sum_{0 \le k < n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^{n-k} \sum_{0 \le i \le n} x_i^{\,k} \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \neq i}} \frac{1}{x_i - x_j} \\
&= \sum_{0 \le k < n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \cdot P_k(x_i)_{0 \le i \le n} \cdot x^{n-k}.
\end{aligned}$$

Essendo il polinomio sempre nullo, lo devono essere anche tutti i suoi coefficienti; quindi, poiché $(-1)^{n-k} \binom{n}{k} \neq 0$, deve essere

$$P_k(x_i)_{0 \le i \le n} = 0 \quad \forall k (0 \le k < n),$$

che è la tesi.

Caso $k = n + 1$:

Dimostriamo questo caso per induzione su *n*:

Per $n = 1$ la produttoria non ha argomenti, quindi è $P_1(x_0) = \dfrac{x_0}{1} = x_0$.

Per $n=2$, $P_2(x_0,x_1)=\dfrac{x_0^{\ 2}}{x_0-x_1}+\dfrac{x_1^{\ 2}}{x_1-x_0}=\dfrac{x_0^{\ 2}-x_1^{\ 2}}{x_0-x_1}=x_0+x_1$.

Analogamente,

$$\begin{aligned}Q_{n+1}(x) &= P_{n+1}(x_i-x)_{0\le i\le n}-P_{n+1}(x_i)_{0\le i\le n}\\ &= \sum_{0\le k<n+1}(-1)^{n+1-k}\binom{n+1}{k}\cdot P_k(x_i)_{0\le i\le n}\cdot x^{n+1-k}\end{aligned}$$

Nell'intervallo $0\le k\le n$, l'unico $P_k(x_i)_{0\le i\le n}$ non nullo è $P_n(x_i)_{0\le i\le n}=1$, quindi abbiamo:

$$Q_{n+1}(x)=(-1)^{n+1-n}\binom{n+1}{n}\cdot 1\cdot x^{n+1-n}=-(n+1)x,$$

e, in particolare, $Q_{n+1}(x_n)=-(n+1)x_n$.

Inoltre,

$$\begin{aligned}P_{n+1}(x_i-x_n)_{0\le i\le n} &= \sum_{0\le i\le n}(x_i-x_n)^{n+1}\prod_{\substack{0\le j\le n\\ j\ne i}}\frac{1}{x_i-x_j}\\ &= \sum_{0\le i\le n-1}(x_i-x_n)^{n+1}\prod_{\substack{0\le j\le n\\ j\ne i}}\frac{1}{x_i-x_j}\\ &= \sum_{0\le i\le n-1}(x_i-x_n)^{n+1}\left(\prod_{\substack{0\le j\le n-1\\ j\ne i}}\frac{1}{x_i-x_j}\right)\frac{1}{x_i-x_n}\\ &= \sum_{0\le i\le n-1}(x_i-x_n)^{n}\prod_{\substack{0\le j\le n-1\\ j\ne i}}\frac{1}{x_i-x_j}\\ &= P_n(x_i-x_n)_{0\le i\le n-1},\end{aligned}$$

ma per l'ipotesi induttiva questo vale $(x_0-x_n)+(x_1-x_n)+\cdots+(x_{n-1}-x_n)$.

Dai due modi di calcolare $Q_{n+1}(x_n)$ ricaviamo:

$$-(n+1)x_n=(x_0-x_n)+(x_1-x_n)+\cdots+(x_{n-1}-x_n)-P_{n+1}(x_i)_{0\le i\le n},$$

da cui $P_{n+1}(x_i)_{0\le i\le n}=x_0+x_1+\cdots+x_n$, che è la tesi.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Castelli di sabbia

C'è chi ha messo dei sacchi di sabbia
Vicino alla finestra
Lucio DALLA, "L'anno che verrà".

Ragazzi, adesso mi dite cosa devo fare di voi.

Vi trovo un problema incasinatissimo e non solo voi me lo risolvete *en souplesse*, ma il mese successivo compaiono, su riviste *peer reviewed*, tre articoli per un totale di sessanta pagine (sei delle quali di bibliografia[26]) su quell'argomento, assurto a Nuovo Ramo della Matematica. Se andiamo avanti di questo passo, come problema vi ritrovate la scritta "Zeta di Riemann", condita con tre pupazzetti, due Validi Assistenti e la richiesta di muoversi che non vorremmo pubblicare in ritardo.

Mah. Comunque, per prima cosa ristatuiamo il problema[27] (in forma standard).

> Sulla semiretta dei naturali (zero incluso), in corrispondenza di ogni numero abbiamo una cella di memoria contenente, all'inizio, il valore 0. Nell'origine viene depositato un automa che esegue le seguenti operazioni:
>
> 1. Cambia lo stato della cella.
> 2. Se la cella ha il valore 1, si sposta di un passo verso i valori crescenti; se la cella ha il valore 0, si sposta di due passi verso i valori decrescenti.
>
> Nei punti (-1) e (-2) sono posizionati due punti di raccolta in cui gli automi si arrestano: all'arresto di un automa, ne viene attivato un altro nell'origine.
>
> Si chiede se esistano configurazioni raggiungibili tali che un automa cicli all'infinito in un intervallo e, posto che tutti gli automi terminino nei punti di raccolta, a cosa tenda il rapporto tra i numeri degli automi nei due punti di raccolta.

Allora, cominciamo con un esempio leggermente diverso ma probabilmente più semplice.

Vogliamo parlare dell'***ufficio pazzo*** (altrimenti noto come "la gioia di Brunetta"): abbiamo un lungo tavolo rettangolare, e da una parte del tavolo abbiamo N impiegati che sonnecchiano, con davanti un dossier (giusto per darsi un tono). Ad un certo punto, entra il capufficio e deposita un certo numero di dossier davanti ad alcuni dei nostri impiegati: questi sollevano leggermente un sopracciglio, verificano quanti dossier hanno davanti e, se questo numero è maggiore di due, *impazziscono!* Velocemente, rifilano un dossier al vicino di sinistra e uno a quello di destra: l'impiegato 1 e l'impiegato N, non avendo uno dei vicini, si limitano a rifilarne uno all'unico vicino che hanno e a buttare l'altro fuori dalla provvidenziale finestra.

Vediamo come fare i calcoli, o meglio definiamo un po' di simboli.

Una ***configurazione stabile*** è una mappa

$$\eta : V = \{1, \ldots, N\} \rightarrow \{1,2\}.$$

L'insieme di tutte le configurazioni stabili viene di solito indicato con Ω. Si indica invece con H l'insieme di *tutte* le possibili configurazioni:

[26] No, noi non siamo citati. Emmenomale...

[27] Per chi vuole l'originale: "IMHO, hanno ragione ad arrabbiarsi", RM140, P1: quello dei canguri paracadutisti.

$$\eta : V = \{1,\dots,N\} \to \{1,2,\dots\}.$$

A noi, questo fatto che bastano solo tre puntini per rendere una configurazione instabile ha sempre affascinato.

Tornando alle notazioni, si indica con $S(\eta)$ il risultato *stabile* di η, il che ci permette, ad un livello superiore, di definire una mappa $S : H \to \Omega$, a parte un piccolo dubbio: siamo sicuri che sia *ben definita*? Ossia, ci sono delle differenze se, quando due impiegati impazziscono, rinsaviscono contemporaneamente o secondo un qualche ordine che dobbiamo definire? Fortunatamente, la risposta è sì: la configurazione finale è sempre la stessa. Non vi diamo la dimostrazione, ma non è particolarmente complicata (solo lunga).

Se vogliamo fare i pignoli, la configurazione al momento *n* del processo di stabilizzazione è data da:

$$\eta_n = S\left(\eta_0 + \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}\right),$$

dove X_i rappresenta i punti dove il Capo aggiunge un fascicolo da trattare, mentre *S* rappresenta la stabilizzazione: notate che, in funzione del fatto che possono "impazzire secondo qualsiasi ordine", possiamo far aggiungere al capo anche solo un faldone per volta, il che semplifica i calcoli.

Questo definisce una *Catena di Markov* su Ω: alcune catene, poi, hanno l'interessante caratteristica di non essere ripetibili, come ad esempio la catena 211 (tre impiegati con due, uno e un fascicolo): si verifica che ovunque voi aggiungiate cose, magari otterrete degli altri valori 1, ma questi non saranno mai vicini.

Le sfilze di impiegati con un solo valore 1 sono decisamente interessanti, e di solito vengono indicate con *R*: una delle caratteristiche distintive è che *qualsiasi elemento di R*, con le opportune azioni del Capo, *può essere raggiunto da qualsiasi altro elemento di R*.

Per vedere un'altra caratteristica interessante di *R*, consideriamo un caso molto semplice: solo due impiegati. Definiamo un'operazione $\oplus$ su *R* tale che:

$$\forall \eta, \zeta \in R, \eta \oplus \zeta = S(\eta + \zeta).$$

Ossia, avete una configurazione stabile, arriva il capo, vi somma un'altra configurazione stabile rifilando le opportune pratiche e si comincia a impazzire.

Non è difficile calcolare la tavola di operazione, anche se è un po' lunghetto: quindi, lo facciamo noi. La trovate qui di fianco.

$\oplus$	**21**	**12**	**22**
21	12	22	21
12	22	21	12
22	21	12	22

12 *Due matti*

Per capire come funziona, vediamo una casella: abbiamo scelto quella che ci sembra la più complicata, per capire cosa succede: vogliamo verificare cosa viene fuori per $21 \oplus 21$, ossia quando abbiamo due impiegati con due e una pratica davanti, arriva il capo e rifila due pratiche al primo e una pratica al secondo: tanto per cominciare, vediamo quante pratiche ha davanti ciascuno di loro:

$$21 + 21 = 42$$

Il primo impiegato impazzisce! Butta una pratica dalla finestra e ne passa una al suo vicino:

$$42 \to 23.$$

Il secondo impiegato impazzisce! Butta una pratica dalla finestra e ne passa una al suo vicino:

$$23 \to 31.$$

Il primo impiegato impazzisce! Butta una pratica dalla finestra e ne passa una al suo vicino:

$$31 \to 12.$$

Che è soluzione stabile: stanchi ma felici dopo l'improba fatica, i nostri due impiegati si riaddormentano, e noi possiamo affermare che

$$21 \oplus 21 = 12.$$

E le altre celle si calcolano nello stesso modo.

Adesso, se avete fatto attenzione, dovreste accorgervi di tre cose:

1. Esiste una configurazione, "22", che aggiunta a qualsiasi stato riporta nello stato iniziale.
2. Se prendete due configurazioni qualsiasi *a* e *b*, $a \oplus b = b \oplus a$.
3. In ogni riga (o colonna) compare un e un solo "22".

Insomma, questo nostro aggeggio è un ***gruppo abeliano***. E scusate se è poco!

Trattiamo adesso la cosa in un modo più generale, ma prima qualche nota. Chi ha costruito questi aggeggi, ha inventato un mucchio di bellissimi nomi (in inglese) per i vari oggetti che compaiono, ma noi non solo non abbiamo trovato gli equivalenti italiani, ma non siamo riusciti ad inventarcene di altrettanto graziosi: se riuscite a trovarli voi, nella vostra testa o in qualche articolo, segnalateceli (nel secondo caso, segnalateci anche l'articolo: abbiamo un paio di dubbi per i quali la spiegazione italiana potrebbe aiutare).

Prima, un po' di ripasso, comunque.

> In un ***grafo orientato finito*** $G = (V, E)$, un ***arco orientato*** $e \in E$ punta dal vertice $c(e)$ (la *coda*) al vertice $t(e)$ (la *testa*); sono ammessi *anelli*, per cui $c(e) = t(e)$, e *archi multipli*, per cui $c(e) = c(e') \wedge t(e) = t(e')$; il numero degli archi uscenti da un vertice è detto *grado di uscita* (e si indica con d_i), mentre il numero degli archi entranti è detto *grado di entrata*.
>
> Si definisce ***pozzo*** un vertice avente grado di uscita pari a zero, e il pozzo si dice ***globale*** se è raggiungibile attraverso una serie di archi da qualsiasi altro vertice di ***G*** (e se esiste un pozzo globale, questo è unico).
>
> Se ***G*** ha lo stesso numero di archi tra *v* e *w* di quanti ne ha tra *w* e *w* $\forall v, w \in G, v \neq w$, allora il nostro grafo è *biorientato* (o *bidirezionale*).
>
> Approfittiamo del ripasso per parlare di uno dei concetti che ci sono più simpatici nella teoria dei grafi[28]. Si definisce ***matrice di adiacenza*** *A* di *G* la matrice $n \times n$ tale che il suo elemento a_{ij} sia il numero degli archi che conducono dal vertice ***i*** al vertice ***j***.

Finito il ripasso (nel senso che queste cose avreste dovuto saperle), andiamo avanti.

Si definisce ***Laplaciano*** di un grafo orientato la matrice $\Delta = D - A$, dove *D* è una matrice diagonale per la quale $d_{ii} = d_i$ (notazione fetente, va bene: sono i gradi di uscita di ogni nodo), ossia è

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{se } i \neq j, \\ d_i - a_{ii} & \text{se } i = j. \end{cases}$$

[28] Il motivo nasce dall'inettitudine di Rudy nel disegno: con questo, *non vi serve* disegnare il grafo.

Notate che nel Laplaciano la somma di ogni riga vale zero e che se un vertice è un pozzo tutta la sua riga è composta di zeri.

Adesso cominciamo con l'anglo-italiano.

Una ***configurazione di gettoni*** (*chip configuration*) σ, detta anche ***sandpile***[29] su *G* è un vettore di interi non negativi indicizzato dai vertici di *G* che non sono un pozzo; una configurazione è detta ***stabile*** se per ogni vertice $v \in G$ che non sia un pozzo, si ha $\sigma(v) < d_v$; in caso contrario (sempre se non è un pozzo) il vertice viene detto ***attivo***.

Un vertice attivo può ***espellere gettoni*** (*[...] can fire chips[...]*: spiacenti, ma non troviamo di meglio), arrivando ad una nuova configurazione di gettoni, rilasciando un gettone per ognuno degli archi uscenti; formalmente,

$$\sigma'(w) = \sigma(w) + a_{vw} \forall w \neq v, \quad \sigma'(v) = \sigma(v) - d_v + a_{vv}.$$

La configurazione σ' ottenuta è nota come ***successore*** di σ.

Abbiamo messo un mucchio di carne al fuoco, meglio se ci fermiamo un attimo con un esempio:

> Prendiamo il grafo orientato completo di tre vertici (senza archi chiusi su sé stessi, ma con tutti gli archi bidirezionali); tre gettoni in un vertice si stabilizzano in un passaggio, ma quattro gettoni in un vertice non raggiungono mai una configurazione stabile.

Dovreste aver ormai visto la similitudine con l'ufficio pazzo: più formalmente, qui possiamo dire che *se un grafo orientato ha un pozzo globale, allora qualsiasi configurazione di partenza diventerà stabile*.

Adesso, dovremmo parlare dell'***operatore di addizione di gettone*** (*chip addition operator*), che aggiunge un gettone in una data posizione: in simboli,

$$E_v \sigma = S(\sigma + 1_v).$$

(dove 1_v è la configurazione con un singolo gettone in *v*) e poi dimostrare che commuta: lo diamo per scontato, avendone visto prima un esempio semplice.

Consideriamo ora un grafo orientato *G* con *n* vertici e un pozzo globale *s*: definiamo ***Laplaciano ridotto*** di *G* la matrice Δ' ottenuta cancellando da Δ la riga e la colonna corrispondenti a *s*: l'interesse di questo oggetto nasce dal fatto che quando un vertice *v* che non sia il pozzo espelle gettoni, abbiamo la trasformazione della configurazione:

$$\sigma \to \sigma - \Delta'_v,$$

dove Δ'_v è la riga del Laplaciano ridotto corrispondente a *v*: non solo, ma se vediamo le configurazioni prima e dopo l'espulsione come *equivalenti*, possiamo definire il ***gruppo delle configurazioni di gettoni*** (*sandpile group*) di *G* come il *gruppo quoziente*:

$$S(G) = \left(Z^{n-1}\right) / \left(Z^{n-1} \Delta'(G)\right).$$

...e non fate la faccia strana, è la stessa cosa di prima (quasi...).

Il lavorare con i gruppi quoziente (e quindi con le classi di equivalenza) per certi versi semplifica la vita: si ottiene, con relativa facilità, che ogni classe di equivalenza contiene almeno una configurazione stabile, anche se qualcuna ne può contenere più di una. Ad esempio, se prendete il solito grafo orientato completo di tre punti e trasformate uno dei

[29] Da cui dovrebbe risultarvi chiara la motivazione del titolo e della citazione: avremmo voluto tradurre "sandpile" con "castello di sabbia", ma ci sembrava una visione troppo pessimistica del concetto: come vedremo, a noi interessa *come crollano*.

punti in un pozzo cancellando i suoi archi uscenti, dovreste vedere che ci sono due configurazioni stabili: una con un gettone per ogni vertice che non è pozzo e una con zero gettoni per ognuno dei medesimi vertici.

Questo fatto che possano esserci più di una configurazione stabile può essere considerato piuttosto seccante, visto quanto piacciono, in matematica, le unicità; per fortuna, con un altro paio di definizioni arriviamo a qualcosa del genere.

Definiamo una configurazione di gettoni come ***accessibile*** se è raggiungibile da ogni altra configurazione con l'opportuna aggiunta di gettoni ai vertici e attivandoli in un dato ordine; se questa configurazione è anche stabile, la definiremo come ***ricorrente***.

Bene, la grande notizia è che ***ogni classe di equivalenza contiene una sola configurazione di gettoni ricorrente***, e quindi possiamo rappresentare ogni elemento del gruppo *sandpile* attraverso l'elemento ricorrente cui corrisponde.

"Rudy, se non vuoi fare la fine del cartello, spiegaci cosa c'entrano gli schiaffoni dei canguri". Calma, che siamo arrivati solo a metà. Adesso parliamo d'altro.

Il *chip-firing* è, in fin della fiera, un modo per distribuire i gettoni attraverso un grafo orientato: i gettoni viaggiano in numero uguale lungo tutti gli archi uscenti da un vertice. Per assicurare questa uniformità lungo i vertici, però, siamo costretti ad aspettare sin quando non arriva in quel vertice un numero di gettoni sufficiente a farli partire tutti assieme; nel seguito, vedremo un modo alternativo per "fare un giro" all'interno di un grafo senza dover aspettare troppo.

Cominciamo con qualche definizione, come al solito.

Dato il solito grafo orientato G, per ogni vertice v fissiamo un ***ordine ciclico*** per i suoi archi uscenti; ossia, per ogni arco e uscente da v definiamo un altro arco uscente da v che indichiamo con e^+: abbiamo quindi una ***configurazione di rotori*** (*rotor configuration*) ρ che assegna ad ogni vertice (che non sia un pozzo) di G un ben preciso arco $\rho(v)$; se in v c'è un gettone, ***instradare il gettone*** (*routing the chip*) in v per un passo significa per prima cosa passare alla configurazione $\rho(v^+)$, e quindi muovere il nostro gettone sino al vertice puntato da $\rho(v^+)$. In generale, si definisce ***operazione di instradamento secondo il rotore*** (*rotor-router operation*: bellissimo, sembra uno scioglilingua) l'operazione:

$$(w,\rho) \to (w^+,\rho^+).$$

Dove, anche se ci siamo presi alcune libertà, la notazione dovrebbe essere evidente.

Tutto chiaro? Per tornare al problema originale, il canguro in un punto w tira il pugno al cartello ($\rho \to \rho^+$) e poi dà retta al cartello ($w \to w^+$). Solo che qui lo facciamo su un grafo (orientato) generico.

Torniamo un attimo al *chip firing* per un dato grafo: qui le *soluzioni stabili* consistono nell'assegnare ad ogni vertice un numero (i gettoni) compreso tra 1 e $d_v - 1$ (il numero di archi in uscita), e quindi il numero delle soluzioni stabili sarà:

$$\prod_v d_v ,$$

dove la produttoria è estesa a tutti i vertici che non sono dei pozzi; se fate i conti, questo è anche il *numero delle configurazioni di rotore* possibili: questo significa che un mucchio di calcoli (e di definizioni) che abbiamo sono facilmente trasferibili: ad esempio, se il nostro grafo non ha pozzi ed è in una data configurazione (w,ρ), se dopo un certo numero di operazioni torna nella stessa configurazione si dice che (w,ρ) è ***ricorrente***, mentre in caso contrario si dice che è ***transiente***. Attenzione solo che nel caso del rotor-router, *configurazione stabile* significa che tutti i gettoni vi sono spariti in un pozzo. Nel caso il pozzo sia globale, comunque, anche questo oggetto definisce un ***gruppo abeliano*** anche se un po' più complicato, dovendo basarsi sulle sequenze degli stati di *chip & rotor*. Però, se non arrivate alla fine del gioco, fermandovi ad un punto intermedio, la proprietà commutativa si perde: dopo *n* mosse, potete essere in due posizioni diverse in funzione di quale gettone muovete prima.

Per parafrasare (per l'ennesima volta) Baez, "[...] non vorremmo derubarvi della gioia di dimostrare qualche teorema in questo campo [...]"; per dimostrarvi quali siano le possibili connessioni di questi argomenti ad altre parti della matematica, ci limitiamo a darvi una definizione e un teorema.

Un grafo orientato è ***euleriano*** se è fortemente connesso e se per qualsiasi vertice il numero degli archi in entrata è pari al numero degli archi in uscita; un ***percorso euleriano*** è un percorso che utilizza ogni arco una ed una sola volta; possiamo introdurre un pozzo (globale) in un grafo euleriano possiamo fornirlo di un *pozzo* scegliendo un vertice e cancellando tutti gli archi in uscita da quel vertice (e quindi, siccome quegli archi in uscita erano in entrata su qualche altro vertice, esisteranno dei vertici che hanno un grado di uscita maggiore di quello di entrata); se avete quindi un grafo euleriano con pozzo, una configurazione di gettoni σ è *ricorrente* se e solo se $S(\sigma+\beta)=\sigma$, dove $\beta(v)$ è la differenza non negativa tra i gradi di uscita e di ingresso di un vertice; in questo caso, ogni vertice distribuisce gettoni (*impazzisce*) una ed una sola volta durante la stabilizzazione di $\sigma+\beta$.

Siamo fieri di noi: sono un mucchio di pagine che parliamo di grafi, e siamo riusciti a non fare *neanche un disegno*... Il resto però lo ricavate voi.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms