Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 139 – Agosto 2010 – Anno Dodicesimo

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM138 ha diffuso 2636 copie e il 28/07/2010 per Google eravamo in 19'600 pagine.

OK, di questa ci siamo persi il sorgente. Le onde radio di maggior lunghezza d'onda sono riflesse dalla ionosfera, ma le onde più corte usate dalla TV "passano" tranquille. Bene, qualcuno si è chiesto cosa c'è sul canale "Terra" della TV, stasera, nell'universo.

Se questo numero esce in ritardo, è perché Rudy ha spostato la sua residenza poco oltre *Zeta Reticuli*. Per *tre* motivi.

1. Alieni

Andrò a raccontarlo da qualche parte,
con un sospiro, fino alla fine dei tempi:
due sentieri si biforcavano in un bosco e io,
io presi quello meno trafficato;
e questo ha fatto tutta la differenza.
(da *La strada che non presi*, Robert Frost)

Se verrà dimostrato che la mia Teoria della Relatività è valida, la Germania dirà che sono tedesco e la Francia che sono cittadino del mondo. Se la mia teoria dovesse essere sbagliata, la Francia dirà che sono un tedesco e la Germania che sono un ebreo.
(A. Einstein)

e mentre marciavi con l'anima in spalle
vedesti un uomo in fondo alla valle
che aveva il tuo stesso identico umore
ma la divisa di un altro colore
(da *La guerra di Piero*, Fabrizio De André)

La verità è che da sempre gli uomini hanno cercato di identificarsi in un elemento comune: una bandiera, un ideale, una passione, uno scopo. È una parte essenziale della natura umana generare appartenenza a gruppi, ma soprattutto lo è il sentirsi strani, diversi, sbagliati, quando non si appartiene ad un gruppo di cui si condividono le passioni o gli intenti. Siamo sempre divisi in categorie: ricchi, poveri, intelligenti, stupidi, alti, bassi, neri, gialli, rossi, uomini, donne, ragazze, bambini, dottori, ingegneri, casalinghe, avvocati, italiani, spagnoli, americani, sportivi, collezionisti… e ci identifichiamo volenti o nolenti con la nostra etichetta. Ci si potrebbe chiedere quando questo processo sia cominciato, nell'evoluzione delle società di *Homo Sapiens,* e confrontarlo con i comportamenti di altri animali sociali; ma – anche considerando che secondo alcuni le fasi da feto ad adulto ripercorrono i percorsi evolutivi – forse è più interessante cercare di capire quando le etichette di appartenenza vengano attribuite, e se esiste in qualche caso la possibilità di attuare in proposito qualche scelta individuale, anche minima.

A parte le considerazioni più banali, come il fatto che alla nascita si è senz'altro catalogati come maschi o femmine, appartenenti ad un ben determinato gruppo etnico e certamente dotati del potenziale di crescita e sviluppo fisico definiti dai geni dei genitori, resta il fatto che l'ambiente pone subito una decisa pressione: detto in maniera estrema, un neonato avrà un'infanzia, e quindi una vita, di tipo diverso se apre gli occhi in uno sperduto villaggio africano o se alza il primo vagito quale primogenito di una ricca e fortunata famiglia occidentale. In comune tra i due estremi c'è che il primo gruppo di appartenenza è sempre quello famigliare, e anche se in alcune società la famiglia non occupa un ruolo dominante come nella nostra amata Italia, è comunque presente in ogni organizzazione umana. Discende probabilmente dal fatto che l'associazione di gruppi di individui è una caratteristica tipica dei mammiferi, che devono in ogni caso proteggere i piccoli non solo durante la gestazione, ma anche per il periodo iniziale della loro esistenza. Il resto è in fondo una naturale prosecuzione: dall'essere parte di una famiglia si passa in breve ad essere parte di una classe di studenti, e qui si subiscono subito altre classificazioni: scolari buoni o cattivi, primi della classe e secchioni, distratti o attenti. Non c'è modo di sfuggire all'appartenenza a gruppi, ma esistono modi per cercare di decidere a *quali* gruppi appartenere. Certo è più difficile per alcuni aspetti che per altri – forse non si può decidere di cambiare il proprio colore della pelle o le proprie origini[1] – ma

[1] Anche se c'è chi, come una nota rockstar scomparsa da poco, ci prova con tutte le sue forze.

in generale si può tentare di migliorare le proprie condizioni, imparare un nuovo mestiere, una nuova lingua, vivere in una diversa nazione, perfino cambiare i propri connotati: oggigiorno tutto è possibile, con un po' di buona volontà e fortuna.

La caratteristica che si voleva sottolineare, però, è proprio il punto d'arrivo, la finale e definitiva accettazione d'appartenenza: quando infine si appartiene ad un gruppo con cui ci si identifica; è allora che sorge fortissimamente e orgogliosamente un "*noi*" che si oppone agli "*altri*". Noi, *cultori di matematica e del pensiero scientifico*[2], contrapposti agli altri – tutti gli *altri* che non condividono questo interesse. Inevitabilmente, quando pronunciamo in questo senso forte la parola "noi" ci sentiamo implicitamente migliori degli "*altri".*

Non è allora più strano è che una parola semplice come "altro" abbia acquistato nel tempo una connotazione negativa, diminutiva; quasi a rimarcare che la diversità o la non appartenenza al gruppo giusto è di per sé qualcosa di sbagliato.

Diciamo sempre che le parole hanno molto più da raccontare di quello che sembra, ed anche in questo caso *altro* ha molto da raccontarci: deriva dal latino *alter*, ed ha la stessa radice di *alius* (di cui è la forma comparativa). Già i latini lo usavano per contrapporre due entità: la prima e la seconda, l'una e l'altra. La parola è imparentata con il greco *allàsso* (αλλάσσω – cambiare) e porta a moltissimi significati dalle incredibili ramificazioni: basti pensare che il noto *alles* (tutto, ogni cosa) tedesco è anch'esso derivato da questa parola, così come *alibi* (che in latino significava semplicemente *alius ibi*, *altrove*, un altro derivato), ma anche *alterare*, *altrettanto*, *adulterio*, *adulterare*.

Termini che tecnicamente non volevano fare altro che indicare una differenza si ritrovano ammantati di valenza peggiorativa: *alterare* e *adulterare* hanno un significato di cambiamento rispetto a una condizione iniziale, ma in qualche modo, usando queste parole, si sottolinea neanche troppo implicitamente che il cambiamento è negativo.

Il solo fatto che una certa persona "ha un alibi per venerdì pomeriggio" è senz'altro[3] indice che qualcosa di spiacevole è successo in un certo luogo e in un certo tempo; e induce inoltre[4] un senso di disagio, tant'è che la persona è chiamata a provare la propria innocenza. Non solo: c'è di sicuro un colpevole per quanto successo venerdì pomeriggio, che non è stato ancora trovato. Tutta una cupa e pesante atmosfera di tensione chiamata in ballo da una sola parola, anzi da mezza: quell' "al" che in "alibi" richiama appunto *l'altro*.


1 *Iguana terrestre*

La parola *alieno*, poi, che in fondo significa semplicemente altro, diverso, ha una connotazione addirittura spaventosa: non solo quando si parla di omini verdi, ma anche quando si discute di introduzione di *specie aliene* in un ecosistema.

Le iguane non sono propriamente animali che ispirano a tutti simpatia: hanno veramente un aspetto piuttosto insolito per un turista europeo, ma pensate che ne è stato di queste meravigliose specie: sono state sterminate da animali tanto famigliari e apparentemente innocui come le capre. È successo nelle Galapagos, dove gli uomini hanno pensato bene di portare con sé animali da allevamento che,

[2] OK, potevamo dire qualsiasi altra cosa, come "*amanti del cioccolato svizzero prodotto a Wallisellen"*. Abbiamo solo scelto di sembrare un tantino più spocchiosi per sottolineare il concetto.

[3] Non riusciamo a formulare una frase senza derivati della parola che stiamo analizzando...

[4] Ancora!

inevitabilmente, sono in parte fuggiti dagli allevamenti e hanno dato inizio ad una vita brada. Naturalmente, non hanno avuto nessun problema ad adattarsi ad un ambiente che per loro non aveva alcun nemico naturale.

2 *Qual è l'alieno?*

Presto divenne chiaro quale potesse essere il danno che le specie *aliene* potevano causare: le capre sono animali particolarmente adattati ad ambienti aridi e montagnosi, che non hanno bisogno di acqua, e i terreni vulcanici delle isole ecuadoriane sembravano offrire loro il terreno perfetto… sfortunatamente sono proprio queste stesse caratteristiche, il loro stesso modo di muoversi e nutrirsi, a favorire la distruzione del delicato equilibrio preesistente. La disponibilità della flora locale e l'assenza di predatori portò la popolazione di capre selvatiche sulle isole ad aumentare vertiginosamente di numero: in pochi anni la vegetazione era distrutta e le specie endemiche (tartarughe, iguane, per non parlare della flora stessa) erano prossime all'estinzione. *Alieno* può insomma essere *cattivo* anche quando ha per noi un aspetto famigliare ed utile. Non fu troppo difficile organizzare la "*decaprizzazione*" delle isole[5], mentre l'eliminazione dei gatti introdotti come animali da compagnia (ma diventati sterminatori di rare specie di uccelli e piccoli rettili) è ancora difficile da eseguire sulle isole abitate, per la resistenza della popolazione ad uccidere "animali amici", e quindi tutt'altro che alieni.

3 *Omini verdi…*

Con esempi distruttivi del genere, non stupisce che l'alieno, il diverso, sia sempre guardato con sospetto: gli spagnoli giunti in America eliminarono una cultura di enorme statura quale gli Incas; gli europei giunsero in Australia e ridussero la popolazione locale alla schiavitù, introducendo specie[6] che portarono i marsupiali locali vicino all'estinzione; e in Africa… beh, l'Africa fu semplicemente saccheggiata, di risorse umane e naturali.

Diverso: non può portare niente di buono. *Alieno*: non può che significare qualcuno che cercherà di derubarci, confonderci, distruggerci, insomma, abbiamo tutto il diritto di sospettarlo.

Ciò non di meno, la diversità – e non solo quella biologica – è assolutamente necessaria per i processi creativi. Si vede perfino nella reazione tecnologica: dinamiche di processi del tutto casuali, generazioni di idee apparentemente irrazionali. Negli ultimi anni centinaia di piccole aziende sono spuntate come funghi per offrire corsi per coltivare la creatività con tecniche più o meno ortodosse, dal brainstorming al pensiero laterale, alle varie tecniche di libera associazione. E per migliorare, per creare qualcosa di nuovo, bisogna accettare la diversità come positiva: perché il modo migliore per sviluppare la creatività è quello di uscire da sé stessi, cambiare punto di vista, mettersi in un'altra posizione rispetto ad un problema; e soprattutto scambiare opinioni con altri, uscire dal gregge noto e famigliare, estraniarsi: in una parola, diventare "altro".

E certamente aiuta anche essere un vero e proprio alieno, trovarsi circondato da persone che vivono e ragionano in modo diverso: ed è qualcosa che prima o poi succede a tutti.

[5] Che è ancora in corso: si trovano parecchie informazioni utili in rete a proposito, si calcola che sull'isola di Isabela siano state sterminate circa 135'000 capre.

[6] Qui si parla di lepri e volpi: gli inglesi adoravano la caccia alla volpe e non pensarono alle possibili conseguenze sulla popolazione di piccoli marsupiali locali.

Quando si entra per la prima volta in una nuova classe scolastica, o in un club di qualche tipo, o accingendosi a visitare un paese straniero. In quest'ultimo caso ci si trova circondati da persone che non parlano la stessa lingua, che non hanno lo stesso insieme di leggi ed abitudini e, talvolta, non hanno nemmeno lo stesso colore della pelle. Non per niente negli Stati Uniti usano proprio la parola "*alien*" per indicare ogni persona di nazionalità diversa da quella americana: legalmente si distinguono i residenti (cioè quelli con permesso permanente di soggiorno), gli altri immigrati e turisti (con permesso temporaneo di visita o soggiorno), fino agli *illegal alien* (che non hanno dritto di trovarsi sul territorio) e gli *enemy alien*, i cittadini di paesi nemici.

Ci sembra interessante notare quanto spazio sia dedicato alla parola alieno (nel senso giuridico del termine) nella versione inglese (americana) di Wikipedia, mentre in quella italiana non se ne trova nessun cenno: forse i nostri connazionali sono meno pronti ad *alienare* quelli che non possiedono la cittadinanza dello Stivale. Del resto, secondo alcune statistiche, ci sono più italiani (o almeno persone di origine italiana) nel resto del mondo di quanti vivano in Italia, e ciò dovrebbe far pensare.

Ci sono stati periodi storici in cui il mondo è stato invaso da alieni di tutti i tipi: periodi inevitabilmente duri e difficili, perché gli esseri umani sono disposti a farsi trattare da alieni solo se costretti dalle necessità. Gli storici moderni non parlano più di "invasioni barbariche", perché una simile definizione è di per sé settaria, eurocentrica o addirittura "romanocentrica": nel tentativo di salvaguardare la correttezza dei termini e il pari rispetto per i popoli, usano il termine tedesco di "Volkswanderung", cioè "movimento di popoli".


4 *John Todd (Jack)*

Ma non serve tornare troppo indietro nel tempo: basta pensare alle Grandi Guerre del Novecento, quando intere nazioni sono state cancellate dalla carta geografica e l'intolleranza ha portato all'estinzione di intere culture. In quei tempi gli Stati Uniti furono un ricettacolo di alieni veramente incredibile, anche se noi parliamo solo di un certo tipo[7]. Ma erano tempi in cui metà Europa era in movimento, e anche l'altra mezza non se la passava bene.

John Todd, per esempio, era irlandese[8], ragione più che sufficiente per essere considerato un diverso anche tra i suoi colleghi inglesi. Dopo aver studiato a Belfast, aveva deciso di intraprendere studi di matematica e cercò a più riprese di entrare a Cambridge, ma per una o l'altra ragione (tra cui l'aver indirizzato subito i suoi studi verso l'ingegneria: gli mancavano così le basi di latino, richieste per quel College), non riuscì mai a ottenere un titolo di studio dall'Università britannica. Alla fine andò a farsi raccomandare da Littlewood[9], che gli consigliò di darsi alla ricerca matematica, perché "*tanto i dottorati non servono a nulla…*".

[7] Ebbene sì, siamo un po' elitari anche noi, sappiamo tutto delle difficoltà incontrate da Albert Einstein per ottenere la cittadinanza americana (ne parliamo in RM074), ma nulla di Peppino Di Maria, idraulico. Ci perdoni Peppino, ma non siamo logorroici fino a questo punto: e, a dire il vero, abbiamo più materiale sui matematici che sugli idraulici.

[8] E matematico, ovviamente: ma la sua data di nascita è il 16 maggio 1911, cosa che gli impedisce di essere l'*alieno* celebrato da questo compleanno.

[9] Sembra che stesse cercando Hardy, ma non trovandolo incontrò Littlewood. Parliamo di questa coppia fenomenale nel compleanno di RM049.

Jack[10], come lo chiamavano tutti, deve aver imparato presto ad essere diverso dal gruppo: quando aveva dieci anni doveva partecipare ad una classe di canto, e l'insegnante lo dovette espellere perché il suo canto era talmente stonato da disturbare il resto della classe. Fu "parcheggiato" in una classe di algebra, e lì cominciò ad imparare la matematica. Come si dice in questi casi, non tutto il male viene per nuocere.

Ci vollero comunque molti altri anni prima che un istituto inglese gli consentisse di insegnare: solo nel 1937, finalmente, il King's College di Londra gli aprì le porte. Anche qui fu il caso a lavorare per Jack: il direttore del dipartimento di matematica stava tenendo una serie di lezioni di Teoria dei Gruppi e di Meccanica Quantistica, quando si ammalò. Il nostro eroe aveva delle basi solide per la seconda parte del titolo, ma si ingegnò per mantenere vivo e inalterato il corso: cominciò quindi a spiegare agli studenti la teoria assiomatica dei Gruppi e delle Matrici, praticamente imparandola di pari passo con loro; arrivò perfino a formulare un problema che fino a quel momento non aveva soluzione, e che lo impegnò intensamente.

Uomini come Jack sembrano nati per una vita irrequieta e piena di imprevisti. Con l'avvento della Guerra fu utilizzato in diverse mansioni, ma lui stesso dirà che il suo più grande contributo alla matematica fu di salvare in maniera rocambolesca una gran quantità di testi scientifici nascosti in una località della Foresta Nera. Tutto cominciò con un interrogatorio: le autorità britanniche avevano catturato quello che pensavano essere un esperto di aerodinamica, che risultò in realtà essere un matematico, parte di un gruppo che lavorava nella Foresta Nera e che annoverava un certo numero di prigionieri di guerra. Todd partecipò alla missione che doveva individuare il luogo in cui si nascondeva il gruppo: si scoprì che si trovava in territorio francese, e che conteneva anche tutta la biblioteca matematica di Friburgo, che fu così posta in salvo. Il *Mathematisches Forshungsinstitut*, come venne chiamato in seguito, sopravvive e continua ad ospitare conferenze scientifiche: i libri furono salvati da un Jack Todd esaltato e sconvolto che allontanava truppe marocchine urlando le poche parole che conosceva di francese e sbandierando la propria divisa per non essere preso per tedesco.


5 *Olga Taussky-Todd*

Jack, in effetti, non era certo un poliglotta: tant'è che l'interrogatorio del prigioniero tedesco non l'aveva condotto di persona, ma con l'aiuto di sua moglie Olga: una che parlava le lingue meglio di lui, senza essergli da meno in matematica.

Olga Taussky-Todd era nata come Olga Taussky, il 30 agosto 1906 a Olmütz – che oggigiorno è parte della Repubblica Ceca, ma allora rientrava nell'Impero Austroungarico – da una famiglia ebrea. Fin dai primi anni di scuola, che la famiglia visse a Vienna, la giovane mostrò un grande talento per le materie… letterarie: le piaceva scrivere temi, aveva ottimi risultati in grammatica e nei corsi extracurricolari che seguiva in musica.

A causa della guerra e per seguire i lavori del padre, la famiglia si spostò a Linz, dove la quattordicenne, appassionata di poesia e latino, lentamente scoprì un nuovo interesse: la matematica.

[10] Il nome John viene sempre familiarizzato in "Jack" in Irlanda, ed è forse uno dei nomi più comuni dell'isola. Provate a fare una ricerca per "Irishman Jack" e stupitevi.

L'Università di Vienna la accolse come studentessa di chimica, e alla fine le rilasciò un dottorato in matematica nel 1930: era stata compagna di classe di Gödel[11] e la sua tesi di dottorato venne in seguito pubblicata sul *Giornale di Crelle*[12]. Di sicuro non poteva ottenere una cattedra, ma riuscì a mantenersi offrendo lezioni private, che le permisero di continuare le sue ricerche sulla teoria dei numeri. Già a questo punto si era concentrata su un campo della matematica che allora non aveva ancora un nome, ma che divenne *algebra lineare* o *teoria delle matrici reali e complesse*.

Finalmente uno dei suoi insegnanti la segnalò a Courant, che la assunse come assistente a Göttingen, e la impiegò soprattutto per la preparazione di un'edizione completa dei lavori di Hilbert sulla Teoria dei Numeri, e di lezioni sulla Teoria dei Campi. Fu in questo periodo che Olga incontrò Emmy Noether[13] e lavorò anche come sua assistente: fu proprio Emmy a promuoverla negli anni successivi ed a portarla con sé a Cambridge, Princeton e Bryn Mawr.

Dopo la morte della Noether, Olga faticò a trovare una posizione, malgrado i rilevanti risultati matematici fino ad allora raggiunti: il ritorno a Göttingen era fuori discussione data la situazione politica, e fu solo dopo l'intervento di Hardy[14] che le fu assegnata una posizione permanente al collegio femminile dell'Università di Londra.

Non dovevano essere anni facili: donna, austriaca, matematica, ebrea, *diversa*. Persino altre insegnanti sconsigliavano alle studentesse di prendere tesi con lei, perché avere una donna come relatore poteva danneggiare le loro carriere.

Era il 1937, e anche Jack era a Londra: uomo, irlandese, matematico, protestante, *diverso*. Era impegnato a cercare di studiare un problema irrisolto di Teoria dei Gruppi, e ne discuteva con tutti quelli che incontrava; ed un giorno incontrò Olga.

6 *Olga e Jack*

La specializzazione di Jack era in analisi classica, mentre Olga si occupava di un mondo di matrici e autovalori[15] che la immergeva nell'analisi complessa. E questa non era nemmeno la differenza più grande che li separava.

Jack e Olga si sposarono il 29 settembre dell'anno successivo. Insieme vissero e collaborarono per più di 57 anni: anche se scrissero pochi articoli insieme, pare discutessero animatamente ogni problema che li colpiva nei rispettivi campi.

Durante gli anni di guerra i due si trasferirono una ventina di volte: lui impegnato, come abbiamo visto, a salvare patrimoni di conoscenza matematica; lei, tra le altre cose, a risolvere insieme ad uno degli studenti di Jack proprio il problema che li aveva fatti conoscere.

[11] Di lui parliamo in RM087.

[12] Il *Giornale di Crelle* fu un trampolino di lancio importante per molti matematici. Ne abbiamo parlato parecchie volte in queste pagine, per esempio (ma non solo) in RM055 nel compleanno di Abel; RM057 ricordando Weierstrass; RM078 a proposito di Green, e in RM118 raccontando di Möbius.

[13] La celebrazione di questa grande matematica è in RM050.

[14] Proprio lo stesso della nota 9.

[15] Autovalori (e tutta un'altra serie di auto-cose) in inglese è *eigenvalues* (e *eigen*-cose), e questa parola dice tantissimo di quanto il mondo anglofono fosse a quel punto pieno di alieni: *eigen* è il prefisso tedesco per *auto*.

Era settembre del 1947, quando finalmente i due si trovarono a bordo di una nave stracolma di spose di guerra[16] diretta verso gli Stati Uniti: avevano entrambi ottenuto un posto negli uffici del laboratorio di matematica applicata del NBS (*National Bureau of Standards*). All'inizio lavorarono nientedimeno che per John von Neumann[17], e non si può dire che il loro contributo fu minimo: non solo collaborarono all'elaborazione dei progetti in corso, ma attirarono molti promettenti neolaureati e mantennero contatti con il resto del mondo accademico e con importanti matematici.

7 *Olga e i numeri*

I due, comunque, non riuscirono a restare a lungo lontano dal mondo accademico: per entrambi la parte migliore del lavoro era ispirare altri a seguirli nella strada della ricerca. L'unico problema era quello di trovare una posizione adeguata per Olga, perché nessuna università americana sembrava avere cattedre a disposizione per valenti matematiche. Solo nel 1957 il Caltech (Californian Institute of Technology) decise di assumerli entrambi: Jack con una cattedra ufficiale e Olga con la migliore qualifica allora disponibile, quella di ricercatore associato. I loro uffici però erano attigui e delle stesse dimensioni, e i due ricoprivano di fatto mansioni simili. Lei non se ne lamentò, anche perché effettivamente cominciò ad insegnare e proseguì nelle sue ricerche: le matrici e le loro applicazioni pratiche per la soluzione di varie tipologie di equazioni differenziali continuarono ad interessare Olga per tutta la vita. Per tutto il tempo che insegnò fu semplicemente un faro che indicava la direzione a chiunque necessitasse di informazioni in materia.

Sempre modesta, non fece mai battaglie di nessun tipo per la condizione femminile nell'ambiente accademico. Leggenda vuole che ad una festa di dipartimento a cui partecipavano anche consorti, una signora le si sia avvicinata dicendo "La cosa peggiore di essere sposata ad un matematico e che non gli si può parlare del suo lavoro: io non ne capisco assolutamente niente! E lei?". Olga sembra abbia risposto, prudentemente "io un pochino…", sempre attenta a non offendere gli altri, o forse cercava di nascondere il suo essere un'aliena.

Eppure quando nel 1969 una giovane assistente di Inglese fu glorificata dalla stampa come la prima donna del corpo insegnante al Caltech, Olga prese di petto la situazione, andò dagli amministratori ed ottenne che la sua carica fosse modificata: divenne così il primo professore in gonnella al Caltech nel 1971.

Non è tipico delle nostre celebrazioni rincorrere tutte le pubblicazioni e tutti i riconoscimenti dei nostri matematici, ma nel caso di Olga non sarebbe comunque possibile senza spendere un'altra pagina. Riportiamo solo una citazione di Gary Lorden, un collega matematico:

Fu un giorno memorabile per il dipartimento di matematica quando riuscimmo ad attrarre Jack e Olga al Caltech. Non solo guadagnammo due eminenti professori, ma anche due magnifici colleghi e insegnanti. Diedero un notevole stimolo per il futuro del Caltech e del dipartimento di matematica, e la loro eredità include anche l'ispirazione

[16] Un riferimento del genere è talmente strano che non possiamo fare a meno di citare la fonte, che ha poi ispirato la maggior parte di questo articolo: http://www.ams.org/notices/199608/taussky.pdf. I masticatori della lingua d'Albione possono trovarci alcune pagine di tributo a Olga Taussky-Todd, piene di contributi personali da parte di persone la cui vita fu toccata da questa coppia eccezionale.

[17] Questo John è talmente importante per i Rudi che non solo lo abbiamo celebrato in RM107, ma è protagonista anche di un capitolo di Rudi Ludi, uno dei nostri best sellers.

delle storie delle loro vite: Olga come una delle prime donne a lasciare un segno nella matematica del ventesimo secolo, e Jack come pioniere di analisi numerica e computazione.

Anche dopo essere andata in pensione (dopo i 70 anni era obbligatorio), Olga continuò a seguire giovani promesse, anche in ambiti di ricerca diversi. Molti dei suoi studenti hanno dedicato le loro scoperte e premi alla loro insegnante, che li chiamava affettuosamente "i miei ragazzi (*my boys*)". Olga morì nel 1995, Jack sopravvisse ancora fino al 2007. Entrambi dedicarono alla matematica e all'insegnamento quasi un secolo di vita. Non saremmo i Rudi Mathematici se non riportassimo queste parole della Taussky-Todd: *fin dalla mia infanzia la poesia e la scrittura mi vennero naturali, ma credo che, sia nel lavoro degli altri sia nel mio, quello che ricerco è la bellezza e non un riconoscimento.*

È sempre così, con gli alieni: dopo che sono arrivati ed hanno preso piede, il mondo non è più quello che era prima. Ma a volte va bene così.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Alieni [1]			
Alieni [2]			

2.1 Alieni [1] (Alla conquista di un buffo pianeta)

Qualcuno di voi forse ricorderà che molto tempo fa ci siamo inventati due graziosi termini extraterrestri[18], per indicare delle operazioni matematiche delle quali vi chiedevamo di scoprire il funzionamento. Siccome questi sono più facili da scrivere di *Star Tre[c]k*, (sì, stiamo rigirando il coltello cosparso di sale... beh, lasciamo perdere) usiamo questi.

Pluff e Ciuff, i nostri due validi alieni, stanno cercando di conquistare un pianeta abitato da strani bipedi a simmetria sostanzialmente bilaterale sostenenti di avere il centro decisionale nella cavità buia posta all'estremità superiore (del resto, cosa vi aspettate da una forma di vita che si sviluppa sul terzo pianeta di una stella gialla?). Ora, le cose stanno andando avanti tra alterne vicende, quando i nostri due guerrieri spaziali si ritrovano a dover assalire una fortificazione piuttosto strana: infatti, l'unico modo per entrarci è quello di riuscire ad arrivare quasi alla cima di un cono perfettamente liscio che, visto da lontano, sembra evidentemente un triangolo isoscele con angolo al vertice α.

Siccome, anche se estremamente efficienti, i nostri due alieni preferiti non sono particolarmente collaborativi, ciascuno dei due sviluppa per conto proprio la medesima strategia: l'idea è di tirare un "lazo" (tipo film western, per intenderci), prendere la cima della montagna e poi tirarsi su per la corda: i nostri si mettono immediatamente all'opera, ma stanno mostrando alcune differenze nell'esecuzione.

Pluff, infatti, portato all'azione senza pensarci troppo, ha fatto un anello fisso di corda e ha legato un'altra corda all'anello; il lazo, quindi, non risulta scorsoio. Ciuff, più meditativa come tutte le femmine della specie, ha invece fatto un perfetto lazo con nodo scorsoio al fondo: e adesso, senza ingombrarsi tra loro, i due si apprestano alla conquista della roccaforte.

E adesso tocca a voi: per quali valori di α i nostri eroi riusciranno a salire sul cono e a far passare un brutto quarto d'ora agli alieni (secondo *loro*, sono tali) asserragliati all'interno?

[18] "Alieni alienati", problema 1 su RM060, gennaio 2004.

2.2 Alieni [2] (in realtà, stiamo ascoltando i Deep Purple)

Qualcuno di voi forse ricorderà che molto tempo fa ci siamo inventati due graziosi termini extraterrestri *[v. nota precedente: come si fa, in Word, a mettere lo stesso riferimento a due note? Bah, non importa, mi avete capito]…*

Questa volta, ci troviamo su un pianeta dal nome *MadeInJapan*; per intenderci, è il solito sferoide oblato con l'asse di rotazione coincidente con l'asse minore, ma dalla composizione originale: a seconda della distanza dall'asse di rotazione (sì, non dal centro, è come se fosse una girella tagliata a forma di sfera) è composto da strati omogenei di materiali diversi.

E adesso abbiamo un problema.

Lo strato più esterno è fatto di Attilio (eh? Oh, è un amico di infanzia di Rudy, ha fatto chimica, quindi potrebbe esistere l'attilio), mentre lo strato immediatamente più interno è formato da monossido di diidrogeno; è dimostrato che per i terrestri è un pericolosissimo veleno, ma la cosa come vedremo preoccupa relativamente poco i nostri eroi, i quali sono sul pianeta per cercare di stabilire se sia sfruttabile o no come miniera: il business plan prevede che si parta con l'impresa se ci sono almeno un milione di snort cubici di attilio nello strato più esterno.

Sfortunatamente, tutto quello che sappiamo sul pianeta lo ha comunicato Pluff: nel suo solito modo oscuro ci ha detto che il rapporto tra il volume della più piccola sfera che può contenere il pianeta e il volume della più grande sfera che può essere contenuta dal pianeta è di 1.331 a 1; la spiegazione piuttosto oscura nasce dal fatto che lei e Ciuff, a causa di un piccolo incidente in fase di atterraggio, sono atterrati in punti diversi del pianeta. Gli è andata comunque bene, visto che Pluff e Ciuff possono sopravvivere solo sulla linea di confine tra l'attilio e il monossido di diidrogeno: sono finiti su due linee di confine diverse, ma hanno calcolato che la distanza in linea retta tra di loro è di 120 snort e, in queste condizioni, meglio di così non poteva andare.

Ora, dovete decidere: parte o no, il progetto di sfruttamento minerario?

3. Bungee Jumpers

Dimostrate i seguenti:

1. Se ciascuno degli interi $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ può essere rappresentato come somma di due quadrati, allora anche la loro somma può essere rappresentata nello stesso modo.
2. Tutti i numeri primi nella forma $4n+1$ possono essere scritti come somma di due quadrati, mentre nessun numero della forma $4n+3$ può essere espresso in questo modo.
3. Un numero composto $\boldsymbol{N}$ può essere espresso come somma di due quadrati se e solo se i suoi fattori primi nella forma $4n+3$ compaiono un numero pari di volte.

Per il secondo, conviene dare un'occhiata al problema del mese scorso...

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Agosto non è un mese matematico, lo sanno tutti. La gente va in vacanza e legge riviste di gossip sotto l'ombrellone, cercando di dimenticare razionalità e buon senso. Eppure, quest'anno ci sembra un po' meno piacevole del solito.

Abbiamo appreso da uno dei nostri più cari abbonati, che il Forum delle Olimpiadi della Matematica[19] è stato oscurato. Non vogliamo per niente addentrarci nella vicenda, soprattutto non vogliamo fare pubblicità ai personaggi coinvolti: tra le discussioni ne è apparsa una infamante, che ha portato l'infamato a minacciare denunce e l'UMI a decidere per una chiusura del forum per evitare scocciature. Non entriamo nel merito perché è sicuramente poco corretto insultare chiunque, per qualsiasi motivo, ma un Forum come quello delle Olimpiadi non può essere trattato come un semplice fastidio.

8 *Il Logo del Forum e delle Olimpiadi.*

Ci intristiamo per un'iniziativa che da più di dieci anni raccoglie tante giovani promesse per prepararle ad affrontare problemi per (ma non solo) partecipare alle Olimpiadi ogni anno. Dieci anni di lavoro soprattutto volontario da parte di generosi amministratori (considerati non degni di fiducia dall'UMI stesso) è sparito in un solo giorno. Speriamo veramente che la decisione sia reversibile e che prima o poi l'UMI si renda conto dell'errore fatto. Ma se così non fosse, cari lettori, sdegnatevi con noi. Ditelo, protestate.

Rivogliamo il Forum online, e al più presto, e sotto l'egida dell'ente che lo dovrebbe sostenere, proprio l'UMI.

Scusateci se le Note agostane hanno una nota triste, vediamo di passare subito alle Soluzioni.

4.1 [137]

4.1.1 Piove... (...con quel che segue, I)

Questo problema ha veramente intrigato i nostri lettori: già il mese scorso sono stati tanti scriverci in proposito, e anche a luglio la discussione è diventata animatissima. Ma andiamo con ordine, cominciando con il testo del problema:

> *Supponiamo che le nuvole, anziché essere soffici batuffoli di bambagia, siano composte da minuscole goccioline d'acqua distribuite uniformemente e in quiete (non lasciatevi influenzare dalla realtà), e facciamo cadere una goccia di pioggia attraverso la nuvola. Quando la goccia di pioggia urta una gocciolina (di quelle ferme), la assorbe e continua la caduta; la nostra gocciolona continua a essere perfettamente sferica per tutto il tragitto.*
>
> *La domanda è: con che accelerazione cade la goccia?*

Ecco. Già a luglio ho pubblicato le soluzioni di ***Franco57*** e ***Fabrizio***, e le considerazioni di ***Silvano*** e ***Adriano***. Purtroppo, proprio nella soluzione di Fabrizio, ho introdotto un errore nel valore finale, non chiedetemi come ho fatto che non lo so neppure io. Oltre a ***Fabrizio*** stesso (con cui mi scuso) se n'è accorto ***Franco57***, che ci scrive:

> Probabilmente è un piccolo refuso di cui vi sarete già accorti, ma la soluzione finale di ***Fabrizio*** fornisce, come la mia, il valore di 1/7 della accelerazione di gravità g e non di 1/3 come pubblicato. In particolare ***Fabrizio***, con notevole abilità nella

[19] Non potete non conoscerlo, veramente! http://olimpiadi.dm.unibo.it/oliForum/

> matematica discreta, lo ha dimostrato nel caso di accelerazione costante ma, raffinando il ragionamento, penso che avrebbe potuto provare che l'accelerazione tende comunque a stabilizzarsi su quel valore, così come viene fuori dalla analisi con l'equazione differenziale.
>
> Tuttavia il rapporto che ha indicato tra il raggio e la distanza percorsa ricalca l'abbaglio che ho preso anch'io inizialmente e che ho descritto in testa alla soluzione pubblicata, cioè 1/4 della densità della nuvola, assumendo 1 la densità della goccia. Perché allora il risultato è corretto? Semplicemente perché per ottenere il risultato finale basta che ci sia proporzionalità diretta tra il raggio e la distanza percorsa, non importa quanto valga questa costante di proporzionalità.
>
> La mia soluzione si poteva alleggerire evitando i calcoli della prima parte: infatti se la goccia sferica aumenta il raggio appunto in proporzione fissa allo spostamento, allora rimane tangente ad un cono infinito, che, se scelgo ampio giusto quanto serve affinché il volume della goccia rispetto alla parte di cono già attraversata (da quando la goccia era un punto) sia pari alla densità della nuvola, allora la goccia si ingrossa esattamente della massa ingerita. Questo è facile vederlo pensando che in tempi diversi abbiamo figure simili in tre dimensioni e quindi tutti i volumi crescono come il cubo del raggio o di qualsiasi altra distanza. Ed è semplice anche vedere che per ogni densità si può costruire un tale cono.
>
> Infine ho preso per scontata una proprietà vera, molto intuitiva, che chiamerei "feedback immediato", ma che necessita comunque di dimostrazione e cioè che se una funzione continua e derivabile, nel nostro caso l'accelerazione, ha derivata positiva sotto una certa soglia e negativa sopra la stessa soglia, allora, una volta che la funzione raggiunge la soglia stessa, rimane costante. Si dimostra per assurdo. In estrema sintesi: se così non fosse suppongo che la funzione dopo aver raggiunto la soglia in x_0, assuma in seguito in x_1 un valore diverso (maggiore o minore). Considero il massimo x_2 tra x_0 e x_1 per cui la funzione è ancora uguale alla soglia (sarebbe un estremo superiore ma è anche un massimo, poiché la funzione è continua). Per il teorema del valor medio esiste un punto x_3 strettamente compreso tra x_2 ed x_1 per cui la derivata è pari al rapporto incrementale tra i due. Per costruzione x_3 si pone dallo stesso lato di x_1 rispetto alla soglia e tuttavia non rispetta l'ipotesi, da cui l'assurdo.

Sempre corretto ***Franco57***... Sappiate che non tutti hanno preso la faccenda molto seriamente. ***Silvano***, non ha ancora deciso quanto siamo fuori di testa:

> Sarò stato approssimato… ma una goccia nell'aria non supera la velocità limite di caduta, altrimenti ti buca l'ombrello quando piove… ma questo sarebbe rudi-fisico non rudi matematico :D del resto volevate mandare Rudy sulla luna a forma di sogliola il mese passato con le palle rimbalzanti e accelerazioni istantanee da 0->13 km/sec spacciandolo come progetto NASA… :D:D:D
>
> A proposito attendo con ansia: il rudi-ingegnere, il rudi-psicologo, il rudi-economista (non sarà mica tirchio), il rudi-letterato, il rudi-medico, il rudi-agricolo, il rudi-farmacista, il rudi-avvocato, il rudi-poliglotta, il rudi-veterinario, il rudi-biologo, il rudi-magistrale, il rudi-politico, il rudi-architetto, il rudi-filosofo, il rudi-comunicativo, il rudi-statistico (e qui ci siamo + o meno), il rudi-sociologo, il rudi-orientale, il rudi-informatico o meglio rudi-informato, il rudi-ostetrico, il rudi-riabilitante, il rudi-radiologo, il rudi-epidemiologo (e qui + o - ci siamo), il rudi-dentista, il rudi-disegnatore, il rudi-civile (un po' un controsenzo), il rudi-urbanita, il rudi-sportivo, il rudi-chimico, il rudi-navigante, il rudi-restauratore, il rudi-paesagista, il rudi-designer, il rudi-automatico, la rudi-sicurezza (o la rudi-pubblica-sicurezza?), il rudi-nucleare, ...

Fermatelo!!! A dire il vero, alcuni di questi ruoli li abbiamo già avuti... siamo preoccupati ora, perché il Capo si è fatto venire nuove idee...

Prima di passare ai problemi di questo mese, vi diciamo anche che ***Martino*** ha scritto una ventina di pagine sull'argomento. Non le pubblichiamo qui, anche perché fanno parte di una storia a largo respiro… ma lo sapete! Si tratta dell'ormai arcinota "Questa storia potrebbe intitolarsi "Galassia che vai"?" che vi linkiamo anche da qui: http://www.rudimathematici.com/Bookshelf/qspigcv_201008.pdf, ma che trovate aggiornata ogni mese in Bookshelf. Non ci crederete, quando ce l'ha inviato la prima volta la soluzione si intitolava veramente "gocce come se piovesse(ro mucche sferiche)"…

Andiamo avanti.

4.2 [138]

4.2.1 Revisionismo storico, anzi due.

Diciamocelo, il Capo a luglio è stato piuttosto pigro. I problemi lui li trova in giro per la rete, è vero, ma questa volta erano talmente riconoscibili che li hanno ri-trovati quasi tutti quelli che hanno voluto cercare. Pazienza. Cominciamo da quello dell'ascensore di George Gamov, lo semplifichiamo un pochino:

> *George vive in una casa di sette piani, occupando un appartamento al terzo piano; tutte le mattine, essendo di fretta e distratto, arrivato davanti all'ascensore preme sia il pulsante di salita sia quello di discesa; a quel punto l'ascensore arriva o partendo dai piani alti (opzione preferibile), o dai piani bassi (opzione meno piacevole). L'ascensore va su e giù raccogliendo la gente ai vari piani; la destinazione di George quindi è sempre casuale e, quando è fermo, può essere a qualsiasi piano; inoltre, la sua velocità è costante e quando nessuno lo chiama sta lì dov'era; non solo ma quando un ascensore arriva ad un piano, le persone che devono prenderlo saltano dentro e non possono alterare il percorso impostato dalle chiamate precedenti.*
>
> *Prima domanda: supponendo i piani scarsamente abitati, quali sono le probabilità che George al mattino si trovi un ascensore che sta salendo?*
>
> *Coll'esplosione demografica George si accorge che questa probabilità è variata: riuscite a calcolare quale sia quella nuova?*
>
> *Supponiamo la casa di George sia una casa reale, ossia i piani siano distribuiti tra* 0 *e* 1 *in modo continuo; se George abita al piano p, quali sono le probabilità che si ritrovi l'ascensore che sale se schiaccia i bottoni mentre l'ascensore è fermo? E quali se li schiaccia con l'ascensore in moto?*

Forse vi ho già detto che è estate e anche lo zoccolo duro dei nostri lettori è andato in vacanza... poche, pochissime soluzioni, quindi vado in ordine di arrivo (più o meno), partendo da ***Silvano***:

> approccio il problema nel modo che segue in quanto manca, nella descrizione del problema, il modello di comportamento degli inquilini del nostro palazzo.
>
> Supponiamo che inizialmente, come indicato dal problema il palazzo sia poco popolato, che tutti prendano l'ascensore, e che abbiano tutti più o meno lo stesso orario. In tal caso la sera rientreranno tutti, quindi l'ascensore seguirà il percorso: "piano x-> 0 -> piano y" per poi rimanere fermo al piano di arrivo.
>
> In tal caso la mattina il nostro fisico uscendo (se è il primo a farlo) troverà l'ascensore ad un piano casuale Y, compreso tra "1" e "7" (quelli del "piano terra" non chiamano l'ascensore la sera per rientrare a casa), quindi la probabilità che venga dal basso sarebbe "2/7" (piani "1" e "2"), mentre che venga dall'alto "4/7" (piani "4", "5", "6","7"); 1/7 è invece la probabilità di trovarlo al piano "3".
>
> Se il nostro fisico non è mattutino?

Allora ipotizzando invece che “tutti” la mattina escano e usino l’ascensore, è ovvio che il fisico troverà sempre l’ascensore al piano terra, quindi la probabilità che venga dal basso è pari praticamente a “1” (trascuro il caso dell’ascensore in movimento, perché essendo poco popolato, è raro l’evento di due chiamate coincidenti).

<u>Crescita demografica</u>

Il problema anche qui lascia un po’ a desiderare qui come chiarezza, ossia che significa ESPLOSIONE DEMOGRAFICA? Suppongo che “esplosione demografica” indichi ci siano “infinite” persone per ogni piano (tutti stipati nelle stanze come le sardine) che abbiano un comportamento completamente casuale nell’uso dell’ascensore, e che quindi l’ascensore sia sempre in movimento.

Bene in questo caso l’ascensore ha sempre chiamate su tutti i piani (ci sono infiniti utenti) e si muove quindi di piano in piano prima dal “piano terra” al “7” poi ritorna al “piano terra” fermandosi ad ogni piano, con continuità. Inoltre ipotizzo (cosa non vera) che il tempo in cui l’ascensore sia fermo al piano per caricare le persone è nullo (in genere non vero, ma che ci vuoi fare…), ossia si sale e scende all’istante.

Il nostro fisico, mettendosi in coda in un certo istante, troverà l’ascensore 3/7 di volte sotto di lui (Piani [0,3)…) e 4/7 volte l’ascensore sopra di lui (Piani “(3,7]”). Il discorso è lo stesso del caso “reale” a cui fondamentalmente mi sono riportato.

Segnalo, ma quest’ultima idea onestamente questa non è mia ma scopiazzata un po’ dalla rete (anche se io sono più chiaro di wikipedia…, la prossima volta almeno il nome del fisico cambiatelo :D) che se invece la coda è lunga e il fisico aspetta, allora noterà che il nostro ascensore verrà il 50% delle volte dall’alto e il 50% delle volte dal basso.

Il motivo mi pare ovvio, ed è che muovendosi l’ascensore sempre alla medesima velocità, il tempo che intercorre tra un passaggio “verso l’alto” ed uno “verso il basso” (sale – scende) non è uguale a quello che intercorre tra un passaggio “verso il basso” e uno “verso l’alto” (scende – sale) in quanto il “terzo piano” non è il centro (ESSENDOLO INVECE IL 4°).

Quindi i conteggi fatti su base temporale non sono equiprobabili e portano alle conseguenze indicate..

P.S. Personalmente, in questo secondo modello con tutta questa gente io cambiavo palazzo (manco e formiche direbbero dalle mie parti !) o usavo le scale come Rudy.

P.S. io abito al piano terra e non posso fare il fisico…, anche se in ufficio sono al “3°” piano di un palazzo di 7 piani… ma li gli ascensori sono 4…

Che dire, io abito al primo piano anche perché non sopporto gli ascensori... la versione di ***trentatre*** è anche piuttosto interessante:

Indichiamo George Gamow con GG e l’ascensore con A e assumiamo che

a) l’edificio ha 7 piani <u>incluso il piano terra</u> , indicati dal basso con P0, P1, P2, P3, P4, P5, P6

b) al mattino tutti chiamano A <u>solo per uscire</u> (cioè per raggiungere P0) ; non c’è traffico interno fra i vari piani nè persone che entrano in casa da P0

c) si suppone che all’inizio A sia fermo in P0

Ne segue

d) <u>A può avere pause – stare fermo senza clienti – solo in P0</u> – infatti A sta fermo solo se vuoto, ma quando sale perché Pn lo chiama, una volta caricata la persona la deve portare in P0

e) una *corsa* di A comprende una salita (da P0 fino a un dato piano Pn) seguita da una discesa (fino a P0) senza zig-zag intermedi e senza pause – infatti se A è chiamato da Pn i casi sono

   I. A sale, Pn è più alto di A : A continua a salire e serve Pn mentre sale

   II. A sale, Pn è più basso di A : A continua a salire e servirà Pn nella fase di discesa

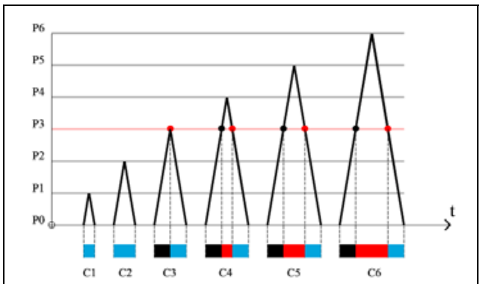
   III. A scende, Pn è più alto di A : A continua a scendere e serve Pn alla prossima corsa

   IV. A scende, Pn è più basso di A : A continua a scendere e servirà Pn mentre scende – in ogni caso ogni fase di salita inizia da P0, ed è seguita da una discesa fino a P0--

f) A impiega un tempo costante per muoversi fra due piani vicini – conseguenza di d), e)

Le corse possibili differiscono fra loro solo per il piano più alto Pk raggiunto, con k = 1, 2, ...6 .

In figura sono rappresentate le possibili corse (C1, C2, ... C6). In orizzontale l'asse dei tempi, in verticale i piani.



9 *La figura di* ***trentatre***.

Supponiamo che GG chiami A in corrispondenza di una corsa di tipo C5; la chiamata di GG può avvenire :

- mentre A sta salendo ed è più basso di P3 (zona nera) : GG sale su A in salita (pallino nero)
- mentre A è più alto di P3 (zona rossa) : GG sale su A in discesa (pallino rosso)
- mentre A sta scendendo ed è più basso di P3 (zona blu) : GG ha perso la corsa e prenderà la prossima.

Pertanto la probabilità p_5 di salire con A in salita (A *puzzolente*) nel caso C5 è uguale al rapporto (nero) / (nero+rosso) = 3 / 7. In generale per la corsa Cn (alta n piani) sarà $p_n = \dfrac{3}{3+2(n-3)} = \dfrac{3}{2n-3}$.

Pertanto $p_1 = p_2 = 0,\ p_3 = 1,\ p_4 = 3/5,\ p_5 = 3/7,\ p_6 = 3/9$ (le corse C1 e C2 non possono servire GG e vanno scartate).

Resta da stabilire con quale probabilità possono presentarsi le varie corse utili, cioè C3, C4, C5 e C6.

Se f_n: probabilità della corsa Cn e $\sum_{n=3}^{6} f_n = 1$ allora la probabilità di A in salita è $q = \sum_{n=3}^{6} p_n\ f_n$.

Il tipo di corsa, cioè l'altezza massima raggiunta da A, dipende dalle chiamate (casuali) che avvengono mentre A sale. I due casi estremi sono :

a) l'edificio è pochissimo abitato: le chiamate ad A sono molto rade, A compie una intera corsa con un solo occupante, ogni corsa ha la stessa probabilità delle altre, le frequenze f_n sono uguali fra loro:

$f_3 = f_4 = f_5 = f_6 = 1/4$ e quindi $q = \sum_{n=3}^{6} p_n / 4 = (1+3/5+3/7+3/9)/4 = 62/105 = \mathbf{0.590...}$

b) l'edificio è pieno di gente: le chiamate ad A sono molto frequenti, mentre A sale ci sono molte chiamate fra le quali è molto probabile ce ne siano dal piano P6, le frequenze f_n tendono a 0 salvo $f_6 \to 1$: $f_3 = f_4 = f_5 \to 0$, $f_6 \to 1$ e quindi $q = p_6 f_6 = 3/9 = \mathbf{0.333...}$

Proviamo a calcolare in dettaglio; è più semplice derivare le probabilità relative di tutte le corse (inclusa C1 e C2) e poi ricavare quelle delle sole corse utili. Durante una salita di A avvengano *N* chiamate (*N* è una variabile aleatoria). Le chiamate possono distribuirsi nell'intervallo temporale [0.. 6] che corrisponde alla massima escursione di A. La probabilità che tutte le *N* chiamate cadano nell'intervallo [*t* .. *t* + *k*] di lunghezza *k* è $(k/6)^N$.

La corsa è di tipo Cn se tutte le *N* chiamate avvengono mentre A è sotto Pn ma non tutte sono sotto P(n-1). Pertanto le probabilità g_n delle corse Cn sono

$$g_1 = (1/6)^N$$

$$g_2 = (2/6)^N - (1/6)^N = (2^N - 1)/6^N$$

$$g_3 = (3/6)^N - (2/6)^N = (3^N - 2^N)/6^N$$

$$g_4 = (4/6)^N - (3/6)^N = (4^N - 3^N)/6^N$$

$$g_5 = (5/6)^N - (4/6)^N = (5^N - 4^N)/6^N$$

$$g_6 = 1 - (5/6)^N = (6^N - 5^N)/6^N$$

Vale la $\sum_{n=1}^{6} g_n = 1$: le probabilità g_n <u>includono le corse C1 e C2 che non ci interessano</u>. Vanno quindi *normalizzate* alle sole corse utili C3...C6 moltiplicandole per il fattore *s* tale che $\sum_{n=3}^{6} f_n = \sum_{n=3}^{6} s\, g_n = 1$ cioè $s = 1/\sum_{n=3}^{6} g_n = \frac{6^N}{6^N - 2^N}$ da cui

$$f_3 = (3^N - 2^N)/(6^N - 2^N)$$

$$f_4 = (4^N - 3^N)/(6^N - 2^N)$$

$$f_5 = (5^N - 4^N)/(6^N - 2^N)$$

$$f_6 = (6^N - 5^N)/(6^N - 2^N).$$

La probabilità di prendere A <u>in salita</u> è quindi

$$q(N) = \sum_{n=3}^{6} p_n\ f_n = f_3 + (3/5) f_4 + (3/7) f_5 + (3/9) f_6 = \frac{3}{6^N - 2^N}\left(-\frac{2^N}{3} + \frac{2}{15}3^N + \frac{2}{35}4^N + \frac{2}{63}5^N + \frac{6^N}{9} \right)$$

Per $N = 1$ è $f_n = 1/4$ per ogni *n*, per $N \to \infty$ è $f_n \to 0$ salvo $f_6 \to 1$ e valgono per *q* i valori limite già visti.

Per un numero di chiamate medio $N = 2.3919$ vale la $q(N) = 1/2$, e quindi è equiprobabile prendere A in salita o in discesa.

Prima di passare oltre, vediamo ancora cosa dice ***Cid***: questa estate non ha molto tempo per la matematica ed ha analizzato solamente qualcuno dei casi proposti.

> Se il palazzo è scarsamente abitato, è abbastanza improbabile che quando George chiama l'ascensore vi sia un'altra persona che desidera usarlo, quindi l'ascensore sarà quasi sicuramente al piano in cui l'ha lasciato l'ultima persona che l'ha utilizzato, quindi a piano terra visto che tutti a quell'ora prendono l'ascensore per andare al lavoro e per andare al lavoro devono scendere al piano terra e uscire dal palazzo. Per cui è altamente probabile che quando George chiama l'ascensore giunga un ascensore che sta salendo.
>
> Se il palazzo è densamente abitato è altamente probabile che quando George chiama l'ascensore contemporaneamente facciano la stessa cosa anche altre persone, ma se l'ascensore giunge dai piani superiori non si aprirà in quanto sarà al limite di capienza essendo pieno come un uovo. Per cui si aprirà al suo piano solo se sta salendo, in quanto in questo caso sarà vuoto visto che tutti chiamano l'ascensore solo per scendere per andare al lavoro. Per cui in questo caso la probabilità che giunga un ascensore che sta salendo è ancora più alta di prima.

Bene, direi che coincide con i risultati ottenuti dagli altri. Vediamo il problema seguente.

4.2.2 Valor medio

Questo è uno di quei problemi che leggo solo il titolo e gli affibbio tre birre, ed il Capo protesta: "non è di probabilità!!" Colpa sua, veramente. Guardate solo che razza di problema:

> *State partecipando a un gioco a premi dedicato ai campioni di calcolo mentale. Il nostro conduttore ha un sacchetto tipo tombola con dentro i numeri da 1 a 100; ne estrae dieci, e il vostro compito è, partendo da quei numeri, di trovare due insiemi disgiunti (l'unione dei quali non sia necessariamente tutto l'insieme iniziale: potete usarne meno) aventi la stessa somma. Avete un minuto di tempo.*
>
> *Supponendo che voi siate velocissimi a far di conto, quali sono le probabilità che avete di vincere? E se il conduttore potesse scegliere qualche numero in funzione di quelli già estratti?*
>
> *La seconda versione del gioco "per persone normali" consiste nell'estrarre meno numeri, rendendo la cosa più facile. Cosa succede se ne vengono estratti nove? E con otto?*

FrancoZ ha trovato il problema in rete, e non solo, ci ha raccontato di averlo proposto al forum di Base5 tempo fa. Poveri noi. Diamo la parola a ***Millenium Bug***, che si è dato da fare per risolverlo.

> Vediamo prima di tutto se esistono sempre i due insiemi di numeri con somma uguale.
>
> Dati 10 numeri tra 1 e 100, contiamo gli insiemi (e quindi le somme) che posso fare:
>
> - singoli numeri: 10
>
> - coppie di numeri: 10 x 9 / 2
>
> - triplette di numeri: 10 x 9 x 8 / 3!
>
> - quaterne di numeri: 10 x 9 x 8 x 7 / 4!
>
> … etc.
>
> Il risultato è 1022. Anche senza fare la somma, si trova facilmente pensando i 10 numeri in una fila ordinata: ogni numero lo posso scegliere o no, quindi ho 2^{10} possibilità di somma; escludo quelle 2 in cui li sceglierei tutti o nessuno e il gioco è fatto.

Ora, la somma di al più 9 numeri scelti tra 1 e 100 varia da 1 a 864 (=92+93+…+100).

Quindi tra le 1022 somme possibili ne ho sempre almeno 158 (=1022-864) uguali.

Al che mi potreste obiettare: certo, ma per vincere il gioco devo fare la somma di due insiemi disgiunti. Chi mi garantisce che queste somme uguali non usino in parte gli stessi numeri? Ma questo è un falso problema: basta togliere da ogni insieme i numeri corrispondenti e ottengo un'altra coppia di somme uguali (semplificate); qualcosa di analogo a quando semplifico i fattori comuni nelle frazioni.

In definitiva, le somme uguali così semplificate saranno molte meno di 158, ma comunque almeno una ce l'ho sempre.

Se sia facile trovarla in meno di un minuto, quello è un altro paio di maniche[20].

In ogni caso il conduttore non ha modo di evitare la vincita, anche scegliendo ad arte tutti i numeri: può solo complicarci la vita escludendo le combinazioni banali, ad esempio impedendo di darci il 57 e il 47 se ha già estratto il 52 e il 5.

Pensiamo intanto al caso in cui il conduttore (infame) finge di semplificarci la vita riducendo i numeri estratti.

Ripetendo semplicemente il ragionamento precedente, ricavo che con 9 numeri ho 2^9-2=510 possibili somme che variano tra 1 e 772. E qui ci siamo già giocati la certezza.

Con 8 numeri peggio: 2^8-2=254 possibili somme che variano tra 1 e 679.

Del resto era chiaro a tutti[21] che per ogni numero in meno a disposizione è forse più facile (meglio dire più veloce) trovare tutte le combinazioni di somma, ma è molto più difficile avere i numeri giusti.

Ancora una volta i nostri solutori hanno i coltelli affilati. Pensate che ***Cid***, dopo aver detto di non aver tempo e che avrebbe mandato solo una risposta, ci ha scritto:

La probabilità di vincere è sempre pari al 100% (indipendentemente dal comportamento del conduttore). Per avere probabilità di vincere inferiore al 100% occorre estrarre meno di 8 numeri.

In generale, se il sacchetto contiene i numeri da 1 a N: si ha probabilità di vincere minore del 100% solo se ne vengono estratti non più di $(1+Int(Log_2 N))$.

<u>Motivazione della risposta</u>

Se prendo tutte le potenze di 2 comprese tra 1 e N ho esattamente un insieme di $(1+Int(Log_2 N))$ numeri, tali che non sia possibile trovare due sottoinsiemi aventi la stessa somma.

Qualunque altro numero, compreso tra 1 e N può essere ottenuto sommando un sottoinsieme di questo insieme di potenze di 2.

Chiaramente, questa non è una dimostrazione che sia impossibile trovare un insieme differente avente più di $(1+Int(Log_2 N))$ numeri e tale che non sia possibile trovare due suoi sottoinsiemi aventi la stessa somma; ma, pur senza

[20] Non ho capito se il problema richiede di dimostrare l'esistenza della soluzione o di determinare un algoritmo efficiente per trovarla in meno di un minuto. Approfitto della nebbia che anche a luglio aleggia sui problemi di RM e faccio perdere le mie tracce dopo aver scelto la prima opzione.

[21] Esclusi evidentemente quelli che giocano assiduamente a Lotto e affini.

dimostrarlo, lascia intuire che la risposta è corretta. Per cui, essendo $(1+Int(Log_2 100))=7$ ottengo che estraendo più di 7 numeri mi risulta sempre possibile trovare due sottoinsiemi disgiunti aventi la stessa somma.

Quindi la probabilità di vincere è sempre del 100%, sia che estragga 8 o 9 o 10 numeri.

Ottimo. Miracolosamente questo numero di agosto è andato, anche se pensavamo che sareste stati tutti in spiaggia. A rileggerci a settembre! (Non è una minaccia!).

5. Quick & Dirty

Ve lo diciamo? Massì, ve lo diciamo. Rubato a Ian Stewart, ma cambiati i nomi dei personaggi. Attenti, che la soluzione è molto "Dirty" (no, niente altri aiutini, ho detto anche troppo).

Sul pianeta PluffCiuff (sferoide oblato, tranquilli: certe perfidie le teniamo per un'altra sezione), nella galassia di Ademordna (orpo, suona bene! Potremmo riciclarla per un racconto di fantascienza...) vivono due soli esseri senzienti, Pluff e Ciuff. Pluff vive su un vasto continente in mezzo al quale c'è un enorme lago, Ciuff vive su un'isola in mezzo al lago. Né Pluff né Ciuff sanno nuotare, volare o teletrasportarsi: il loro unico modo di spostarsi è camminare sul suolo asciutto. Eppure, ogni mattina uno dei due va a fare colazione a casa dell'altro. Come fanno?

6. Pagina 46

Parte [1]

L'asserzione segue dall'identità:

$$(a^2+b^2)(a_1^2+b_1^2)=(aa_1+bb_1)^2+(ab_1-ba_1)^2.$$

Parte [2]

Si dimostra per prima cosa che nessun numero della forma $4n+3$ può essere espresso come somma di due quadrati.

Infatti, il quadrato di qualsiasi pari può essere espresso come $4k$, mentre il quadrato di qualsiasi dispari può essere espresso come $4k+1$, in quanto $(2a+1)^2=4(a^2+a)+1$.

Questo significa che la somma dei quadrati di due numeri pari manterrà la forma $4n$, la somma dei quadrati di due numeri dispari avrà la forma $4n+2$ e, infine, la somma di un numero pari e un numero dispari avrà la forma $4n+1$; questo significa quindi che un numero nella forma $4n+3$ non può essere la somma di due quadrati.

È più complesso mostrare che ogni numero primo nella forma $4n+1$ può essere espresso come somma di due quadrati. Sia il primo p della forma $4n+1$, dal problema del mese scorso sappiamo che un qualche multiplo di p può essere espresso come somma di due quadrati. Esistendo un intero x tale che p divide x^2+1, esiste un m tale che:

$$mp=x^2+1. \qquad \texttt{[1]}$$

Dall'esistenza del divisore p discende che $x<p$, il che implica $x^2+1<p^2$ e quindi possiamo assumere che in `[1]` sia $m<p$, per una corretta scelta del valore x. Se $m=1$ la dimostrazione è completa, quindi nel seguito assumeremo $m\neq 1$.

Se m è pari, lo deve essere anche x^2+1, da cui discende che x deve essere dispari.

Allora possiamo scrivere:

$$\frac{m}{2}p=\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2.$$

Ossia, esiste un $m^1=\frac{m}{2}$ tale che:

$$m^1p=x_1^2+y_1^2.$$

Se m^1 è ancora pari, allora x_1 e y_1 sono o entrambi pari o entrambi dispari; in entrambi i casi, seguendo lo stesso ragionamento, possiamo determinare un intero $m^{11}=\frac{m^1}{2}$ tale che:

$$m^{11}p=x_2^2+y_2^2.$$

Se ora m è una potenza di 2, allora la prova si conclude in modo ovvio, quindi considereremo il caso in cui m è dispari, al quale il problema si riduce se m non è una potenza di 2: possiamo quindi porre $mp=x^2+y^2$.

Siano x_1 e y_1 i minimi valori assoluti dei resti[22] della divisione di x e y per m:

$$x=mr+x_1,$$
$$y=ms+y_1.$$

Allora, $|x_1|$ e $|x_2|$ sono entrambi strettamente minori di $\frac{m}{2}$ (l'uguaglianza non può valere in quanto m è dispari) e possiamo scrivere:

$$mp=x^2+y^2=\left(m^2r^2+2mrx_1+x_1^2\right)+\left(m^2s^2+2msy_1+y_1^2\right)$$

Si vede facilmente che $x_1^2+y_1^2$ è divisibile per m, ossia $x_1^2+y_1^2=mn$, e che $n<\frac{m}{2}$, in quanto[23]:

$$mn=x_1^2+y_1^2<\left(\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{2}\right)^2=\frac{m^2}{2}.$$

Inoltre, notiamo che $n\neq 0$, perché in caso contrario x e y sarebbero divisibili per m e $mp=x^2+y^2$ sarebbe divisibile per m^2, il che è impossibile siccome p è primo e m è diverso da 1 e minore di p.

Mostreremo ora che np può essere espresso come la somma dei quadrati di due interi.

Dall'identità ricavata alla **Parte [1]** abbiamo:

[22] Si noti che x_1, y_1 o anche entrambi possono essere interi negativi.

[23] È utile notare, nel caso si debba iterare la dimostrazione, che $n=p-mr^2-2rx_1-ms^2-2sy_1$.

$$mn \cdot mp = m^2 np = \left(x^2 + y^2\right)\left(x_1^2 + y_1^2\right) = \left(xx_1 + yy_1\right)^2 + \left(xy_1 - yx_1\right)^2.$$

Ma essendo $x = mr + x_1$ e $y = ms + y_1$, i numeri:

$$\begin{aligned} xx_1 + yy_1 &= mrx_1 + x_1^2 + msy_1 + y_1^2 \\ &= mrx_1 + msy_1 + \left(x_1^2 + y_1^2\right) \\ &= m\left(rx_1 + sy_1 + n\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy_1 - yx_1 &= mry_1 + x_1 y_1 - msx_1 - x_1 y_1 \\ &= m\left(ry_1 - sx_1\right) \end{aligned}$$

sono entrambi divisibili per m : quindi, otteniamo:

$$np = \left(\frac{xx_1 + yy_1}{m}\right)^2 + \left(\frac{xy_1 - x_1 y}{m}\right)^2,$$

ossia np è una somma di quadrati.

Se ora abbiamo $n = 1$ la proposizione è dimostrata. In caso contrario possiamo, utilizzando esattamente lo stesso metodo, trovare un $n_1 < n$ tale che $n_1 p$ possa essere espresso come somma dei quadrati di due interi; se anche $n_1 \neq 1$, possiamo ripetere il processo per $n_2 < n_1$ e così via; la progressione sarà strettamente decrescente, e terminerà con un $n_i = 1$; quindi, potremo scrivere $1 \cdot p = X^2 + Y^2$, che è la tesi.

Parte [3]

Utilizzando le prime due parti, si dimostra facilmente che se un numero composto N contiene fattori primi della forma $4n + 3$ solo a potenze pari, allora N può essere espresso come somma di due quadrati.

Nota la fattorizzazione di N nella forma indicata, potremo esprimerlo come prodotto $P^2 \cdot Q$, dove tutti i fattori primi di P sono nella forma $4n + 3$, mentre tutti i fattori primi dispari di Q sono nella forma $4n + 1$. Essendo $2 = 1^2 + 1^2$, dai teoremi della **Parte [2]** abbiamo che tutti i fattori primi di Q possono essere espressi come somma dei quadrati di due interi. In questo caso, ricordando la **Parte [1]**, anche Q può essere espresso nella forma $Q = x^2 + y^2$; ma da questo, si ricava che anche

$$N = p^2 \cdot Q = (px)^2 + (py)^2$$

può essere espresso come somma dei quadrati di due interi. E questo dimostra parte del teorema.

Supponiamo ora il numero composto N contenga un fattore primo p nella forma $4n + 3$ elevato a una potenza dispari, ossia $N = p^{2k+1} \cdot m$, dove m non è divisibile per p. Proveremo che in questo caso N non può essere espresso come somma dei quadrati di due interi.

Infatti, supponiamo che sia $N = x^2 + y^2$, con x e y interi; allora, dopo aver diviso x^2, y^2 e N per il quadrato del massimo comun denominatore di x e y, dobbiamo giungere ad una disuguaglianza del tipo:

$$M = X_1^2 + Y_1^2$$

dove M è ancora divisibile per p, ossia $M = M_1 p$.

Sostituendo a X_1 e Y_1 i loro resti dopo la divisione per p, otteniamo l'eguaglianza $mp = x_1^2 + y_1^2$, in cui $m < p$. Ma qui, come già visto nella **Parte [2]**, p può essere scritto come la somma dei quadrati di due interi, e abbiamo visto che questo non è possibile; questo completa la dimostrazione.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 To infinity, and beyond!

"Qui vive la razza che deve governare il sevagram*".*
Alfred Elton van Vogt,
Le Armi di Isher (parte prima), 1941.
Tr.it. di Ugo Malaguti, Libra Editrice, 1971.

La citazione in testa a questo pezzo, quantomeno nella nostra esperienza, è l'unico posto in cui potremmo tollerare il termine "razza", anche se il buon Ugo poteva forse trovare di meglio (non abbiamo la versione originale, quindi non ci pronunciamo sull'espressione scelta da van Vogt: vale lo stesso commento, nel caso).

Ricordiamo vagamente (ma qui chiediamo conferma) che il gioco di parole in questa frase, pronunciata da un rappresentante di una "razza" (?) extraterrestre, era basato sul fatto che in sanscrito *sevagram* ha due significati: uno è quello di *universo*, a indicare le magnifiche sorti e progressive degli umani; l'altro significato è *aia della fattoria*, probabilmente a significare una visione di scala ben maggiore dell'esistente[24].

L'argomento di cui vogliamo parlare beneficerebbe di un equivalente gioco di parole in una qualche lingua più nota; proviamo a partire dal fatto che *oikos* in greco significa *casa*, e che *ecologia* deriva giustappunto da questo termine; dal momento nel quale iniziamo un'interazione con specie extraterrestri, la nostra *casa* diventa decisamente più grande, e anche se *sevagramologia* suona terribile, probabilmente andrebbe molto meglio per definire quello di cui stiamo parlando.

Come dovreste sapere da un discorso affrontato di recente, uno dei modelli più semplici per definire la crescita delle popolazioni è il cosiddetto ***Modello Malthusiano*** o esponenziale, che ci permette di studiare le conseguenze di una crescita senza limiti di una popolazione; come avemmo a dire, chi crede che un esponenziale sia per sempre o è un pazzo o è un economista: ***Verhulst*** riesce a trovare qualcosa di più sensato utilizzando il ***modello logistico***.

Tutti questi metodi, comunque, partono dal principio che la popolazione che stiamo studiando sia sostanzialmente concentrata in un punto; un primo, timido passo verso un qualcosa che tenga conto della distribuzione (o meglio, della *densità*) della popolazione viene realizzato decisamente tardi: per la precisione, bisogna aspettare il 1920, quando ***Raymond Pearl*** e ***Lowell J. Reed*** sviluppano il loro modello, cercando di predire la crescita della popolazione statunitense.

Il 1920 deve essere stato un gran bell'anno per la matematica dell'ecologia: infatti, è anche l'anno in cui ***Alfred J. Lotka*** e ***Vito Volterra*** sviluppano il modello che prende il loro nome e che, come abbiamo visto, riesce a trovare le soluzioni di una interazione multispecie in rapporto preda-predatore e inserisce la *competizione* nel modelli: tutti questi modelli sono (l'abbiamo studiato nel caso più complicato) basati su una serie di equazioni differenziali della quale cerchiamo i punti di equilibrio e ne analizziamo la stabilità.

In tutti, comunque, l'interazione tra i membri delle popolazioni (sia questa interazione a scopo riproduttivo o nutrizionale[25]) era basata su una legge derivata dalla chimica: se i

[24] Condensabile in un'espressione piuttosto volgare in italiano con un riferimento alla distanza raggiungibile dalla minzione del maschio della specie in esame. Per i due significati di *sevagram*, ci pare di ricordare che ne siamo debitori a Riccardo Valla, in una fresca libreria torinese che portava lo stesso nome (no, non si chiamava "Riccardo"! Si chiamava "Sevagram"!).

[25] Dove basta dire *Mantide Religiosa* per capire che la "o" ha valore inclusivo.

reagenti sono ben mescolati tra di loro (e presumiamo debbano collidere tra di loro per reagire), allora il rateo di reazione è proporzionale al prodotto della concentrazione dei reagenti; il che è abbastanza logico, visto che se non si incontrano le molecole non reagiscono.

Esistono però situazioni, in ecologia, in cui l'assunto della buona miscelazione non può essere accettato; ossia, bisogna introdurre un *modello spaziale* con *interazioni locali*; questo può causare dei grossi guai dal punto di vista del calcolo, mettendo un notevole disordine nei punti di equilibrio del sistema studiato attraverso la miscelazione uniforme.

Qui, i primi studi li hanno fatti i biologi, in modo sperimentale: a partire dalla curiosa osservazione di una specie che si *estingueva continuamente* su scala locale ma grazie alle migrazioni riusciva a sopravvivere, ***Huffaker*** nel 1954 mette insieme un reticolo di arance e palle di gomma, popolando questo universo con due specie di infestatori: uno (*Eotetranychus sexmaculatus*) che alligna nelle arance, l'altro (*Typlodromus occidentalis*) predatore del primo: l'interessante conclusione è che, se le palle di gomma erano distribuite in modo uniforme, le due specie riuscivano a convivere, mentre se erano ammassate in una determinata zona, la "bestia maculata" si estingueva (causando, per la soluzione banale dell'equazione di Lotke-Volterra, l'estinzione anche dell'"occidentale").

Quindi, tenere conto della distribuzione spaziale diventa importante: ***Levins***, nel 1969, sviluppa un modello ***implicitamente spaziale***: ossia, localmente le cose vanno come al solito, ma quando una popolazione si estingue in una zona, quella zona può essere ricolonizzata dalle zone limitrofe: il motivo dell'*implicitamente* nasce dal fatto che tutte le zone hanno pari probabilità di colonizzare una zona in cui ci sia stata un'estinzione locale, indipendentemente dalla distanza (insomma, gli alieni hanno il tunnel iperspaziale), e questo falsa il modello portando a zone in cui la popolazione diventa infinita.

Agli inizi degli anni '70, ***Spitzer*** e ***Dobrushin*** (separatamente: il primo negli U.S.A, il secondo in U.R.S.S. E c'era la guerra fredda. Ma di questo parliamo dopo) cominciano a sviluppare quello che si chiama un ***sistema a particelle interagenti***: in pratica, consideriamo un reticolo n-dimensionale sul quale attiviamo un processo stocastico: i diversi siti del reticolo possono passare attraverso un certo numero di stati e cambiano stato in funzione degli stati dei vicini[26]: a questo punto, applicate le vecchie equazioni al modello e il gioco è (quasi) fatto.

"Quasi" nel senso che integrarle può diventare complicato, per non parlare dell'analisi delle condizioni di equilibrio: il "guaio" (per i teorici) di questi schemi è che sono studiabili solo per via numerica.

Ma come si introduce una cornice spaziale nei modelli ecologici? Ripartiamo un attimo dall'equazione logistica:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

dove $N(t)$ rappresenta la popolazione, r il rateo intrinseco di crescita (ossia il massimo rateo di crescita per rappresentante della specie) e K la capacità, ossia la popolazione all'equilibrio non banale (che sarebbe l'estinzione).

Il modo più semplice per introdurre lo spazio nei modelli logistici è il metodo della cosiddetta *meta-popolazione*, in cui un numero infinito di siti sono legati tra di loro onde permettere la migrazione; nelle prime formulazioni, come dicevamo, tutti i siti sono

[26] Se anche a voi questo ricorda "Life" o gli "automi cellulari" di Conway, siamo pienamente d'accordo con voi: però, non ci ricordiamo se è venuto prima l'uovo o la gallina, o meglio se prima Conway o Dobrushin.

identicamente accessibili, ossia la migrazione è *globale* e il modello è *implicitamente spaziale*, in quanto le distanze tra i siti non sono prese in considerazione.

In questo ambiente, l'equivalente del modello logistico è il cosiddetto *Modello di Levins*: se $u(t)$ rappresenta il *rateo di colonizzazione*, ossia la frazione di siti occupati, possiamo dire che:

$$\frac{du}{dt} = \lambda u(1-u) - u\,;$$

è interessante notare che qui esiste una soluzione non banale di equilibrio quando il parametro λ è maggiore di 1.

Il modello a dispersione globale si può complicare introducendo, nella "legge dei reagenti", un *campo efficace* prodotto dalle altre particelle interagenti (ossia dagli altri siti colonizzati: somiglia a un'esplosione molto calma) e procedere quindi a fare i conti "normalmente". È chiaro che un'idea del genere poteva venire solo ai fisici...

Il modello immediatamente più complicato è *esplicitamente spaziale*, ossia tiene conto della distanza tra i siti, qui il modello non è più quello dei reagenti, bisogna usare le equazioni di *reazione-diffusione* di ***Fischer***: la crescita logistica, in un modello esplicitamente spaziale, dipende allora dall'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u(1-u) - u\,,$$

ed è abbastanza evidente la parentela con quella vista prima; si noti che qui abbiamo utilizzato le derivate parziali in quanto la funzione u dipende non solo dal tempo, ma anche dallo spazio: a secondo membro, la derivata seconda che compare è giustappunto rispetto allo spazio (e quindi è un'accelerazione di propagazione); D è noto come *coefficiente di diffusione*.

Il cercare di far sparire in un modo o nell'altro la derivata seconda vi porta a delle equazioni integro-differenziali: qui, l'equivalente dell'equazione di Fischer è una cosa del tipo

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u(x,t) + \lambda(1-u(x,t))\int k(x,y)u(y,t)dy,$$

dove abbiamo introdotto una *densità di probabilità* $k(x,y)$ che descrive la colonizzazione di un sito vacante in x da parte di un sito occupato in y; normalmente dipende solo dalla distanza tra x e y, ma nulla vieta, se queste cose vi divertono, di inventare oggetti decisamente più complicati.

Il bello del modello a particelle interagenti è che vi permette facilmente di introdurre le interazioni locali: complicandoci la notazione, possiamo definire l'insieme dei valori che può assumere un sito (insomma, la sua popolazione) con E, e descrivere la posizione dei siti (generalizziamo? massì, generalizziamo: d dimensioni!)[27] in un reticolo Z^d, e a questo punto l'evoluzione del sistema diventa un processo (stocastico, sempre per restare sulle generali) in E^{Z^d}, con la dinamica del modello governata da una serie di funzioni (i *ratei* di cui sopra) che descrivono i cambiamenti del sito in funzione degli stati dei vicini;

[27] Il motivo della generalizzazione è che potreste lavorare in uno *spazio delle fasi*. O avere dei vincoli per cui siti spazialmente lontani sono più facilmente raggiungibili di altri: piuttosto che passare dalla Cintura degli Asteroidi per andare a litigare con i Gioviani, saliamo sopra l'eclittica e andiamo a litigare su Plutone, o cose del genere...

queste funzioni sono, di solito, degli esponenziali (negativi), il che significa che gli intertempi tra gli eventi seguono una distribuzione di Poisson.

Sembra una cosa incredibilmente complicata, ma si chiarisce meglio a parole che con le formule: in un reticolo di interi d-dimensionale (il nostro universo), abbiamo due stati, "libero" o "occupato", quindi $E = \{0,1\}$; un sito nello stato "libero" diventa occupato con una velocità pari a λ volte la frazione di vicini (non necessariamente "i più vicini": in un certo raggio) che sono nello stato "occupato", mentre il rateo di estinzione (ossia dei siti che passano dallo stato di "occupato" a quello di "libero") è normalizzato a 1 (e qui, la somiglianza con "Life" è a dir poco sospetta...).

Un dubbio che potrebbe sorgere è cosa c'entri l'equazione integro-differenziale. ***Durrett*** ha dimostrato, nel 1994, che se voi prendete il reticolo e decidete che la distanza tra i siti vicini è ε e i siti vicini si colonizzano a vicenda ad un rateo $\frac{\varepsilon^2}{2}$, allora tutto il sistema converge ad una funzione di reazione-diffusione per cui $D = \frac{1}{2}$ quando $\varepsilon \to 0$; insomma, sembra che l'unica differenza tra le equazioni di reazione-diffusione e le integro-differenziali sia che nelle prime gli individui fanno tanti piccoli passi durante la loro vita per espandersi (l'esempio classico in questi casi sono le amebe, o lo zooplancton), mentre nel modello integro-differenziale fanno un enorme balzo all'inizio della loro vita e poi si fermano per il resto del tempo (dunque, vediamo... anche qui si dovrebbe trovare un esempio non troppo complicato... a nessuno viene in mente niente? Giusto! Ci sono un mucchio di piante che si comportano così). Infine, una cosa semplice: se la distribuzione iniziale è costante nello spazio, tutti e due i modelli si riducono a quello di Levins.

In pratica, almeno sin quando consideriamo una sola specie, il processo "di contatto" è il più semplice, e ci permette di descrivere con ragionevole correttezza l'evolversi delle popolazioni; il fattore spaziale viene inserito considerando una dipendenza dalla densità della dinamica delle nascite: solo i siti vuoti, infatti, possono essere colonizzati.

In questo caso esistono dei valori critici (dipendenti dalla geometria degli spazi colonizzabili) oltre i quali la specie sopravvive, altrimenti si estingue; attenzione che quando parliamo di "geometria" non intendiamo solitamente un bel reticolo regolare facilmente descrivibile, tant'è che qualcuno ha utilizzato per descrivere "dove possono andare" le popolazioni i cosiddetti *Modelli a Percolazione*: se è possibile la percolazione[28] allora ci si espande, altrimenti...

...Altrimenti, bisogna introdurre le stesse variazioni anche nel *tasso di mortalità*: un'alta densità popolativa, anche se garantisce molte nascite, non è necessariamente un posto molto salubre per viverci, quindi ci si aspetta che la mortalità salga; il modello è esattamente lo stesso della natalità, solo che qui la mortalità dipende dalla quantità di vicini occupati (mentre nella natalità si contavano quelli liberi). Qui il risultato interessante (e anche abbastanza logico, ma matematicamente complesso da dimostrare) è che se il numero di posti liberi (che influenzano le nascite) eguaglia quello dei posti occupati (che influenzano le morti), allora esistono degli equilibri non banali (insomma, "si sopravvive": pessima battuta) per *qualsiasi* valore di $\lambda > 0$, in particolare esiste sempre l'equilibrio in cui i siti vengono occupati con probabilità $\frac{\lambda}{1+\lambda}$; insomma, se ci passate la battuta, abbiamo trovato l'equazione dello sviluppo sostenibile (beh, quasi... non è così facile, in realtà).

Adesso arriva la domandina: secondo voi, non manca qualcosa?

[28] Se non vi ricordate cos'è, trovate un rapido ripasso sul PM "Roba che cola", RM117, Ottobre 2008.

Tutti i modelli che abbiamo trattato sinora, per quanto complicati siano, lavorano in un regime (mai parola fu più azzeccata) di *singola specie*: non abbiamo introdotto la concorrenza! Insomma, quando arrivano gli alieni?

Cominciamo da un modello semplice, la cosiddetta ***Competizione di tipo Lotka-Volterra***: vi ricordate le equazioni?

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \dfrac{N_1}{K_1} - \alpha_{12} \dfrac{N_2}{K_1}\right) \\ \dfrac{dN_1}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \dfrac{N_2}{K_2} - \alpha_{21} \dfrac{N_1}{K_2}\right) \end{cases}$$

Abbiamo cambiato un po' i simboli, ma il significato dovrebbe essere chiaro; l'interazione tra le due specie è data dai parametri α_{ij}, e il fatto che questi abbiano dei segni negativi davanti implica che l'interazione è *competitiva*, ossia che la presenza di una specie riduce la densità dell'altra; notate che qui il modello è invertibile, ossia ciascuna delle due "fa danni" all'altra: non esistono un predato e un predatore.

Ci si permetta una battuta: qui, contrariamente a quanto dicono gli economisti, non importa quanto siano grandi i parametri K_i, ma piuttosto il loro rapporto; si dimostra piuttosto facilmente che anche se le specie sono competitive, con $\alpha_{12} < \dfrac{K_1}{K_2}$ e $\alpha_{21} < \dfrac{K_2}{K_1}$, allora è possibile la *coesistenza* tra le due specie; messa in parole *molto* povere, il fatto nasce dalla considerazione una specie "intralcia sé stessa" più di quanto venga intralciata dall'altra specie, quindi la competizione diventa marginale[29]; in pratica, il risultato è che nonostante la competizione, esiste un equilibrio stabile in cui entrambe le specie hanno densità positiva.

Notate che qui, contrariamente alla forma "classica" delle equazioni di Lotka-Volterra, il fatto che i parametri siano "sballati" non porta alla mutua estinzione, ma alla predominanza di una delle due specie, con l'estinzione dell'altra; ad esempio, se $\alpha_{12} > \dfrac{K_1}{K_2}$ e $\alpha_{21} < \dfrac{K_2}{K_1}$, allora la specie 2 *esclude* la specie 1 e diventa dominante (viceversa se invertite le disuguaglianze); il caso interessante, qui, diventa quello in cui $\alpha_{12} > \dfrac{K_1}{K_2}$ e $\alpha_{21} > \dfrac{K_2}{K_1}$: una specie escluderà l'altra, ma quale "vinca" dipende unicamente dalle condizioni iniziali: a noi, questa particolare situazione ricorda i "tempi interessanti" della vecchia maledizione cinese.

Scusate, avete visto estrinsecato lo spazio, da qualche parte? Infatti, bisogna aspettare la nascita di RM (insomma, il 1999) perché ***Neuhauser*** e ***Pacala*** trasformino questo in un modello spaziale d-dimensionale, nel quale gli individui muoiono ad un rateo dipendente dalla densità di *entrambe* le specie sui punti vicini del reticolo (sì, qui è proprio un reticolo) e in cui se un sito si libera (secondo una specie) viene immediatamente occupato da un vicino scelto a caso.

Come ci si aspetta, se i parametri di competizione α_{ij} sono molto prossimi allo zero, la coesistenza rappresenta una situazione di equilibrio esattamente come nel modello non spaziale; le cose interessanti (nel senso cinese) saltano fuori quando α_{ij} si avvicina a 1; qui il modello è facile da spiegare (ma difficilissimo da modellizzare): un sito cambia stato passando nello stesso stato di un proprio vicino, scelto a caso. Questo modello mostra una

[29] Non vorremmo buttarla sul politico, ma forse sarebbe il caso...

caratteristica secondo noi interessantissima: per un numero di dimensioni $d < 3$ si ha *segregazione*, ossia si formano delle "sacche" di egemonia delle due popolazioni; invece, per $d \geq 3$, si ha *coesistenza*; ora, questo a noi ricorda qualcosa[30].

Una cosa interessante che emerge da tutto questo è che la coesistenza è molto più fragile da raggiungere nel modello spaziale che in quello non spaziale; la cosa effettivamente stupisce, visto che ci si aspetterebbe che lo spazio disponibile possa essere utilizzato come un'ulteriore nicchia ecologica e quindi diventi un facilitatore della coesistenza.

Contrariamente a quello che potrebbe pensare ogni "Convivente con la Guerra Fredda", la situazione di coesistenza, una volta raggiunta, sembra un giocattolino simpaticamente stabile; la cosa ha sempre intrigato i matematici, che la trovano complessa da spiegare, ma è di un'evidenza lampante per qualsiasi cultore della fantascienza. In ogni romanzo di fantascienza che si rispetti, gli alieni cattivi sono degli insetti che vivono su un pianeta a bassa gravità. E va sempre a finire che vincono gli umani, perfettamente in grado di sopportare le condizioni del pianeta natale degli esapodi; a meno che...

L'idea è quella di una forma di *competizione-colonizzazione*: senza andare a scavare nei romanzi di fantascienza, alcune specie la praticano anche sulla Terra. Supponiamo due tipi di erba infestante (insomma, che tende ad accaparrarsi tutto lo spazio); la prima ha delle radici molto robuste e lunghissime, il che le permette di essere potentemente avvantaggiata nel ciclo dell'azoto: impoverisce talmente i terreni che la seconda erba proprio non riesce a espandersi, ma in questo modo la prima tende ad essere stanziale; la seconda, invece, produce una quantità di semi semplicemente incredibile, ed è quindi un'ottima colonizzatrice sulle lunghe distanze (tecnicamente, si dice che la maggior parte della biomassa è allocata dalla prima nelle radici, dalla seconda nei semi).

In questo caso, il *Modello del Campo Efficace* diventa:

$$\frac{du_1}{dt} = \lambda_1 u_1 (1 - u_1) - u_1,$$
$$\frac{du_2}{dt} = \lambda_2 u_2 (1 - u_1 - u_2) - u_2 - \lambda_1 u_1 u_2$$

Non fate la faccia spaurita: è un modello di Levins con la specie 1 che rompe le scatole: nella prima equazione si comporta come se ci fosse solo lei (identica al modello di Levins), mentre nella seconda, che definisce la crescita della seconda popolazione, compaiono dei termini di predazione da parte della specie 1 (gli ultimi); non solo ma (la parentesi) tutte e due hanno bisogno dello stesso nutriente.

Cerchiamo di capire cosa succede: dicevamo, specie 1 radici grosse, specie 2, un mucchio di semi.

La specie 1 segue un processo di contatto, colonizzando il terreno a piccoli passi; questo significa che deve essere $\lambda_1 > 1$ (che è il valore critico, dicevamo).

La specie 2, se lasciata in pace (ossia in assenza della specie 1), segue anche lei il processo di contatto dei "piccoli passi", ma se arriva la specie 1 scompare, e in questo caso vince la specie 1.

[30] **Disclaimer**: tutto quanto segue sono elucubrazioni personali di Rudy, assolutamente non supportate da una base di calcolo. Questo fatto che il valore 3 sia così critico, ci ricorda qualcosa: se andate a rivedere il Problema 1 di RM081 (ottobre 2005, "Mi vergogno un po'"), con soluzioni in RM082, trovate un altro caso in cui il valore 3, come dimensione, è critico; lì si trattava di cammini casuali in un reticolo, con probabilità p di girare ad ogni incrocio, e si chiedeva quali erano le probabilità di tornare alla base... A noi sembra ci sia una parentela. Se la trovate, ***non*** pubblicheremo per primi, in quanto ci pare sia una cosa che forse interessa giornali matematicamente molto più seri di noi. Il mese dopo, però, potremmo prenderlo in considerazione (così Rudy evita un altro PM... Pigro!).

Quindi, i semi della specie 2 possono sopravvivere solo se atterrano in una zona "libera" dalla specie 1, e quindi la specie 1 è *superiore* alla specie 2 (qualcuno si ricordi che all'inizio parlavamo di *razze*, per favore... Sì, eticamente la situazione è pessima. Tranquilli, dopo peggiora).

Quindi, l'unico modo che ha la specie 2 per sopravvivere è quello di sviluppare una fortissima capacità riproduttiva; matematicamente, si verifica che la specie 2 diventa dominante se la sua natività è almeno il *quadrato* di quella delle specie 1[31]; il *rescaling*, tra l'altro, sembra mostrare che questo ragionamento funziona (con gli stessi valori) anche nel caso in cui si estrinseca la spazialità.

Liquidiamo un luogo comune, tornando un attimo alla fantascienza? Di solito, gli insetti cattivi respirano cloro, che per noi è decisamente tossico; rapporto inverso per quanto riguarda l'ossigeno.

Spiacente, ma in matematica questo modello è assolutamente banale: ciascuno si colonizza i suoi pianeti, le due specie non interagiscono e se qualcuno vuole farsi del male deve farselo da solo; quindi, si torna ai modelli non competitivi. O meglio, solo se vi limitate alla fantascienza; è intrigante l'idea che, questa volta, la Natura abbia avuto delle idee che ogni *editor* boccerebbe come inutilizzabili.

Supponiamo due tipi di vegetali (i vegetali sono comodissimi in matematica, visto che *stanno fermi*) in grado di generare strutture di rami estremamente intricate e di spettacolare bellezza; la specie 1 ha un estremo bisogno di luce, mentre alla specie 2 la luce dà decisamente fastidio.

Partiamo da uno spiazzo libero; la specie 1, tutta contenta, lo colonizza (alla specie 2 di quel posto illuminato non importa nulla), e comincia a mettere su fronde su fronde; adesso, *sotto* la specie 1, si è creato un bel luogo scuro...Oibò! Ottimo per la specie 2! La quale comincerà a crescere, ruberà nutrienti alla specie 1, la sopravanzerà bloccandole la luce... Già, la luce. La specie 1 sparisce, ma anche la specie 2, colpita dai raggi diretti del sole, deve retrocedere... e ci ritroviamo in uno spazio colonizzabile nuovamente dalla specie 1. Il che non è altro, se ci passate il termine, che una *segregazione dinamica*; in questo caso, la componente spaziale è fondamentale, e si dimostra che una frammentazione eccessiva dell'habitat porta all'estinzione della specie[32].

Visto che parliamo di estinzioni, vi diamo un po' di cibo per la mente: riprendete le erbacce 1 e 2 un attimo. Secondo voi, nel momento stesso nel quale ci si scontra con un cambiamento locale dell'ambiente (ad esempio, carenza di azoto dovuta al fatto che ci sono troppe piante che se lo mangiano), secondo voi, chi si trova peggio?

Uh-uh, la specie più competitiva (nel nostro esempio la specie 1, quella con le radici ipertrofiche); potendo muoversi solo a piccoli passi, ben difficilmente potrà arrivare ad una zona ricca di azoto, mentre la specie 2 (abituata ai lunghi percorsi) avrà decisamente meno problemi; insomma, *la specie dominante è colpita più facilmente dalle variazioni ambientali*; e se state pensando "*Dinosauri*", non avete capito niente. "*Homo Sapiens*", forse, potrebbe essere un pensiero più costruttivo.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

---

[31] *[Nota polemica e personale di Rudy]* Qualche torinese con la mia età ricorda quei tristissimi cartelli "Non si affitta a meridionali"? La "giustificazione" (virgolette d'obbligo) era che, appena insediati, si sarebbero riprodotti peggio delle cavallette. Oggi, questo ragionamento cretino sembra aver solo perso qualche grado di latitudine.

[32] Gli ecologisti non si arrabbino, ma non sempre questo è negativo: chiedete ai fringuelli delle Galapagos studiati da Darwin, che su ogni isola hanno adattato il becco agli specifici semi...