Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 136 – Maggio 2010 – Anno Dodicesimo

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM135 ha diffuso 2587 copie e il 30/04/2010 per Google eravamo in 47'600 pagine.

Il quadro, di N.P.Bogdanov-Belsky è del 1865 e si intitola "*Calcolo a mente*". Se volete provarci, il problema è $\dfrac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}$ ...ma voi, che metodi usate per fare i calcoli quando l'unico ausilio sono le sinapsi cerebrali? Noi ci abbiamo messo più tempo dei mugiki in figura, ma ce l'abbiamo fatta: metodi generali, per favore, non limitatevi al caso particolare.

1. Sublimato all'un per mille

Chi di noi non ha conosciuto biologi che si sono prestati a difendere le teorie razziali; o economisti che hanno trattato come un progresso sociale quella macchina burocratica che fu il corporativismo fascista, o tecnici che hanno considerata l'autarchia come una conquista […].
È di costoro un nuovo genere di reato: il reato di prostituzione della scienza.
(Gustavo Colonnetti, *Pensieri e fatti dell'esilio*)

Articolo 1: *Le razze umane esistono.*

Articolo 2: *Esistono grandi razze e piccole razze.*

Articolo 3: *Il concetto di razza è concetto puramente biologico.*

Articolo 4: *La popolazione dell'Italia attuale è di origine ariana e la sua civiltà ariana.*

Articolo 5: *È una leggenda l'apporto di masse ingenti di uomini in tempi storici.*

Articolo 6: *Esiste ormai una pura "razza italiana".*

Articolo 7: *È tempo che gli italiani si proclamino francamente razzisti.*

Articolo 8: *È necessario fare una netta distinzione fra i mediterranei d'Europa (occidentali) da una parte, gli orientali e gli africani dall'altra.*

Articolo 9: *Gli ebrei non appartengono alla razza italiana.*

Articolo 10: *I caratteri fisici e psicologici puramente europei degli italiani non devono essere alterati in nessun modo.*

Sono i dieci articoli del "*Manifesto degli scienziati razzisti*", datato 14 Luglio 1938; è forse più noto col nome sintetico "*Manifesto della Razza*" e venne pubblicato il giorno successivo sul *Giornale d'Italia*. In realtà nell'elenco sopra riportato non figura il testo completo degli articoli, ma ne sono ricordate solo le prime frasi: ad esse fa sempre seguito qualche ulteriore spiegazione e dichiarazione, ma il contenuto programmatico è già ben chiaro nelle sentenze iniziali.

Non si trattasse d'una tragedia, verrebbe quasi da sorridere nel notare certe asserzioni che hanno proprio più l'aspetto dell'*excusatio non petita* che dell'orgogliosa affermazione razzista: l'articolo 8 è quasi pietoso nel voler controbattere in anticipo ai probabili sorrisi di sufficienza degli alleati tedeschi, certo tendenti ad accomunare tutte le popolazioni mediterranee nello stesso calderone. Gli articoli 4 e 6 sono al massimo degli splendidi esempi di *wishful thinking*; il quinto è un falso storico, i primi tre dei falsi scientifici. I restanti tre sono solo dichiarazioni di intenti particolarmente cretine.

Non fosse una tragedia, ci sarebbe da ridere per l'ironia della storia. Lo stesso giorno di Luglio in cui, centoquarantanove anni prima, il popolo di Francia insorgeva al grido di "*Liberté, Egalité Fraternité*", qui in Italia veniva promulgato un manifesto che aveva lo scopo di ritrattare i principi di libertà, uguaglianza e fraternità verso una specifica parte della nazione. I firmatari iniziali del manifesto sono dieci, ma alla fine saranno davvero tanti gli scienziati italiani che lo sottoscriveranno; e viene davvero da chiedersi se il termine "scienziati" avesse allora lo stesso significato che ha oggi.

Se non fosse diventata una tragedia, si sarebbe potuto sperare che tutto finisse lì, con la scrittura nero su bianco d'una serie di bestialità pseudoscientifiche destinate a restare lettera morta. E invece no. Neanche due mesi dopo, il manifesto "scientifico" riesce a partorire qualcosa di ben più pericoloso: un Regio Decreto Legge, il numero 1390 del 5 Settembre 1938. Si intitolava "*Provvedimenti per la difesa della razza nella scuola fascista*" e portava la firma del Re, di Mussolini, di Bottai e di Di Revel:

Articolo 1: *All'ufficio di insegnante nelle scuole statali o parastatali di qualsiasi ordine e grado e nelle scuole non governative, ai cui studi sia riconosciuto effetto legale, non potranno essere ammesse persone di razza ebraica, anche se siano state comprese in graduatorie di concorso anteriormente al presente decreto; né potranno essere ammesse all'assistentato universitario, né al conseguimento dell'abilitazione alla libera docenza..*

Articolo 2: *Alle scuole di qualsiasi ordine e grado, ai cui studi sia riconosciuto effetto legale, non potranno essere iscritti alunni di razza ebraica.*

Articolo 3: *A datare dal 16 ottobre 1938-XVI tutti gli insegnanti di razza ebraica che appartengano ai ruoli per le scuole di cui al precedente art. 1, saranno sospesi dal servizio; sono a tal fine equiparati al personale insegnante i presidi e direttori delle scuole anzidette, gli aiuti e assistenti universitari, il personale di vigilanza delle scuole elementari. Analogamente i liberi docenti di razza ebraica saranno sospesi dall'esercizio della libera docenza.*

Articolo 4: *I membri di razza ebraica delle Accademie, degli Istituti e delle Associazioni di scienze, lettere ed arti, cesseranno di far parte delle dette istituzioni a datare dal 16 ottobre 1938-XVI.*

Articolo 5: *In deroga al precedente art. 2 potranno in via transitoria essere ammessi a proseguire gli studi universitari studenti di razza ebraica, già iscritti a istituti di istruzione superiore nei passati anni accademici.*

Articolo 6: *Agli effetti del presente decreto-legge è considerato di razza ebraica colui che è nato da genitori entrambi di razza ebraica, anche se egli professi religione diversa da quella ebraica.*

Articolo 7: *Il presente decreto-legge, che entrerà in vigore alla data della sua pubblicazione nella Gazzetta Ufficiale del Regno, sarà presentato al Parlamento per la sua conversione in legge. Il Ministro per l'educazione nazionale è autorizzato a presentare il relativo disegno di legge.*

Il Regio Decreto 1390 ebbe un impatto devastante sulle università italiane. A voler contare solo i matematici più famosi, saranno costretti a lasciare l'insegnamento Guido Ascoli, Federigo Enriques, Gino Fano, Guido Fubini, Beppo Levi, Tullio Levi-Civita, Beniamino Segre; e con loro molti, molti altri, e certo non solo matematici. Si nota un'escalation netta e decisa, un drammatico passaggio dalla teoria alla pratica, tra il *Manifesto* di Luglio e il *Decreto* di Settembre: ma anche questo è solo l'inizio. Quello che succederà negli anni successivi, in tutta Europa durante gli anni devastanti della guerra, sarà ancora molto, molto peggiore, e assai più grave del pur tragico annichilimento dell'istruzione superiore italiana.

1 ***Il Regio Decreto 1390 illustrato a vignette***

Però è quasi sempre così che funziona: l'orrore non arriva improvviso, ma cresce poco per volta, passo per passo; con il senso dello scandalo che è inizialmente attivo e reattivo nel popolo e negli intellettuali, ma che poi, poco a poco, si abitua, si addormenta, si adatta alle più becere idiozie. Se si riesce a sopportare, magari con un sorriso di sufficienza, l'idea di "*doversi proclamare francamente razzisti*", poi diventano accettabili, forse addirittura *facilmente* accettabili anche proposizioni impensabili in uno stato moderno e civile, come "*alle scuole di qualsiasi ordine e grado non potranno essere iscritti alunni di razza ebraica*". È la negazione dei diritti più elementari: l'istruzione, il riconoscimento dell'identità umana a certi esseri umani; è come se si volesse negare il diritto all'assistenza sanitaria, il diritto di libero movimento sul territorio, se si chiedesse ad una parte della nazione di vivere una vita nascosta e separata – ghettizzata, insomma – dal resto del paese. E se ci si adatta ad accogliere questo nuovo punto, si potrà poi trovare accettabile anche il passo successivo, e poi quello ancora dopo: fino all'allontanamento forzato, fino all'assimilazione ad animali e poi a solo a merce, ai vagoni piombati, ai campi di concentramento e quelli di sterminio. È banale[1], in fondo, è come imparare a tuffarsi dalla piattaforma di dieci metri: dapprima sembra impossibile, ma basta iniziare e imparare a farlo da un metro, e poi salire piano piano, mezzo metro alla volta. E infatti non è difficile procedere in senso inverso, all'indietro, dalla follia matura e crudele verso i primi sintomi, verso i passi ancora precedenti, quelli che non sembravano certo così gravidi di disastri. O almeno, non lo sembravano ancora alla maggioranza delle persone: qualche lungimirante in grado di capire quando quello che si sta per compiere è già un passo di troppo c'è sempre, e talvolta si trova anche qualcuno con il coraggio di rifiutarsi di farlo.

Il 28 Agosto 1931, sette anni prima del Manifesto della Razza, era stato emanato un altro Regio Decreto nel quale si chiedeva ai professori universitari italiani di giurare fedeltà alla monarchia, allo statuto albertino e al fascismo. Era un passo importante, verso la *banalità del male*; ma quanti se ne accorsero davvero? Quando si era formata l'Italia unita non era apparso necessario sottoporre i docenti universitari ad uno speciale giuramento di fedeltà: in qualità di dipendenti statali erano tenuti ad un giuramento generico, al pari di tutti gli altri impiegati del Regno. La riforma Gentile della scuola del 1923 introduce invece un giuramento specifico, che i professori devono sottoscrivere pena l'allontanamento dalla cattedra; il giuramento è comunque una semplice dichiarazione di fedeltà al Re e allo Statuto, e non si riscontrano particolari polemiche a seguito della sua introduzione. Questo il testo che i professori recitavano:

> *«Giuro di essere fedele al Re e ai suoi reali successori, di osservare lealmente lo Statuto e le altre leggi dello Stato, di esercitare l'ufficio di insegnante e adempiere tutti i doveri accademici col proposito di formare cittadini operosi, probi e devoti alla Patria.»*

Il decreto dell'Agosto del 1931 cambia però la formula: quello che si chiede di sottoscrivere ai circa milleduecento docenti universitari d'Italia è il testo seguente:

> *«Giuro di essere fedele al Re, ai suoi reali successori e al Regime Fascista, di osservare lealmente lo Statuto e le altre leggi dello Stato, di osservare l'ufficio di insegnante e adempiere tutti i doveri accademici col proposito di formare cittadini operosi, probi e devoti alla Patria e al Regime Fascista.»*

Quanti professori avranno pensato che le variazioni introdotte al testo fossero, tutto sommato, niente altro che una questione di forma? Molti, probabilmente: del resto, nel 1931 il regime era al massimo del suo potere e del suo fascino, aveva anche da non molto ottenuto il Concordato risolvendo una tensione con lo Stato Pontificio che perdurava dalla breccia di Porta Pia, e aveva anche una popolarità elevatissima ed estremamente diffusa. Per queste ragioni, molti insegnanti avranno addirittura salutato con soddisfazione la modifica, sottoscrivendola con entusiasmo. Però avrebbero dovuto esserci anche molti altri docenti ai quali non poteva sfuggire il significato profondo delle modifiche al testo: era il regime che intendeva sovrapporsi allo stato, era il tentativo di far coincidere le parole "patria" e "fascismo", ed era immaginabile che molte menti libere avrebbero notato la cosa, scandalizzandosene e verosimilmente rifiutando di acconsentire al palese intento di omologazione. Ma, obiettivamente, rifiutare il giuramento non era per niente facile:

[1] "Banale" è l'aggettivo indubbiamente più adatto, come ben insegna il libro fondamentale di Hannah Arendt, "*La Banalità del Male. Eichmann a Gerusalemme*", Feltrinelli.

significava rinunciare al lavoro, alla posizione sociale, autodenunciarsi come avversario al regime. Significava mettere a rischio la propria sopravvivenza economica e sociale, oltre a quella dei propri familiari. E infatti, quasi tutte le istituzioni e organizzazioni che si oppongono al regime trovano il modo di giustificare i propri adepti, dando loro modo di sottoscrivere il giuramento senza per questo bollarli come rinnegati. Benedetto Croce, ad esempio, invitò i professori suoi amici a rimanere all'università, e a continuare l'insegnamento *secondo l'ideale di libertà*. A sinistra, lo stesso Togliatti chiese ai professori comunisti di firmare, perché l'opera antifascista che avrebbero potuto portare avanti sarebbe stata certo più incisiva se avessero mantenuto le loro cattedre. E, dal soglio pontificio, Pio XI suggerì ai docenti cattolici di firmare il giuramento, ma "con riserva interiore".

Così, quasi tutti i professori potevano giurare senza troppi tormenti interiori: sia quelli che lo approvavano, sia quelli che lo ritenevano solo un proforma burocratico, e anche quelli che lo ritenevano un obbrobrio ma che potevano avvalersi di una giustificazione superiore e morale che li autorizzava a chinare il capo senza perdere l'onore. Rimanevano fuori pochi personaggi, per i quali firmare un simile documento rimaneva un'onta ingiustificabile al proprio senso civico. Ci furono professori che firmarono dopo autentici tormenti interiori, solo per non ridurre i propri figli sul lastrico. Ci fu qualcuno, come l'ex-Presidente del Consiglio Vittorio Emanuele Orlando che ebbe la possibilità di mettersi in pensione prima di dover firmare il giuramento, altri che lo firmarono solo dopo aver avuto rassicurazioni che si trattasse solo d'una formalità, altri convinti dalle pressioni dei colleghi e degli stessi studenti.

Così, degli oltre 1250 professori universitari italiani, a non firmare il giuramento rimasero solamente una dozzina di irriducibili. I loro nomi meritano di essere ricordati: sono Ernesto Buonaiuti, Marco Carrara, Gaetano De Sanctis, Giorgio Errera, Giorgio Levi Della Vida, Fabio Luzzatto, Piero Martinetti, Bartolo Nigrisoli, Edoardo Ruffini, Francesco Ruffini, Lionello Venturi. A questi, secondo altre fonti, bisogna aggiungere anche Giuseppe Antonio Borgese, Aldo Capitini, Antonio De Viti De Marco. All'indomani del giuramento un giornale di regime, constatando che solo una dozzina di docenti su oltre milleduecento aveva rifiutato di giurare titolò sarcasticamente "*Sublimato all'un per mille*": anche in questo caso, se non si trattasse del prodromo d'una tragedia, bisognerebbe provare secondo quali calcoli il giornale in questione abbia potuto concludere che 12 su 1200 possa dare come risultato *un millesimo*.

Tra quei nomi di disobbedienti, alcuni erano davvero notevoli. Buonaiuti era storico del cristianesimo, compagno di seminario di papa Giovanni XXIII, sacerdote poi colpito da scomunica; Borgese un intellettuale completo, giornalista, romanziere e genero di Thomas Mann; Capitini un politico di prima grandezza; De Sanctis uno storico, filologo, direttore della Treccani e senatore a vita; ma l'elenco è riduttivo, e in poche parole non si rende giustizia al lavoro di una vita. Carrara fu uno dei padri della medicina legale italiana, Giorgio Errera un chimico dell'università di Pavia che già nel 1923 aveva rinunciato alla nomina a Rettore; del resto era ebreo, come Levi della Vida, e forse la sua "razza" gli consentiva di prevedere con più chiarezza la deriva che sarebbe divenuta evidente nel 1938. Luzzatto era un giurista che già aveva firmato il manifesto degli intellettuali di Benedetto Croce[2], e, cosa insolita per il gruppo dei non-firmatari, era massone; come lui giuristi erano i due Ruffini, padre e figlio. Come Carrara e Venturi, Francesco Ruffini era dell'università di Torino, e aveva già subito un'aggressione politica nel 1928.

[2] Si tratta del "*Manifesto degli intellettuali antifascisti*" del 1° Maggio 1925, voluto da Giovanni Amendola redatto da Benedetto Croce. Era la risposta al "*Manifesto degli intellettuali fascisti*" del 21 Aprile dello stesso anno, voluto da Giovanni Gentile. Sono ovviamente uno la risposta dell'altro, e anche la scelta delle date di pubblicazione – il giorno del *Natale di Roma* per quello di Gentile e il la *Festa dei Lavoratori* per quello di Amendola e Croce – è chiaramente significativa.

Piero Martinetti, racconta Norberto Bobbio, era uno dei pochi professori di filosofia ad essere considerato veramente un filosofo dagli studenti. Canavesano, di estrazione cattolica, non partecipa attivamente alla politica del suo tempo, ma con naturale candore si rifiuta di aderire al giuramento del 1931. Privato della cattedra si ritira a Spineto, vicino Cuorgnè, e porta avanti i suoi studi di filosofia. Nel 1935 finirà comunque in carcere per una settimana, sospettato di una presunta affiliazione con attivisti anarchici antifascisti. Del resto, che fosse persona di difficile allineamento era evidente già dall'esame che sostenne con lui Lelio Basso, antifascista già condannato all'esilio: si narra che il professor Martinetti lo promosse senza interrogarlo con questo giudizio: "*Ma io non ho alcun diritto di interrogarla sull'etica kantiana: resistendo a un regime di oppressione lei ha dimostrato di conoscerla molto bene. Qui il maestro è lei. Vada pure, trenta e lode*".

Nella lista dei docenti che rifiutarono di sottoscrivere il giuramento del 1931, abbiamo omesso il nome che è probabilmente più altisonante, e non solo perché questa è una rivista di matematica. Tra i professori che non firmarono ci fu infatti un solo matematico, ma era probabilmente il matematico più famoso della sua epoca, noto in patria quanto all'estero: Vito Volterra.


2 ***Vito Volterra***

Vito Volterra nacque ad Ancona il 3 Maggio 1860, in quello che ancora per un semestre esatto è Stato della Chiesa: sei mesi dopo, il 4 Novembre, il plebiscito di Umbria e Marche annetterà le due regioni al Regno di Sardegna.

Di famiglia poverissima e sfortunata, orfano di padre a soli due anni di età, Vito è costretto a vivere grazie agli aiuti di parenti e di professori. Vive prima a Torino, poi a Firenze, ed evidentemente è un ragazzo prodigio: comincia a studiare la geometria di Legendre a soli undici anni, e a tredici decide di affrontare il problema dei Tre Corpi che farà impazzire Poincaré; non riesce naturalmente a risolverlo, ma il suo approccio da tredicenne è già incisivo e assai originale. A diciotto anni, dopo aver studiato a presso l'istituto tecnico Galileo Galilei di Firenze, riesce a entrare all'università di Pisa; di qui passa alla Scuola Normale Superiore. Si laurea in Fisica a ventidue anni e già l'anno successivo, nel 1883, è professore di Meccanica nell'ateneo pisano. La sua carriera accademica è fulminea: allievo di Betti, gli succede nella cattedra di Meccanica Razionale della Normale nel 1992, quando il suo vecchio maestro passa a miglior vita; vince poi la cattedra di Meccanica a Torino e infine, nel 1900, quella di Fisica Matematica a Roma, succedendo a Beltrami. Qui la sua fama cresce, e non solo in ambito accademico: viene eletto presidente della Società Italiana di Fisica; nel 1905, a soli quarantacinque anni di età, Volterra è nominato senatore da Giolitti e due anni dopo fonda la Società Italiana per il Progresso nelle Scienze (SIPS) sul modello delle analoghe società francesi e inglesi, e naturalmente ne viene eletto primo presidente. La fondazione di grandi istituti scientifici sembra essere davvero uno dei passatempi preferiti di Vito: nel 1923 contribuisce a fondare – e naturalmente ne diventa primo presidente – il Consiglio Nazionale delle Ricerche. Terrà la presidenza per un quinquennio, fino al 1927, quando la cederà a Guglielmo Marconi. Dal 1919 al 1920 fu presidente anche dell'Accademia Nazionale delle

Scienze, e dal 1921 al 1940 fu presidente del *Bureau International des Poids et Mesures*, di cui fece edificare la sede a Sèvres.

Essere matematico a Pisa all'inizio del Novecento significa essere un'analista. Volterra è uno dei padri dell'Analisi Funzionale: a soli ventuno anni riesce a produrre un esempio di funzione derivabile in un intervallo, con derivata limitata ma non integrabile. Curiosamente, il termine "analisi funzionale" non è quello usato da Volterra, che invece usa sempre "funzione di linea": sarà Hadamard che in seguito propalerà la terminologia ancora usata. Volterra mostra tramite il suo calcolo funzionale, nel 1890, che la teoria di Hamilton e Jacobi sull'integrazione delle equazioni differenziali della dinamica possono essere estese ad altri problemi di fisica matematica.

3 *Preda e predatore*

Il nome di Volterra è anche legato ad una famosa equazione, quella di Volterra-Lotka[3], che studia il comportamento di popolazioni coesistenti di prede e predatori. Questa equazione è probabilmente il primo ponte interdisciplinare tra matematica e biologia, e in qualche modo ben rappresenta lo spirito volterriano di unione delle scienze ai fini del progresso scientifico e umano. È comunque un contributo importante anche alla teoria delle equazioni differenziali, e la sua particolare attenzione ai punti di equilibrio potrebbe farla classificare anche come antesignana della successiva Teoria dei Giochi di Von Neumann e Nash.

Era un uomo estremamente dinamico. Nato nell'anno cruciale del Risorgimento italiano, sentì sempre uno sviscerato patriottismo, e gran parte del suo continuo darsi da fare nei contatti internazionali (viaggiava continuamente in Francia e in Gran Bretagna, specialmente durante la Prima Guerra Mondiale) era mirato alla riduzione del distacco scientifico che sentiva ancora ampio, in molti campi, tra l'Italia e le altre grandi nazioni europee. Raggiunse anche eccessi, per questa sua passione: nel 1915, allo scoppio della guerra, aveva già cinquantacinque anni, ma questo non gli impedì di arruolarsi nell'esercito, e dare contributi nella determinazione dei calcoli per i tiri dell'artiglieria montata su dirigibili; sembra che sia stato lui, tra l'altro, a suggerire l'uso dell'elio come gas per gli aeromobili al posto dell'idrogeno facilmente infiammabile. E fu sempre il suo acceso patriottismo a farlo schierare, dopo la guerra, tra coloro che mal vedevano la riapertura verso gli scienziati tedeschi, a differenza di quanto fece, ad esempio, Tullio Levi-Civita[4].

Nel 1931, Vito Volterra ha già settantun anni, ma a differenza di altri, non chiederà di entrare in pensione per non dover sottostare all'infamia del giuramento. Ha ancora nove anni di vita davanti a sé: morirà infatti l'undici Ottobre del 1940, facendo quindi anche a tempo a vedere la sua amata patria entrare in guerra dalla parte che lui certamente disapprovava. In questi nove anni, riceverà molti segnali di stima e affetto dall'estero, e il

[3] Si trova spesso citata con il formalmente più corretto nome Lotka-Volterra: più corretto non solo per ragioni alfabetiche, ma anche storiche, visto che la scoperta dell'equazione, fatta indipendentemente dai due matematici, risale al 1926 per Volterra e al 1925 per Alfred J. Lotka (matematico americano ma originario di Leopoli, come i tanti citati nel compleanno di Banach, RM134). Noi usiamo la forma Volterra-Lotka esclusivamente per bassi criteri campanilistici.

[4] Ne parliamo esplicitamente in "Tolleranza Zero", RM94.

rumore sollevato dall'allontanamento, da parte del governo italiano, di un senatore del Regno e del maggiore matematico italiano dall'insegnamento avrà moltissimi echi internazionali. Albert Einstein, sollecitato da quei due Ruffini che, come Volterra, rifiutano di firmare il giuramento, scrive al Ministro Italiano della Giustizia, Alfredo Rocco, pregandolo di "risparmiare questa umiliazione al fior fiore dell'intelligenza italiana"[5].

Il 18 Novembre 1931 tutti i professori dell'Università di Roma devono presentarsi davanti al rettore e prestare giuramento. Vito Volterra non si presenta, e manda questo breve testo in sua vece:

> *"Sono note le mie idee politiche per quanto risultino esclusivamente dalla mia condotta nell'ambito parlamentare, la quale è tuttavia insindacabile in forza all'Art. 51 dello Statuto fondamentale del Regno. La S.V. Ill.^{ma} comprenderà quindi come io non possa in coscienza aderire all'invito da Lei rivoltomi con lettera 18 corrente relativa al giuramento dei professori."*

Seguiva la firma. Una firma che aveva poche compagne, al punto di toccare a malapena l'un per cento (e non per mille, con buona pace dei conti dei giornali di regime) delle firme possibili. Ma c'è di buono, nell'essere in pochi, che dovrebbe essere più facile ricordare i pochi nomi di chi ebbe il coraggio di dire di no[6].

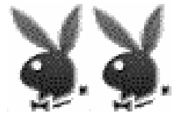
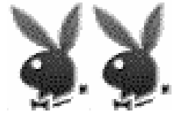
---

[5] Merita raccontare il seguito, almeno in nota: il ministro Rocco non risponde direttamente ad Einstein, ma affida l'incarico ad un consigliere di Corte d'Appello, Giuseppe Righetti, che in tedesco risponde formalmente che il giuramento era stato richiesto "*senza che si fosse preteso dai professori di aderire a questo o quel partito*" e che era lieto di comunicare che "*su circa 1200 professori solo 7 o 8 hanno sollevato obiezioni*". Einstein, a proposito della risposta, annota nel suo diario: "*Eccellente risposta in tedesco, ma la cosa resta comunque un'idiozia da gente incolta*".

[6] Ogni compleanno scritto da RM si basa naturalmente su libri e articoli, che spesso evitiamo di citare perché noi siamo corsari scorretti e maleducati della rete. Ogni tanto però occorre pagare dei debiti particolarmente grossi, e questa volta ci tocca almeno citare alcune delle opere saccheggiate:

- Guerraggio, P. Nastasi: *Matematica in camicia nera,* Bruno Mondadori
- Guerraggio, P. Nastasi: *Gentile e i matematici italiani*, Boringhieri
- G. Boatti: *Preferirei di no*, Einaudi
- S. Fiori: *I professori che dissero "NO" al Duce*, la Repubblica 16 Aprile 2000

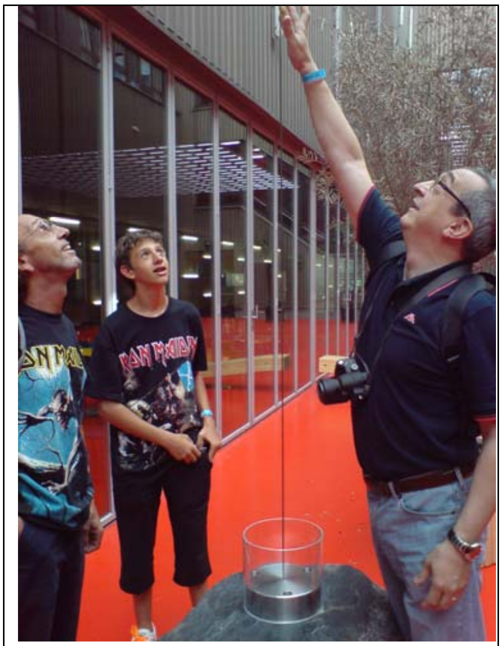
2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
NASA on a budget			
Quelli del '29			

2.1 NASA on a budget

Per fisici e ingegneri dell'età corretta, è ben difficile non sentire un legame con quella spensierata parte della vita nella quale la NASA poteva permettersi di spendere qualche vagonata di dollari per fare ricerche sulle penne stilografiche da usare nello spazio[7]: oggi, anche solo per rifornire il missile che deve lanciare il satellite, si cerca il distributore che faccia lo sconto o che almeno abbia attivato una raccolta punti.

Bene, uno scelto *brain trust* di Autorevoli Scienziati ha sviluppato l'anno scorso un metodo rivoluzionario per risolvere questo problema. Al momento siamo ancora alla fase embrionale, ma è disponibile un modello in scala perfettamente funzionante. Nell'immagine a fianco avete una vista parziale dell'apparato: non vi diamo la vista completa in quanto la parte restante è coperta da Segreto Problematico, ossia è proprio su quella che dovrete fare i conti. Giusto per definire tutti i ruoli, da destra verso sinistra vedete l'Eminente Teorico, il Valido Assistente e il Presunto Pilota; la Trecciuta Ricercatrice non compare nell'immagine in quanto si trova dietro la macchina fotografica ad immortalare lo storico evento[8].



4 *Il Prof. Silverbrahms dà inizio all'esperimento.*

L'idea è di avere un ragionevole numero di palle di gomma perfettamente elastiche di masse decrescenti (nel progetto originale sono una la metà dell'altra, ma se trovate di meglio fatecelo sapere), con la più grande e pesante in basso: queste palle sono tutte forate, e scorrono lungo il cavo che vedete tra Doc (che tiene sollevato il *Gruppo Primario di Propulsione*: insomma,

[7] OK, lo sappiamo, che è una leggenda metropolitana… Però rende l'idea.

[8] Segnaliamo comunque per gli storici dell'astronautica che l'epocale esperimento immortalato nella foto si è svolto l'otto luglio del duemilanove, al Technorama di Winterthur.

le palle di gomma) e Fred (sì, è lui). Vengono lasciate cadere da un'altezza di una decina di metri e rimbalzano sul disco metallico (ignorate il cilindro trasparente: serve solo ad evitare che l'Eminente Teorico si schiacci il dito sotto i propulsori). Sull'ultima palla appoggerà più o meno comodamente il pilota, scelto per il peso (sessanta Kg, pipa e scafandro inclusi). Ora, la domanda è: volendo raggiungere la velocità di fuga, quante palle vi saranno necessarie? Per semplicità, considerate pure un Rudy sferico e perfettamente elastico.

Ritorno? Quale ritorno? Ah, quello. Beh, affronteremo il problema tra qualche mese. Per adesso, godiamoci lo spettacolo del lancio e la tranquillità data dal fatto che il suono, nel vuoto, non si trasmette e quindi una volta tanto Rudy sta zitto.

2.2 Quelli del '29

No, non quelli dell'autobus. L'anno che, in modo assolutamente non casuale, visto che abbiamo intenzione di parlare di lui e di alcuni suoi coetanei, è quello di nascita del padre di Rudy.

Una tradizione – non stiamo a sindacare quanto apprezzabile – che nelle grandi città si è persa da tempo (anche prima della fine della leva obbligatoria) è quella della "cena dei coscritti": ci rifiutiamo di porre domande in merito, ma a quanto pare per "quelli del '29" deve essere stata memorabile: tant'è che da alcuni anni si ritrovano e ripetono la cena (diventata però un pranzo: tanto, dopo non si va a fare scherzi goliardici tipo scarabocchiare il Municipio: anche perché il Sindaco è il figlio di due partecipanti alla festa e il Messo Comunale è il nipote di un altro...).

L'idea è di mangiare *nello stesso locale* (e questo non è un problema: il ristorante noto come "La Società" resiste impavido, anche se nel tempo ha cambiato nome e vi sono transitati svariati cuochi) e di essere *lo stesso numero*, e questo ha, sin dai primi pranzi, rappresentato un problema che, purtroppo, peggiora di anno in anno: i nostri baldi giovani non si sono persi d'animo e hanno reclutato un gruppo di eroici volontari (tra cui il Sindaco, il Messo Comunale e il Vostro Umile Narratore), li hanno nominati "del ventinove ad honorem" e, in cambio dell'ambito privilegio di pagarsi il pranzo, partecipano tutti alla mangiata, che riesce, quindi, ad avere tutti gli anni $\boldsymbol{N}$ persone attorno al tavolo, che supporremo rotondo.

…E qui nasce il problema, nel senso che, essendo tutti coetanei (reali o ad honorem), non è che servi prima il più anziano e poi via a scalare: di solito, viene portato in tavola il vassoio e i commensali se lo passano, dopo aver scaricato la propria razione; siccome però sono tutti impegnati in discussioni e rimembranze, non è detto che il vassoio segua sempre la stessa strada: ogni tanto, ad esempio, qualcuno riceve il vassoio dalla propria destra, si serve e lo ripassa indietro alla propria destra (il vicino di sinistra sta parlando, e non si è accorto di nulla); chi riceve il vassoio, fortunatamente per gli altri commensali, controlla se ha il piatto già occupato e, nel caso affermativo, passa senza prendere; anche lui sceglie casualmente da che parte passare, è chiaro; per cominciare a mangiare, si aspetta che tutti siano serviti.

Ora, anche se sono trattenuto dalle regole della buona educazione, una delle cose che mi danno più fastidio è avere la roba nel piatto ed aspettare che gli altri abbiano finito di servirsi; quindi, in un'anarchia di questo genere preferisco essere l'ultimo, in modo da poter cominciare subito. Siete in grado di calcolare quali sono, in funzione della mia distanza dal primo che si serve, le probabilità che ho di servirmi per ultimo? E, secondo voi, in media quanti passaggi farà il piatto?

A questo punto, ci è stato richiesto di aggiungere una nota: la storia dei "coetanei ad honorem" è vera, e sia Rudy che il VAdLdRM meno giovane appartengono a questa categoria di eletti: il pranzo si svolgerà nell'unico ristorante del "Luogo da Cui" il sedici di questo mese. Interverremo numerosi (beh, tre, contando il "coetaneo vero", ossia il padre di Rudy).

3. Bungee Jumpers

Per quali valori di x $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$?

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

Anche questo mese, nonostante le previsioni avverse, riusciamo a recensire un libro. Non si può dire che le due condizioni di recensione (essere libro di matematica ed essere stato scritto, curato, tradotto o altro da RMers) siano rispettate in pieno, ma noi siamo notoriamente tolleranti.

In questo caso particolare, poi, essere tolleranti è particolarmente facile, perché lo sponsor di questo libro è Claudio Pasqua, nostro mentore in Gravità Zero (www.gravita-zero.org), e soprattutto perché il libro è un libro speciale, sia nel contenuto che nella sua ragione d'essere. Si tratta infatti di un testo non più in vendita: forse lo era nel 2004, quando è stato edito per la prima volta, ma al giorno d'oggi per ricevere il libro occorre iscriversi alla ***Associazione Levi-Montalcini***; bastano 10 euro per diventare "amico" dell'Associazione, avere diritto a partecipare a tutte le attività associative e ricevere in omaggio il libro di cui parliamo questo mese. Versando invece la quota ordinaria di 60 euro si diventa socio a pieno titolo, con diritto di partecipazione anche all'assemblea dei soci. Per iscriversi all'Associazione e ricevere il libro si può fare un versamento sul **CCP 35775436** oppure un bonifico bancario all'**IBAN IT77Y0200801105000040707088.**

La collana di cui il libro fa parte ha il nobile scopo di divulgare scienza, e soprattutto di rendere accessibile le scoperte dei vincitori del Premio Nobel, com'è appunto Rita Levi-Montalcini. Il sito www.allascopertadeipreminobel.it è stato creato appositamente per lo stesso scopo, e merita senza dubbio una visita; ma siate cortesi, andateci solo dopo aver letto la nostra recensione: in quel sito ce ne sono altre, di autori ben più importanti e più autorevoli di noi, e non vorremmo che saltaste subito su a fare confronti dai quali usciremmo con le ossa rotte…

4.1 Alla scoperta dei premi Nobel: Rita Levi Montalcini

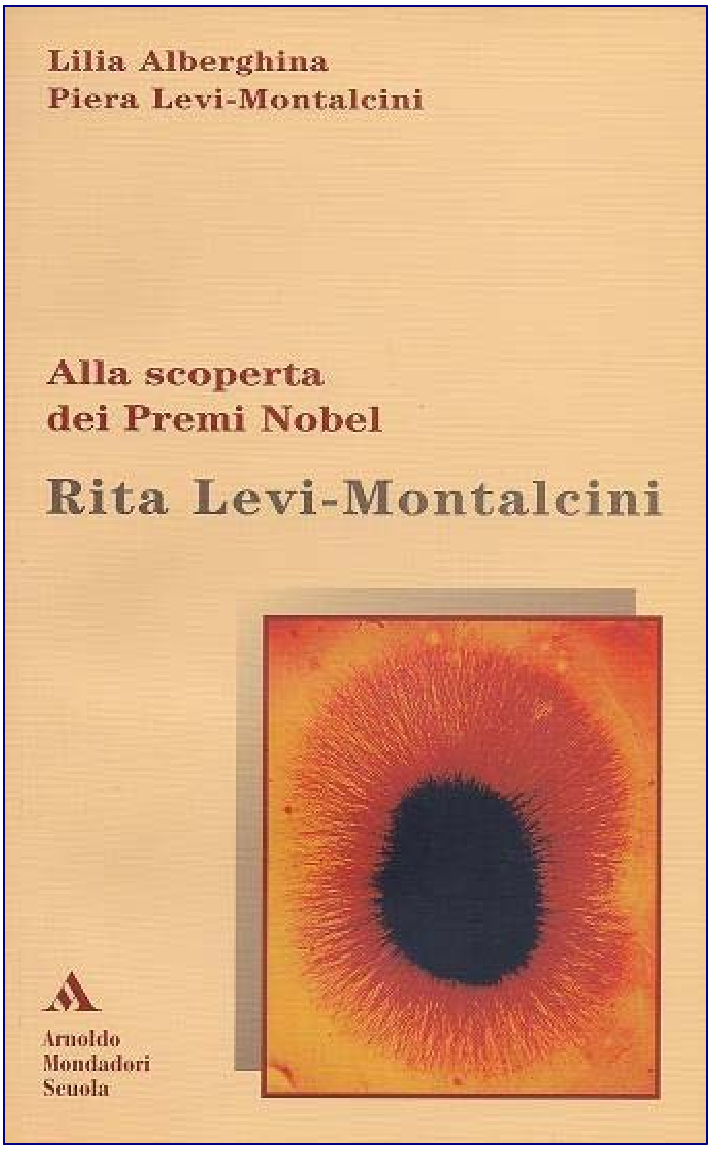
«Ho sempre limpidamente affermato il mio punto di vista, perché quel che mi interessava era la verità, non il potere»

Immaginate una nazione, e in questa nazione una città, e in questa città un'università; e immaginate, naturalmente, che in questa università tenga lezione un professore. Un docente universitario è certo un personaggio importante, quello che una volta veniva rispettosamente definito "un intellettuale"; ma in ultima analisi era ed è un uomo come tutti gli altri: con un lavoro complicato da svolgere, la ricerca scientifica, che deve essere coniugata con l'attività didattica; e questo tipo di coniugazione sembra che riesca bene solo a poche persone. Si dice che i professori universitari si dividano in due sezioni quasi stagne; una per i docenti dotati di alta capacità didattica, ovvero quelli che vivono l'insegnamento come la loro attività principale e primaria; e gli altri,

5 *Rita*

che invece si trovano a loro agio solo nei loro studi e nei laboratori, occupandosi attivamente delle loro ricerche e stando il più possibile lontano da gessi e lavagne. La leggenda vuole che un buon ricercatore sia un pessimo insegnante, e viceversa. Ma il nostro professore è un'eccezione alla regola, perché se la cava assai bene in entrambe le attività.

Immaginate anche che la sua vita sia particolarmente ricca e felice: una sue delle figlie è una scrittrice, e scrittrice di talento; risulterà essere una delle maggiori letterate del suo tempo, nella sua lingua. L'altra sua figlia femmina è invece sposata a un industriale: ma si tratta di industriale famoso, geniale e rivoluzionario, al punto che su di lui si scriveranno centinaia di libri e di tesi di laurea, si gireranno documentari e si terranno simposi; anzi, se ne parla e se ne scrive ancora. Ma soprattutto ricca – nel senso di dotata – è la sua classe di studenti: ad un certo momento della sua carriera, il nostro professore si troverà a tener lezione ad un uditorio dove siedono vicini tre studenti: ognuno di questi tre studenti vincerà un premio Nobel. E non sarà un premio che condivideranno fra loro, no: ognuno di loro lo vincerà indipendentemente dagli altri due, in anni diversi.



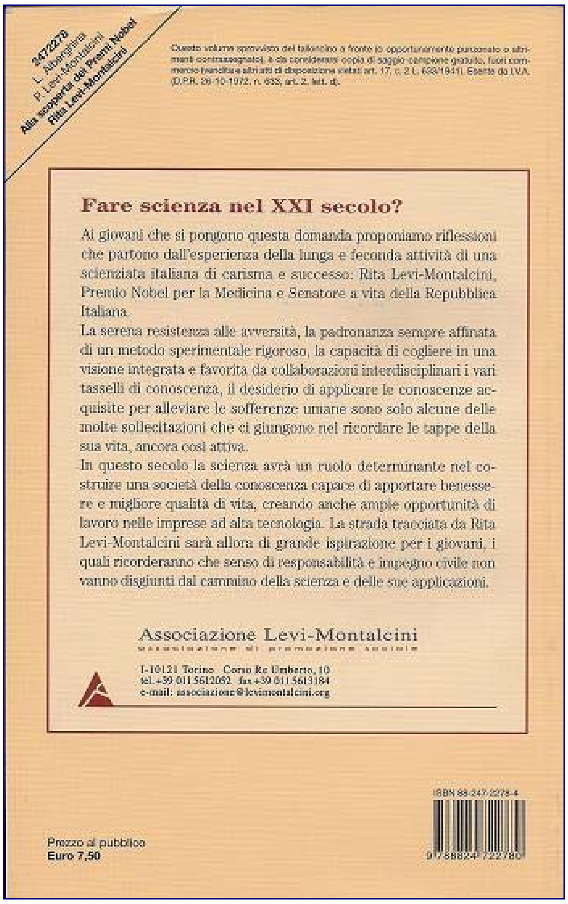
È una storia che sembra incredibile, tanto appare poco probabile. Anche le nazioni più ricche e le università più prestigiose avrebbero difficoltà ad individuare delle personalità in grado di coagulare attorno a sé tanta ricchezza culturale: e la storia è tanto più incredibile quando si scopre che quella nazione non sono i soliti Stati Uniti, ma la nostra piccola Italia. Qualche tempo fa, però.

La città è Torino. Nella sua università, in quella che allora si chiamava "*Reale Accademia di Medicina*", insegnava Giuseppe Levi, un grande ricercatore all'avanguardia della medicina dei suoi tempi: fu tra i primi a praticare le colture *in vitro*, tecnica rivoluzionaria per i suoi tempi, e si applicò tenacemente nello studio dell'istologia delle cellule nervose. È lui il professore che vi abbiamo chiesto di immaginare: Paola, la sua figlia primogenita, fu la prima moglie di Adriano Olivetti, imprenditore originale e visionario, mentre la sua ultimogenita, Natalia, diventò famosa con il nome di Natalia Ginzburg, nel suo *Lessico Famigliare* si ritrova quindi anche il ritratto del padre Giuseppe. E sui banchi dell'Istituto di Medicina da lui diretto si trovarono a passare Salvador Edward Luria, premio Nobel nel 1969; Renato Dulbecco, premio Nobel nel 1975; e infine Rita Levi-

Montalcini, premio Nobel nel 1986. Tutti e tre i premi, naturalmente, erano per la categoria "Medicina o Fisiologia".

È strano, e anche un po' triste, che storie italiane così belle siano anche così poco note. Dovrebbero invece essere ripetute di continuo, nelle aule scolastiche, nelle pagine culturali e scientifiche dei giornali, anche sceneggiate in televisione: non dovrebbe essere difficile, avendo pronto un canovaccio così nobile, parlare di scienza e storia e farne spettacolo. E poi sono storie di anni difficili, buon viatico per parlare di quegli anni: sono storie buone per parlare dell'ignominia delle leggi razziali, che fecero perdere il posto a Giuseppe Levi, misero in fuga Luria e mandarono Dulbecco a fare il partigiano sulle montagne piemontesi; storie piene d'un passato attuale, che torna a celebrarsi a ogni fine d'Aprile – guarda caso proprio come i compleanni di Rita; ma anche storie che narrano la via faticosa, difficile e gloriosa della ricerca scientifica, della fuga verso i laboratori esteri in grado di accogliere i nostri migliori cervelli, e in questo senso sono storie non più del passato, ma più attuali e contemporanee del telegiornale di stasera.

In questo piccolo libro, la storia di Giuseppe Levi, Renato Dulbecco e Salvador Luria è solo rapidamente accennata, eppure si riesce a leggerla, immaginarla in controluce; e se sono solo pochi accenni e un paio di foto a ricordare quegli eventi, è perché le 124 pagine che formano il libro sono poche anche solo per poter raccontare chi sia e cosa abbia fatto Rita.



2472278
L. Alberghina
P. Levi-Montalcini
Alla scoperta dei Premi Nobel
Rita Levi-Montalcini

Questo volume sprovvisto del talloncino a fronte (o opportunamente punzonato o altrimenti contrassegnato), è da considerarsi copia di saggio-campione gratuito, fuori commercio (vendita e altri atti di disposizione vietati: art. 17, c. 2 L. 633/1941). Esente da I.V.A. (D.P.R. 26-10-1972, n. 633, art. 2, lett. d).

Fare scienza nel XXI secolo?

Ai giovani che si pongono questa domanda proponiamo riflessioni che partono dall'esperienza della lunga e feconda attività di una scienziata italiana di carisma e successo: Rita Levi-Montalcini, Premio Nobel per la Medicina e Senatore a vita della Repubblica Italiana.

La serena resistenza alle avversità, la padronanza sempre affinata di un metodo sperimentale rigoroso, la capacità di cogliere in una visione integrata e favorita da collaborazioni interdisciplinari i vari tasselli di conoscenza, il desiderio di applicare le conoscenze acquisite per alleviare le sofferenze umane sono solo alcune delle molte sollecitazioni che ci giungono nel ricordare le tappe della sua vita, ancora così attiva.

In questo secolo la scienza avrà un ruolo determinante nel costruire una società della conoscenza capace di apportare benessere e migliore qualità di vita, creando anche ampie opportunità di lavoro nelle imprese ad alta tecnologia. La strada tracciata da Rita Levi-Montalcini sarà allora di grande ispirazione per i giovani, i quali ricorderanno che senso di responsabilità e impegno civile non vanno disgiunti dal cammino della scienza e delle sue applicazioni.

Associazione Levi-Montalcini
associazione di promozione sociale

I-10121 Torino Corso Re Umberto, 10
tel. +39 011 5612052 fax +39 011 5613184
e-mail: associazione@levimontalcini.org

ISBN 88-247-2278-4

Prezzo al pubblico
Euro 7,50

6 *Quarta di copertina*

Di Rita Levi-Montalcini si torna a parlare a ogni Aprile, vivaddio; ma è forse ormai famosa più per come indossa bene i suoi anni che per la maniera in cui riusciva a operare al microscopio embrioni di pollo usando aghi da cucito come microbisturi, e scoprendo il ***Nerve Growth Factor***; e questo è riduttivo, perché la scoperta del NGF è appena di un ette meno importante di quella del DNA. Si sa che Rita ha vinto il Nobel, ma quasi nessuno, tra i non addetti ai lavori, sa anche solo riassumere le decine di possibili interazioni che il NGF ha nella fisiologia umana e animale. Un numero di Maggio della rivista Le Scienze fu dedicato monograficamente al Nerve Growth Factor, per celebrare i novant'anni dell'allora giovanissima Rita: una decina di articoli scritti dai maggiori ricercatori del campo metteva in relazione la scoperta della Levi-Montalcini con i campi più inaspettati della medicina, come malattia di Alzheimer, patologia della cornea, stress, infiammazione allergica, patologie autoimmuni, schizofrenia, e altro ancora. Il NGF non è una scoperta importante della fisiologia, è un intero nuovo pianeta di ricerca.

Ci sono cose che è bello sapere, leggere, capire. Il ruolo della divulgazione scientifica dovrebbe essere essenzialmente questo, riuscire a stupire gli ignari mostrando conoscenze che erano misteri e che ora, grazie al lavoro e al genio di alcune persone, non sono tali. E i libri che riescono nell'intento dovrebbero essere tenuti in gran conto. Capita fin troppo spesso che, sentendo parlare di qualche novità scientifica in campi distanti da quelli cui siamo direttamente interessati, ci sia una sorta di inerzia nel volersi informare, forse dovuta solo alla pigrizia iniziale di dover imparare almeno in parte un nuovo linguaggio, dei nuovi assiomi, alcuni principi fondamentali dell'argomento. Ed è un peccato, perché la fatica iniziale viene sempre, inevitabilmente, ripagata con l'apertura di un intero nuovo universo.

Ad esempio, immaginavate che si pensasse che le cellule nervose fossero statiche, praticamente incapaci di rigenerarsi, destinate drammaticamente solo all'invecchiamento e alla morte, prima che Rita mostrasse al mondo che le cose non stavano così? Lo si scopre leggendo questo libro, dove nel terzo e nel quarto capitolo Lilia Alberghina e Piera Levi-Montalcini raccontano la storia passata, il presente e il probabile futuro del Nerve Growth Factor; e come in tutte le divulgazioni serie, non cadono nell'errore frequente dell'eccesso di semplificazione: la biologia molecolare, specialmente quella delle cellule nervose, non è una disciplina che si può spacciare per "semplice". «*Semplificate per quanto possibile, ma non di più*», diceva Albert Einstein: e le autrici sembrano aver tenuto a mente l'esortazione del padre della Relatività.

Già, le autrici. Lilia Alberghina è professore alle Università di Milano e di Baltimora, ma soprattutto è una biochimica di fama mondiale. Rita Levi-Montalcini vinse nel 1969 uno dei più prestigiosi premi italiani, il Premio Feltrinelli dell'Accademia dei Lincei; nel 1986, quando la più famosa senatrice d'Italia vinceva il Nobel a Stoccolma, quello stesso premio Feltrinelli andava proprio a Lilia Alberghina, e questo dovrebbe bastare ad illustrare la caratura dell'autrice tecnica del libro. L'altro nome in copertina è quello di Piera Levi-Montalcini, nipote di Rita e presidente dell'Associazione Levi-Montalcini. È dalla sua penna che esce il ritratto diretto e umano della scienziata: i capitoli iniziali consentono di conoscere più da vicino la protagonista, a partire dalla spiegazione del doppio cognome (no, non è per titoli nobiliari) fino all'aneddoto della cartella beige piena dei suoi documenti, poco acconcia, per ragioni di *nuance*, ad essere portata insieme al verde del vestito da cerimonia della premiazione di Stoccolma, ma ciò nonostante tenuta stretta in mano persino quando il braccio di Rita era sostenuto galantemente dal re di Svezia nella serata di gala.

"*Alla scoperta dei Premi Nobel*", promette il titolo. È una promessa mantenuta, nel caso di Rita Levi-Montalcini. Sarebbe piacevole e costruttivo vedere pubblicati libri analoghi per ognuno degli altri *Nobel Laureates* della storia; e se pubblicare ottocentodue biografie rischia di essere progetto editoriale un po' troppo impegnativo, tale non dovrebbe risultare se ristretto, alla bisogna, ai soli diciannove Nobel italiani.

Titolo	Alla scoperta dei premi Nobel Rita Levi Montalcini
Autore	Lilia Alberghina – Piera Levi Montalcini
Editore	Arnoldo Mondadori Scuola
Sponsor	Gravità Zero
Data di Pubblicazione	2004
Prezzo	7,50 Euro
ISBN	9788824722780
Pagine	124

5. Soluzioni e Note

A noi maggio piace per una serie di motivi.

7 *Buon compleanno, Doc (il ghiro veniva male…)*

Tanto per cominciare, un mese che comincia con una festività è già cosa buona e giusta del suo.

Consideriamo poi che "maggio" ha, in sé, ragioni di solida e realistica certezza: a maggio *di sicuro* si va a mangiare fuori, magari tenendosi il giubbottino (leggero): l'aleatorietà metereologica di aprile, con il *diktat* della merenda a Pasquetta nei prati (quest'anno piuttosto bagnata, almeno dalle nostre parti), è finalmente dietro le nostre spalle.

Oh, poi c'èra un altro punto, che al momento non ci sovviene… Boh, poco male, quando ci verrà in mente rimedieremo. Non era molto importante…

Ma bando alle ciance, che è Rudy a scrivere queste righe questa volta, e vuole pubblicare più soluzioni possibili…

5.1 [134] & [135]

Il titolo anomalo deriva dal fatto che con il momento d'inerzia del triangolo di Sierpinsky l'abbiamo tirata avanti per due numeri, e non ci pare bello interrompere il discorso sul più bello; fortunatamente qualcuno ha continuato a pensarci e infatti il buon ***Trekker*** (con pochissime formule… ma di questo ne parliamo dopo) ci fa notare una cosa:

> Giustamente ***g1*** fa notare che l'oggetto di cui si vuole il momento di inerzia è una "cosa" con un'area nulla, e, aggiungo io, per avere massa finita m, deve avere anche densità superficiale infinita. Con queste proprietà non è così scontato che il triangolo abbia un momento di inerzia... finito. Ma tutti lo hanno assunto, arrivando rapidamente alla soluzione (pending che la soluzione esista). È un po' come calcolare la somma $S = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + ...+ 1/2^n + ..$ Assumendo che la somma converga basta scrivere $S = 1 + 1/2 * S$ per trovare S=2. Ma è quell'"assumendo" che mi disturba.
>
> Ricordo (allora portavo pantaloni corti) che la dimostrazione della convergenza della somma di cui sopra passa attraverso il calcolo della somma parziale dei primi N termini e poi si passa al limite per N che tende all'infinito.
>
> Se guardi bene la soluzione che ti avevo mandato percorre questa strada, cioè si calcola il momento di inerzia dopo N "passate" e POI si fa tendere N all'infinito (forse questo mi ero dimenticato di scrivertelo). E il risultato ritorna anche senza assumere, a priori, che esista.

In effetti, "assumendo di avere ragione" non è mai un gran bel metodo di calcolo: va detto che uno dei postulati che tutti i lettori conoscono è che se un problema piace a Rudy deve avere una soluzione da qualche parte (non sopporta quelli per cui la soluzione è "No"), quindi attraverso una certa forma di ragionamento meta-matematico ci si poteva aspettare che il momento d'inerzia esistesse. Quando un torinese si accorge di una *gaffe* di questo genere, di solito sbotta in un (tradotto): "Ooops! Ho forato una gomma". Ora, con una cosa tutta buchi come il triangolo di Sierpinski, buco più, buco meno non ci sembra molto grave.

5.2 [135]

5.2.1 Non mi piace, non mi piace, non mi piace!

Come d'uso, ristatuiamo il problema.

> *In un quadrato di lato n abbiamo scritto in sequenza i numeri da* 1 *a* n^2*; scegliamo n numeri in modo tale che non ce ne siano due sulla stessa riga o sulla stessa colonna e li sommiamo; il risultato vale* 5335*; ora, quanto vale n?*
>
> *Colorando poi in un quadrato di questo tipo (non necessariamente dello stesso lato) tutti i quadretti di rosso o di blu in modo tale che su ogni riga e su ogni colonna ci sia lo stesso numero di quadretti del medesimo colore, ci chiediamo sotto quali condizioni uno dei due colori avrà sotto una somma maggiore dell'altro colore.*

Per prima cosa, liquidiamo le condizioni al contorno: ***Silvano*** chiede *agli anziani* se l'errore più grave, ai tempi, fosse quello rosso o quello blu; Silvano, mettiamola in questo modo: chiedere cose del genere *agli anziani* merita di essere segnato con la matita blu. Humpf. Comunque, questo ha riportato alla mente di Rudy un ricordo della sua infanzia, e voleva sapere (dagli altri *anziani*) se era una cosa comune o no. La sua Maestra[9] utilizzava il codice colore anche per il voto: in matita nera le sufficienze, il rosso copriva tutte le sfumature del quattro e del cinque e il blu era usato per i due e i tre (sì, c'erano anche quelli, all'epoca, mica i bravo-buono-distinto-incapace di adesso, tzé!). Era una fisima sua o abitudine diffusa? Prima che facciate domande del tipo "Aveva una matita a tre punte?", ci teniamo a dirvi che le sufficienze venivano sempre elargite *dopo* la correzione di tutti i compiti: al massimo un "dieci", un "nove" e due "otto", quindi la cosa andava decisa dopo averli visti tutti. Ma tanto il dieci lo prendeva solo Tiziana[10].

Eh? Ah, giusto. Le soluzioni.

La prima ricevuta arriva da ***Drako84***: si scusa per quella che lui definisce "l'orripilante formattazione" *[e ha ragione… cos'è, non vi piaceva il problema?]*; fortunatamente, risolve più che altro per ragionamento.

> Dunque, prima di tutto cominciamo con un'osservazione: qualsiasi configurazione scelta in modo che manchi un solo numero su ogni riga e su ogni colonna equivale alla mancanza di una diagonale. Si può facilmente constatare tutto ciò in quanto è sempre possibile scambiare di colonna due buchi, mantenendone inalterata la riga (funziona anche al contrario, ma così è più intuitivo). Effettuando lo scambio si diminuisce di 1 il numero della colonna che arretra e si aumenta di 1 il numero della colonna che avanza (supponendo che le colonne siano adiacenti, ovviamente; se le colonne sono distanti, i numeri cambiano di altri valori, ma sempre opposti). In questo modo la somma è costante.
>
> Detto questo, passiamo a considerare la diagonale che va da 1 a n^2. Ad ogni passo si aumenta di 1 la colonna e di 1 la riga, ovvero si aumenta il numero di $1+n(\text{riga}-1)$, quindi la somma sarà qualcosa del tipo
>
> $$(1)+(2+n)+(3+2n)+\ldots$$
>
> In altre parole, è la:

[9] No, non è un typo… Se l'aveste conosciuta, lo scrivereste anche voi maiuscolo: non per rispetto, per terrore allo stato puro.

[10] A Rudy stavano talmente sulle scatole (la Maestra Silvia e Tiziana) che sono le uniche due persone delle elementari di cui si ricorda ancora i cognomi.

$$\sum_{i=1}^{n} i + n(i-1) = \frac{n^3+n}{2}$$

(chiedo venia per la pessima formattazione...) *[ci pensiamo noi… Humpf]*.

Orbene, a questo punto si possono scegliere due strade: o si calcola a mano o si chiede aiuto ad un qualche programma (Excel, Mathematica, Derive, Cobol, Matlab, Python, Befunge... ce ne sono a badilate). Essendo pigro e poco propenso a muovere il mio titanico didietro, ho chiesto aiuto al secondo dei software elencati. Le soluzioni, visto che è un'equazione di terzo grado, sono due complesse e coniugate e l'altra reale, per la precisione intera. Ora, a meno che voi non abbiate scoperto un modo per disegnare quadrati di lato complesso su un foglio di carta, deduco che la soluzione giusta sia l'ultima, ovvero 22. Quindi il vostro quadrato ha ben 484 quadratini numerati. Il viaggio deve essere molto lungo... *[da Torino a Monaco]*.

Tornando a noi, e alla seconda parte, facciamo subito un'altra considerazione, praticamente identica a quella di prima, ma con un pizzico di pepe in più (com'è eccitante la matematica... dove ho messo gli psicofarmaci?).

In questo caso possiamo vedere che ogni configurazione nella quale ogni riga e ogni colonna ha metà caselle di un colore e metà dell'altro equivale al quadrato grande diviso in quattro quadrati più piccoli di lato *n*/2, colorati a scacchiera[11]. Lo si capisce perché, scambiando i colori di due caselle sulla stessa riga (ovviamente colorate in modo diverso, sennò non cambia nulla), uno dei colori aumenta di tot e l'altro diminuisce di tot. Ma per riportare il conteggio delle caselle per riga e per colonna in numero parimenti suddiviso tra i due colori si deve effettuare un'altro scambio su un'altra riga, ma sulle stesse due colonne di quelle di prima, e aventi una configurazione opposta rispetto alla partenza delle precedenti (ok, è un po' contorto: se prima avevamo `***r**b*` e li scambiamo, otteniamo `***b**r*`; adesso dobbiamo cercare l'opposto della configurazione precedente, ovvero `***b**r*`). Questo mantiene inalterato il numero di caselle colorate, e quindi la condizione è soddisfatta, inoltre fa nuovamente aumentare di tot un colore e diminuire di tot l'altro. A conti fatti, il totale dei numeri colorati in un modo non cambia, a condizione di fare gli scambi in questo modo. Ergo, tutte le configurazioni sono equivalenti a quella descritta in precedenza.

Dopo tutto questo blaterare per giungere alla condizione di partenza, possiamo passare ai conti veri e propri. Supponiamo che il primo quadrante, quello che contiene l'1, e l'ultimo, con n^2, siano rossi, e gli altri due blu. Ciascun quadrante è composto da *n*/2 righe lunghe *n*/2 caselle.

Ciascuna riga del primo quadrante è una $\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} i + n(r-1)$, dove *r* è il numero di riga da 1 a *n*/2. Totale: $\frac{n^4 - n^3 + 2n^2}{16}$.

Il quarto quadrante ha le somme per riga $i + \frac{n}{2} + n\left(r + \frac{n}{2} - 1\right)$, con gli stessi limiti di prima. Totale: $\frac{3n^4 + n^3 + 2n^2}{16}$.

[11] Piccola nota: dato per assunto che facciamo tutte le operazioni su caselle della stessa riga, il ragionamento vale anche per le colonne.

> Righe del secondo quadrante: $i+\frac{n}{2}+n(r-1)$. Totale: $\frac{n^4+n^3+2n^2}{16}$.
>
> Righe del terzo quadrante: $i+n\left(r+\frac{n}{2}-1\right)$. Totale: $\frac{3n^4-n^3+2n^2}{16}$.
>
> Sommando i quadranti per colore abbiano che il rosso è pari a:
>
> $$\frac{n^4-n^3+2n^2+3n^4+n^3+2n^2}{16}=\frac{n^4+n^2}{4}.$$
>
> Idem per il blu:
>
> $$\frac{n^4+n^3+2n^2+3n^4-n^3+2n^2}{16}=\frac{n^4+n^2}{4}.$$
>
> Conclusione: sottostando alle regole di colorazione date, la somma sotto ciascun colore sarà sempre pari a quella sotto l'altro colore. Quindi, uno dei due non potrà mai superare l'altro, per ovvie ragioni.

…e se ci sono degli errori nelle formule, tutta colpa di ***Drako***. La prossima volta, usa un editor. L'ultima frase delle sue mail, è sempre: *Prima di stampare questa mail, pensa ai poveri alberelli che cadono sotto gli impietosi denti delle motoseghe...* e ha ragione. Ma all'usura tasti del nostro Formula Editor, nessuno ci pensa?

Seconda soluzione da ***Zar***, che probabilmente avrà qualcosa da dire sui metodi della nostra Maestra. Anche lui non si sogna neanche di formattare, ma almeno è veloce:

> Ho provato a dare un'occhiata al quesito del primo aprile, quello che non piace a Rudy. Ebbene, ho fatto un po' di stime riguardo alla dimensione del quadrato. Se sommiamo i numeri della prima colonna (lo so che è proibito) otteniamo la somma più bassa possibile, mentre se sommiamo i numeri dell'ultima colonna (proibito anche questo) otteniamo la somma più alta possibile. Le due somme in questione sono uguali a $\frac{n(n^2-n+2)}{2}$ e $\frac{n^2(n+1)}{2}$. Per $n=22$ i due valori corrispondono a 5104 e 5566, e quindi il nostro 5335 sta lì dentro.
>
> Questa parte non mi sembrava difficile, allora ho provato a capire quale scelta si dovrebbe effettuare per ottenere proprio il valore giusto. Dato che il numero nella prima riga può essere scelto in n modi diversi, quello nella seconda in $n-1$, e così via, ci sono $n!$ possibili scelte, che sono un po' tantine[12]: 1.124.000.727.777.607.680.000.
>
> Allora, giusto per farmi un'idea, ho provato a sommare i numeri della diagonale del quadrato. Bè, viene proprio 5335... Problema risolto :-)

…***Zar***, guarda che ti mando la Maestra Silvia a casa.

Fortunatamente, recupera con una seconda mail.

> Che suonato che sono, se anche non seguo la diagonale ma mi sposto, dato che devo fare in modo di prendere un solo numero per riga e per colonna, ciò che prendo in più una volta viene compensato da ciò che prendo in meno la volta dopo.
>
> Ah, bisogna pensare prima di mettersi a calcolare, come dico sempre ai miei studenti...

[12] un sestilione, centoventiquattro quinquilioni, settecentoventisette trilioni, settecentosettantasette miliardi, seicentosette milioni, seicentoottantamila. No, non è a norma. Ma il nostro Rossotti dice così e a noi sta più simpatico lui di quattro euroburocrati.

Avevamo già parlato del lavoro di ***Zar***, quindi non la consideriamo violazione della privacy.

Luigi svolge il calcolo che ***Zar*** aveva lasciato in sospeso:

> La richiesta che la somma sia 5335 vale in generale e quindi anche per la somma di tutti i numeri sulla diagonale del quadrato $n \times n$.
>
> Si devono sommare i valori nella tabella a fianco, quindi la somma vale:

RIGA	NUMERO
1	1
2	n+2
3	2n+3
4	3n+4
…….	
…….	
n–1	(n–2)n + (n–1)
n	(n–1)n + n

$$\begin{aligned} S &= 1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n+ \\ &\quad n[1+2+3+4+\ldots+(n-2)+(n-1)] \\ &= \frac{n^2+n}{2}+\frac{n(n^2-n)}{2}=\frac{n^3+n}{2} \end{aligned}$$

> Ora S=5335; si deve quindi trovare n per cui $n^3 + n = 10.670$; all'incirca $n = \sqrt[3]{10.670}$ che vale 22,01514 *[…fatta a mano? C'era un metodo, ma non abbiamo mai avuto il coraggio di spiegarlo].*
>
> Per cui n = 22 infatti [22 x (22^2 + 1)] / 2 = 11 x (484 + 1) = 11 x 485 = 5335. Il quadrato è un quadrato 22 x 22.
>
> Relativamente al successivo quesito: a che condizioni uno dei due colori ha sotto una somma maggiore dell'altro colore la risposta è MAI. Si può infatti ragionare cosi: consideriamo una tabella con n colonne (dove n è pari) e m righe (dove pure m è pari). L'i-esima riga conterrà i seguenti termini

(i–1)n+1	(i–1)n+2	(i–1)n+3	(i–1)n+4	(i–1)n+5	….	(i–1)n+(n–1)	(i–1)n+n

> Poiché nella riga i quadretti blu sono uguali i quadretti rossi (che si può ipotizzare contengano numeri negativi) si ha che la somma del contenuto della riga vedrà sparire la costante (i–1)n poiché si avrà una somma (i–1) (n/2) e –(i–1)(n/2) e cosi per le altre righe per cui la tabella sarà equivalente a una tabella di m righe contenti tutte la stessa stringa $1,2,3,4,\ldots,n-1,n$.
>
> Considerando il vincolo che anche in verticale le colonne contengano lo stesso numero di blu e rossi (valori negativi) si ha che ogni blu ha sotto il suo rosso (– con lo stesso valore) per cui alla fine la somma di tutta la tabella (nella convenzione blu valori postivi e rossi valori negativi) ha come risultato ZERO.
>
> Quindi LA SOMMA DEI QUADRETTI BLU È ESATTAMENTE UGUALE ALLA SOMMA DEI QUADRETTI ROSSI

Poteva mancare ***Cid***? Certo che no. Di solito lo mettiamo per primo, vista la chiarezza delle sue soluzioni, ma siccome il problema "non ci piace", abbiamo voluto prima complicarvi un po' la faccenda. Aveva trovato anche una soluzione per la seconda parte, ma questa volta non piaceva *a lui*, e quindi non ce l'ha mandata. Comunque, la soluzione della prima parte ci aiuterà sicuramente a capire meglio le *arzigogolature* dei prossimi solutori.

> Il lato del quadrato è composto da 22 quadretti. In generale, se la somma totale vale k, il lato del quadrato vale: $Int\left(\sqrt[3]{2 \cdot k}\right)$.
>
> **Dimostrazione**
>
> Siccome c'è un numero per ogni riga, la somma totale conterrà il fattore: $\sum_{i=0}^{n-1}(n \cdot i) = n \cdot \frac{n^2-n}{2}$, inoltre il fatto che sia stato scelto anche un numero per ogni

colonna fa in modo che l'altro fattore della somma sia: $\sum_{i=1}^{n}(i)=\frac{n^2+n}{2}$. Quindi la somma vale: $\frac{n^3-n^2}{2}+\frac{n^2+n}{2}=\frac{n^3+n}{2}$.

Se la somma totale vale *k*, abbiamo che: $2k=n^3+n$.

Siccome *n* rappresenta un numero intero positivo, possiamo notare che: $n^3<n^3+n<(n+1)^3$ e quindi: $n^3<2k<(n+1)^3$. Per cui, se la somma totale vale *k*, il lato del quadrato vale: $Int\left(\sqrt[3]{2\cdot k}\right)$.

Nel caso particolare in cui $k=5335$ otteniamo: $Int\left(\sqrt[3]{10670}\right)=22$.

Chiara, tranquilla e rassicurante.

Di ***Silvano*** abbiamo già parlato, visto che è talmente giovane che i suoi prof al posto della matita bicolore usa(va)no lo stilo del *touch screen* non colorata: fa un grosso uso degli evidenziatori (virtuali, fortunatamente, altrimenti ***Drako*** si arrabbia), ma ci pare che il suo metodo abbia una buona generalità, soprattutto nell'incipit.

Premesso che io avrei guardato in fondo alla prima riga…

Numerando le "Colonne" da 1 a *n* e le "righe" da 0 a "*n*–1" si ha che ogni numero può essere espresso come:

$$v_i=c_i+n\cdot r_i$$

Passando alle somme e ricordando che ci sono tutte le colonne una volta sola, e tutte le righe, ancora una volta sola, si ha:

$$\sum_{i=1}^{n}v_i=\sum_{i=1}^{n}c_i+n\cdot\sum_{i=0}^{n-1}r_i=\sum_{i=1}^{n}i+n\cdot\sum_{i=0}^{n-1}i=\frac{n\cdot(n+1)}{2}+n\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}=\frac{n}{2}(n^2+1)$$

Da cui *N*=22.

Il motivo per cui non vi piace è ovviamente a causa dell'uso della formula calcolata da un certo bimbo di cui, per non essere censurato, ho omesso il nome…

Beh la seconda parte, capita la scomposizione è banale: se su ogni riga e ogni colonna il numero di ROSSI e BLU è pari, allora per ogni colonna si ha sempre una somma dei rossi e dei blu uguale, stesso dicasi per le righe, quindi la somma è sempre uguale!

Abbiamo avuto la tentazione di censurare la frase in cui omette il nome per non essere censurato, ma a quel punto nessuno se ne sarebbe accorto, quindi la lasciamo.

Alberto ha deciso che i problemi di questo tipo meritano un nome (e una teoria):

Capita spesso nei giochi di scacchiera, ma anche nella matematica seria (si pensi, ad esempio, alla definizione di determinante di una matrice) di dover scegliere *N* celle di una matrice quadrata *N·N* in modo che ce ne sia una sola per ogni riga e per ogni colonna. Nessuno, però, ha ritenuto utile dare un nome al gruppo di celle così ottenuto. Ci penso io: lo chiameremo **URC**, acronimo di **U**no per **R**iga e per **C**olonna.

Il problema (prima parte) propone una matrice quadrata *N·N* con le celle numerate progressivamente da sinistra a destra e dall'alto al basso, sulla quale è collocato un URC. Si chiede per quale valore di *N* la somma dei numeri a esso sottostanti è pari a 5335.

Indichiamo con *A(i,j)* (l'uso dei pedici in Word è troppo scomodo) l'elemento che si trova all'incrocio tra l'*i*-esima riga e la *j*-esima colonna.

Se gli *N* elementi di un URC vengono ordinati secondo il primo indice (indice di riga), la successione dei secondi indici (indici di colonna) forma una permutazione dei numeri da 1 a *N*. Ad ogni URC, ordinato per riga, corrisponde una ben precisa permutazione degli indici di colonna e viceversa (corrispondenza biunivoca).

Scegliamo l'URC composto dagli elementi della diagonale principale, cioè dalle celle *A(i,i)* con *i* = 1...*N*.

È facile verificare che $A(i,i) = N(i-1)+i$.

La sommatoria degli *A(i,i)* per *i* da 1 a *N* vale $N(N^2+1)/2$, espressione che assume il valore 5335 per N=22.

Dimostriamo ora che questa somma non cambia scegliendo un diverso URC, cioè una diversa permutazione degli indici di colonna.

Partendo dall'URC formato dalla diagonale principale, cancelliamo l'elemento *A(x,x)* e lo sostituiamo con l'elemento *A(x,y)* che si trova sulla stessa riga *x*, ma sulla colonna ***y*****,** a sinistra (supponiamo) della colonna *x*. La somma diminuisce di $x-y$.

Adesso però abbiamo due elementi sulla colonna *y* mentre la colonna *x* è vuota. Ristabiliamo quindi una distribuzione corretta cancellando **A(y,y)** e sostituendolo con *A(y,x)*. La somma aumenta di $x-y$ e abbiamo pareggiato i conti.

In questo modo non abbiamo fatto altro che scambiare fra loro due indici di colonna, ma si sa che qualunque permutazione può essere ottenuta da quella fondamentale mediante reiterati scambi di due suoi elementi. Data l'accennata corrispondenza biunivoca tra permutazioni e URC, l'assunto è dimostrato.

Veniamo alla seconda parte.

Adesso tutte le caselle di una scacchiera quadrata di ordine pari, riempita di numeri come sopra, sono colorate di rosso o di blu, in modo che in ogni riga e in ogni colonna ci siano tanti rossi quanti blu. Si chiede di confrontare la somma dei numeri rossi con la somma dei numeri blu.

Diremo che due URC sono **indipendenti** se non hanno celle in comune.

È evidente che *N* URC indipendenti riempiamo una scacchiera $N \cdot N$.

N URC indipendenti corrispondono a *N* permutazioni reciprocamente complete. Un modo (ma non l'unico) di ottenerle è quello di partire da una permutazione qualunque e operare reiterate sostituzioni circolari.

Ecco un esempio per *N*=4 *[Lo trovate nella tabella qui di fianco]*.

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

Per restare nell'esempio, scegliamo 2 permutazioni (la metà delle 4 elencate), coloriamo di rosso gli URC corrispondenti e di blu le restanti celle. Abbiamo colorato l'intera scacchiera e, come richiesto, su ogni riga/colonna ci sono tante celle rosse quante blu.

Poiché, come abbiamo già dimostrato, la somma degli elementi di ogni URC è costante, ne risulta che, nelle scacchiere colorate con questo metodo, la somma dei numeri rossi uguaglia sempre la somma dei numeri blu. Non abbiamo però risolto il problema: occorrerebbe dimostrare (ma non ci riesco) che il metodo delle permutazioni reciprocamente complete innanzi descritto è in grado di generare qualunque scacchiera avente tante celle rosse quante blu su ogni riga/colonna.

Una curiosità: Se costruiamo le *N* permutazioni complete mediante sostituzioni circolari a partire dalla permutazione fondamentale (come nell'esempio sopra riportato) e diamo un colore agli URC corrispondenti alle permutazioni pari e l'altro colore agli URC corrispondenti alle permutazioni dispari, la scacchiera risulta colorata a scacchi alterni come una normale scacchiera di gioco.

Trekker, come al solito, ci fa arrabbiare: non con lui, con Bill Gates. Ci manda i file in formato Word, scritti con OpenOffice, e fin qui tutto bene: peccato che (colpa di BG) i due programmi siano compatibili al 99,7%, e tutto lo 0,3% è concentrato nel Formula Editor…

Sia I un insieme di numeri naturali (non necessariamente consecutivi) con cardinalità card(I) e J un altro insieme di numeri naturali (non necessariamente consecutivi) con cardinalità card(J). Sull'insieme prodotto cartesiano $C=I\text{x}J$ definiamo la funzione $a(i;j)$ esprimibile come somma di due parti ciascuna delle quali funzione solo di una delle due variabili, cioè $a(i;j)=f(i)+g(j)$ con $(i,j)\in C$.

Posto che m e n siano due numeri naturali tali che $0<m\le card(J)$ e $0<n\le card(I)$, da C estraiamo un insieme S (incluso nella famiglia $\underline{\boldsymbol{S}}_{\mathbf{mn}}$ di tutti quelli ammissibili) formato dagli elementi $(i;j)$ tali che:

$$\forall i\in I\ \exists j_1,j_2,\ldots,j_m\in J \text{ tali che } (i;j)\in S$$

e, analogamente:

$$\forall j\in J\ \exists i_1,i_2,\ldots,i_n\in I \text{ tali che } (i;j)\in S$$

Nota: in pratica fino ad adesso stiamo cercando di descrivere una scacchiera rettangolare – non necessariamente con tutte le righe e le colonne utilizzabili per lo scopo che segue – in ciascuna casella della quale è scritto un numero che è una funzione "particolare" della riga e della colonna corrispondente. In questa scacchiera vogliamo selezionare (o "matitare") alcune caselle in modo che ve ne siano m selezionate per ogni riga ed n per ogni colonna. E questo valga per tutte le righe e per tutte le colonne.

Ci proponiamo di calcolare la somma $T(S)$ di tutti gli elementi di S:

$$T(S)=\sum_{(i;j)\in S}a(i;j)=\sum_{(i;j)\in S}(f(i)+g(j))=\sum_{(i;j)\in S}f(i)+\sum_{(i;j)\in S}g(j)$$

Osserviamo la somma $\sum_{(i;j)\in S}f(i)$: fissato i, per come è definito S, ci sono m numeri $j_1,j_2,..,j_m\in J$ tali che $(i;j)\in S$. Possiamo quindi scrivere $\sum_{(i;j)\in S}f(i)=m\cdot\sum_{i\in I}f(i)$.

Analogamente, fissato j esistono n numeri $i_1,i_2,\ldots,i_n\in I$ tali che $(i;j)\in S$. Possiamo quindi scrivere $\sum_{(i;j)\in S}g(j)=n\cdot\sum_{j\in J}g(j)$.

La nostra somma $T(S)$ quindi vale:

$$T(S)=m\cdot\sum_{i\in I}f(i)+n\cdot\sum_{j\in J}g(j).$$

Si noti che tale somma non dipende dalla particolare scelta dell'insieme S (incluso nella famiglia $\underline{S}_{\mathrm{mn}}$ di tutti quelli ammissibili) ma solo da come sono fatte le funzioni $f(i)$ e $g(j)$, da quanti e quali numeri naturali compongono gli insiemi I e J e dai numeri m ed n.

Poiché la somma è comune a tutti gli insiemi $S\in\underline{S}_{mn}$ possiamo associarla alla stessa $\underline{S}_{\mathrm{mn}}$, cioè:

$$\boxed{T(\underline{S}_{mn}) = m \cdot \sum_{i \in I} f(i) + n \cdot \sum_{j \in J} g(j)}$$

Relativamente al primo problema troviamo ora la dimensione N della scacchiera quadrata richiesta.

Abbiamo:

m=n=1, I=J={1,2,3,..., N}, card(I)=card(J)=N e $a(i;j) = f(i) + g(j) = [N \cdot (i-1)] + j$

Allora $T(\underline{S}_{11}) = m \cdot \sum_{i \in I} f(i) + n \cdot \sum_{j \in J} g(j) = 1 \cdot \sum_{i=1}^{i=N} N(i-1) + 1 \cdot \sum_{j=1}^{j=N} j = \frac{N}{2}(N^2 + 1)$.

La soluzione dell'equazione $\frac{N}{2}(N^2+1) = 5335$ è N=22.

Relativamente al secondo problema, dove $a(i;j) = f(i) + g(j) = [card(J) \cdot (i-1)] + j$, possiamo osservare che la richiesta di avere lo stesso numero di caselle "matitate" di rosso e di blu in ogni riga e in ogni colonna equivale a cercare due insiemi R e B entrambi "generati" da $m = \frac{card(J)}{2}$ e $n = \frac{card(I)}{2}$ – con card(J) e card(I) numeri pari – facenti parte della medesima famiglia, cioè

$$R, B \in \underline{S}_{\frac{card(J)}{2}, \frac{card(I)}{2}}.$$

Perciò, per quanto già osservato sopra, le somme dei corrispondenti numeri "matitati" di R e di B sono sempre uguali, comunque si costruiscano gli insiemi R e B. Facciamo un esempio di verifica. Supponiamo di prendere una scacchiera di 8 righe e 10 colonne. Cancelliamo le righe 2 e 4 e le colonne 5 e 8 ottenendo quindi una scacchiera "cava" di 6 righe ed 8 colonne. Vogliamo "matitare" di rosso, e rispettivamente di blu, 4 celle di ogni riga e 3 celle di ogni colonna.

Supponiamo che la casella in riga i e colonna j contenga il numero reale:

$$a(i;j) = [i^3 + \cosh(i)] + [\sin(j) + \sqrt{j}]$$

Una possibile colorazione della scacchiera che rispetta i vincoli è quella mostrata in figura:

	j=	1	2	3	4		6	7		9	10
i=											
1		4.38	4.87	4.42	3.79		4.71	5.85		5.96	5.16
3		38.91	39.39	38.94	38.31		39.24	40.37		40.48	39.69
5		201.05	201.53	201.08	200.45		201.38	202.51		202.62	201.83
6		419.56	420.04	419.59	418.96		419.89	421.02		421.13	420.33
7		893.16	893.64	893.19	892.56		893.49	894.62		894.73	893.94
8		2004.32	2004.8	2004.35	2003.72		2004.65	2005.78		2005.89	2005.1

Somma Rossa	14257.68
Somma Blu	14257.68

Si noti che la somma degli elementi "matitati" di rosso è uguale alla somma degli elementi "matitati" di blu.

Per SPERARE di ottenere una somma diversa bisogna che $a(i;j)$ NON sia esprimibile come $a(i;j) = f(i) + g(j)$, altrimenti tutti i tentativi saranno sicuramente vani.

Considerazioni analoghe si possono fare utilizzando numeri complessi scritti in celle di iper-scacchiere a tre o più dimensioni, volendo anche "cave" , e utilizzando tre o più colori.

Supponiamo ora che $a(i;j)$ sia una funzione "qualsiasi" di riga e colonna. In generale non si può garantire che la "somma rossa" *T(R)* sia uguale alla "somma blu" *T(B)* (pensiamo ad esempio al caso in cui un elemento $a(i;j)$ sia maggiore della somma di tutti gli altri: il colore scelto per questo elemento condiziona, già da solo, quale somma sarà maggiore).

Impostando un problema di ricerca operativa, possiamo però trovare una mappatura tale che lo scostamento $|T(R)-T(B)|$ sia minimo, o, il che è equivalente, lo sia il suo quadrato $(T(R)-T(B))^2$.

Sia *T(S)* la somma di tutti gli elementi $a(i;j)$. Allora $T(B)=T(S)-T(R)$. Indicando con p_{ij} delle variabili "segna-posto-rosso" intere binarie (cioè che possono assumere solo il valore 0 o 1) possiamo scrivere il seguente problema di minimizzazione a variabili binarie:

$$min\ (T(R)-T(B))^2$$

$$T(S)=\sum_{(i;j)\in IxJ} a(i;j)$$

$$T(R)=\sum_{(i;j)\in IxJ} p_{ij}\cdot a(i;j)$$

$$T(B)=T(S)-T(R)$$

con le condizioni $I \subset \quad +$, $J \subset \quad +$, $p_{ij} \in \{0,1\}$

$$\sum_{j\in J} p_{ij} = \frac{card(J)}{2}, \forall i \in I$$

$$\sum_{i\in I} p_{ij} = \frac{card(I)}{2}, \forall j \in J$$

e con card(*I*) e card(*J*) numeri pari.

Basta ora utilizzare uno dei tanti algoritmi di ricerca della soluzione ottima.

La soluzione del problema di minimizzazione ci fornirà i valori p_{ij} : la cella (*i;j*) andrà colorata di rosso qualora $p_{ij}=1$ altrimenti andrà colorata di blu.

Gnugnu è lapidario:

Il numero che compare in ogni quadretto, o cella che dir si voglia, è la somma di due addendi uno dipendente solo dalla riga e l'altro solo dalla colonna. Le proprietà dell'addizione permettono di ricavare il totale cercato sommando separatamente i contributi di riga e di colonna. Abbiamo, quindi, un invariante e possiamo trovarne il valore addizionando, ad esempio, tutti i numeri della diagonale principale, che sono in progressione aritmetica di ragione $n + 1$, da 1 fino a n^2.

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\left(1+(n+1)i\right) = \frac{n\left(n^2+1\right)}{2}, \text{ da cui } n = \left\lfloor \sqrt[3]{2S_n} \right\rfloor.$$

Con $S_n = 5335$ si ottiene $n = 22$.

Il medesimo ragionamento prova che, con il lapis di Esaù, ciascun colore segnerà sempre esattamente metà della somma complessiva.

…Dimenticavo, il mio parere è: "non mi piace!".

Beh, a quanto pare una volta tanto Rudy e ***Gnugnu*** sono d'accordo su qualcosa. Ma non lo sono di sicuro con voi, che avete mostrato di apprezzarlo: sono arrivate anche altre soluzioni (ad esempio quelle di ***Natalino*** e di ***Franco57***) ma volendo limitare le pagine di questo numero a due sole cifre, ci fermiamo qui.

5.2.2 Il viaggio di Alberto

Prima, dicevamo, il problema:

> *Giocando con un dado onesto a molte facce, il primo che non riesce a fare un tiro di valore maggiore di quello dell'avversario perde; quale deve essere la proporzione tra le giocate affinché il gioco sia equo?*

Vi raccontiamo subito come va a finire: se leggete anche una Prestigiosa Rivista di Divulgazione Scientifica, vi dovreste essere accorti che questo problema e il *problema di marzo* (soluzione pubblicata sul numero di aprile) avevano lo stesso valore numerico: non abbiamo capito come questi due problemi siano legati tra di loro, ma se qualcuno vuole provare a spiegarlo garantiamo come al solito la pubblicazione.

Dunque, le soluzioni.

Michele è stato rapidissimo, anche se i calcoli non sono molto chiari:

> il primo (A) che tira il dado a n facce è avvantaggiato sul secondo (B): costruendo il grafo si scopre che la probabilità di vincere per B è:
>
> $$p(n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$
>
> Tale probabilità tende a $1/e$ al tendere di n all'infinito. Dunque per "n grande" le probabilità di vittoria sono circa 63.2% per A e 36.8% per B.
>
> Affinché il gioco sia equo, cioè il valore atteso della vincita di ciascun giocatore sia nullo, le poste devono essere direttamente proporzionali alle probabilità: se 1 è la posta di A allora la posta di B deve essere $p(n)/(1-p(n))$ e, al tendere di n a infinito, posta di A=1 e posta di B=0.582.

Il Panurgo ci manda un raro esempio di virtuosismo editoriale, oltre che un metodo risolutivo estremamente interessante:

> Procedo per la via maestra senza esplorazioni laterali. Il gioco ha $n + 2$ stati: la partenza A, gli n esiti del dado e la fine del gioco Ω; da A sono raggiungibili, con probabilità $1/n$, n stati ma non Ω; dallo stato s sono raggiungibili gli stati da $s + 1$ a n con probabilità $1/n$ e Ω con probabilità s/n.
>
> Raccogliamo queste probabilità di transizione ottenendo la matrice triangolare

$$\mathbf{T}=\frac{1}{n}\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & n \end{pmatrix}$$

La k-esima potenza di questa matrice, $\mathbf{T}^k$, contiene le probabilità di transizione in k passi: in particolare, il termine $(\mathbf{T}^k)_{n+2,1}$ rappresenta $F(k \mid nI)$ ovvero la probabilità di finire il gioco in non più di k passi partendo da A.

Tale termine vale $\left(\mathbf{T}^k\right)_{n+2,1}=\sum T_{n+2,i}\times\left(\mathbf{T}^{k-1}\right)_{i,1}$, perciò è sufficiente calcolare le prime colonne delle diverse potenze di $\mathbf{T}$. Per esempio con $n = 6$ (chissà perché?).

$$\mathbf{T}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T}^2=\frac{1}{6^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 21 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T}^3=\frac{1}{6^3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \\ 196 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}^4=\frac{1}{6^4}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 10 \\ 1281 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T}^5=\frac{1}{6^5}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \\ 7770 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T}^6=\frac{1}{6^6}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 46655 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T}^7=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo immediatamente che il gioco può consistere al massimo di $n + 1$ passi con la sequenza $(1,2,\ldots,n,x)$; se poi giustapponiamo le prime colonne di ciascuna matrice (si sottintende che ciascun termine è moltiplicato per $1/6^k$).

0						
1	0					
1	**1**	0				
1	**2**	1	0			
1	**3**	3	1	0		
1	4	**6**	4	1	0	
1	5	10	10	5	1	0
0	21	196	1281	7770	46655	1

escludendo la prima e l'ultima riga vediamo comparire il familiare triangolo di Pascal/Tartaglia: questo risultato è dovuto alla forma di **T** le cui righe, contenenti un numero crescente di 1, comportano la somma di un termine in più mano a mano che si scende nella colonna e questo è un meccanismo con cui si genera il triangolo di P/T (numeri in grassetto).

Possiamo quindi rendere questo schema generale sostituendo ai termini delle colonne i rispettivi coefficienti binomiali:

$$\begin{array}{cccccc}
0 & & & & & \\
\hline
\binom{0}{0} & 0 & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
\binom{n-2}{0} & \binom{n-2}{1} & \binom{n-2}{2} & \binom{n-2}{3} & \cdots & 0 \\
\binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{3} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \quad 0 \\
\hline
0 & & & & \cdots & 1
\end{array}$$

Per calcolare i termini mancanti facciamo uso del fatto che la somma di ciascuna colonna vale 1 per cui:

$$\left(\mathbf{T}^k\right)_{n+2,1} = 1 - \sum_{i=1}^{n+1} \left(\mathbf{T}^k\right)_{i,1} = 1 - \left(\frac{1}{n}\right)^k \sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1} = 1 - \left(\frac{1}{n}\right)^k \binom{n}{k}$$

(il secondo passaggio è giustificato dal fatto che i termini con $i < k-1$ sono nulli).

Abbiamo quindi

$$F(k \mid nI) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{1}{n}\right)^k \binom{n}{k} & 1 \le k \le n \\ 1 & k = n+1 \end{cases}$$

e

$$p(k \mid nI) = \begin{cases} 0 & k = 1 \\ F(k \mid nI) - F(k-1 \mid nI) = \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} \binom{n}{k-1} - \left(\frac{1}{n}\right)^k \binom{n}{k} & 2 \le k \le n \\ \left(\frac{1}{n}\right)^n & k = n+1 \end{cases}$$

dove $p(k \mid nI)$ è la probabilità di passare da A a Ω in k passi esatti.

La probabilità di vittoria del primo giocatore è uguale alla probabilità di finire il gioco in un numero pari di passi

$$p(A \mid nI) = p(2 \mid nI) + p(4 \mid nI) + p(6 \mid nI) + \ldots$$

Se n è pari abbiamo

$$p(A|nI)=\left[\left(\frac{1}{n}\right)^1\binom{n}{1}-\left(\frac{1}{n}\right)^2\binom{n}{2}\right]+\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3\binom{n}{3}-\left(\frac{1}{n}\right)^4\binom{n}{4}\right]+\cdots+$$
$$+\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}\binom{n}{n-1}-\left(\frac{1}{n}\right)^n\binom{n}{n}\right]$$

e confrontando questa somma con l'espansione per n pari del binomio $(1-1/n)^n$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=1-\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2-\binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots-\binom{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

otteniamo

$$p(A|nI)=1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

Se n è dispari abbiamo

$$p(A|nI)=\left[\left(\frac{1}{n}\right)^1\binom{n}{1}-\left(\frac{1}{n}\right)^2\binom{n}{2}\right]+\cdots+\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{n-2}\binom{n}{n-2}-\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}\binom{n}{n-1}\right]+\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

e confrontando questa somma con l'espansione per n dispari del binomio

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=1-\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2-\binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots+\binom{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

confermiamo

$$p(A|nI)=1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

e ovviamente

$$p(B|nI)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

Perché il gioco sia equo ciascuno deve pagare in proporzione alla sua probabilità di vittoria quindi il secondo giocatore deve puntare $(n-1)^n\Big/\left[n^n-(n-1)^n\right]$ € contro 1 € del primo. L'idea di approssimare $p(B|nI)$ con $1/e$ non è molto buona: per $n = 20$ il secondo giocatore ci rimette ancora un buon 1%.

Rudy ha una domanda da fare a ***Franco57***: prima o dopo lo Sputnik? Mentre loro si parlano in codice, vediamo la soluzione di ***Franco57***:

In qualsiasi momento della partita, quando un giocatore tira il dado, la sua probabilità p_k di perdere l'intera partita dipende solo dal punteggio k appena realizzato dal suo avversario, sui possibili (ed equiprobabili) punteggi $1,2,\cdots,n$ offerti dal dado. In particolare per il primo giocatore la probabilità di perdere è p_0, perché è esattamente come se il suo avversario avesse appena realizzato un ipotetico 0 punti.

Se l'avversario ha appena realizzato k punti, per il giocatore di turno ci sono due modi di perdere:

- perde subito perché non realizza più di k punti, quindi con una probabilità k/n,
- oppure perde perché, anche se realizza $h > k$ punti, il suo avversario in seguito vince, con una probabilità quindi di $\frac{1}{n}(1 - p_h)$, essendo $\frac{1}{n}$ la probabilità che realizzi h e $1 - p_h$ che il suo avversario in seguito non perda.

Allora abbiamo queste relazioni tra le p_k:

$$p_k = \frac{k}{n} + \sum_{k<h\le n} \frac{1}{n}(1 - p_h) = \frac{k}{n} + \frac{n-k}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k<h\le n} p_h = 1 - \frac{1}{n} \sum_{k<h\le n} p_h$$

Questo è un sistema lineare di n equazioni in n incognite che si risolve facilmente perché la matrice è triangolare superiore, cioè si vede subito che $p_n = 1$, poi p_{n-1} dipende solo da p_n, p_{n-2} solo da p_n e p_{n-1} e così via.

Si scopre che: $p_k = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k}$ e si dimostra per induzione su k a partire da n e decrescendo a 0:

per $k = n$ la formula dà $p_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^0 = 1$ come deve essere (sicurezza di perdere se l'avversario ha appena realizzato il massimo); supponendo vera la formula per ogni $h > k$ e sfruttato la ben nota formula $\sum_{o\le i<m} q^i = \frac{1-q^m}{1-q}$ per $|q| < 1$, abbiamo

$$p_k = 1 - \frac{1}{n} \sum_{k<h\le n} p_h = 1 - \frac{1}{n} \sum_{k<h\le n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-h} = 1 - \frac{1}{n} \sum_{o\le i<n-k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i = 1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k}}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k}$$

La probabilità di perdita per il primo giocatore, cioè di vincita per il secondo è dunque $p_0 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

Il gioco è equo se è nulla la vincita media del primo giocatore (e logicamente anche del secondo), cioè, posto x il valore puntato dal secondo, se $(-1) \cdot p_0 + x \cdot (1 - p_0) = 0$, che fornisce

$$x = \frac{p_0}{1 - p_0} = \frac{1}{\frac{1}{p_0} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} - 1} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n - 1}.$$

non solo, ma il Nostro estende anche…

Con lo stesso metodo si può calcolare anche la durata media della partita. Per uniformità consideriamo la partita conclusa quando effettivamente uno dei due giocatori non ha superato il punteggio dell'avversario, vale a dire anche se quest'ultimo avesse totalizzato il massimo cioè n e l'esito fosse quindi determinato, facciamo tirare il dado un'ultima volta per constatare che non ha superato n. Se d_k è il numero medio di tiri ancora da effettuare per giungere al termine della partita dopo che è stato appena realizzato un k, abbiamo

$$d_k = \frac{k}{n}\cdot 1 + \sum_{k<h\le n}\frac{1}{n}(1+d_h) = 1 + \frac{1}{n}\sum_{k<h\le n} d_h$$

e in modo del tutto analogo, si dimostra per induzione che $d_k = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-k}$.

Si trova quindi che la durata media della partita è $d_0 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Appare quindi naturale, a questo punto, passare al limite e giocare con numeri reali generati secondo la distribuzione uniforme nell'intervallo $[0,1]$, pensando di suddividerlo in n parti uguali, con n che tende all'infinito.

Da quanto calcolato, senza sviluppare alcun integrale, sappiamo che la probabilità di vittoria per il secondo giocatore è di $1/e$ e che la durata media della partita vale e poiché com'è noto questi sono i limiti per n che tende all'infinito rispettivamente di $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ e di $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Sempre passando al limite, se il primo giocatore punta 1 euro il secondo ne deve puntare $\frac{1}{e-1}$ affinché il gioco sia equo.

Questo problema sembra essere piaciuto a ***Gnugnu*** più del precedente: infatti è stato molto più prolisso.

La probabilità, giocando con un dado ad n facce, che il gioco prosegua oltre il k-esimo lancio si trova facilmente osservando che il numero di disposizioni possibili è n^k; mentre quelle che non hanno portato alla vittoria di uno dei contendenti devono essere sequenze strettamente crescenti e, quindi, ve ne sarà esattamente una per ogni combinazione, senza ripetizioni.

Indicando con $P^+(n,k)$ questa probabilità, sarà:

$$P^+(n,k) = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \quad n,k \in N; \quad k \le n.$$

La probabilità che uno dei giocatori vinca al k-esimo lancio sarà la differenza fra la probabilità di essere arrivati fino a quel punto (di aver superato senza vincitori il lancio precedente) e quella di proseguire oltre nel gioco.

$$P(n,k) = P^+(n,k-1) - P^+(n,k) = \binom{n}{k-1}\frac{1}{n^{k-1}} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}.$$

Il secondo giocatore può aggiudicarsi la partita vincendo in uno qualsiasi dei lanci dispari, dal primo (decisamente improbabile!) fino all'n-esimo se n è dispari o all'(n+1)-esimo se n è pari; appare strano, ma nel caso si sia prodotta la sequenza ordinata da 1 a n si vince, sicuramente, al lancio n+1.

Per calcolare la probabilità di questo evento basta sommare le probabilità dei componenti e, senza usare le, formalmente corrette, ma un po' pesanti sommatorie, si ottiene:

$P^+(n,0) - P^+(n,1) + ... + P^+(n,n-1) - P^+(n,n)$ nel caso di n dispari;

$P^+(n,0) - P^+(n,1) + ... + P^+(n,n)$ quando n è pari, $P^+(n,n+1)$ vale, infatti, 0.

Sostituendo le espressioni per le P^+ si ottiene, ricordando lo sviluppo di Newton del binomio:

$$P_2(n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(-\frac{1}{n}\right)^i \cdot 1^{n-i} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

$$P_1(n) = 1 - P_2(n) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n .$$

Il secondo giocatore è svantaggiato. Con un dado a 2 sole facce (forse una moneta andrebbe meglio) la sua probabilità di vittoria è ¼; al crescere del numero delle facce la possibilità di vincere aumenta, ma non più di tanto: al tendere di n all'infinito tende ad $1/e$.

Quando il primo giocatore punta 1 euro, il secondo, per rendere equo il gioco, dovrà rischiare:

$$E(n) = \frac{P_2(n)}{P_1(n)} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{(n-1)^n}{n^n - (n-1)^n}$$ euro, poco più di 33 centesimi con 2 facce, che cresceranno, avvicinandosi al reciproco di (e – 1) quando il numero di facce diventa molto grande.

Con l'usuale dado esaedrico sarà equo puntare 50 centesimi, con la speranza matematica di accumulare ingenti capitali giocando per tutta la vita.

Dovremmo chiudere con "…e questo è tutto", ma non lo è. Abbiamo saltato un mucchio di soluzioni, quindi "…e questo è un pezzo".

6. Quick & Dirty

In occasione del recupero scolastico di un VAdLdRM e del compleanno di un PR (Prestigioso Redattore), Rudy ha deciso di aprire una bottiglia di *champagne* (anche perché quella tenuta dal gennaio 2009 e aperta a capodanno era "ottima con la rucola", per restare positivi… Aceto, se non l'avete capito. Quindi, stiamo cercando di assottigliare le scorte).

Rimirando pensoso la snella *flûte*, a Rudy è sembrato che, mentre si avvicinavano al pelo del liquido, le bollicine si muovessero più veloci… Secondo voi, ha bevuto troppo?

No; la forza ascensionale è proporzionale al volume della bolla, mentre l'attrito è proporzionale alla superficie della medesima. Mentre sale la bolla raccoglie altre bolle, e il volume aumenta più velocemente della superficie. Quindi esiste una risultante che la spinge verso l'alto e, quindi, la bolla accelera.

7. Zugzwang!

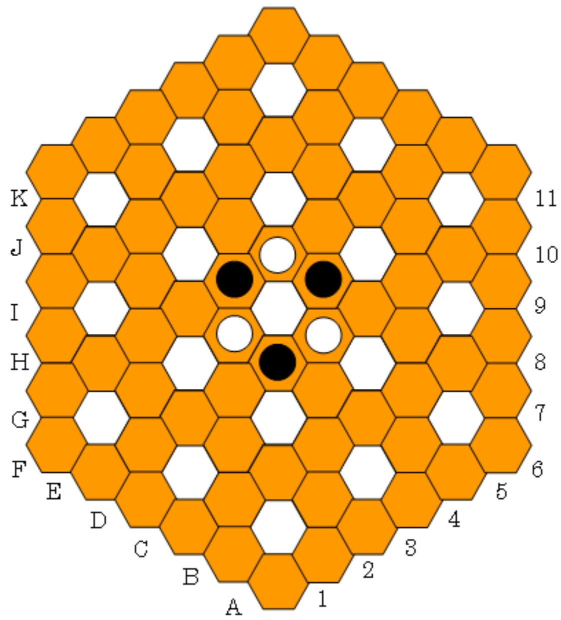
7.1 MacBeth

No, non è un errore. ***Chrisitaan Freeling*** (che sarebbe poi l'inventore) lo scrive proprio così, probabilmente perché in questo modo può brevettarlo.

A noi, alcuni giochi stanno simpatici a prescindere dalla loro "giocabilità", nel senso che, anche se esistono buoni avversari su computer e non li giochiamo mai, ci piacciono.

Uno di questi è, di sicuro, l'Othello (noto in Italia anche come Reversi): ricordiamo, con ragionevole sicurezza, di aver visto dei sorgenti in BASIC nel 1983 in grado di giocare una partita decente: il gioco, pur avendo l'aria simpatica, non ci pare valga lo sforzo di tirare fuori la scacchiera e di ricolorare i pezzi da dama, ma a quanto pare qualcuno è riuscito a trasformarlo in qualcosa di interessante.

Ve lo diciamo subito, somiglia talmente all'Othello che, giustappunto, Christiaan lo ha chiamato con un nome ispirato a un'altra tragedia shakespeariana: la brutta notizia è che le parti dove non somiglia richiedono un mucchio di lavoro.



8 *Scacchiera bucata!*

Tanto per cominciare, la ***scacchiera*** è piena di buchi. La trovate qui di fianco, completa delle lettere che dovrebbero semplificare la notazione delle mosse (seeh…).

Poi i ***pezzi***: non vi basta un gioco solo da Othello, visto che qui i pezzi che servono sono 72. E, alla partenza, anziché i soliti quattro pezzi dovete metterne sei (li trovate indicati nella scacchiera).

Le regole (fermo restando che qui giocate su degli esagoni) sono le stesse di Othello, ma alcuni esperti sostengono che questo gioco sia preferibile perché gli assiomi irrinunciabili (ne ricordiamo alcuni: conquistare angoli a qualsiasi costo, evitare come la peste le caselle vicino agli angoli, cercare di non essere il primo che arriva ad un bordo…) diventano delle cose molto più "sfumate", che non si traducono in tragedie e rovinose disfatte: forse anche per il fatto che anziché quattro direzioni nelle quali "fare danni" capovolgendo pedine, qui ne avete solo due.

Se provate, fateci sapere come è andata.

8. Pagina 46

Utilizzando l'identità trigonometrica:

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B,$$

otteniamo:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\cos x\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos x-\sin\frac{\pi}{2}\sin(\cos x)$$
$$=-\sin\frac{\pi}{2}\sin(\cos x)$$
$$=-\sin(\cos x),$$

ossia:

$$\sin(\cos x)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\cos x\right),$$

da cui:

$$\cos(\sin x)-\sin(\cos x)=\cos(\sin x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\cos x\right). \qquad \texttt{[1]}$$

Utilizziamo ora la formula:

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

al secondo membro della `[1]`, e utilizziamo il fatto che $\cos\alpha=\cos(-\alpha)$:

$$\cos(\sin x)-\sin(\cos x)=2\cos\frac{\sin x+\frac{\pi}{2}+\cos x}{2}\cdot\cos\frac{-\sin x+\frac{\pi}{2}+\cos x}{2}.$$

Ora,

$$|\cos x+\sin x|=\sqrt{\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x}$$
$$=\sqrt{1+\sin 2x}$$
$$\leq\sqrt{2}.$$

Analogamente,

$$|\cos x-\sin x|=\sqrt{\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x}$$
$$=\sqrt{1-\sin 2x}$$
$$\leq\sqrt{2}.$$

Notiamo che il valore $\sqrt{2}$ viene raggiunto solo quando $\sin 2x=1$ (primo caso) e quando $\sin 2x=-1$ (secondo caso).

Ora, dato che $\frac{\pi}{2}\approx 1.57$ e $\sqrt{2}\approx 1.41$, possiamo scrivere:

$$\frac{\pi}{2}>\frac{\frac{\pi}{2}+\cos x+\sin x}{2}>0;$$
$$\frac{\pi}{2}>\frac{\frac{\pi}{2}+\cos x-\sin x}{2}>0.$$

Il che significa che le due grandezze:

$$\cos\frac{\frac{\pi}{2}+\cos x+\sin x}{2};$$

$$\cos\frac{\frac{\pi}{2}+\cos x-\sin x}{2}$$

sono sempre positive, e quindi lo è sempre anche la differenza $\cos(\sin x)-\sin(\cos x)$, ossia $\forall x, \cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

9. Paraphernalia Mathematica

9.1 Sicuro? Ma quanto sicuro?

Almeno due di noi hanno un ricordo del primo anno di Università: l'ultima pagina di una rivista di divulgazione scientifica con una foto di un gran numero di pulcini gialli e, al centro, un pulcino nero. La domanda "È statisticamente significativo?" serviva a pubblicizzare uno dei primi calcolatori tascabili dotato di funzioni statistiche[13].

Bene, questa volta iniziamo a parlare di queste cose.

Supponiamo di avere la solita urna: una bella urnona grossa, in grado di contenere 10000 biglie, bianche o nere, e non conosciamo la proporzione dei due colori.

Se ne tirate fuori 1000 e verificate che il 40% di queste sono bianche, sembra ragionevole supporre che il 40% delle biglie presenti nell'urna siano bianche; potremmo chiederci perché fare lo sforzo di tirarne fuori 1000; potrebbero bastare di meno, così non ci stanchiamo? 100? 10?

Forse sul 100 potreste anche essere d'accordo, ma mi aspetto che sul 10 obiettiate che il campione comincia ad essere troppo piccolo; farebbe comodo, a questo punto, un modo per stimare quanto sia "giusto" il nostro campione, anche se nutriamo grossi dubbi sull'applicazione di un avverbio quantitativo al concetto di "giusto".

#	Bianche	Nere
1	40	60
2	35	65
3	47	53
4	50	50
5	31	69
6	25	75
7	36	64
8	20	80
9	45	55
10	55	45

9 *Estrazioni del Lotto*

Bene, partiamo con i conti.

Per prima cosa, procuriamoci qualche campione da 100 palline, riportando sempre l'urna alle condizioni iniziali (ossia, dopo che abbiamo estratto le 100 palline, rimettiamo tutto dentro); trovate le estrazioni nella tabella a fianco.

Se calcoliamo il valor medio delle estrazioni bianche, vediamo che si assesta su $\overline{X} = 38{,}4$, che suscita in noi un certo ottimismo, vista la sua vicinanza al 40 che avevamo ipotizzato con la prima estrazione; resta il fatto, però, che siamo interessati a sapere non solo quanto la prima estrazione sia rappresentativa, ma anche quanto lo siano le altre; e qui viene la parte che ad Alice non piace; infatti, la sensazione è un po' quella di un gatto che si morda la coda, visto che vuoi stabilire la consistenza di un'estrazione in funzione di altre estrazioni per le quali non sei sicuro della consistenza…

Per fare questo, ci viene in aiuto un concetto piuttosto balordo, quello di ***Deviazione Standard*** o "Scarto Quadratico Medio Empirico" o "Deviazione Quadratica Media Empirica": la sua intenzione è quella di misurare "quanto sballano" le estrazioni l'una rispetto all'altra, indipendentemente da quale sia il valore "vero"[14]:

---

[13] Non vorremmo per senilità mettere insieme due ricordi che in realtà sono separati tra di loro, ma sul numero portante la *prima* pubblicità di un calcolatore statistico ci pare di ricordare (in seconda di copertina) l'*ultima* di un regolo calcolatore.

[14] Motivo della supposta balordaggine del concetto è quell' $n - 1$ presente a denominatore; in effetti, se abbiamo n estrazioni, sembra logico il calcolare il tutto su n, e non su $n - 1$. Il motivo di fondo sta tutto in quell'*Empirico* che compare nei nomi: quando avete una distribuzione *teorica* con un valor medio *teorico* (nel nostro caso è quel 40 ipotizzato all'inizio) siete perfettamente autorizzati ad utilizzare n; quando usate la distribuzione ***pratica*** e il valor medio *pratico* (38.4, nel nostro esempio), dovete usare $n - 1$. La cosa deriva da una serie di calcoli piuttosto noiosi: se siete interessati, chiedete a Rudy o a Doc (dipende se Rudy ha già reso a Doc "il Bussetti", dove il tutto è chiarito tra pagina 29 e pagina 36).

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}}.$$

…che vale 11,15 e non ci dice assolutamente nulla, almeno per il momento. Però, da questa possiamo ricavare dei valori più interessanti, ad esempio lo ***Scarto Quadratico Medio*** (e qui, finalmente, abbiamo *n*… Attenzione che molti autori tolgono il pedice $\overline{X}$ a questa e lo mettono all'altra):

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Questo vale 3,53, posto che a qualcuno interessi.

"…E cosa me ne faccio?" Beh, a qualcosa servono. Prima di vedere l'applicazione pratica al nostro caso, vediamo un teorema estremamente generale (tant'è che vale per *qualsiasi* regola soggiacente la distribuzione delle palline nella vostra urna), noto come ***Teorema di Bienaymé-Tschebischeff***:

$$\forall r > 0, P\left(\left|X - \overline{X}\right| > r\sigma\right) < r^{-2}.$$

In sostanza, questo aggeggio vi permette di misurare "quanto sono validi" i vostri dati, qualsiasi sia la distribuzione seguita[15].

Da un punto di vista pratico, si usa un altro metodo, noto come ***z-test***: in pratica, si definisce una variabile ausiliaria (attenti: μ è il valor medio ***teorico***, ossia quello che ci aspettiamo *in teoria*, ossia il nostro 40):

$$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{X}}}$$

e poi si va a cercare una tavola dei valori di *z*; nel nostro caso, abbiamo $z = -0{,}453$ e la tavola di solito ci fornisce 32%: questo significa che abbiamo il 32% di probabilità che $\overline{X} < 38{,}4$, ossia siamo riusciti a misurare "quanto siamo sicuri" dei nostri risultati. Adesso attenti a due cose: tanto per cominciare, Excel vi dà 67%, ossia il complemento; secondariamente, siccome potete ottenere anche un valore maggiore del vostro campione, se volete sapere quanto è giusto il vostro campione dovete tenere conto anche degli sforamenti dall'altra parte, ossia dovete calcolare anche la probabilità che $X > \left(\mu - \overline{X}\right) + \mu$, che nel nostro caso vale 41,6: è facile, visto che la distribuzione è simmetrica vale di nuovo il 32%: questo significa che "ciccate" dall'intervallo dato il 64% delle volte.

Risultato? Beh, diciamo che se effettivamente il 40% delle biglie fosse bianca, allora una serie di 10 campioni in cui ci saltasse fuori che solo il 38,4% delle biglie fosse bianca, dovrebbe comparire il $(100-64)\% = 36\%$ delle volte. Il che non è una gran cosa, quindi meglio se aumentiamo la dimensione del singolo campione o il numero dei campionamenti.

Adesso cambiamo un pochino discorso.

---

[15] Accenniamo in nota a piè pagina il fatto che questo aggeggio vi dice che la probabilità che la vostra variabile "sfori" per *r*=3, qualunque sia la distribuzione di probabilità seguita, vale circa l'11%; se avete, ad esempio, la certezza che la vostra variabile segue la legge normale, questa probabilità crolla al 0,3%. Per tutti i "3" che saltano fuori con la distribuzione normale, questa è nota come "regola del tre sigma".

I ragionamenti che abbiamo fatto sopra partono dal principio che *non dobbiamo introdurre conoscenze pregresse nel nostro calcolo*: queste, infatti, potrebbero falsare i dati. Ciò nonostante, ci sono dei casi in cui l'utilizzo di conoscenze pregresse è utilissimo durante il processo di valutazione: vediamo un esempio.

Supponiamo stiate considerando di distribuire una Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa in un dato territorio; il *business plan* vi mostra che, se riuscirà ad avere una penetrazione sul territorio di almeno il 25%, comincerete a guadagnarci. Viste le mode imperanti, partite con un sondaggio, e intervistate 20 passanti; 5 di questi (quindi il 25%) si dicono disposti ad acquistare la rivista. Che fate, partite? Siete al limite, e dovreste valutare quanto sia buono il vostro sondaggio…

Fortunatamente, sapete che altri hanno provato a lanciare riviste sul mercato, e siete riusciti a procurarvi i dati: li trovate nella tabellina qui di fianco, "Saturazione" significa che fetta del mercato vi prendete, "Frequenza" il numero delle volte che, quelli che hanno creato le riviste prima di voi hanno raggiunto quel valore. In pratica, il 5% ha raggiunto il 10% della popolazione (prima riga), e avanti così.

Saturazione	Frequenza
10%	5%
15%	5%
20%	20%
25%	20%
30%	40%
35%	10%

10 *Allora, si parte?*

La domanda che vi ponete a questo punto è semplicissima: che probabilità ci sono che raggiunga una penetrazione superiore al 25%, dato il sondaggio e i risultati ottenuti negli altri casi?

Qui, ci aiuta il Reverendo Bayes. Il suo teorema, infatti, ci permette di aggiornare la nostra fiducia nell'ipotesi H a partire da delle informazioni pregresse $\boldsymbol{c}$ e da un'ulteriore evidenza E: nel nostro caso, se riusciremo a fare soldi dato che sappiamo come è andata a finire prima e abbiamo il sondaggio che ci dice come dovrebbe andare a finire nel caso specifico; prima, però, un po' di teoria.

Matematicamente, il Teorema di Bayes si esprime come:

$$P(H|E,c) = \frac{P(H|c) \cdot P(E|H,c)}{P(E|c)}$$

Definiamo un attimo i termini.

Il termine sulla sinistra, $P(H|E,c)$, è noto come la ***Probabilità a posteriori***, ossia la probabilità di H considerando l'effetto di E su c (esempio: probabilità di fare soldi considerato l'effetto del sondaggio sulla storia pregressa).

Il termine $P(H|c)$ è la probabilità *a priori* di H dato solo c (esempio: non avete fatto il sondaggio. Nel nostro caso, lo ricaviamo dalla tabella e vale 0,5: si sommano i valori sulla destra delle ultime due righe, ossia i casi in cui ci guadagnate).

Il termine $P(E|H,c)$ è una misura di quanto sia valido il nostro sondaggio supponendo che noi si siano fatti i soldi e data la storia pregressa.

Il denominatore, che considera solo il sondaggio e la storia pregressa, serve a normalizzare il tutto (attenzione che se non lo usate, essendo una *probabilità* e quindi minore di 1, vi viene una valutazione peggiore di quella reale).

Ora, per passare un attimo alle ovvietà, o fate soldi o non li fate e, prima di cominciare, i colleghi che adesso formano la storia erano di fronte alla medesima alternativa. Questo significa che la probabilità di fare soldi può essere espressa da una ***distribuzione***

binomiale secondo la quale se la probabilità di un dato evento (*fare soldi*) in un qualunque caso è p, allora la probabilità che su n tentativi ci siano x riuscite[16] è:

$$P(x)=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$$

Questo aggeggio ci permette di calcolare $P(E|H,c)$. Infatti, la probabilità che 5 persone su 20 comprino la vostra rivista (sondaggio) e che contemporaneamente la vostra rivista cada in quel 20% che ha una penetrazione del 25% risulta essere:

$$P(5|20\%)=\frac{20!}{5!(20-5)!}(0{,}25)^5(1-0{,}25)^{20-5}=0{,}20233.$$

Adesso, possiamo calcolare sul nostro caso una tabellina decisamente complicata, tant'è che prima vi diamo il significato di ogni colonna.

La prima colonna p_i è il livello di penetrazione sul mercato, espresso come probabilità: era la prima colonna della Tabella 10.

La seconda colonna $P_0(p_i)$ indica come è andata nella storia, ossia la seconda colonna della Tabella 10.

La terza colonna $P(x=5|p_i)$ è calcolata attraverso la distribuzione binomiale, e rappresenta la probabilità che si arrivi a quel p_i se 5 persone hanno detto che comprano (insomma, il sondaggio).

La quarta colonna $P(x=5|p_i)\cdot P_0(p_i)$ è la moltiplicazione della seconda per la terza, ossia la probabilità congiunta che succedano entrambe le cose[17] (per i fanatici dell'Excel: =BINOMDIST(5;20; p_i ;FALSE). Andate a vedervi l'Help per ulteriori dettagli).

p_i	$P_0(p_i)$	$P(x=5\|p_i)$	$P(x=5\|p_i)\cdot P_0(p_i)$	Bayes
0,10	0,05	0,03192136	0,00159606	0.00959
0,15	0,05	0,10284518	0,00514225	0.00309
0,20	0,20	0,17455952	0,03491190	0.20983
0,25	0,20	0,20233115	0,04046623	0.24321
0,30	0,40	0,17886305	0,07154522	0.43000
0,35	0,10	0,12719918	0,01271992	0.07645

11 *Sì, si parte.*

L'ultima colonna, finalmente, è la probabilità a posteriori, data dalla formula di Bayes: il numeratore è il valore della quarta colonna, il denominatore è la somma di tutti i valori della quarta colonna.

Per tirare le conclusioni, non dovete fare altro che sommare le ultime tre caselle in basso a destra, ossia quelle che vi garantiscono almeno il 25% di penetrazione: viene un rispettabilissimo 75%, quindi direi di partire all'arrembaggio. Visto, che serve?

Mentre stiamo scrivendo queste note, è in corso la (speriamo ultima) nevicata della stagione, quindi ci riteniamo autorizzati a inserire un problemino di tipo meteorologico.

Se oggi nevica e potrebbe nevicare anche domani, quali sono le probabilità che nevichi sia oggi sia domani?

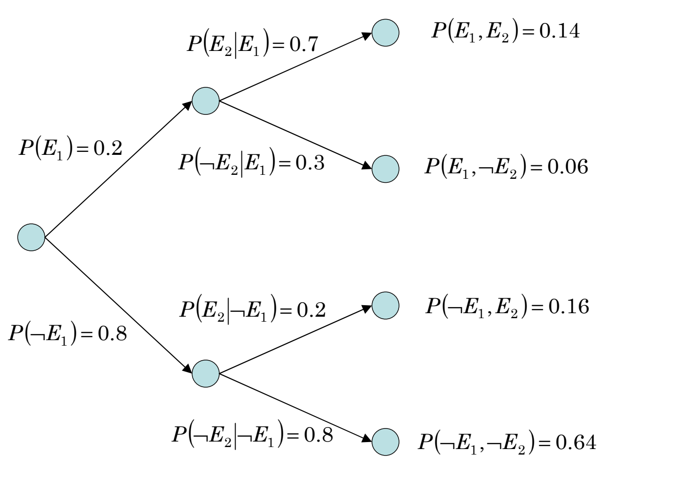
[16] Attenzione: stiamo intendendo che ci siano *esattamente* x riuscite.

[17] Mettiamo in nota il fatto che, se ci limitiamo a moltiplicare le due probabilità, stiamo parlando di variabili *indipendenti*, ossia (nel nostro caso) siamo in ogni caso dei monopolisti.

Meteorologicamente parlando, se nevica oggi la probabilità che nevichi anche domani è maggiore della probabilità che se oggi non nevica, domani nevichi: insomma, bisogna tener conto del tempo di oggi per definire quello di domani, ossia si parla di ***probabilità condizionata***: supponiamo che la probabilità che oggi nevichi sia di 0.20 e la probabilità che domani nevichi (verificato che oggi nevica) sia do 0.70: la probabilità di questi eventi è facilmente calcolabile, essendo

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1, E_2)}{P(E_1)}.$$

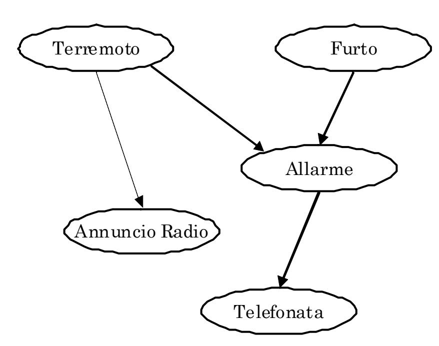
Potremmo generare una tabellina difficilmente leggibile, ma esiste una rappresentazione grafica simpatica[18]: la trovate in Figura 12.



12 *Nevica, nevica.*

Restiamo un attimo sulla rappresentazione grafica, che tra l'altro ha anche un nome: si chiama (indovinate un po'?) ***Rete Bayesiana***: se state facendo la domanda "…a cosa serve?" significa che non avete calcolato la tabellina: il bello del seguire la rete è che dovete fare *solo i conti del caso che vi interessa,* mentre nella tabella dovete farli tutti; in alcuni casi questo è un grande vantaggio.

Non solo, ma il grafico vi permette di vedere immediatamente quali probabilità sono collegate tra di loro e quali no: vedete dalla figura che la probabilità che nevichi domani avendo nevicato oggi sono completamente autonome (rami diversi) dal fatto che nevichi domani non avendo nevicato oggi: la rappresentazione, come dicono alcuni autori, è estremamente "parsimoniosa": mostra immediatamente che le probabilità di neve sia oggi sia domani sono legate tra loro, mentre il fatto che oggi nevichi non ha nessuna influenza sul fatto che io vinca una graziosa capretta (alberi diversi, quindi nessun legame).



13 *Catastrofismi in vacanza*

In realtà, secondo alcuni autori (***Friedman*** e ***Goldzmidt***), le reti bayesiane più che di probabilità sono delle "reti di storie": ne trovate una piuttosto catastrofica in Figura 13.

Cosa ci dice la figura? Beh, che se siete in ferie e ricevete una telefonata dal vicino che vi dice che vi suona l'allarme in casa, potrebbe esserci stato un terremoto, o un furto a casa vostra; se invece sentite un annuncio radio, nel caso specifico è sicuro che si tratti di terremoto, visto che "Furto" non è collegato a "Annuncio Radio"; quindi, quando generate le vostre tabelle potete evitare di calcolare alcuni parametri e se vi arriva una telefonata del vicino contemporaneamente ad un annuncio radio, potete

[18] Nota a margine: questo schema permette anche di risolvere il famoso "Problema di Monty Hall"; menzionato – tra l'altro – nell'introduzione alla rubrica "Bungee Jumpers" in RM025. Con la logica che ci contraddistingue, ne parliamo per dirvi che non ne parliamo, ma comunque trovate la soluzione con questo schemino.

calcolare la probabilità che un ladro sia bloccato dal terremoto in casa vostra (…ma chi è il più sfortunato, dei due?) usando solo 8 parametri anziché 15.

Insomma, due variabili sono indipendenti se non esistono cammini tra di loro (attenzione che il grafo è *orientato*): questo significa che quando fate i conti i vostri algoritmi girano in tempo *lineare* anziché *esponenziale*, il che non è poco.

T	F	$P(A \vert T,F)$	$P(\neg A \vert T,F)$
T	F	0,90	0,10
T	$\neg F$	0,20	0,80
$\neg T$	F	0,90	0,10
$\neg T$	$\neg F$	0,01	0,99

14 *John Belushi e Carrie Fisher*

E adesso arrivano i numeri: li trovate in Tabella 14, basati sull'ipotesi che non stiate ascoltando la radio. Qui, con A abbiamo indicato il suonare dell'allarme, con T il terremoto e con F il furto.

Cosa ricaviamo, da questa tabella? Beh, che se ci sono contemporaneamente un furto e un terremoto, ci sono il 90% di probabilità che l'allarme suoni; con solo il terremoto, l'allarme suonerà con il 20% di probabilità; con il solo ladro andiamo di nuovo sul 90%, mentre il fatto che l'allarme suoni senza né ladri né terremoti è del 0,1%. Questo significa che la nostra semplicissima rete implementa perfettamente il comportamento: "Se suona l'allarme, preoccupati. Anche se non senti la radio".

Ogni metodo ha i suoi problemi, e le Reti Bayesiane non ne sono esenti: il guaio principale, come dovreste esservi accorti, è che partiamo da una condizione di ignoranza.

Tanto per cominciare, è evidente che per calcolare la probabilità di un qualsiasi ramo della rete, dobbiamo calcolare la probabilità di tutti i rami, il che è un algoritmo non risolubile in tempo polinomiale, ossia l'esponenziale che abbiamo cacciato dalla porta è rientrato dalla finestra; non solo, ma una rete del genere è affidabile solo quanto è affidabile la vostra conoscenza pregressa.

Comunque, qualcosa si è fatto; il progetto Microsoft del 1993 detto "Lumière" era basato sulle reti bayesiane, e ha portato al risultato del "gattino" che oggi cerca i files sul computer di Rudy. Qualcuno sa che fine ha fatto l'Einstein con la pipa che li cercava prima? L'algoritmo era lo stesso, ma il personaggio più simpatico.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms