Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 134 – Marzo 2010 – Anno Dodicesimo

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM133 ha diffuso 2549 copie e il 28/02/2010 per Google eravamo in 10'300 pagine.

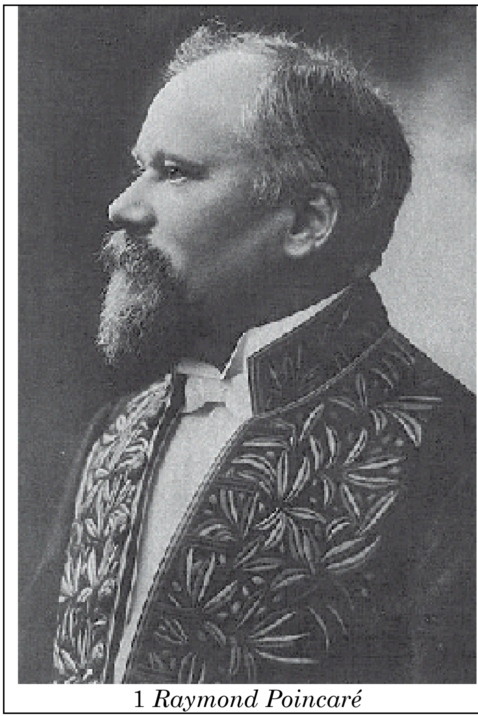
Come molti di voi sanno, il nostro Doc in gioventù è stato una figura di ragionevole importanza del ciclismo umbro (nel senso che ha preso parte a ben tre corse ufficiali, quando aveva 14 anni); vorremmo cercaste di immaginare la sua aria perplessa quando ha visto la *concept-bike "Nulla"* di ***Jud Turner***. Non ha raggi, non ha mozzi e (a quanto abbiamo capito) nelle rotelline rosse ci sono tre dinamo per caricare la batteria che alimenta i LED di segnalazione (…ma dove li ha messi?). Logicamente, c'è sempre il matto che ci prova: vi diamo solo il link, visto che a noi piace sempre più la teoria della pratica: http://www.reddit.com/r/technology/comments/b2g91/spokeless_bicycle/ (Facoltà di Ingegneria a Yale, evidentemente…).

1. Fare a pezzi

La guerra è un modo per ridurre in pezzi, o dissolvere nella stratosfera, o affondare negli abissi marini del materiale che avrebbe potuto essere altrimenti usato per rendere le masse più felici e quindi, a lungo termine, più intelligenti.
(George Orwell, "1984")

Un matematico è una persona che sa trovare analogie fra teoremi; un matematico migliore è uno che sa trovare analogie fra dimostrazioni, e il matematico ottimo è quello che sa trovare analogie fra teorie. Si può immaginare allora che il matematico ideale sia quello che riesce a trovare analogie fra analogie.

Si potrebbe partire da Poincaré. Pochi matematici sono più grandi del francese, e quindi nessuno potrà avere alcunché da dire se un giornalino di matematica ricreativa comincia un articolo parlando di Henri Poincaré[1], genio di Francia. Ciò non di meno, è forse una buona dimostrazione che la matematica è ancora lontana dall'essere considerata una disciplina popolare il fatto che Henri, pur essendo uno dei maggiori matematici di tutti i tempi, non è neppure il Poincaré più celebre della famiglia Poincaré. Suo cugino Raymond, infatti, è di gran lunga più noto ai posteri.


1 *Raymond Poincaré*

Nato nel 1860, solo sei anni dopo il suo lontano cugino matematico, Raymond decide di dedicarsi, anziché alla scienza, alla politica. Non si può dire che fallisca nell'intento se, dopo gli studi in legge, riesce a farsi eleggere deputato a soli ventisette anni, e diventare ministro a trentatre. Il suo primo dicastero, nel 1893, è abbastanza insolito: "Educazione, belle arti e religione"; i successivi sono però già Finanze e Pubblica Istruzione. Ma Raymond non è tipo di accontentarsi facilmente, e nel 1912 arriva a ricoprire la carica di Primo Ministro, per poi coronare, l'anno seguente, il suo *cursus honorum* col massimo traguardo, la presidenza della République Française. Visto che siamo ormai nel 1913, è facile constatare che Raymond Poincaré è proprio il presidente francese che deve gestire le sorti transalpine durante la Prima Guerra Mondiale. Rimarrà in carica per tutta la durata del conflitto, fino al 1920: ma non si ritirerà ancora dall'agone politico. Tornerà ad essere nuovamente Primo Ministro dal 1922 al 1924, e poi ancora nel 1926, fino al suo ritiro definitivo dalle scene nel 1929.

Non è certo possibile raccontare gli eventi che hanno visto come protagonista cotanto "cugino di matematico": equivarrebbe a voler parlare di una trentina d'anni (e tra i più terribili) del secolo più complicato della storia. E poi, in ultima analisi, Raymond Poincaré ci interessa solo per uno scambio di male parole.

[1] Una possibile obiezione, movibile solo dai lettori più anziani ed esperti, potrebbe comunque essere quella che a Poincaré è già stato dedicato un compleanno: quello di Aprile 2005, in RM075, "*Matematica per porcini*".

L'impero Ottomano nasce, più o meno, un anno prima degli eventi narrati nella Divina Commedia. È il 1299 quando il Sultanato Selgiuchide di Rum comincia ad espandersi in maniera tale da poter legittimamente chiamarsi "impero". Ma è il 29 Maggio 1453, sotto Maometto II, che gli Ottomani raggiungono il loro culmine, strappando Costantinopoli alla cristianità. È la fine dell'Impero Romano d'Oriente, autentico continuatore dell'antica gloria militare di Roma. Ed è abbastanza curioso come riesca ad essere lento, talvolta, il respiro della storia. Per quanto sia evidentemente solo una convenzione comoda agli storici e alle memorie l'affidarsi alle date che delimitano i periodi e gli imperi, resta nondimeno curioso notare come tra la fondazione della Città Eterna da parte di Romolo e Remo[2] e i tempi nostri riescano a prendere spazio, in certe zone del globo, solo due soggetti politici. Dal 753 a.C. al 1453 d.C. Roma (prima come regno, poi repubblica, quindi impero e infine Impero Romano d'Oriente, ma pur sempre Roma); poi, dal 1299 al 1923, quindi perfino con un bel secolo e mezzo di sovrapposizione, l'Impero Ottomano. È proprio nel 1923 che l'Impero che fu di Maometto II cessa di esistere: era già molto malato prima della Grande Guerra, e il conflitto mondiale riesce a cancellarlo per sempre.


2 *Lord George Curzon*

La conferenza di pace di Parigi del 1919 lo elimina di fatto dalle carte geografiche, ma in realtà la storia che porterà alla nascita della Turchia moderna è ancora molto lunga e travagliata. La Grecia, tra i vincitori della Guerra Mondiale, ebbe in premio grossi pezzi della penisola anatolica, ma il Trattato di Pace di Sèvres prevedeva che Costantinopoli, per quanto di fatto circondata da quello che stava diventando territorio greco, rimanesse la capitale turca. Ne seguirono scontri, inevitabilmente: territori e uomini non si possono muovere a comando, come la storia insegna da millenni; eppure, gli uomini, specie i politici e i militari, faticano a imparare. Di certo, nel 1922, la situazione è particolarmente tesa, sugli Stretti. Tre anni prima i greci, spalleggiati da inglesi e francesi, avevano preso possesso di Smirne; ma in seguito la diplomazia inglese rimane ancora incerta sul da farsi, non sa se appoggiare tutte le richieste greche sull'Anatolia o salvaguardare il possesso turco di Costantinopoli. Quando i turchi finalmente contrattaccano, le truppe francesi e italiane che si trovano in zona si affrettano a dichiararsi neutrali. Il Ministro degli Esteri inglese, lord George Curzon, è tra coloro che ritiene vitale togliere Costantinopoli ai musulmani, e ritiene che quello dei francesi e italiani sia un vero voltafaccia. Si precipita allora a Parigi, per incontrare il primo ministro francese, e qui si produce in una scenata talmente vigorosa da essere passata alla storia. Il capo del governo transalpino è, come sappiamo, un tal cugino d'un celebre matematico: e risponde per le rime, forse anche più enfaticamente, visto che Lord Curzon viene visto uscire dalla sala ministeriale con le lacrime agli occhi.

La guerra tra greci e turchi si conclude con la vittoria dei secondi. Curzon, strenuo difensore degli interessi greci, viene chiamato alla presidenza della nuova conferenza di pace, quella di Losanna del 1923, che dovrà rivedere e riscrivere gli accordi del precedente trattato di Sèvres scaturito dalla Conferenza di pace di Parigi. Accordi che, ovviamente, saranno molto meno piacevoli per la Grecia di quelli stabiliti quattro anni prima: ma Curzon riesce, con abile diplomazia, quantomeno a garantire il rientro di più di un milione di profughi di etnia greca, residenti in Anatolia, nella patria ellenica. Non

[2] Romolo, Remo e la Lupa capitolina non sono naturalmente reali soggetti storici, ma solo tradizionali. Ciò non di meno, anche la tradizione merita una citazione, no?

fu opera senza meriti: meno di dieci anni prima, in quelle stesse terre, un milione di Armeni[3] sparì, quasi fosse stato letteralmente inghiottito dalla terra.

Uomini che si muovono, terre che si frantumano, nazioni che vanno in pezzi. Linee di confine che cambiano sulla carta, e povera gente disperata, senza più nulla, costretta ad inseguire la parte giusta della linea, quale che essa sia. Curioso e strano che un oggetto inesistente, teorico, quasi solo matematico come una linea diventi arbitro rigoroso e crudele dei destini, delle sofferenze e dello strazio di così tanti esseri umani. Per uno dei soliti tiri mancini della storia, il nome di Curzon rimane ancorato nella storia soprattutto proprio per una linea che porta il suo nome. Un'altra linea sottile, tesa a dividere altre terre e altri uomini, altri popoli ed altre etnie. Lontana dall'Anatolia, è una linea di cui si parlò molto soprattutto vent'anni dopo la morte di Lord George.

3 *Churchill, Roosevelt e Stalin a Yalta*

Ad una guerra fa sempre seguito un dopoguerra, è inevitabile. Appena due decenni dopo il primo dopoguerra, il mondo vincitore della Seconda Guerra Mondiale si siede a Yalta per ridisegnare le mappe d'Europa e del mondo. Ci sono le sfere d'influenza da definire, la Germania da restringere: perfino i confini italiani saranno limati, lungo l'arco alpino. Ma soprattutto c'è l'Europa centrale da reinventare, perché tutta la terra compresa tra Mosca e Berlino, priva di grandi confini naturali, è sempre stata usata come un puzzle dalla storia. Simbolo perfetto di questo disgraziato comporsi e ricomporsi è la Polonia.

Lo stato polacco nasce, quantomeno come idea, attorno all'anno Mille, quando il "regno di Polonia" diventa qualcosa di più sostanziale che un'idea geografica; poi, lungo i secoli, viene presto fatto preda dei Mongoli dell'Orda d'Oro, torna ad unificarsi sotto la dinastia Jagellone, si unisce con la Lituania, attraversa crisi interne, rivoluzioni, e le solite guerre coi vicini: ottomani, russi, svedesi, prussiani, transilvani. La Confederazione Polacco-Lituana, al massimo del suo splendore, era uno stato davvero notevole: comprendeva i territori dell'attuale Polonia e Lituania, ma anche la Lettonia, la Bielorussia, gran parte dell'Ucraina e pezzetti di Russia. Uno dei simboli della nazione era l'aquila bianca: cosa curiosa o quantomeno simbolica, visto che i suoi vicini più potenti, Austria, Russia e Prussia avevano tutti, nelle loro bandiere, delle aquile nere. All'inizio del Settecento, la Polonia sembra trasformarsi magicamente in una torta. È il periodo dei grandi trionfi prussiani di Federico II, le citate tre grandi potenze continuano a farsi la guerra e non trovano quasi mai un accordo, salvo che su un punto: fare a pezzi la Polonia. Nel 1772, in un transitorio momento di pace reciproca, fondano la cosiddetta "Alleanza delle Tre Aquile Nere" e si spartiscono la Polonia. Re Stanislao urlò da Varsavia la sua disperazione alle potenze dell'Europa occidentale, ma queste fecero finta di non sentire. Le aquile nere entrarono a Varsavia, chiesero al governo polacco di accettare lo status quo, sbranarono l'aquila bianca e spedirono in Siberia quelli che non si mostravano contenti[4].

Ma era solo l'inizio. Il vecchio continente è molto volubile, alla fine del Settecento, e la pace non dura mai a lungo. Altre guerre, altri vincitori, ma si ripete il solito copione: la Polonia viene di nuovo tagliata e servita, ventuno anni dopo, nel 1793, e poi ancora poco dopo, nel 1795: il pezzo più grande alla Russia, 120mila chilometri quadrati: circa 55mila

[3] Affrontare il genocidio degli Armeni del 1915-1916 solo di sfuggita è davvero impossibile. Chi non ne avesse mai sentito parlare – cosa affatto probabile, visto lo scarso appeal che hanno storie come queste – può provare a leggere alcune informazioni di base in http://it.wikipedia.org/wiki/Genocidio_Armeno.

[4] Le buone abitudini hanno radici antiche.

alla Prussia, 47mila all'Austria. La Polonia non esiste proprio più. Ma tanto sono periodi in cui è tutta l'Europa che vede i confini volare per aria e ricadere sul terreno come capelli disordinati in un negozio di parrucchiere: la tempesta napoleonica comincia a imperversare. Bonaparte crea il Granducato di Varsavia, progetta di farne un regno per il suo maresciallo Poniatowski, ma naturalmente tutto quello che era napoleonico finisce e scompare con il Congresso di Vienna. La Polonia più di altro, poiché nel 1815 assume addirittura il nome ufficiale di "Regno del Congresso".

4 *Lo slittamento della Polonia in un disegno dell'epoca*

Dopo la prima guerra mondiale la Polonia torna a esistere come grande stato incastrato tra due pessimi vicini, Germania e Russia. Schermaglie e battaglie continuano, fino al 1939: il patto Molotov-Ribbentrop tra Unione Sovietica e Germania di fatto permette allo stato nazista di invadere la Polonia con l'assenso silenzioso dei russi. Incidentalmente, è anche l'inizio della Seconda Guerra Mondiale. Alla fine, sul tavolo di Yalta, mancheranno le defunte Austria e Prussia, ma la terza aquila nera c'è ancora, e rivendica un bel pezzo di Polonia. È qui che succede una delle frantumazioni più curiose della storia; gli stati crescono per conquista e si riducono per sconfitta, e talvolta spariscono anche: ma è davvero insolito che vengano "spostati" sulla carta geografica. Eppure è quello che accade allo stato polacco: la vecchia Polonia era infatti molto più "orientale" di quella che siamo soliti leggere negli atlanti contemporanei. Una larga fascia di territorio, ampia fino a trecento chilometri e lunga molto più dell'attuale lunghezza dello stato, finisce all'interno dei territori sovietici. È una fascia che comprende città importanti come Vilnius, attuale capitale della Lituania, Brest-Litovsk e Lvòv, meglio nota in Italia come Leopoli[5]. Eppure, la Polonia non è una nazione sconfitta: a essere sconfitta è piuttosto la Germania, che infatti cede, in una sorta di contrappasso, parte dei suoi territori orientali, che diventano così le regioni occidentali della Polonia. Diventano polacche le città di Stettino, Breslau, e naturalmente Danzica, il porto reso celebre dallo strategico "corridoio". Il confine occidentale della Polonia si stabilizza insomma sulla linea Oder-Neisse, ma i territori guadagnati a ovest non compensano, per lo meno dal punto di vista del mero computo superficiale, le perdite su quello orientale. I polacchi perdono circa settantamila chilometri quadrati, durante lo slittamento verso Ovest, e la linea che stabilisce i nuovi confini russo-polacchi si chiama, guarda il caso, Linea Curzon.

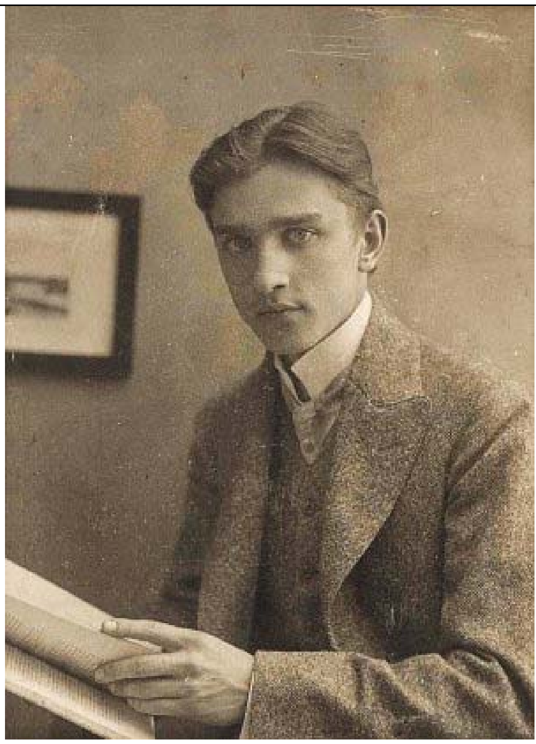
5 *Lo stesso, più chiaro*

Lord George era morto già nel 1925, ma nel lontano 1919 si era occupato anche del recente conflitto tra Russia Sovietica e Polonia, scaturito dall'esplosiva combinazione

[5] Nome che comunque cambia molto, a seconda della lingua usata: oltre a Lvòv e Leopoli, si trova citata anche come L'viv, Lemberg, Lemberik, e Lwow.

delle ceneri della Grande Guerra e dei postumi della Rivoluzione d'Ottobre. La sempre vessata Polonia, in quel caso, era riuscita ad avere la meglio su una Russia stravolta dalla rivoluzione, e sul tavolo della pace la linea che Lord Curzon propose come confine tra i due stati fu sdegnata dai polacchi vittoriosi. Venticinque anni dopo, sul tavolo di Yalta, Stalin presenta il conto a Varsavia e all'Occidente, e riporta di moda il nome del vecchio conte inglese che un tempo si era esibito in una vigorosa litigata con un presidente cugino di matematico.

A guardare le cartine, gli occhi perdono rapidamente il senso delle linee che gli uomini disegnano su di esse: si studiano fin dalle elementari, le cartine, e a quell'età i confini sembrano stabili quanto le montagne. Poi, crescendo, si scopre con stupore che neppure le montagne sono eterne, e soprattutto che i confini hanno quasi la stessa durata d'una tintura per capelli. Quello che le cartine non riescono a raccontare bene sono i milioni di linee invisibili che ogni profugo lascia sul territorio, scappando da una parte all'altra dei territori così sommariamente ritratti nelle mappe. Tedeschi lasciarono la Polonia, attraversando l'Oder e la Neisse: polacchi abbandonarono le Bielorussia, l'Ucraina saltando da una parte all'altra della linea Curzon, e ovunque, in Europa e nel mondo, gente trascinava se stessa e le proprie povere cose da una terra all'altra. È facile vedere su una mappa gli stati che vanno in pezzi: ci vuole una fantasia migliore, più acuta, per vedere come dietro quei frantumi vadano in pezzi anche le persone. Difficile immaginare che, dietro le parole che sempre inutilmente provano a descrivere gli orrori delle guerre, possano nascondersi non solo morte, dolore e distruzione, ma anche assurdità come quella di un genio matematico che, per lavoro, si riduce a nutrire pidocchi col proprio sangue.



6 *Stefan Banach, da giovane*

Stefan Banach nacque il 30 Marzo 1892 a Cracovia, in quella che adesso è Polonia ma che al tempo della sua nascita era Impero Austro-Ungarico. Morirà il 31 Agosto 1945 a Lvov, Leopoli, che attualmente è Ucraina, ma solo qualche anno fa era ancora Unione Sovietica e che per quasi tutta la vita di Banach era Polonia; il giorno in cui Stefan morì, non si sapeva ancora con chiarezza che nazione fosse: era un pezzo di terra ancora indeciso.

Indecisa era forse anche sua madre, e non si può dire che il padre fosse tanto da meno. Questi, infatti, passò al figlio non il proprio cognome, come di solito fanno i padri, ma solo il proprio nome di battesimo: si chiamava infatti Stefan Greczek, e probabilmente non riteneva il figlio degno di portare il suo cognome di famiglia[6]. La madre, invece, Katarzyna Banach, sparisce dalla vita di Stefan appena dopo il battesimo, quando il figlio ha appena quattro giorni di vita. Probabilmente il futuro matematico non è altro che uno di quegli incidenti che capitavano tra le domestiche della servitù e i giovani maschi della borghesia austro-ungarica. Il padre, dopo aver verosimilmente allontanato la madre di Stefan, porta il figlio in un paese non troppo distante da Cracovia, Ostrowsko, dove lascia il bambino alle cure della

[6] Non sappiamo se giudicare buffo o triste che, con ogni probabilità, il suo prezioso cognome Greczek è oggi ricordato in qualche riga di biografia solo grazie a quel figlio mezzo ripudiato.

nonna paterna. Qui Banach cresce, anche se è costretto a cambiare famiglia a causa di malattie della nonna: in ogni caso riesce, pur nella totale assenza di figure genitoriali, a far notare le sue rimarchevoli e precoci capacità intellettuali.

Tornato a Cracovia nel 1902, comincia a frequentare l'Henryk Sienkiewicz Gymnasium, che non è una scuola molto qualificata, ma dove conosce Witold Wilkosz, futuro matematico, che gli trasmette la passione per la sua disciplina. E la matematica diventa in breve per Banach l'unico vero interesse: le altre materie lo appassionano meno, e in generale il suo rendimento scolastico, pur brillante nei primi anni, decade fino a diventare del tutto ordinario in prossimità del diploma. Diploma che ottiene nel 1910, ma senza rientrare nella fascia di merito, che gli avrebbe consentito un più sereno futuro. Comunque, non c'era molta possibilità a Cracovia di vivere con la matematica: sia Banach sia lo stesso Wilkosz decidono infatti di dedicarsi ad altri studi, Banach iscrivendosi a Ingegneria e Witold addirittura a Lingue Orientali[7]. In compenso, il generoso padre di Stefan, che peraltro non si era mai dato troppo da fare per garantire la sopravvivenza del figlio, comunica apertamente e ufficialmente a Stefan che adesso che ha raggiunto il diploma non deve più fare alcun affidamento su di lui e sul suo portafoglio.

Banach si trasferisce a Leopoli: frequenta l'università e riesce appena in tempo a laurearsi prima che il terribile 1914 cominci a devastare l'Europa. Scoppiata la guerra, i russi invadono Leopoli; Banach si salva dalla chiamata alle armi perché riformato a causa di scarsa efficienza dell'occhio sinistro, e ritorna a Cracovia. Qui fa qualche lavoro per mantenersi, probabilmente dà lezioni private, lavora alla costruzione di strade, e quando può va ad ascoltare lezioni all'università locale, senza nessun vero scopo se non quello di lasciar crescere la sua passione.

C'è chi sostiene che esiste il destino, e che non ci sono speranze di poter seriamente essere arbitri della propria vita. C'è invece chi crede che esistano le coincidenze, i treni che passano, le *sliding doors*, e che si possono vivere vite diversissime solo a causa di piccolissimi, infimi microeventi. L'episodio che segue può essere letto secondo entrambe le interpretazioni, o forse si può rubricare nell'identificazione profonda, nell'affratellamento che attua il linguaggio scientifico. Provate a scarabocchiare un'*accatagliato*[8] su un foglietto d'appunti, durante una riunione noiosa affollata: la maggior parte delle facce non la distinguerà da altri scarabocchi, ma una o due potrebbero illuminarsi, e riconoscere in un sorriso il confratello. Combinazione, predestinazione o linguaggio che fosse, è in uno di quei giorni difficili del 1916, fuori dall'università di Cracovia, che la vita di Stefan Banach cambia grazie ad una frase trasportata dal vento.

Hugo Steinhaus ha ventinove anni, sta facendo il servizio militare ed è sul punto di trasferirsi a Leopoli, perché ha vinto una cattedra nella locale università "Jan Kazimierz". Vive ancora a Cracovia, ma per poco: e sta passeggiando nel parco dell'università, in attesa d'un appuntamento, quando sente pronunciare, poco distante, le parole "*misura di Lebesgue*". Si incuriosisce, si avvicina alla panchina dove si trovano i due giovani che si sono scambiati la frase fatidica, e si presenta. Conosce così Otto Nikodym e Stefan Banach, che si dichiarano appassionati di matematica e gli accennano di un terzo amico, Witold Wilksoz, appassionato non meno di loro. A quell'incontro sulla panchina del parco fanno seguito altri incontri, non più causali ma del tutto regolari, fino alla fondazione di una società esclusiva. È la nascita della "Società Matematica di Cracovia" che, dopo la guerra, nel 1920 diverrà ufficialmente la "Società Matematica Polacca", sotto la prima presidenza di Stanislaw Zaremba.

[7] Ciò non basterà a cambiarne il destino: Witold Wilkosz diventerà lo stesso un matematico di prima grandezza.

[8] L'accatagliato della Meccanica Quantistica è solo un esempio caro a chi ha sudato sangue su certi tomi; ma è del tutto commutabile con altri tecnicismi specifici: come, del resto, si capisce subito dal seguito del racconto.

La vita e la carriera di Banach hanno ormai trovato la loro direttrice. Comincia a lavorare a problemi che gli sottopone Steinhaus, e riesce a pubblicarne i risultati nonostante le difficoltà indotte dalla guerra; sempre per merito di Steinhaus conosce Lucja Braus, che diventerà sua moglie. Ancora senza laurea, si ritrova a fare da assistente e a tener lezioni: finalmente si laurea, proprio alla "Jan Kaziemierz" di Lvov nel 1922, e nello stesso anno ottiene l'abilitazione all'insegnamento.

7 *Lo Scottish Cafè di Leopoli, Ucraina (ma ormai, come si vede, è una banca)*

Due anni dopo è professore ordinario, e dopo un anno di perfezionamento a Parigi torna in Polonia e decide insieme a Steinhaus di fondare una rivista di matematica, chiamata "*Studia Mathematica*"[9]. Non contento, espande l'attività editoriale aggiungendo anche le *Monografie Matematiche*, dove presto si ritroveranno opere di Kuratowski, di Mazurkiewicz e di Sierpinski. Ma è soprattutto per l'atmosfera che Banach riesce a creare che la "*scuola di Leopoli*" comincia a diventare famosa: gli piaceva molto tenere "lezioni" e discussioni con i colleghi e gli studenti non in aula, ma in un locale diventato matematicamente famoso, il Caffè Scozzese di Leopoli. Stanislaw Ulam ricorda come fosse difficile, durante gli incontri al Café[10], battere Banach in profondità di pensiero e in capacità di bevute[11]. Un altro professore della Kazimierz, Andrzej Turowicz, è anche più esplicito nel ricordare il rapporto tra Banach e il Café: "*gli piaceva trascorrere gran parte del suo tempo nei caffè, non solo in compagnia degli altri, ma anche da solo. Gli piaceva il rumore e la musica, che non gli impedivano di concentrarsi e pensare. A volte, dopo la chiusura notturna dei locali, lo si vedeva camminare verso la stazione ferroviaria dove il bar restava aperto tutta la notte. Lì, accanto ad un bicchiere di birra, avrebbe continuato a pensare ai suoi problemi*". Probabilmente è soprattutto in questi locali che vede la luce l'Analisi Funzionale, di cui Banach e i suoi accoliti sono considerati padri fondatori.

Nel 1939 Stefan Banach viene eletto Presidente della Società Matematica Polacca, ma il 1939, come abbiamo già ricordato, è l'anno in cui la Germania invade la Polonia da ovest, e l'Unione Sovietica varca i confini a est. I russi arrivano a Leopoli, e l'università "Jan Kazimierz" diventa l'università "Ivan Franko". All'inizio, le cose non sembrano tragiche: i suoi buoni rapporti con i matematici sovietici fanno sì che Banach possa continuare il suo lavoro all'università, tenendo lezioni e proseguendo le sue ricerche, ma sono tempi crudeli e veloci, poco disposti a lasciare sereni anime e corpi. Nel 1940, la Germania nazista comincia l'invasione dell'Unione Sovietica: in quel momento Banach si trova a Kiev per un congresso, ma appresa la notizia torna precipitosamente a Leopoli.

I nazisti occupano Lvòv nel giugno del 1941, e la vita in città diventa davvero dura per tutti, anche per i matematici. Banach viene arrestato con l'accusa di trafficare valuta tedesca, ma viene rilasciato dopo poche settimane. Soprattutto, riesce a sopravvivere ad

---

9 Sembra proprio che le prestigiose riviste di matematica tendano sempre, un po' snobisticamente, a darsi dei nomi latineggianti.

10 Ci è già capitato di parlare bene di uno dei più nobili e duraturi siti italiani di matematica, il leggendario Base5 di Gianfranco Bo.Visto che è da un po' che non lo facciamo, siamo lieti di cogliere l'occasione per ribadire il concetto. Alcuni dei migliori problemi discussi nello Scottish Cafè sono stati raccolti nello "Scottish Book"; potete trovarlo proprio su Base5, qui: http://utenti.quipo.it/base5/scottishbook/scottishbook.htm

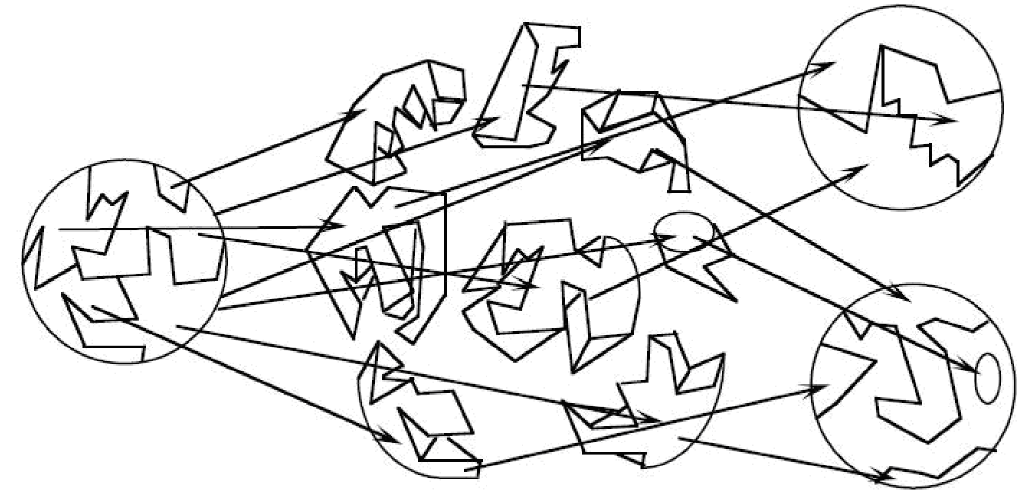
11 Fondatore di riviste matematiche, amante dei problemi e campione di bevute: se credessimo nella reincarnazione, avremmo pronta una bella ipotesi da proporre…

un triste periodo in cui i professori universitari polacchi venivano eliminati, nel senso più crudo e diretto del termine: la notte del 3 Luglio passa alla storia come una delle più tragiche, in questo senso.

È in questo periodo che Stefan sopravvive allevando pidocchi su di sé. Dalla fine del 1941 fino al 1944, quando l'Armata Rossa libera Leopoli, Banach sopravvive nutrendo pidocchi con il proprio sangue; venivano poi usati per ricerche sulla febbre tifoide condotta in un istituto da Rudolf Weigl[12]. Quando i sovietici cacciano i nazisti le cose migliorano, ma sempre di occupazione si tratta: Lvòv viene a forza inglobata nello stato sovietico, ma Banach probabilmente non riesce ad occuparsi più di tanto degli avvenimenti storici che gli scorrono accanto: è ormai malato di cancro ai polmoni, e muore nell'Agosto del 1945, proprio quando tira finalmente le cuoia anche la Seconda Guerra Mondiale.

Era un tipo divertente e spiritoso, a sentire quello che raccontano i suoi amici. Il matematico russo Sobolev, che lo incontrò anche nei suoi ultimi mesi di vita, dopo l'occupazione tedesca di Leopoli, narra che le devastazioni e le sofferenze della guerra si leggevano nel suo fisico, ma non avevano intaccato la sua maniera di essere affascinante, divertente, amabile e ironico. "*È così che rimane nella mia memoria: con un grande senso dell'umorismo, come un essere umano pieno d'energia, una bella anima, e un gran talento*".

Chissà se il suo grande senso dell'umorismo ha qualcosa a che fare con la scoperta che lo ha reso più famoso: forse no, forse si tratta solo dell'ennesima coincidenza. Certo è curioso vedere che il figlio d'una terra che più di ogni altra è stata presa, tagliata, spostata, cancellata, ricreata, fatta a pezzi e ricomposta, sia noto soprattutto per una operazione paradossale di spezzettamento e ricostruzione. Il paradosso di Banach-Tarski dimostra che si può prendere una sfera, tagliarla in un certo numero di pezzi, e poi riassemblare queste frattaglie fino a ricomporre non una, ma due sfere identiche, anche in dimensioni, alla sfera originale.



8 *Il paradosso di Banach-Tarski* (figura rubata a http://gaussianos.com/la-paradoja-de-banach-tarski/)

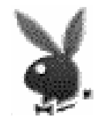
Probabilmente no, l'ironia non c'entra. Il paradosso non è una barzelletta, è uno dei teoremi più famosi del Novecento, mostra l'importanza dell'Assioma della Scelta ed è un caposaldo della teoria geometrica degli insiemi. Ma speriamo che Stefan Banach si sia

[12] A scanso equivoci: Rudolf Weigl non è uno scienziato nazista folle e crudele, alla Josef Mengele; è uno scienziato polacco che lavora da decenni alla ricerca di un vaccino sulla febbre tifoide. Nonostante il cognome, era un patriota polacco, e il regista Żuławski ha raccontato la sua storia in "*La terza parte della notte*", film del 1971.

davvero divertito, quando con Alfred Tarski[13] ne ha visto finalmente la conclusione: speriamo che abbia sorriso all'idea che il "fare a pezzi" matematico sarà pure paradossale, ma certo assolutamente indolore, rispetto al "fare a pezzi" della guerra; per non parlare del fatto che sembra moltiplicare le cose, anziché distruggerle. E speriamo anche che abbia festeggiato con un bel giro di birre, laggiù allo Scottish Café.

[13] Prima che ci dimentichiamo: di Tarski abbiamo già parlato in RM096, con il suo compleanno intitolato "*La, tutta la, niente altro che la*", nel Gennaio 2007. E, all'interno di quell'articolo, c'è una nota interessante che recita così: "*Una prestigiosa rivista italiana di matematica ricreativa ne ha parlato in ben tre Paraphernalia Mathematica, non a caso titolati "Due Palle Così". Cfr. RM063, RM064, RM065, Aprile-Giugno 2004*". E con questo, dovremmo essere riusciti nella difficilissima operazione di mettere una nota dentro una nota.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Siamo di nuovo "nell'organico"			
Uno dei soliti tormentoni			

2.1 Siamo di nuovo "nell'organico"

…che è il modo gentile che usa uno (maschile con valore di neutro) di noi per esprimere un concetto a tutti ben chiaro.

Trattasi di Alberto, il VadLdRMMG (blablabla… meno giovane). Se ci sono sei materie da studiare, lui riesce ad essere insufficiente in sette.

L'altro giorno, ad esempio, è arrivato a casa e gli abbiamo chiesto: "Come è andato il test?"

"Mah, non so… Il mio non l'ha consegnato…" (Aiaiai… suona come una "spiritosa invenzione", come diceva Leopardi – Era lui che lo diceva? Beh, non importa. Tanto mi avete capito).

"Hai almeno confrontato il compito con qualcun altro?"

"Certo. Con tre che lo hanno ricevuto indietro. Era un test vero/falso, dieci domande, un punto ad ogni risposta giusta. Guarda, queste erano le risposte che abbiamo dato e i risultati che sono stati consegnati." E ci mostra la tabellina che segue:

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	**Voto**
Christian	V	F	V	F	V	V	F	F	F	V	7
Flip[14]	V	V	F	F	F	V	V	V	F	F	7
Barbara	F	F	F	V	V	F	V	F	V	F	6
Alberto	V	V	F	F	V	F	V	F	F	F	

Ora, la domanda è: ma secondo voi, *quanto ha preso Alberto*?

Ah, ci sarebbe anche un'estensione, ma non raccontatelo troppo in giro. Siccome Alberto domani porterà a casa il foglio con le domande… Potete passarmi le risposte *esatte,* per favore? Non vorrei fare una figuraccia.

[14] Si chiama Filippo, ma tutti lo chiamano "Flip".

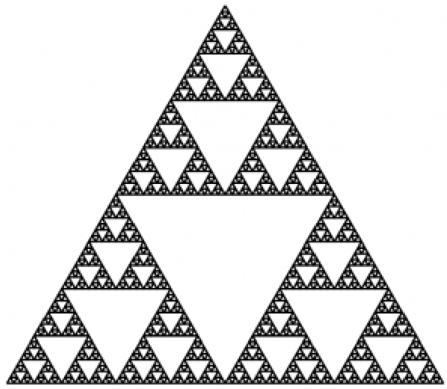
2.2 Uno dei soliti tormentoni

In quanto siamo sicuri di avervelo raccontato un mucchio di volte: una delle battute preferite dei fisici sui matematici è che questi ultimi non si lasciano influenzare dalla realtà, nel loro lavoro; i primi, invece, sono sempre pragmaticamente aderenti al mondo reale, con i loro punti adimensionali dotati di massa, pistoni che scorrono senza attrito, eccetera, eccetera, eccetera…

Uno dei punti di forza dei fisici quando si discute di "realtà" è un concetto che uno di noi (pessimo pattinatore su ghiaccio) ha sempre considerato piuttosto astruso: quello di "momento d'inerzia". Contrariamente a lui, *sicuramente* tutti ricordate che è definito come $\int r^2 dm$, dove l'integrale è esteso all'intero corpo in esame (insomma, dove c'è della massa).

Sicuramente, un concetto dotato di solida e dura[15] aderenza al mondo reale.

Bene, adesso calcolate il momento d'inerzia di un Triangolo di Sierpinski[16] di lato l e massa (alla fine dei tagli) m rispetto all'asse perpendicolare al triangolo e passante per il centro (del triangolo).



9 *Il triangolo di Sierpinski.*

"Rudy, ma ti sembra il caso di rifilarci un problema senza un minimo di ambientazione?"

Vero. Diciamo che se riuscite a trovare un'ambientazione per questo mostro potreste vincere la nostra eterna disapprovazione (e la domanda "cosa mettete nella pipa al posto del tabacco?"), quindi se avete delle idee fatecelo sapere; il fatto è che Rudy ha trovato una strada che glielo avrebbe fatto valutare un paio di pipe al massimo, ma *trovare quella strada* di pipe dovrebbe valerne quasi quattro…

Promesso, se nessuno trova la via di Rudy ve la raccontiamo il mese prossimo, ma voi poi diteci se vi è piaciuta, che ne abbiamo altri, sullo stesso stile. Uno più tosto dell'altro.

3. Bungee Jumpers

Dal Teorema di Eulero si ricava[17] che, se $k = 5^n - 5^{n-1}$, il numero $2^k - 1$ è divisibile per 5^n. Dimostrare che non esistono $k < 5^n - 5^{n-1}$ tali che $2^k - 1$ è divisibile per 5^n.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era una Notte Buia e Tempestosa

Probabilmente non è il caso di farla troppo lunga. Sono almeno un paio di mesi che lo minacciamo in sottofondo, e i lettori più accorti non saranno minimamente sorpresi della cosa: è difficile che noi si dica una cosa scherzando, se poi non avessimo l'intenzione di

[15] "dura", qui, va letto in rapporto al "pessimo" di cui sopra: se vi ricordate, nel 2006 Rudy sul ghiaccio si è incrinato un osso del braccio. Sinistro. E lui è mancino. Tutta colpa del momento d'inerzia.

[16] Nel caso aveste delle lacune in merito: prendete un triangolo equilatero, togliete il triangolo equilatero con punta all'ingiù di area un quarto piazzato in mezzo, poi togliete i tre triangoli equilateri con punta all'ingiù piazzati in mezzo ai tre triangolini rimasti… Eccetera, sino all'infinito (and beyond!). OK, vi abbiamo messo la figura, ma se ne parla anche nel PM di RM122.

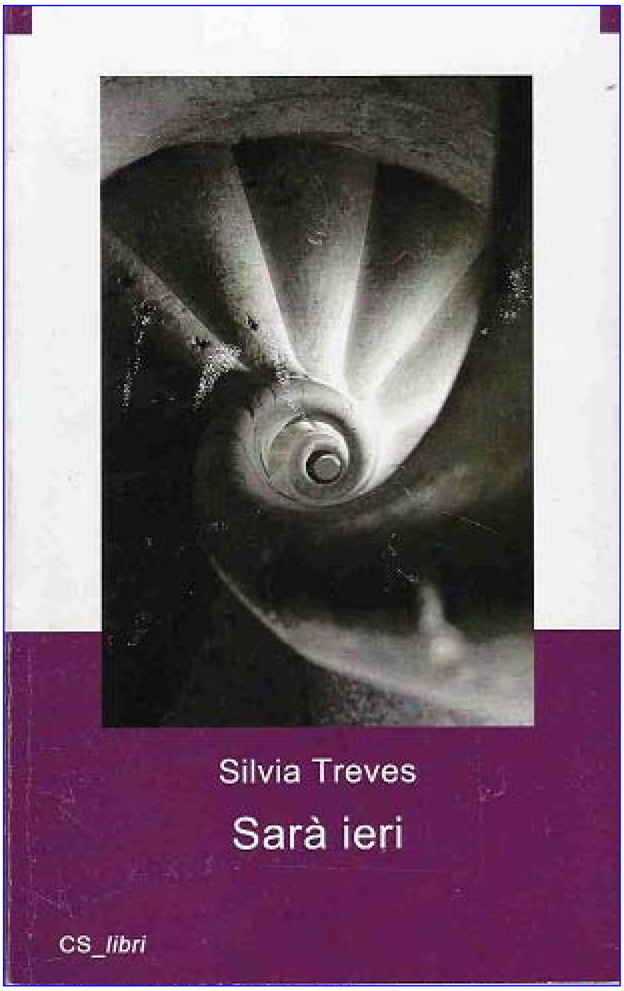
[17] Del Teorema di Eulero ne abbiamo parlato nel BJ di RM132, e abbiamo corretto un errore (nostro, non di Eulero) in RM133; l'affermazione che segue sarà dimostrata nella soluzione.

farlo davvero. E così, ecco qua: recensiamo davvero un romanzo, questo mese. Ma non abbiamo per questo intenzione di sfuggire alla duplice ferrea regola che governa l'apparizione dei titoli su queste pagine: l'appartenenza del libro, in una qualche maniera, al genere "matematica", e l'appartenenza dell'autore, in qualche maniera, alla famiglia di "Rudi Mathematici". In fondo, non è stato difficile finire nella pura narrativa…

4.1 Sarà ieri

«*Sulla base panciuta, di un azzurro freddo che le ricorda quello di un abito tante volte indossato da ragazza, è disegnata una sottile circonferenza dorata. Al centro un micino bianco e nero la contempla beffardo come il gatto di Alice.*»

"Nobile e Disperata": conoscendo l'intera famiglia, la totalità della libreria e l'universalità della casa editrice, la curiosità di sapere a chi sia poi venuto in mente un nome così bello ed eloquente per la collana di narrativa è davvero forte. Soprattutto perché quella famiglia, quella libreria, quella casa editrice non è che produca trecento titoli all'anno, ma molti, molti meno: e per noi, far parte del ristrettissimo novero degli autori di quella casa editrice (e addirittura con due titoli in catalogo) senza riuscire a trovare spazio in cotanta collana, è ragione di disperazione. Ma non di *nobile disperazione* (sarebbe troppo facile, il calembour), quanto piuttosto di disperazione povera e volgare: *scuorno* potremmo dire, se fossimo a Napoli, invece che a due passi dalla riva sinistra del Po.

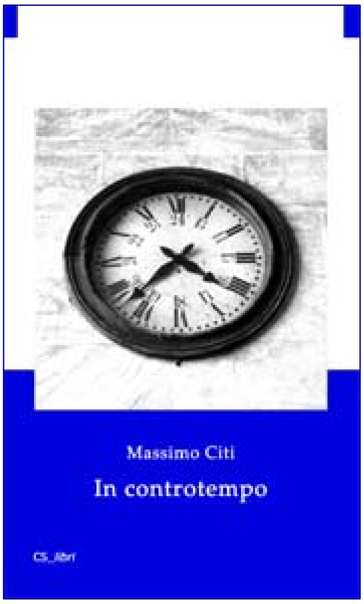


Proprio in "Nobile & Disperata", collana invero temeraria & generosa della CS_libri, è comparso da poco questo ***Sarà ieri*** di Silvia Treves. Cominciamo dall'autrice: la signora Treves (che si arrabbierebbe moltissimo, dovesse mai leggere queste righe, nel sentirsi chiamare "signora") è un'insegnante di matematica. Una di quelle insegnanti di scuola pubblica, e non di lussureggianti licei privati; scuola media, per la precisione, in uno dei quartieri più complicati di Torino. Uno di quelli con molti ragazzi extracomunitari, molti ragazzi con difficoltà di inserimento sociale (extracomunitari o torinesi che siano), e molti ragazzi, anzi tutti, che sono soprattutto ragazzi di scuola media, cioè normali, normalmente complicati e normalmente ragazzi, per fortuna. A loro Silvia insegna matematica e scienze. E anche altro, perché è una professoressa: come tutti i professori sanno, a scuola non si insegna solo la propria materia: magari fosse possibile! La fatica dell'insegnare sarebbe più che dimezzata.

E in questo senso, come opera di un'insegnante di matematica, questo ***Sarà ieri*** è già matematica: del resto chi, se non un matematico, potrebbe descrivere una lampada con le parole che trovate sotto il titolo di quest'articolo? La matematica è dappertutto, dice spesso il fondatore d'una prestigiosa rivista di matematica ricreativa, e chi insegna matematica lo sa; e la mette anche nel raccontare il blu elettrico d'un abat-jour.

Ma Silvia non insegna e basta: è anche un editore, è anche un editor. Conoscete l'enorme differenza che sta tra i due termini? L'editore è colui che legge un manoscritto, e decide di rischiare dei soldi pubblicandolo; in parte sperando che i soldi tornino riducendo le perdite, in parte sperando che ne tornino anche più di quelli spesi, generando guadagni, in parte sperando semplicemente che il libro stampato valga la pena di essere stato stampato, mandato al mondo delle biblioteche, marchiato con un codice ISBN e vestito d'una copertina. È un lavoro che richiede un sacco di coraggio, l'editore: specie quando la casa editrice è piccola, e ogni libro che si stampa diventa una scommessa grossa col bilancio. L'editor, invece, è quello che trasforma il manoscritto in un libro: ma no, non nel senso appena detto dell'editore. L'editor prende il manoscritto per una mano e l'autore per l'altra, e cerca di far crescere entrambi. Spiega come deve strutturarsi un saggio o un racconto, cancella gli errori, mostra l'importanza della corretta impaginazione, sollecita la necessità di tagliare quello, di esaltare quell'altro. Il tutto senza dimenticare cosucce fondamentali come il rispetto della sintassi e dell'ortografia. È davvero prossimo al concetto di autore, così prossimo che non si capisce davvero per quale motivo non si debba considerare tale.

E Silvia è stata editor ed editore di *Rudi Simmetrie* e di *Rudi Ludi*, quindi genitrice di quei due libri almeno quanto lo sono i tre della redazione di questa rivista. Vi pare che ci siano sufficienti ragioni per presentare questo suo romanzo?



Speriamo che abbiate risposto di no. Perché in questo caso potremmo spiegarvi meglio come funziona questo libro, e potremmo anche raccontarvi che è proprio il libro a meritare di essere raccontato, e non solo i meriti della signora Treves. Per farlo, partiamo da lontano: dall'altra metà della CS_libri, quella composta da Max Citi: anche lui editore, recensore, editor, libraio, scrittore. Max ha pubblicato, neanche tre anni fa, un'antologia di racconti fantastici, intitolata "*In Controtempo*" (sì, certo, sempre in *Nobile & Disperata*, e dove altro sennò?). Nel leggerla, ci si accorge di come sia profonda la familiarità che Max ha col fantastico; certo, è un fantastico adulto e lontano, davvero lontano, da quello di Harry Potter e del Signore degli Anelli. E se per voi "fantastico" significa draghi e bacchette magiche, allora non è il caso che leggiate Massimo Citi. Ma se invece trovate che la logica del fantastico sia proprio quella delle giornate che passano attorno alla nostra vita di tutti i giorni, in una dimensione che non è neppure parallela, ma semplicemente affiancata e permeabile alla nostra, allora i racconti di Massimo Citi potrebbero seriamente incantarvi. È quello che è successo a noi, al punto che, dopo averli letti, ci è capitato di chiederci se ci fosse, da qualche parte, qualche autore simile, se ci fosse una scuola narrativa a cui ascriverlo, una compagnia di scrittori simili e paralleli, italiana o straniera che fosse.

Una siffatta compagnia non l'abbiamo trovata: forse perché abbiamo cercato troppo lontano, forse perché abbiamo esagerato con le vocali. Bastava togliere una "i", trasformare la "compagnia" in "compagna", e avremmo trovato, limpida e brillante, la penna fantastica (in tutte le accezioni possibili) di Silvia Treves.

Per avvicinarvi a ***Sarà ieri*** dovete immaginarvi un racconto su almeno tre livelli diversi. Forse ce ne sono di più, non è mai chiaro, per chi legge, quali siano le possibili chiavi di lettura che imbastisce un autore; ma tre sono facili da vedere, da leggere in controluce. Il primo, immediato e diretto è quello della protagonista reale, Lidia; ha una vita, un marito, una figlia, una madre, ed è arduo per chi conosce l'autrice non darle il volto di Silvia Treves. È un errore, naturalmente: la relazione tra autrice e protagonista è senza dubbio fortissima, ma Lidia sta a Silvia nella stessa misura in cui Don Chisciotte sta a Cervantes. Non ci si aspetta di vedere il poeta di Alcalà de Henares cavalcare un Ronzinante a fianco di Sancho Panza, perché dovremmo allora leggere una confusione soffusa tra autrice e protagonista? Ciò non di meno, Lidia sta lì, nelle pagine, a correre dietro ad un lavoro mal definito, come sono tutti i lavori che tracimano nella vita; interagisce piana e decisa con gli affetti della sua vita, con le persone che incontra, a tutte oppone e propone un pezzo di sé, voce parole e sguardi, e in questo è totalmente reale. Forse per questo nel leggerla diventa imperativo immaginarne volto sguardo e capelli, e i poveri di immaginazione come noi inevitabilmente si rifugiano nella memoria, piuttosto che sollecitare la fantasia.

La vita vera è il primo livello: le altre vite, quelle improvvise, evocate, non vissute che invadono Lidia sono il secondo livello. Lidia è ricettacolo di altre vite, che la invadono come ricordi diretti, vissuti in prima persona, anche se, ed è tutta qui la connotazione fantastica del racconto, quella prima persona non è lei. Quasi mai. Lidia cerca uno spazio per sé, neutro e piccolo, due stanze per lavorare distante da casa, dal marito, dalla figlia: distante da sé stessa, ovviamente, per cercare un'altra Lidia, forse professionale, di certo almeno in parte diversa e aliena dalla prima. Ma quello che trova non è un rifugio, è una porta aperta: come il logo stesso della CS_libri, la porta socchiusa mostra una stanza illuminata, e in una specie di ossimoro è proprio quella luce che promette mistero.

I due livelli, così separati hanno bisogno di un connettore, e il connettore sono gli oggetti. Le due stanze che Lidia affitta traboccano oggetti: oggetti che aspettano solo, per contrappasso, di affittare Lidia stessa. È il contatto con gli oggetti che apre la porta e i ricordi: e la lentezza della vita quotidiana accelera, divampa, si sovrappone alle altre vite ricordate e non vissute. Gli oggetti come porte, i contatti come soglie.

Occorre una risoluzione finale, tra la vita normale, quotidiana, che viene comunque messa in crisi, o quantomeno presentata sotto aspetti meno logici e quotidiani, dall'esperienza dei ricordi scatenati dagli oggetti delle stanze. Ed è aspettando la risoluzione, il crescendo, che si arriva alla fine del libro. Tre livelli saldati in una sola trama. E tutto senza fretta, come se Silvia avesse pesato ogni parola, anzi: come se ogni pressione sulla nera tastiera del suo computer fosse un contatto ragionato, meditato, come quello, sempre prudente, tra gli oggetti e Lidia. E il risultato è un racconto trasversale, ortogonale alla realtà, e proprio per questo in grado di raccontarla tutta. Con una tensione decisa, ma non affrettata, come una regina che si avvicina lentamente al patibolo. Che, guarda caso, è forse proprio l'immagine più semplice ed ovvia che si possa immaginare, se si vuole descrivere qualcosa che sia, al tempo stesso, nobile e disperata.

Titolo	Sarà ieri
Autore	Silvia Treves
Editore	CS_*libri*
Collana	N&D, Nobile e Disperata
Data di Pubblicazione	Novembre 2009
Prezzo	13,50 Euro
ISBN	9788895526201
Pagine	146

5. Soluzioni e Note

Finalmente è arrivato marzo. Non so voi, ma chi scrive queste righe è in astinenza da sole, e spera in una primavera anticipata... soprattutto perché quest'anno dalle nostre parti si è vista tanta neve e di grigio e bianco non se ne può proprio più.


10 *Buon compleanno, Rudy.*

Se per qualche miracolo vi ricordate di cosa parlavamo il mese scorso, vi dovrebbe essere già chiaro da dove ripartiamo questo mese. Se queste poche righe introduttive fossero scritte dal Doc, ci sarebbero almeno due pagine di parole e circonvoluzioni per non dire esplicitamente ma tra le righe arrivare ad intendere in qualche modo che il Capo è in realtà un po' più vecchio di lui. Forse toccherebbe argomenti complessi, come la qualità e quantità di esperienza accumulata in funzione degli anni trascorsi, il curriculum vitae del nostro esperto in problemi, la percentuale di neuroni ancora attivi, e la costante di gravità universale.

Se invece fosse il Capo a scrivere le note che state leggendo, vi avrebbe già dato dei caproni nelle prime due parole, per non aver capito da soli quello che non ha ancora detto, e avrebbe concluso – utilizzando qualche dotta ed oscura citazione di Lewis Carroll – che in ogni caso quello che ha da dire un coetaneo dello Sputnik è decisamente al di là della vostra comprensione comunque.

Invece chi vi intrattiene è la povera Alice, che ha liquidato tutto in una riga sola, e l'avete già letta nella didascalia della foto... quindi chiudiamo questa minimale sezione celebrativa: non dimenticate di fare gli auguri al Capo, se no chi lo sente, poi?

Ma bando alle ciance, vediamo cosa è successo in questo fulmineo febbraio, a parte le nostre sviste (FRebbraio?! dovevamo avere ben freddo mentre preparavamo il numero...).

Siamo orgogliosi di segnalare una nuova aggiunta nel nostro Bookshelf (http://www.rudimathematici.com/bookshelf.htm), perché ***Martino***, felice della pubblicazione del suo breve pezzo sulla "Betwenness centrality" ci ha inviato un suo racconto pseudoscientifico, anche in tema con il PM del mese scorso, da non perdere. Ancora sul sito siamo riusciti, grazie ai nostri nuovi webmaster, a rinnovare un po' di cose: anche se non siamo neanche alla metà dell'opera, potete già ammirare le aggiunte dei Memorabilia (http://www.rudimathematici.com/RemoMabilia/remomabilia.htm). Abbiamo inoltre deciso di eliminare il sito ipovedenti, perché abbiamo scoperto che negli ultimi anni i browser si sono evoluti e con un semplice "tasto CTRL"+ rotellina del mouse è possibile fare lo zoom in delle pagine per chi ha problemi di vista... insomma, ne riparleremo ancora, ma se avete dei commenti, fatevi sentire.

Sempre tra le segnalazioni, ci racconta ***Mariano Tomatis*** della nascita della Mathematical Forecasting Initiative (http://www.dharmainitiative.it), un'organizzazione immaginaria nata nell'ambito dell'universo narrativo di Lost. Ma voi lo sapevate che esiste anche una *Lostpedia*, con tutte le possibili informazioni su Lost? Noi non ne avevamo idea, ma vi diamo un link all'introduzione dell'iniziativa di ***Mariano***: http://lostpedia.wikia.com/wiki/Mathematical_Forecasting_Initiative, adesso lo sapete anche voi e potete aggiornarvi in proposito. ***Mariano*** è sempre un passo avanti (http://www.marianotomatis.it/).

Una notizia importante è che la *Gilda degli Abacisti* (non sapete cosa sia? Male, andate a dare un'occhiata ad RM109 e RM110...) sta diventando veramente seria: il Capo sta pensando di stampare certificati e colleziona le foto degli strumenti giunti con le richieste di adesione. Per il resto, è molto meglio passare alle soluzioni, vero?

5.1 [133]

5.1.1 Il cugino di Fibonacci

Qui dobbiamo lamentarci. Non delle soluzioni, che sono arrivate copiose, ma del fatto che nessuno abbia trovato notizie di *Liutprando*. Il nostro Postino Ufficiale, da solo, ha scoperto che una relazione tra il nome "Liutprando" e il cognome/soprannome "Fibonacci" esiste eccome:

> GARZELLA Gabriella, *Il campanile di S. Pietro in Vincoli e il piede di Liutprando*, in "Bollettino storico pisano", LVII, 1989, Pisa, Pacini, 1989, p. 163.
>
> Il <<piede di Liutprando>> usato a Pisa, calcolato in termini empirici, ha un valore assai vicino (m. 0,477-0,482) a quello ricavabile dalla *Practica Geometrie* di Leonardo Fibonacci (m. 0,486355) e comunque diverso da quello canonico (m. 0,43823).
>
> *Reperibilità: biblioteca Universitaria.*

Insomma, bastava cercare un po', e qualcosa si trovava. Comunque, ecco il problema:

> *La serie di (Liutprando) Fibonacci parte genericamente da due termini a e b, ma definisce il valore assoluto di ogni termine come la somma del precedente e del successivo al termine che vogliamo calcolare; insomma, il terzo termine, sommato ad a, deve dare b (o meglio, il suo valore assoluto); non solo, ma (Liutprando) Fibonacci generalizza il concetto dai numeri interi ai reali, permettendo quindi un'ampia "serie di serie" (nel senso che ne fate quante volete).*
>
> *In funzione di a e b, quanto vale il termine di ordine* 2009 *della serie? E gli altri?*

Complimenti a tutti: ***Stefano D.I.***, ***Cid***, ***Andrea***, ***Millenium Bug***, ***Franco57***, ***Gnugnu***, ***trentatre***, ***Silvano***, al solito pubblichiamo solo un paio di voi, ma lo sapete che le soluzioni ci hanno proprio divertito, e tutte quante.

Prendete ***Andrea***, che ci scrive sempre soluzioni compattissime, questa volta ve ne diamo un esempio, senza nessuna riformattazione:

> Nel testo c'è scritto che "la serie di (Liutprando) Fibonacci parte genericamente da due termini a e b, ma definisce il valore assoluto di ogni termine come la somma del precedente e del successivo al termine che vogliamo calcolare; insomma, il terzo termine, sommato ad a, deve dare b (o meglio, il suo valore assoluto)". Dicendo che il valore assoluto di un termine è uguale alla somma dei termini precedente e successivo al termine dato significa ammettere che non ci sono numeri negativi. Se prendiamo una tripletta di numeri a;a+c;c e se prendiamo c<0 e |c|>|a| allora abbiamo che a+c<0, e quindi la somma del termine precedente con il termine successivo a quello dato non può dare mai il suo valore assoluto perché la somma è negativa. Quindi ho pensato che sarebbe stato meglio definire la serie di Liutprando Fibonacci come la serie in cui il valore assoluto di ogni termine è uguale al valore assoluto del numero ottenuto sommando il termine precedente con quello successivo della serie (avendo 3 numeri a;b;c abbiamo che |b|=|a+c|). Ora anziché continuare in maniera analitica andiamo per via più geometrica. Immaginiamo un due assi cartesiani perpendicolari, chiamiamo n il primo termine della serie, n+k il secondo e k il terzo. Ora immaginiamo che questi valori siano in realtà coordinate dell'asse delle ordinate nel piano cartesiano e, per indicare l'n-esimo numero della serie, indichiamo quello lontano n-1 unità dall'origine (in pratica il primo termine avrà coordinate (0;n), il secondo (1;n+k) e il terzo (2;k). la figura non rispetta la somma dei valori di n e k tenendo conto dei quadratini, è solo per dare l'idea di quello che succede). Si viene a formare una figura come quella dell'allegato in cui si vede chiaramente che la definizione sopra apportata viene completamente soddisfatta (per un esempio |-n|=|-n-k+k|; |-n|=|-n|; n=n). A questo punto capiamo che la serie che abbiamo davanti è praticamente uguale ad

una funzione seno (o coseno, non ha importanza) per cui è una funzione i cui valori si ripetono dopo un certo numero di passaggi, come si evince bene dalla figura. Naturalmente n e k presi positivi e con k>n è solo per comodità così da partire nel quadrante positivo, prendendo altri numeri qualsiasi non sarebbe cambiato niente. Arrivati a questo punto diventa quasi banale la soluzione, basta notare che se l'n-esimo numero della serie, che chiamiamo m, rispetta delle determinate condizioni qualsiasi valore della serie si può ricollegare a +_n; +_(n+k); +_k (+_ sta ad indicare "più o meno"). In particolare possiamo distinguere tra 6 casi principali ricordando che con m indichiamo la posizione dell'n-esimo numero della serie. (I) (m - 1) divisibile per 3 e per 2; m=n. (II) (m - 1) divisibile per 3 ma non per 2; m= - n. (III) (m - 2) divisibile per 3 e per 2; m=n+k. (IV) (m - 2) divisibile per 3 ma non per 2; m= - n - k. (V) m divisibile per 3 e per 2; m= - k. (VI) m divisibile per 3 ma non per 2; m=k. Quindi un qualsiasi numero della serie può essere determinato conoscendo i primi 2 numeri della serie e vedendo a quale categoria di numeri rientra, e tutto ciò in pratica è sintetizzato nei due grafici dell'allegato. Nel caso del 2009esimo numero della serie basta vedere che 2009 appartiene ai numeri della quarta categoria, di conseguenza il 2009esimo numero della serie, conoscendo n e k, sarà -n-k. Utilizzando questo tipo di rappresentazione è abbastanza semplice pensare anche alle serie di serie o alle serie di serie di serie e così via semplicemente come una somma di queste "serie-onde" allo stesso modo come si può intendere il suono di un violino come la somma di determinate onde. Tutto però dipende dalla definizione iniziale, se dovesse crollare quella sarebbe tutto da rifare...

Chiaro, no? Vediamo di chiedere lumi a ***Gnugnu***:

La definizione ricorsiva delle successioni proposte da Liutprando Fibonacci è:

$$L_0(a,b)=a, \quad L_1(a,b)=b, \quad L_{n+1}(a,b)=\left|L_n(a,b)\right|-L_{n-1}(a,b) \quad n\in \mathrm{N}_0 \quad a,b\in \Re .$$

Escludendo la successione banale formata da tutti 0, senza il disturbo del valore assoluto comparirebbero, in ogni successione, al più, 6 soli valori diversi che si ripetono ciclicamente con periodo 6: $a,\ b,\ b-a\ ,\ -a\ ,\ -b,\ a-b,\ a,\ b,\ldots.$

Le complicazioni introdotte dal valore assoluto si possono agevolmente superare se, osservato che nelle successioni saranno più frequenti i termini positivi ($L_j<0 \rightarrow L_{j+2}>0$, mentre non vale l'opposto), restringiamo lo studio ad un loro particolare sottoinsieme $\overline{L}(x,y)$: quello delle successioni inizianti con un valore non positivo seguito da uno negativo. In questo modo, fortunatamente, non si producono biforcazioni.

$\overline{L}_0(x,y)=x\le 0 \wedge \overline{L}_1(x,y)=y<0$ generano, infatti, risultati di segno certo:

$x,\ y,\ -x-y,\ -x-2y,\ -y,\ x+y,\ -x,\ -2x-y,\ -x-y,\ x,\ y,\ \ldots\ .$

Questa volta i valori diversi sono al massimo 8 e le successioni presentano un periodo 9.

Nella figura sono rappresentati i termini delle successioni come 9 settori circolari, numerati da 0 a 8, evidenziando in rosso quelli non positivi. Per ottenere l'ennesimo termine basta calcolare (è comodo usare la nota regola per la prova del 9) il resto della divisione di n per 9 e sostituire, nell'espressione che etichetta il corrispondente settore circolare i valori di x ed y.

Ad esempio[18]: $\overline{L}_{1957}(-4\pi,-13.03)=\overline{L}_4(-4\pi,-13.03)=-y=13.03$, perché $1957\equiv 4 \pmod 9$.

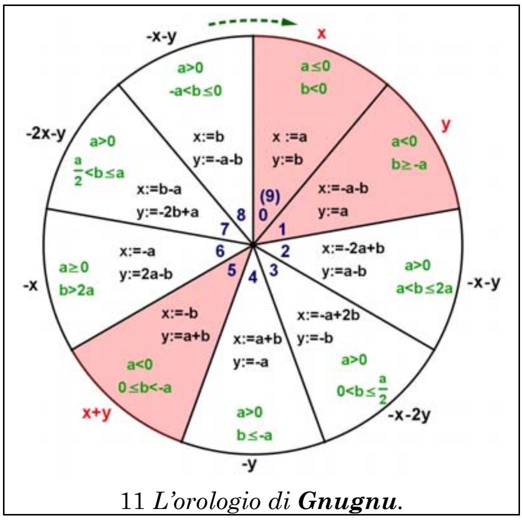
[18] Proprio un buon numero da menzionare questo mese…complimenti al nostro ***Gnugnu***. [AR]

Il medesimo "*orologio*" può essere utilizzato anche per successioni diverse dalle $\overline{L}$.

Ciascuna $\overline{L}(x,y)$ corrisponde a 9 *L(a,b)*. Cambiando *il fuso orario*, partendo cioè da un settore diverso dallo 0, abbiamo, per ciascun settore, una corrispondenza biunivoca fra le coppie ordinate *(x,y)* e quelle *(a,b)*.

Volendo iniziare, ad esempio, dal settore 7, dovrà essere:

$$\begin{cases} a = -2x - y \\ b = -x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = b - a \\ y = -2b + a \end{cases};$$



11 *L'orologio di* ***Gnugnu***.

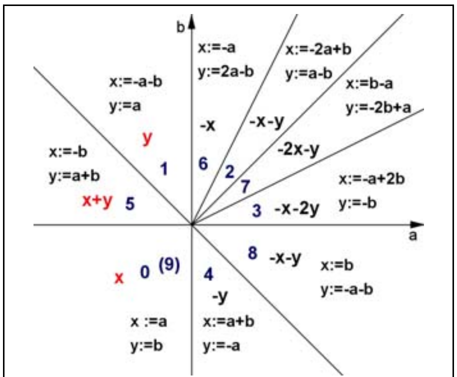
da cui segue, per i possibili valori di a e b:

$$\begin{cases} x \le 0 \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b - a \le 0 \\ -2b + a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \dfrac{a}{2} < b \le a \end{cases}$$

In ciascun settore le assegnazioni trovate sono state riportate in nero, e le limitazioni di a e b, in verde.

Noti i valori di a e b, questi soddisferanno, come verrà dimostrato, le disuguaglianze di uno ed uno solo dei settori, che indicheremo con *s(a,b)*.

Assegnati ad x e y i risultati delle espressioni riportate in tale settore, la $\overline{L}(x,y)$ iniziante, dal settore 0, con questi due valori, varrà a in *s(a,b)* e b in quello immediatamente successivo, sarà allora: $L_n(a,b) = \overline{L}_{n+s(a,b)}(x,y)$ e si otterrà il numero cercato operando la riduzione modulo 9, questa volta non su n, ma sulla somma $n+s(a,b)$.



12 *L'altra figura di* ***Gnugnu***.

Ad esempio[19] volendo calcolare i termini n = 1958 ed n = 1971 partendo con a = 3.04 e b = 13.09, si nota che il solo settore 6 ha disuguaglianze soddisfatte da questi due valori.

Sarà allora: $s(3.04,13.09) = 6$, $x = -a = -3.04$, $y = 2a - b = -7.01$ da cui

$$L_{1958}(3.04, 13.09) = \overline{L}_{1964}(-3.04, -7.01) = \overline{L}_2(-3.04, -7.01) = -x - y = 10.05$$

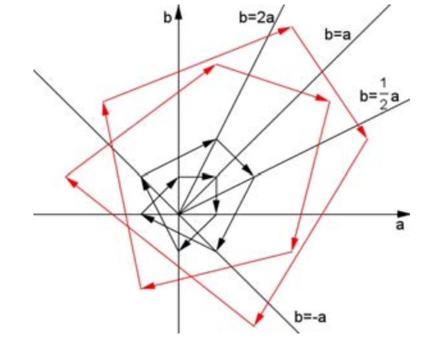
$$L_{1971}(3.04, 13.09) = \overline{L}_{1977}(-3.04, -7.01) = \overline{L}_6(-3.04, -7.01) = -x = 3.04.$$

Per dimostrare che ogni possibile coppia di valori iniziali a e b soddisfa uno ed uno solo dei sistemi di disequazioni individuanti il settore iniziale, basta constatare (vedi figura) che nel diagramma cartesiano *Oab* ciascun sistema corrisponde ad un angolo con vertice nell'origine e lati coincidenti, a seconda dei casi con i semiassi

[19] Chissà come gli saranno venuti in mente, questi numeri per gli esempi? Vedi anche la nota precedente... [AR]

cartesiani, con le bisettrici del primo, secondo e quarto quadrante e con le due semirette di equazione $2b=a$ e $b=2a$ ($a>0$).

A ciascun angolo appartiene la semiretta lato che si trova, per un osservatore posto nel vertice, a sinistra dell'angolo, ma non l'altra, né l'origine. Quest'ultima (corrispondente alla successione di soli zeri) costituisce, con l'insieme dei 9 angoli, una partizione dell'intero piano.



13 *L'ultima figura di* ***Gnugnu***.

Nella figura sono stati riportati anche il numero del settore corrispondente a ciascun angolo, le espressioni per il calcolo del valore finale e le assegnazioni per passare alle $\overline{L}$. In questo modo può essere utilizzata, come valida alternativa al diagramma a settori circolari.

L'ultima figura mostra come, unendo i punti corrispondenti alle coppie dei successivi valori iniziali prodotti da una $\overline{L}$ qualsiasi, si ottenga, come orbita, un ennagono intrecciato.

L'orbita tracciata in nero, generata dai valori iniziali $x=a=0$, $y=b<0$, risulta, per ogni $b<0$, simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

I termini di queste successioni valgono, infatti:

0, b, $-b$, $-2b$, $-b$, b, 0, $-b$, $-b$, 0, b, … .

Vista che la domanda: "Cosa capita nella successione di Fibonacci (Leonardo), se sostituiamo all'addizione la sottrazione?", viene posta, qualche volta, dagli studenti quando affrontano l'argomento, può darsi che l'attribuzione al cugino Liutprando risulti arbitraria. Bisognerebbe, forse, ricercarne la paternità nell'ambito dei Ficlerici o Fifabbri. Che sia uno dei rari momenti in cui un genitore pensa di non aver sprecato il suo tempo con il figlio?

No comment su quest'ultima frase... Almeno, il Capo non ha voluto esprimersi. Andiamo avanti, ***Stefano D.I.*** propone un'altra serie:

Che ne dite di questa serie?

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_2 = b \\ a_i = |a_{i-1} - a_{i-2}| \end{cases}$$

(con a, b numeri interi, ma anche razionali, se si vuole)

Non è bella come la vostra ma anche questa, dopo un poco, non subito, diventa ciclica. La particolarità è che viene un ciclo molto corto (tre elementi), per esempio:

partendo da $a=12$, $b=7$ si arriva a … 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1 …

partendo da $a=12$, $b=6$ si arriva a … 6, 6, 0, 6, 6, 0, 6, 6 …

Bella, e voi, che ne dite? Questo mese esageriamo e vi passiamo ancora la soluzione di ***trentatre***, che è particolarmente estensiva:

Se a_1 e a_2 sono i termini iniziali e a_n il termine generico si ha per definizione $a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$ cioè $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$ da cui si calcolano tutti termini successivi ad a_1, a_2 (e naturalmente da $a_{n-1} = a_n - a_{n+1}$ si calcolano i termini precedenti).

Applicando successivamente la ricorrenza si ha

$a_3 = a_2 - a_1$, $a_4 = a_3 - a_2 = -a_1$, $a_5 = a_4 - a_3 = -a_2$, $a_6 = a_5 - a_4 = a_1 - a_2$, $a_7 = a_6 - a_5 = a_1$, $a_8 = a_7 - a_6 = a_2$, ecc.

Quindi la sequenza è periodica con periodo 6 e vale per ogni n la

$$a_n = a_k \qquad \text{se } n \equiv k \quad (\mathit{mod}\, 6)$$

che consente di esprimere direttamente ogni a_n in funzione di a_1, a_2. In particolare, per n = 2009 = 6 · 334 + 5 si ha la risposta al problema $\boxed{a_{2009} = a_5 = -a_2}$.

Per capire perché la sequenza $\{a_n\}$ è periodica si può fare riferimento alla *formula di Binet* per i numeri di Fibonacci F_n, che è

$F_n = (\varphi^n - \varphi'^n)/\sqrt{5}$ con φ, φ' radici di $x^2 - x - 1 = 0$, $\varphi = -1/\varphi' = (1+\sqrt{5})/2 = 1.61803...$: *sezione aurea.*

Se a_n è proporzionale alla potenza n^{esima} di una variabile x, cioè $a_n \cong x^n$ si ha per la sequenza in oggetto lo schema $a_{n+1} = a_n - a_{n-1} \to x^{n+1} = x^n - x^{n-1} \to x^2 - x + 1 = 0$, che ha come radici $\alpha, \alpha' = (1 \pm i\sqrt{3})/2 = 0.5 \pm i\, 0.866$, e osservando che $\cos(\pi/3) = 1/2, \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ si ha

$$\alpha, \alpha' = \cos(\pi/3) \pm i \sin(\pi/3) = e^{\pm i 2\pi/6}$$

e quindi si può quindi scrivere

$$a_n = p\alpha^n + q\alpha'^n = pe^{i2\pi n/6} + qe^{-i2\pi n/6} \text{ con } p, q \text{ : costanti}$$

da cui risulta evidente il periodo = 6. Le costanti p, q sono funzioni dei valori iniziali a_1, a_2 e si possono ottenere dalle precedenti con n = 1, 2; sostituendo i valori ricavati si ha

$$a_n = (a_1 - a_2)\cos(\pi n/3) + (a_1 + a_2)\sin(\pi n/3)/\sqrt{3}$$

oppure

$$a_n = R\cos(\pi n/3 + \vartheta_0) \text{ con } R, \vartheta_0 \text{ : costanti opportune (funzioni di } a_1, a_2)$$

Per generalizzare il problema – e cercare in particolare le sequenze periodiche – consideriamo le sequenze $\{a_n\}$ generate dalla ricorrenza

$$a_{n+1} = Aa_n + Ba_{n-1}$$

con A, B parametri reali e a_n reali. L'equazione associata è $x^2 - Ax - B = 0$, con radici $\alpha, \alpha' = (A \pm \sqrt{A^2 + 4B})/2$ e vale la ancora la $a_n = p\alpha^n + q\alpha'^n$. Ci si può limitare al caso A, B, $D = A^2 + 4B$ diversi da zero (altrimenti si hanno sequenze banali). La sequenza ha periodo = K se $a_{n+K} = a_n$ per ogni n, cioè se $p\alpha^{n+K} + q\alpha'^{n+K} = p\alpha^n + q\alpha'^n$ e quindi $p\alpha^n(\alpha^K - 1) + q\alpha'^n(\alpha'^K - 1) = 0$.

Se fosse $\alpha^K - 1 \neq 0$ si avrebbe $(\alpha/\alpha')^n = -(p/q)(\alpha'^K - 1)/(\alpha^K - 1) = \text{cost.}$ per ogni n

da cui $\alpha = \alpha'$ cioè D = 0 (che abbiamo escluso). Pertanto deve essere $\alpha^K = \alpha'^K = 1$.

In funzione del discriminante $D = A^2 + 4B$ si hanno i due casi caso I . $D > 0$: radici α, α‘ reali e diverse

{an} non può essere periodica perché incompatibile, se A ≠ 0, con la $\alpha^K = \alpha'^K = 1$

- nel caso $A = B = a_1 = a_2 = 1$ si hanno i numeri di Fibonacci.

caso II. $D = A^2 + 4B < 0$ e quindi B < 0, con radici α, α‘ complesse coniugate date da $\alpha, \alpha' = (A \pm i\sqrt{-D})/2$ che si può scrivere $\alpha, \alpha' = \rho\cos\vartheta \pm \rho\sin\vartheta = \rho e^{\pm i\vartheta}$ ponendo

$A = 2\rho\cos\vartheta, \quad \sqrt{-D} = 2\rho\sin\vartheta, \quad \rho = \sqrt{\alpha\alpha'} = \sqrt{-B}$

La formula di Binet diventa $a_n = p\alpha^n + q\alpha'^n = \rho(pe^{in\vartheta} + qe^{-in\vartheta})$ o anche $a_n = R\cos(n\vartheta + \beta)$ con R, β opportuni (reali se gli a_n sono reali).

In coordinate cartesiane i valori a_n sono pertanto le ascisse dei punti P_n sul cerchio di raggio R centrato sull'origine, con angolo al centro $n\vartheta + \beta$.

Le sequenze precedenti sono periodiche con periodo K soltanto se $\alpha^K = \rho^K e^{iK\vartheta} = 1$, cioè se
- i. ρ = 1, cioè $B = -1$
- ii. $A = 2\cos\vartheta$ con ϑ limitato all'intervallo $0 < \vartheta < \pi$ dove $\sin\vartheta > 0$
- iii. $K\vartheta = 2\pi m$ con m : intero vincolato da
  - m : primo con K (altrim. il periodo si riduce)
  - $0 < m < K/2$ (per $0 < \vartheta < \pi$).

Pertanto m è limitato da $1 \leq m \leq \varphi(K)/2$ con $\varphi(K)$: funzione totiente di Euler.

La formula di ricorrenza $a_{n+1} = Aa_n - a_{n-1}$ dipende solo dal parametro A e in definitiva le sequenze reali periodiche possono essere definite da $a_n = R\cos(n\vartheta + \beta)$ dove $\vartheta = 2\pi m/K$ con m limitato dalle iii.

La sequenza è completamente determinata dai parametri (R, β, ϑ) oppure da (A, a_{-1}, a_1); i due gruppi possono essere trasformati uno nell'altro dalle relazioni

$A = 2\cos\vartheta$, $a_{-1} + a_1 = RA\cos\beta, \quad a_{-1} - a_1 = R\sqrt{4 - A^2}\sin\beta$.

I valori a_n sono le ascisse dei vertici del poligono regolare di K lati inscritto nel cerchio di raggio R centrato sull'origine, e ruotato dell'angolo β. (Nel caso di $m > 1$ il poligono è intrecciato - v. figure). Per l'arbitrarietà si R e β si può anche scrivere

tutte le sequenze con periodo K e valori a_n reali generate dalla ricorrenza $a_{n+1} = Aa_n - a_{n-1}$ si possono rappresentare con le proiezioni ortogonali Q_n su una retta qualsiasi dei vertici P_n di un poligono regolare di K lati (eventualmente intrecciato); il valore di a_n è la distanza Q_n - O, dove O è la proiezione del centro del poligono.

Una sequenza periodica può avere termini tutti interi solo se A è intera; per $D = A^2 - 4 < 0$ gli unici casi (escludendo il caso banale $A = \pm 2$) sono

$A = 1$ - è la sequenza del problema iniziale, di periodo $K = 6$

$A = -1$ - di periodo $K = 3$ (vale la $\cos(2\pi m/K) = -1/2$)

infatti $a_3 = -a_2 - a_1$, $a_4 = -a_3 - a_2 = a_1$, $a_5 = -a_4 - a_3 = a_2$ cioè $a_{n+3} = a_n$.

i due casi sono legati dalla trasformazione $a_n \to (-1)^n a_n$ (che cambia segno ad A).

Per i primi valori di K si ha

$K=3, \quad m=1, \quad A=2\cos(2\pi/3)=-1$

$K=4, \quad m=1, \quad A=2\cos(2\pi/4)=0$ sequenza banale $a_{2n+1}=(-1)^n a_1, \quad a_{2n}=(-1)^{n-1}a_2$

$K=5, \quad m=1, \quad A=1/\varphi=0.618...$ $m=2, \quad A=-\varphi=-1.618...$

- il periodo $K = 5$ si può verificare con la proprietà $\varphi^2=\varphi+1$, p.es. per $A=1/\varphi$ cioè per $a_{n+1}=a_n/\varphi-a_{n-1}$ si ha $a_3=a_2/\varphi-a_1$, $a_4=a_3/\varphi-a_2=-a_2/\varphi-a_1/\varphi$, $a_5=a_4/\varphi-a_3=-a_2+a_1/\varphi$, $a_6=a_5/\varphi-a_4=a_1$, $a_7=a_6/\varphi-a_5=a_2$.

$K=6 \quad m=1 \quad A=2\cos(2\pi/6)=1$ è la sequenza iniziale

$K=7 \quad m=1 \quad A=2\cos(2\pi/7)=1.246...$

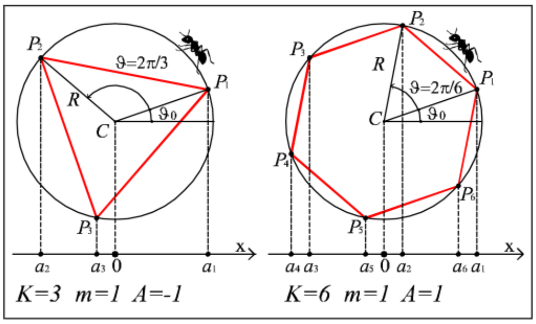
$m=2 \quad A=2\cos(4\pi/7)=-0.445...$

$m=3 \quad A=2\cos(6\pi/7)=-1.801...$

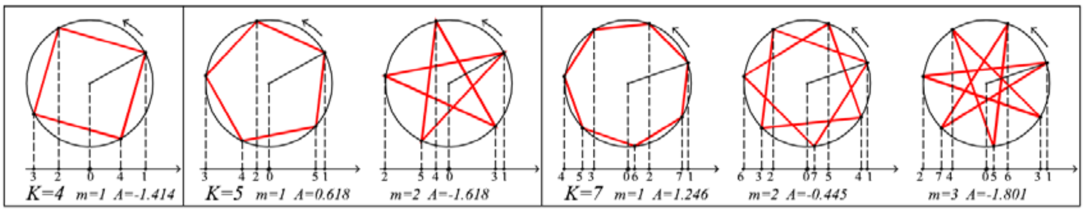
$K=8 \quad m=1 \quad A=\sqrt{2}=1.414...$

$m=3 \quad A=-\sqrt{2}=-1.414...$

Queste sequenze si possono rappresentare con diagrammi. La fig. 1 riporta i casi interi $K = 3$ e $K = 6$ (la formica parte da P_1 e ad ogni punto successivo lascia cadere a terra qualcosa (?); i punti di caduta forniscono i valori a_n). Nella fig. 2 sono riportate i diagrammi per $K = 4, 5, 7$. Al variare di m e fissati gli altri parametri, i valori degli a_n non cambiano, salvo una permutazione degli indici.



14 *La prima figura di* ***trentatre****, periodi K=3 e 6*



15 *La seconda figura di* ***trentatre****, periodi K=4, 5, 7*

Alice ha trovato la formichina deliziosa. ***Trentatre*** ha aggiunto nella mail:

Per non farla troppo lunga non ho incluso alcune considerazioni elementari sul caso delle sequenze reali limitate ma non periodiche, cioè rappresentate da $a_n = R\cos(n\vartheta+\beta)$ con ϑ frazione irrazionale di 2π. Che conducono al noto (?) "teorema dei tre gap" legato a cose interessanti (frazioni continue ecc.). Le tre pipe del problema mi sembrano giustificate.

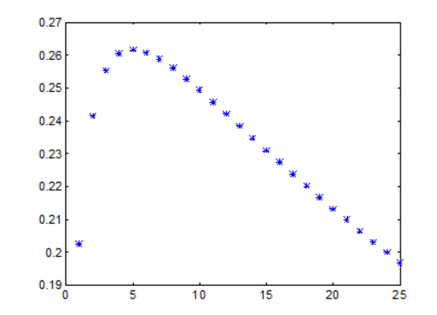
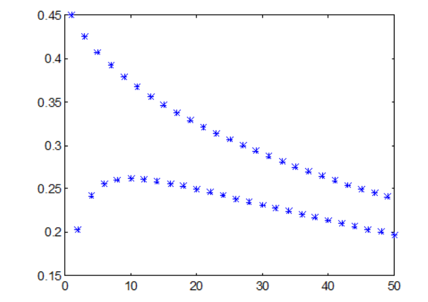
…che rovina un po' l'effetto della formichina, ma lo perdoniamo. E adesso basta, andiamo avanti.

5.1.2 Complicazioni di un vecchio problema

Cominciamo nel modo giusto, riprendendo il problema:

> *Riprendiamo un vecchio problema, il cui testo era:* Alberto ha scommesso che, giocando tre partite alternativamente contro Rudy e Fred, ne vincerà almeno due di seguito; con che ordine deve giocare contro i due, sapendo che Rudy gioca meglio di Fred?
>
> *Ringalluzzito da questa facile vittoria, Alberto si è lanciato in un'epica sfida contro Rudy, sfidandolo a* 2n *partite, sostenendo che nell'epico torneo avrebbe vinto almeno* n+1 *partite. Le probabilità che Alberto ha di vincere contro Rudy (sia con i bianchi sia con i neri) sono del* 45%, *quindi Rudy, per favorirlo, gli ha permesso di "scegliere lui il valore di n".*
>
> *Quale valore di n massimizza le sue (misere) probabilità di vittoria?*

Anche qui grazie a tutti: ***Stefano D.I.***, ***Alberto R.***, ***Millenium Bug***, ***Cid***, ***Franco57***, ***Gnugnu***, ***Silvano***. Quasi tutti sono giunti alla stessa formula risolutiva, trovando un n=5 (dieci partite), ma solo in pochi hanno provato a fare a meno di excel. Vediamo qualche conclusione interessante, cominciando da ***Millenium Bug***:

> Detta p=0.45 la probabilità di vincita della singola partita, la probabilità che Alberto vinca n+1 partite su 2n si calcola sommando tutte le probabilità che vinca h partite, con h da n+1 (difficile) a 2n (quasi impossibile):
>
> $$P = \sum_{h=n+1}^{2n} \binom{2n}{h} p^h (1-p)^{2n-h}$$
>
> (...)
>
> Dato che il problema mi dà l'autorizzazione alla forza bruta, ho calcolato a mano per i primi 3 termini e ho poi proseguito con mezzi informatici.
>
> Vediamo che c'è un massimo per n=5, ovvero giocando 10 partite, anche se per Alberto non si può dire che la situazione migliori gran ché. Si vede meglio il comportamento in funzione di n con un bel grafico.
>
> 
>
>
> 16 *Primo grafico di **Millenium Bug**.*
>
> Siccome vi piacciono le estensioni dei problemi, ho provato a considerare anche i casi in cui il numero delle partite è dispari. Supponiamo che in questo caso Alberto deve vincere "solo" n partite su 2n–1, ovvero la classica maggioranza.
>
> Mettendo insieme i due casi, trovo il grafico qui sotto (n.b. qui in ascissa c'è già il numero totale di partite e non n come sopra).
>
> 
>
>
> 17 *Secondo grafico di **Millenium Bug**.*
>
> Alberto sarebbe più favorito nel fare la singola partita secca che non subire la lenta agonia delle 2n partite; o almeno dovrebbe scommettere sulla maggioranza di un numero dispari di partite. E qui i conti non tornano.
>
> Ipotesi 1: Rudy è un infame e vuole infierire sul povero Alberto, per cui è in realtà lui che gli ha lasciato credere che con le n+1 su 2n avrebbe avuto più possibilità di vittoria

Ipotesi 2: Alberto non si è accorto che con la sua proposta risulta ancora più svantaggiato; in tal caso non credo che sarà nemmeno capace di ricavare il valore di *n* a lui più favorevole.

Sull'ipotesi di infamia del Capo non possiamo esprimerci, ma possiamo passarvi il commento di ***Alberto R.***, dopo aver trovato il risultato in forma numerica:

Questo risultato non è però accettabile in modo acritico. Constatiamo solo che la variabile *Avt* (Alberto vince il torneo), dopo aver raggiunto un massimo per $2N$=10, comincia a decrescere. Questo però non ci garantisce che, per grandi valori di *N*, *Avt* non ritorni a salire, e dimostrare che ciò non accade supera le mie capacità. Posso però addurre alcune argomentazioni che, se non provano l'assunto, sono validi indizi a suo favore.

La crescita di *N* produce per Alberto un vantaggio e uno svantaggio.

Un *vantaggio* perché decresce l'aliquota delle vittorie necessarie per vincere il torneo: 100% per *N*=2 75% per *N*=4 66.6% per *N*=6. Ma il vantaggio si esaurisce rapidamente: da 100 a 102 la percentuale subisce un calo irrisorio dal 51% al 50.98% e, comunque, il 50% costituisce un asintoto irraggiungibile.

Uno *svantaggio* perché la differenza tra la percentuale di vittorie occorrenti (>50%) e la percentuale attesa (45%) si mantiene superiore al 5%, mentre è noto (legge dei grandi numeri) che la probabilità di superare un prefissato scostamento percentuale rispetto al valore atteso, al crescere del numero *N* delle prove, tende a zero come l'inverso della radice di *N*. Questo svantaggio persiste e da un certo punto in poi, precisamente da $2N$=10, supera il vantaggio, bloccato dall'asintoto del 50%.

Infine, ecco arrivare ***Franco57***, con una bella dimostrazione:

Indicando con *p* è la probabilità di vincere una qualsiasi partita di un torneo di *m* partite, $p^h \cdot (1-p)^{m-h}$ è la probabilità di vincere *h* partite assegnate del torneo (ad esempio le prime *h*) e perdere le altre. Poiché abbiamo $\binom{m}{h}$ possibili modi di scegliere le *h* partite, la probabilità di vincere almeno *k* partite in un torneo di *m* è:

$$T_{m,k}(p) = \sum_{k \le h \le m} \binom{m}{h} \cdot p^h \cdot (1-p)^{m-h}$$

L'identità $T_{m,k}(p) = 1 - T_{m,m-k+1}(1-p)$ traduce l'affermazione che vincere almeno *k* partite equivale a dire che si perdono più *m-k* partite. La proprietà si può anche dedurre dalla formula tenendo presente che:

$$1 = (p + (1-p))^m = \sum_{0 \le h \le m} \binom{m}{h} \cdot p^h \cdot (1-p)^{m-h}.$$

Due utili casi particolari sono:

$$T_{m,m}(p) = \binom{m}{m} \cdot p^m \cdot (1-p)^0 = p^m \text{ e } T_{m,1}(p) = 1 - T_{m,m}(1-p) = 1 - (1-p)^m$$

C'è anche una formula ricorsiva per il calcolo di $T_{m,k}$ (quando non serve ometto l'argomento *p*) che deriva dal fatto che per vincere almeno *k* partite su *m* o si sono già vinte nelle prime *m*-1 partite, oppure se ne sono vinte *k*-1 e ne manca una che sarà vinta con la probabilità *p*:

$T_{m,k} = T_{m-1,k} + \left(T_{m-1,k-1} - T_{m-1,k}\right) \cdot p$.

Aggiungendo le condizioni al contorno diventa:

$T_{m,k} = p \cdot T_{m-1,k-1} + (1-p) \cdot T_{m-1,k} \qquad m > 0, k > 0$

$T_{m,0} = 1$

$T_{0,k} = 0 \qquad k > 0$ (o se si preferisce $T_{m,m} = p^m$)

formula ricorsiva che ricorda molto da vicino quella del coefficiente binomiale.

Una controprova della equivalenza delle due definizioni di $T_{m,k}$ si fa per induzione. Ci si chiede: per quali valori di p è più conveniente giocare un torneo di 2 partite anziché 4? Quando $T_{2,2} > T_{4,3}$ vale a dire

$$T_{2,2} - T_{4,3} = \binom{2}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^0 - \binom{4}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^1 - \binom{4}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)^0 =$$
$$= p^2 - 4 \cdot p^3 \cdot (1-p) - p^4 = p^2 \cdot (1-p) \cdot (1-3p) > 0$$

Quindi, essendo p e (1-p) positivi o nulli, per $p < \frac{1}{3}$.

Con un calcolo analogo si vede che $T_{4,3} - T_{6,4} = 2p^3 \cdot (1-p)^2 \cdot (2-5p)$ e dunque conviene un torneo di 4 piuttosto che un torneo di 6 se $p < \frac{2}{5}$.

Dunque studiamo la differenza $D_{m,k} = T_{m,k} - T_{m+2,k+1}$.

Innanzi tutto si nota che la formula ricorsiva delle *T* si ripercuote pari pari sulle *D*, infatti per *m* e *k* positivi:

$$D_{m,k} = T_{m,k} - T_{m+2,k+1} = \left(p \cdot T_{m-1,k-1} + (1-p) \cdot T_{m-1,k}\right) - \left(p \cdot T_{m+1,k} + (1-p) \cdot T_{m+1,k+1}\right) =$$
$$= p \cdot \left(T_{m-1,k-1} - T_{m+1,k}\right) + (1-p) \cdot \left(T_{m-1,k} - T_{m+1,k+1}\right)$$
$$= p \cdot D_{m-1,k-1} + (1-p) \cdot D_{m-1,k}$$

Poi calcoliamo la *D* nei casi al contorno, per *k* nullo:

$$D_{m,0} = T_{m,0} - T_{m+2,1} = 1 - \left(1 - (1-p)^{m+2}\right) = (1-p)^{m+2},$$

e per $k = m+1$:

$$D_{m,m+1} = T_{m,m+1} - T_{m+2,m+2} = 0 - p^{m+2} = -p^{m+2}.$$

Non senza fatica, si scopre la seguente formula dove come per magia scompaiono tutte le sommatorie nelle *T*:

$$\boxed{D_{m,k} = p^k \cdot (1-p)^{m+1-k} \cdot \left(\binom{m}{k} - \binom{m+1}{k} \cdot p\right)}$$

ma la dimostrazione per induzione su *m* non è difficile. Chiamiamo $D'_{m,k}$ la formula a destra. Vediamo prima che vale nei casi al contorno:

$$D'_{m,0} = p^0 \cdot (1-p)^{m+1} \cdot \left(\binom{m}{0} - \binom{m+1}{0} \cdot p \right) = (1-p)^{m+2} = D_{m,0}$$

$$D'_{m,m+1} = p^{m+1} \cdot (1-p)^0 \cdot \left(\binom{m}{m+1} - \binom{m+1}{m+1} \cdot p \right) = p^{m+1} \cdot (-p) = -p^{m+2} = D_{m,m+1}$$

e infine supponendo vero $D_{r,k} = D'_{r,k}$ per gli $r < m$:

$$D_{m,k} = p \cdot D_{m-1,k-1} + (1-p) \cdot D_{m-1,k} =$$

$$= p \cdot \left(p^{k-1} \cdot (1-p)^{m+1-k} \cdot \left(\binom{m-1}{k-1} - \binom{m}{k-1} \cdot p \right) \right) + (1-p) \cdot \left(p^k \cdot (1-p)^{m-k} \cdot \left(\binom{m-1}{k} - \binom{m}{k} \cdot p \right) \right) =$$

$$= p^k \cdot (1-p)^{m+1-k} \cdot \left(\left(\binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k} \right) - \left(\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} \right) \cdot p \right) =$$

$$= p^k \cdot (1-p)^{m+1-k} \cdot \left(\binom{m}{k} - \binom{m+1}{k} \cdot p \right) = D'_{m,k}$$

Poiché $\dfrac{\binom{m}{k}}{\binom{m+1}{k}} = 1 - \dfrac{k}{m+1}$, otteniamo un risultato molto semplice: $T_{m,k} > T_{m+2,k+1} \Leftrightarrow p < 1 - \dfrac{k}{m+1}$, cioè è maggiormente probabile vincere k partite su m piuttosto che k+1 partite su m+2 se e solo se la probabilità di perdere una partita è maggiore di k / (m+1).

Il torneo a m=2n partite è dunque più conveniente del torneo a m=2n+2 partite quando $p < 1 - \dfrac{n+1}{2 \cdot n+1} = \dfrac{n}{2 \cdot n+1}$. Questi valori tendono crescendo a ½ e in particolare abbiamo che il torneo più conveniente è quello a 2n partite se $\dfrac{n-1}{2 \cdot n-1} < p < \dfrac{n}{2 \cdot n+1}$.

Ricavando n da p (occorre supporre che sia inferiore a ½) otteniamo che il torneo più conveniente è di $2 \cdot \left\lceil \dfrac{1-p}{1-2 \cdot p} \right\rceil$ partite. Ad esempio per p=45% il torneo più conveniente è di 10 partite.

Ancora una nota, la cattiveria di ***Gnugnu***:

> Non pago del buon vantaggio, Rudy elargisce, magnanimamente, avvertimenti che appaiono più fuorvianti che gratuiti. Probabilmente l'ostentata passione per il fumo della pipa nasconde solamente il tentativo di mascherare, alla vista ed all'olfatto altrui, l'effluvio sulfureo della sua parte diabolica.

Sospettiamo che possa rendere il GC fin troppo orgoglioso. E con questo concludiamo il nostro riassunto. Al mese prossimo!

6. Quick & Dirty

Scopo di questo Q&D è dimostrare che se qualcosa sembra complicata, forse è facile.

Dimostrare che l'equazione:

$$x^5 + y^5 + 2 = (x+1)^5 + (y+2)^5$$

non ha soluzioni intere.

> *Se x e y hanno la stessa parità, allora il primo membro è pari, mentre il secondo membro è dispari. Se x e y hanno diversa parità, allora il primo membro è dispari, mentre il secondo membro è pari. Da cui, la tesi.*

7. Pagina 46

Dimostriamo (in modo generale) l'affermazione ricavata dal Teorema di Eulero che è premessa al problema.

> Il Teorema di Eulero sostiene se N è un numero naturale e r è il numero degli interi nella sequenza $1,2,3,\ldots,N-1$ che sono primi rispetto ad N e se a è un intero primo rispetto ad N, allora $a^r - 1$ è divisibile per N.
>
> Se $N = p^n$, dove p è un numero primo, allora tra i primi $N-1 = p^n - 1$ interi positivi quelli non primi con $N = p^n$ saranno $p,2p,3p,\ldots,N-p = (p^{n-1}-1)p$; quindi otteniamo $r = (p^n - 1) - (p^{n-1} - 1) = p^n - p^{n-1}$, e dal Teorema di Eulero si ricava il seguente corollario: la differenza $a^{p^n} - a^{p^{n-1}} - 1$, dove p è primo e a non è divisibile per p, è divisibile per p^n.

Proviamo l'affermazione del problema per induzione: per prima cosa, è evidente che per $n = 1$ l'affermazione è corretta: $2^1 - 1$, $2^2 - 1$, $2^3 - 1$ non sono divisibili per 5.

Verifichiamo ora che vale anche per $n = 2$: sia 2^k la più piccola potenza di 2 che produce un resto pari a 1 quando viene divisa per $5^2 = 25$, ossia k è tale che $2^k - 1$ sia divisibile per 25.

Ora, assumiamo sia $k < 5^2 - 5 = 20$; se 20 non è divisibile per k, ossia se è $20 = qk + r$, con $0 < r < k$, allora abbiamo:

$$\begin{aligned} 2^{20} - 1 &= 2^{qk+r} - 1 \\ &= 2^r\left(2^{qk} - 1\right) + \left(2^r - 1\right). \end{aligned}$$

Ma per il Teorema di Eulero $2^{20} - 1$ è divisibile per 25, e $2^{qk} - 1 = \left(2^k\right)^q - 1^q$ è divisibile per $2^k - 1$ che, per ipotesi, è anche divisibile per 25, il che è in contraddizione con l'assunto che k sia il più piccolo numero per cui $2^k - 1$ è divisibile per 25. Quindi, k deve essere un divisore di 20, ossia può solo essere 2, 4, 5 o 10; però $2^2 - 1 = 3$, $2^4 - 1 = 15$, $2^5 - 1 = 31$, $2^{10} - 1 = 1023$ non sono divisibili per 25: quindi il teorema vale per $n = 2$.

Supponiamo ora che la proposizione sia valida per un qualche n ma non sia valida per $n+1$, ossia il più piccolo k tale che $2^k - 1$ sia divisibile per 5^{n+1} sia minore di $5^{n+1} - 5^n = 4 \cdot 5^n$; possiamo mostrare, esattamente come abbiamo fatto sopra per $n = 2$, che k deve essere un divisore del numero $4 \cdot 5^n$.

Analogamente, possiamo anche mostrare che $4 \cdot 5^n$ deve essere un divisore di *k*.

Se fosse vero che $k = q \cdot 4 \cdot 5^{n-1} + r$, con $0 < r < 4 \cdot 5^{n-1}$, allora $5^r - 1$ sarebbe divisibile per 5^n, il che contraddice l'ipotesi che la proposizione posta sia valida per il numero *n*; quindi l'unico valore possibile è $k = 4 \cdot 5^{n-1}$.

Siccome il numero $2^{5^{n-1}-5^{n-2}} - 1 = 2^{4 \cdot 5^{n-2}} - 1$ è, per il Teorema di Eulero, divisibile per 5^{n-1} e non è divisibile per 5^n (in caso contrario l'ipotesi non sarebbe vera per *n*), allora $2^{4 \cdot 5^{n-2}} = q \cdot 5^{n-1} + 1$, dove q non è divisibile per 5. Ricordando l'espansione della quinta potenza del binomio

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5,$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} 2^{4 \cdot 5^{n-1}} - 1 &= \left(2^{4 \cdot 5^{n-2}}\right)^5 - 1 \\ &= \left(q \cdot 5^{n-1} + 1\right)^5 - 1 \\ &= 5^{n+1}\left(q^5 \cdot 5^{4n-6} + q^4 \cdot 5^{3n-5} + 2q^3 \cdot 5^{2n-4} + 2q^2 \cdot 5^{n-3}\right) + q \cdot 5^n, \end{aligned}$$

da cui è chiaro che $2^{4 \cdot 5^{n-1}} - 1$ non è divisibile per 5^{n+1}; quindi la verità della proposizione per *n* ne implica la validità per $n+1$, ed è quindi valida per qualsiasi valore di *n*.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Estote Parati

…nel senso *noi* che siamo *sicuri* di essere in anticipo sull'evento. Per il semplice motivo che noi i conti li abbiamo già fatti.

Questa volta, se la prendiamo alla lontana, la prendiamo alla lontana *davvero*: volendo, possiamo cominciare 4770 anni fa, ma la cosa rischia di diventare piuttosto lunga; quindi, una volta tanto, affrontiamo il problema direttamente.

Quante volte, verso Capodanno, ci siete cascati alla solita battuta: "Ragazzi, quest'anno niente 'ponte', Pasqua cade di domenica."?

Ecco, quando è Pasqua?

La risposta più semplice è: "Guardo sul calendario".

Una risposta meno immediata è: "Guardo sul calendario".

La risposta esatta (ma anche la più complessa) è: "Guardo sul calendario".

Partiamo da quella semplice: sul calendario, la Pasqua è sempre segnata. Qualcuno, però, deve averla calcolata, e quindi un metodo deve esserci: infatti, il metodo meno immediato è la definizione "classica" (e quasi corretta) della Pasqua.

"Pasqua" è la domenica successiva alla prima luna piena successiva all'equinozio di primavera.

Cominciamo con l'eliminare qualche caso particolare: i due "successiva" significano che se cadono proprio quel giorno, prendete il caso successivo: ossia, se avete luna piena all'equinozio di primavera ed è domenica, passate alla luna successiva; è intuitivo che questo è il caso che vi fa finire la Pasqua "più in là possibile" nel calendario, visto che aggiunge (quasi) un intero mese lunare alla data minima; per sfoggiare la nostra abilità di calcolo, che speriamo riuscirete a condividere prima della fine di questo pezzo, vi diciamo subito che l'ultima volta che c'è stato un caso del genere era il 1943, mentre il prossimo sarà nel 2038.

Dicevamo, "quasi" corretta: infatti, il definire *a priori* una luna piena non è facile. Non solo, ma anche l'equinozio di primavera può cadere il 21 o 22 marzo, e quindi avete un'altra variabile. Per questo si introduce la cosiddetta "luna ecclesiastica", che definisce d'autorità il periodo ben definito e permette di fare dei calcoli ragionevolmente esatti, oltre a un "equinozio ufficiale" che cade sempre il 21 marzo, punto e basta.

La prima domanda è: perché stabilire una data in un modo così complesso? A ben vedere, questa è l'*unica* data che venga stabilita in questo modo dalla Chiesa[20]; per quale motivo non si usa una data ben precisa?

Semplice: perché la data che conosciamo *è legata alla Luna*; o meglio, è legata ad un calendario che è, principalmente, lunare.

Dai Vangeli si vede che il giorno della Resurrezione è una domenica; procedendo a ritroso alla ricerca di una data, si vede (ad esempio Mt 26:17) che l'Ultima Cena è "il primo giorno degli Azzimi", ossia il giorno precedente la festività ebraica della *Pesach*[21]: in ebraico significa "passare oltre", per ricordare che, nella decima piaga d'Egitto, l'angelo

[20] Nel senso che le altre feste mobili dipendono tutte dalla posizione della Pasqua

[21] Più nota, in pessime traduzioni dall'inglese di autori che ne parlano, come il *Passover*: dal seguito, risulta evidente il motivo del termine inglese. "Pasqua" deriva da questo termine. Visto che parliamo di inglese, *Easter* etimologicamente non c'entra niente con la Pasqua: deriva da *Ostar(a)*, il nome della rappresentazione celtica della Primavera (dubbi se l'originale sia maschile o femminile, ma riteniamo la cosa di scarsa importanza).

sterminatore vide sulle porte delle case d'Israele il sangue dell'agnello sacrificale e "passò oltre", uccidendo i primogeniti maschi delle case non segnate, ossia degli egiziani.

Quindi, il calendario su cui si basa il calcolo della Pasqua è il calendario *ebraico*, ossia un calendario "*lunisolare*". Cerchiamo di chiarire il concetto.

In primis, adesso dovreste aver capito la battuta del "prenderla alla lontana": l'origine del calendario ebraico è fissata nell'autunno del 3760 AC; la prima complicazione è che l'anno 1 (non esiste l'anno zero) dura meno di una settimana, quindi pochi giorni dopo entriamo nell'anno 2. Sorvoliamo comunque su questo particolare.

Nella definizione di Rudy, il calendario ebraico è un calendario "serio", in quanto lunisolare; infatti cerca (come tutti i calendari secondo lui "seri") di adattare il ciclo lunare, detto anche *mese*[22] al ciclo solare; la cosa non è facilissima, ma con la sola eccezione dei Romani e di buona parte del mondo moderno, ci sono arrivati praticamente tutti[23]. Ci fosse un modo che va d'accordo con l'altro… ma il mondo è bello perché è vario.

Con ordine: gli anni "normali" hanno 353, 354 o 355 giorni se sono composti di 12 mesi, mentre ne hanno 383, 384 o 385 se sono composti di 13 mesi; negli anni di 12 mesi, le lunghezze di 29 e 30 giorni si alternano (il che, mette a posto quello scomodissimo "un mezzo" dei 29,5 giorni del mese lunare). Attenzione che, come per i calendari celtico e islamico, il "giorno" comincia al calare del sole (…o alla comparsa delle prime tre stelle, ma non staremo a sindacare: anche perché Giove, Marte, Venere e Mercurio – per quelli con la vista buona – possono causare notevoli danni), e il mese inizia alla luna nuova, o meglio quando comincia a vedersi un pochino di luna.

E qui cominciano i guai, perché bisogna capire anche *di quale luna parlate*, o meglio di dove la guardate: per il calendario ebraico fa fede il vedere la luna a Gerusalemme (o meglio, anziché "il tramonto" si usano le 18:00, ora locale di Gerusalemme: 15:39 UTC), ma sono ammesse approssimazioni (giustappunto, le tre diverse durate dell'anno); per il calendario islamico, ad esempio, la cosa è invece fondamentale e fa fede la luna della Mecca[24].

Ecco, su tutto questo si basa il calcolo della Pasqua.

Secondo i Vangeli, Gesù morì il venerdì all'inizio della Pesach e risorse la domenica successiva; considerato che il giorno nel calendario ebraico inizia con il tramontare del sole (o la visibilità delle tre stelle), non è chiaro se la morte avvenne *immediatamente prima* o *immediatamente dopo* l'inizio della Pesach; ora, la Pesach inizia il 15 di *Nisan*, ossia al sorgere della luna piena (visto che *Nisan* dura sempre 30 giorni) e non è chiaro, a questo punto, se la morte di Gesù sia avvenuta il 14 o il 15 del mese: la cosa, se definita, permetterebbe di stabilire piuttosto facilmente l'anno, in quanto basterebbe trovarne uno per cui il 15 di *Nisan* cada di venerdì.

---

[22] …e qui cascano i calendari "poco seri": il primo *parvenu* che passa, solo perché si chiama Giulio o Augusto e di professione fa l'imperatore romano, vuole averlo più lungo – il mese! – degli altri, e butta all'aria tutto… molto di più sul calendario si trova nel PM di RM043 e nel compleanno di Newton, RM071.

[23] Ci riferiamo a Cinesi (di cui parliamo nel PM di RM123), Ebrei, Celti, Egizi,… e chi più ne ha più ne metta. Qualche dubbio sui Maya, ma per quel calendario scriveremo un articolo sul numero 168 (se non abbiamo sbagliato i conti…). Sui Greci, se non bastasse "Le Opere e i Giorni" di Esiodo, dai "gialli" di Margaret Doody ci pare di ricordare una notevole "lunaticità" (sono quelli di Aristotele detective… Se non li avete letti, mollate tutto e filate in libreria! Edizioni Sellerio).

[24] Non per campanilismo, ma forse i Celti avevano trovato il modo migliore: il loro anno cominciava con una luna nuova (dalle parti di quello che oggi è il primo novembre) e, per essere sicuri di non sbagliare, facevano festa tre notti: una luna nuova, a quel punto, la centravano di sicuro anche se erano sbronzi come caproni. Per chi ha ricordi classici, la festa è il *Trinox Samonis* che compare nel *De Bello Gallico*. Non date retta a quel contaballe di Strabone (quello del falcetto d'oro e del vischio, mai provato a tagliarne un rametto?): tutta propaganda di regime.

Insomma, la Luna è decisamente importante, per il calcolo. E qui ci viene in aiuto il fatto che in 19 anni ci stanno quasi 235 lunazioni (se volete essere precisi: 234,997: per il momento non curiamocene), quindi ci aspettiamo una ripetizione ogni 19 anni; il sapere a che punto siamo in questo ciclo è talmente importante per il calcolo della Pasqua che ad esso è associato un nome particolare: il numero d'ordine di un anno nel ciclo metonico è noto come ***Numero d'Oro***: prendete l'anno, dividete per 19, tenete il resto e aggiungete 1; fatto.

Se considerate un calendario Giuliano, a questo punto il gioco è fatto; sapete benissimo dove sono le lune piene dalle parti dell'equinozio di primavera, per un dato anno, e si ripeteranno identiche ogni 19 anni; casomai vi interessasse, la sequenza sarebbe 5/4, 25/3, 13/4, 2/4, 22/3, 10/4, 30/3, 18/4, 7/4, 27/3, 15/4, 4/4, 24/3, 12/4, 1/4, 21/3, 9/4, 29/3, 17/4; guardate dove siete nel ciclo metonico e prendete la domenica successiva alla data opportuna (sempre valido il fatto che se uno di questi giorni è di domenica, prendete la domenica successiva).

…Qualcuno se n'è accorto, che abbiamo detto "Giuliano"? Infatti, con la riforma Gregoriana del calendario cominciano le complicazioni: tanto per cominciare, ci si accorge che il ciclo metonico non è esatto, e che le cose si complicano per quanto riguarda i calcoli; comunque, non anticipiamo troppo.

Un altro termine fondamentale per il calcolo della Pasqua è la cosiddetta ***Epatta***, che non è altro che l'età della Luna (ossia, quanti giorni sono passati dalla Luna Nuova) a una certa data; ormai, dovreste aver capito che anche qui c'`e da litigare, e infatti non c'è accordo sulla data nella quale misurare l'Epatta: nel calendario Giuliano seguito dalla Chiesa Ortodossa si misura il 22 marzo, mentre in quello Gregoriano si misura il primo gennaio.

"Beh, basta mettersi d'accordo…" Già, peccato che tra queste due date possa esserci di mezzo il 29 febbraio, che è punto di discussione tra il calendario Ortodosso e quello Cattolico[25].

Per semplificarci la vita, partiamo dal calendario Giuliano, e supponiamo che il periodo metonico ci "stia giusto" (ossia ci siano esattamente 235 lunazioni); a questo punto, l'Epatta E, se G è il Numero d'Oro e A l'anno, diventa uguale a:

$$\begin{aligned} E &= (11 * (G-1)) \bmod 30 \\ &= (11 * (A \bmod 19)) \bmod 30 \end{aligned} \qquad \texttt{[1]}$$

Se a qualcuno la formula sembra "strana", complimenti; infatti, l'Epatta non assume tutti i valori tra 0 e 29, ma solo alcuni; posto che vi interessi, questi sono 1, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 20, 22, 23, 25, 26, 28, 30.

Uh oh… dimenticato di dire una cosa. Ve ne siete accorti? Già, se vi viene zero, mettete il valore 30.

Bene, adesso complichiamo: nel calendario Gregoriano, bisogna tenere il conto dei bisestili "strani" e del fatto che il ciclo metonico, come dicevamo, non è esatto. Quindi, per prima cosa calcoliamo l'Epatta Giuliana, con il metodo visto in `[1]`, e poi correggiamo attraverso la cosiddetta "***Equazione Solare***" S:

$$S = \frac{3 * \sec}{4}$$

[25] Veloce aggiornamento in merito: vi ricordiamo che il calendario Ortodosso riconosce(va) come bisestile un anno su quattro, tranne tutti quelli divisibili per 100, mentre quello Gregoriano ammette tra i bisestili quelli divisibili per 400. Recentemente (1920: da cui il "va" tra parentesi), c'è stata la proposta di inserire una "regola del 400": siccome quella di Gregorio sembrava troppo semplice, quella proposta era "Qualsiasi anno che diviso per 900 da' un resto di 200 o 600, è bisestile": al momento, non abbiamo ben chiaro chi lo abbia adottato o no: ci pare comunque che ci sia un po' di tempo per decidere…

dove con "sec" abbiamo indicato il ***secolo*** (quasi[26]); questo mette d'accordo i calendari Gregoriano e Giuliano (definizione pre-1920).

Bene, messo a posto il Sole, dobbiamo mettere a posto la Luna: quindi, "***Equazione Lunare***":

$$L = \frac{(8 * \sec) + 5}{25}.$$

E questo (finalmente) mette a posto il periodo metonico: adesso, ci sta giusto.

Quindi, l'***Epatta Gregoriana*** diventa:

$$E = [(11 * (A \bmod 19)) \bmod 30] - S + L + 8,$$

dove l'espressione tra parentesi quadre è l'Epatta Giuliana (vista prima in [1]) e il termine "8" serve a mettere d'accordo le condizioni iniziali.

Piccolo guaio, subito risolto: se viene maggiore di 30 o minore di 1, aggiungete o sottraete 30 sin quando non viene un valore compreso tra 1 e 30; notiamo incidentalmente che questa Epatta può assumere *qualsiasi* valore nell'intervallo.

A questo punto, per le diverse Epatte, possiamo calcolare le diverse date della Pasqua, o almeno stabilire dei punti fermi: le lune nuove saranno, per i diversi valori di Epatta… Meglio una tabella, forse. La trovate qui sotto.

Epatta	L. Piena
1	12 aprile
2	11 aprile
3	10 aprile
4	9 aprile
5	8 aprile
6	7 aprile
7	6 aprile
8	5 aprile
9	4 aprile
10	3 aprile

Epatta	L. Piena
11	2 aprile
12	1 aprile
13	31 marzo
14	30 marzo
15	29 marzo
16	28 marzo
17	27 marzo
18	26 marzo
19	25 marzo
20	24 marzo

Epatta	L. Piena
21	23 marzo
22	22 marzo
23	21 marzo
24	18 aprile
25	18-17 apr
26	17 aprile
27	16 aprile
28	15 aprile
29	14 aprile
30	13 aprile

Pasqua risulta allora essere la domenica successiva alla data indicata; attenzione, che ha l'aria ingannevolmente semplice: infatti, l'epatta 25 ha *due* date, e la scelta non è facile. La regola originale prevede, infatti, di scegliere il 18 aprile, *a meno che* nel secolo in corso ci siano anni con Epatta pari a 24, nel qual caso si sceglie il 17.

Cervellotica? Sì, certo. Per fortuna esiste una regola equivalente più semplice: basta, infatti, verificare il valore del Numero d'Oro; se $G > 11$ si sceglie 17 aprile, altrimenti si va sul 18. Lasciamo come (assolutamente non) semplice esercizio al lettore dimostrare l'equivalenza di queste regole.

Coraggio, manca ancora l'ultimo passo (anzi due, ma fanno la stessa strada). Sia nel calcolo della Pasqua Ortodossa sia in quella calcolata sul calendario Gregoriano, abbiamo inserito l'insidiosa frase: "…la domenica successiva a questa data…" Il che significa che, per prima cosa, dovete capire *che giorno è quello lì*, secondo entrambi i calendari. Qui ci limitiamo a fornire le formule visto che ormai dovreste sapere come sono calcolati i bisestili; per quanto riguarda le divisioni, si prende come al solito solo la parte intera.

Una parte è in comune, poi si differenzia:

[26] Nel senso che vale 20 tra il 1900 e il 1999: il che non coincide con la definizione corretta di "secolo", ma ci serve contarlo in questo modo.

$$a = \text{anno}$$
$$m = \text{mese}$$
$$g = \text{giorno}$$

$$A = \left\lfloor \frac{14 - m}{12} \right\rfloor$$
$$Y = a - A$$
$$M = m + 12A - 2$$

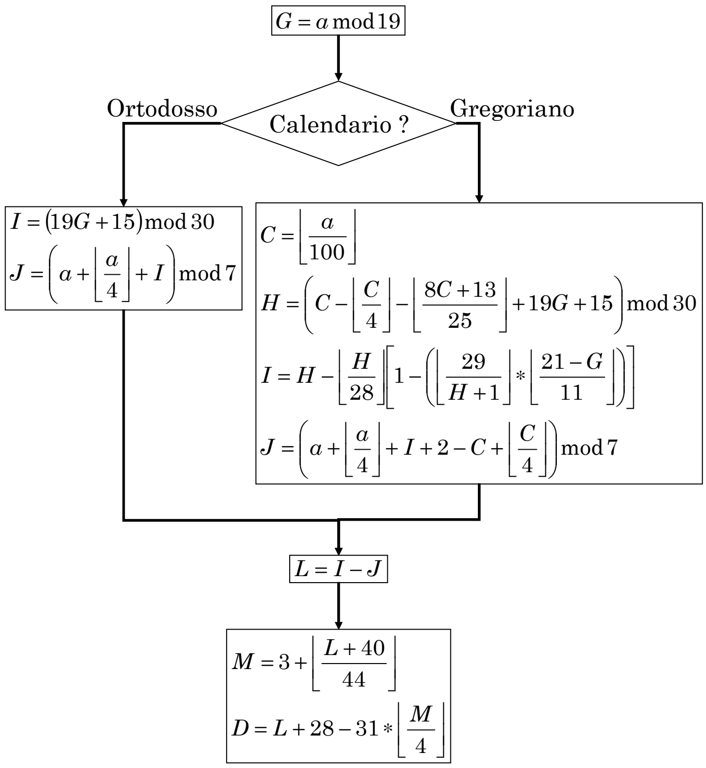
Adesso, per il ***Calendario Giuliano***:

$$D = \left(5 + g + Y + \left\lfloor \frac{Y}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{31M}{12} \right\rfloor \right) \bmod 7$$

Invece, per il ***Calendario Gregoriano***:

$$D = \left(g + Y + \left\lfloor \frac{Y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{Y}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{31M}{12} \right\rfloor \right) \bmod 7$$

Attenzione che vi danno il valore "all'americana" (nel senso che domenica vale 0, lunedì vale 1,…).



Pasqua cade il giorno ***D*** del mese ***M***.

18 *Pasqua, finalmente!*

"…Ma quando è Pasqua, allora?" Semplice: mettendo assieme tutti i conti che abbiamo fatto sinora, dovreste ottenere i due metodi di calcolo che trovate nel diagramma di flusso qui di fianco, che non è difficile, tra l'altro, da inserire in un file excel e ottenere una tabella che vi permetta di calcolare le date della Pasqua dell'anno che volete.

"Rudy, sono sicuro che esiste un metodo più semplice…" Adesso possiamo ammetterlo: vero, c'è un metodo più semplice, ma a noi non è molto simpatico (forse perché l'ha inventato Gauss… L'avesse inventato Eulero, ci sarebbe simpaticissimo); ne trovate una (brutta) spiegazione sul solito *Ghersi*[27] (che, una volta tanto, non la copia da Lucas) e una (questa

[27] "Matematica dilettevole e curiosa", Ed. Hoepli. Pagina 758 della nostra edizione

bellissima e decisamente esaustiva) nell'articolo di ***Lorenzo Perogio*** sul numero 10 di *Matematicamente Magazine* (http://www.matematicamente.it: articolo 119, se non riuscite a trovare il PDF); siccome abbiamo ampiamente saccheggiato parte di quella di MaMa, nel seguito vi riassumiamo quella del Ghersi.

Anni	*m*	*n*
1583-1699	22	2
1700-1799	23	3
1800-1899	23	4
1900-1999	24	5
2000-2099	24	5
2100-2199	24	6
2200-2299	25	0
2300-2399	26	1
2400-2499	25	1

Stabiliamo m e n secondo la tabella indicata qui a fianco.

Poi, partiamo con i conti:

1. Dividiamo per 4, 7 e 19 l'anno del quale vogliamo calcolare la Pasqua, indicando con a, b, c i rispettivi resti *[…quei tre numeri dovreste conoscerli…]*.
2. Dividiamo $19c + m$ per 30 e sia d il resto della divisione.
3. Dividiamo $2a + 4b + 6d + n$ per 7 e sia e il resto della divisione.

Allora, la Pasqua cade il $22 + d + e$ di marzo o, se questa somma supera 31, il $d + e - 9$ di aprile.

A questo punto, il Ghersi spiega che esistono due eccezioni (le spiega anche Lorenzo, ma la versione del Ghersi ci pare possa stimolarvi maggiormente a cercare l'articolo su MaMa, per la parte indicata in corsivo):

1. Se si ottiene come risultato il 26 aprile con $d = 29$ e $e = 6$ (*come accadrà nel* 1891), bisogna retrocedere la data al 19 aprile.
2. Se si ottiene come risultato il 25 aprile, sempre che $c < 10$, $d = 28$, $e = 6$ (*come si verificherà per il* 1954), la data va retrocessa al 18 aprile.

Lorenzo, in effetti, trova degli esempi nel *nostro* futuro, non in quello del Ghersi…

"Rudy, quest'anno mi viene ad aprile… Perché pubblicate questo articolo a marzo?"

Semplice: neanche Gauss riesce a determinare *a priori* quando uscirà il prossimo numero di RM, quindi, "Buona Pasqua" ve la auguriamo adesso. Non è detto che si esca prima, col prossimo numero…

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms