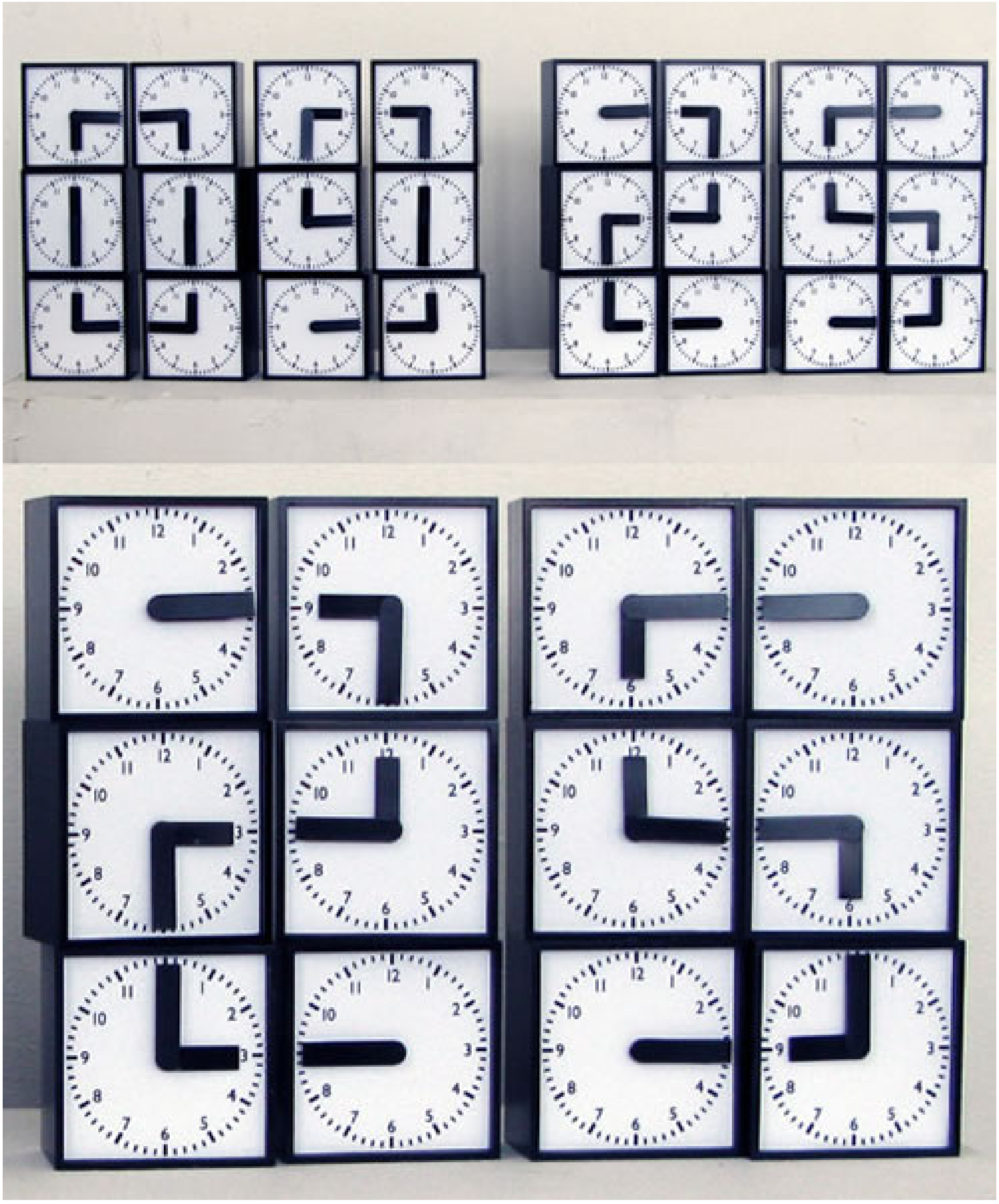
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 131 – Dicembre 2009 – Anno Undicesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM130 ha diffuso 2482 copie e il 29/11/2009 per Google eravamo in 9'950 pagine.

È facile vedere che questo aggeggio non riesce ad indicare *tutte* le ore (e potreste calcolare quale sia la sua [im]precisione), ma dovrebbe farcela ad indicare il momento di Capodanno. Intanto, visto che avete un mese di tempo, potreste rispondere anche alla domanda: "*Ma è analogico o digitale*?". Se riuscite a scoprire il nome dell'autore *non* ditecelo, per favore…

Premessa

La redazione di RM è gelosa. Non nel senso comune di gelosia verso i propri partner sentimentali (o, perlomeno, *non solo* in quel senso): ma è gelosa dei propri ruoli e delle proprie abitudini. Più o meno, ogni sezione della rivista ha il suo nume tutelare in un preciso redattore, e difficilmente si accettano variazioni di competenza. Nella storia decennale della Rivista, gli inserimenti esterni in rubriche fisse sono davvero poche: rammentiamo un celebre *compleanno* sulla Storia della Cubica lasciato alla penna di *Dario Bressanini*, nel lontano RM064, e, più recentemente (RM122), un *PM* sul Triangolo di Pascal scritto da *Maurizio .mau. Codogno*. Ci sono anche state altri articoli ospitati sulle pagine di RM, ma in genere al di fuori delle rubriche canoniche. Non possono esserci altre spiegazioni razionali: è proprio tutta questione di gelosia. Gelosia che però, quantomeno, rende bene l'idea di quanto debba considerarsi eccezionale l'evento della *guest star* all'interno della Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa; eppure, questo numero 131 rinnova la straordinarietà, lasciando a ***Luigi Amedeo Bianchi*** il compito di aprire la rivista con un compleanno "esterno". Non vi anticipiamo il nome del matematico destinatario di tanto onore, tanto si scopre in fretta: in cambio, vi diciamo che Luigi Amedeo, che giocando con le sue iniziali e le sue passioni ha scelto come allonimo l'intrigante L.A.Bachevskij (spesso da noi crudelmente abbreviato in *Loba*) ci segue ormai dal 2003. Più della metà della vita di RM: eravamo più giovani, a quel tempo, e Luigi Amedeo, pur avendo fin da allora il cognome d'un grande matematico, non era ancora tale. Col tempo, invece, lo è diventato: anzi, a sentir lui, quel che è diventato è "*…un matematico applicato alla risoluzione di rompicapo, alla visione di serie tv un po' geek e alla lettura. Come direbbe Paperon de Paperoni: un mangiapane a ufo. E per quanto riguarda il primo punto, la colpa/il merito è anche di RM, che mi ha spinto su questa perigliosa strada anni fa."*

Colpa/merito, dice il nostro Loba, lasciando aperta la scelta. Noi, davvero lusingati di fronte a cotanto riconoscimento, non dubitiamo affatto che si tratti di merito; ma il bello è che, se anche si trattasse di colpa, ne andremmo comunque fierissimi.

1. Alle urne!

"[...] non nel soggetto del quadro o nella tecnica del pittore sta la difficoltà del puzzle, ma nella sapienza del taglio, e un taglio aleatorio produrrà necessariamente una difficoltà aleatoria […]
L'arte del puzzle inizia con i puzzle di legno tagliati a mano quando colui che li fabbrica comincia a porsi tutti i problemi che il giocatore dovrà risolvere [...]"
(Georges Perec)

Migliaia di tessere che, una dopo l'altra, vanno a inserirsi al loro posto per restituire finalmente l'immagine nella sua interezza. Spesso non importa veramente quale sia questa immagine: non tutti i giocatori solutori l'incorniceranno o l'appenderanno in bella vista. Sarà a volte un paesaggio, una bella fotografia, uno scatto del nipotino sorridente che, smontato, è stato donato al nonno per occuparlo nelle serate invernali. Oppure un'opera d'arte: ninfee, violinisti sul tetto, mani che si disegnano vicendevolmente, angeli che si trasformano in diavoli.

Ne "La vita, istruzioni per l'uso" di Georges Perec, uno dei protagonisti è il miliardario Bartlebooth il quale ha programmato minuziosamente cinquant'anni della sua vita in un maestoso progetto senza alcuno scopo: nei primi dieci anni studia l'acquerello, poi, accompagnato dal fedele maggiordomo, gira il mondo per vent'anni, dipingendo, circa ogni due settimane, un paesaggio marittimo spedendolo poi ad un artigiano parigino, il quale ne ricava un puzzle di 750 pezzi; infine, negli ultimi vent'anni, Bartlebooth risolve in ordine di composizione, uno ogni due settimane, tutti i puzzle così costruiti. A questo punto i quadri ricomposti sono portati nei porti in cui erano stati dipinti vent'anni prima e cancellati: in questo modo l'opera, che pure avrebbe monopolizzato la vita di Bartlebooth per cinquant'anni, non avrebbe lasciato alcuna traccia di sé. Perché il miliardario è attirato dal ricostruire dei quadri che lui stesso ha dipinti? Per la sfida che questo nasconde, per un duello personale a distanza con colui che ha creato dai suoi quadri i puzzle. È il rompicapo ciò che affascina: sappiamo che nei frammenti è nascosta l'immagine e che esiste un modo, ed uno solo, per ottenerla, per risolvere il puzzle.

Ogni problema ci sfida, ci mette in gioco ancora una volta. Caricare l'auto o la lavastoviglie, individuare un baco nel software che stiamo scrivendo, un difetto nel ponte che stiamo progettando. Il guanto per il duello è lanciato ogni volta: se il tappo dello spumante non ne vuole sapere di uscire e la padrona di casa non ha un cavatappi, è un punto d'onore risolvere il problema e garantire il brindisi. Ecco allora che davanti ad un ostacolo nuovo, inaspettato, tiriamo fuori idee ed improvvisazioni, mettendo assieme i pezzi a nostra disposizione, fino a perforare il tappo incastrato con un cacciavite usato come fosse una trivella. E il gusto della vittoria sul problema, anche se ha un retrogusto di tappo e sughero, è dolce.

Dal risolvere un problema possiamo imparare qualcosa, sia che il problema ci sia stato posto da qualcuno, proprio con intento formativo, sia che si sia presentato inaspettatamente. C'è però una differenza tra queste due specie di problemi. Ovviamente è un fatto di simmetrie. Quando un problema ci è sottoposto da qualcuno, ad esempio da un Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa, sappiamo (o pensiamo di sapere: insomma confidiamo) che dietro al quesito ci sia un inventore del medesimo, che ne abbia anche individuata una soluzione, che abbia affrontato il problema inverso. C'è almeno una soluzione; se anche non la troviamo subito, possiamo continuare a sbattere la testa contro il problema, sapendo che essa esiste, anche se non l'abbiamo trovata. Viceversa quando un problema salta fuori di sua volontà[1], nella vita di tutti i giorni o nella ricerca matematica[2], se dopo mesi di tentativi non abbiamo ancora trovato una soluzione non è detto che non l'abbiamo cercata bene e che essa ci sfugga: potrebbe benissimo non esistere una risposta[3].

Anche il creare e il porre problemi sono questioni non facili: lo sanno bene gli insegnanti, che devono saper tarare i problemi proposti alla classe alle capacità e alle conoscenze, mediando inoltre tra gli alunni, in modo da non abbandonare i meno preparati, senza con questo tarpare le ali ai più abili. Pare che nel porre problemi[4] Paul Erdős[5] fosse maestro: oltre ad essere un ottimo solutore di problemi, aveva anche un ottimo occhio nell'assegnarli, in modo che la ricerca della soluzione insegnasse sempre qualcosa di nuovo al solutore.

Ma non è di Erdős eh vogliamo parlare, bensì di un suo connazionale: George Pólya, un altro che di problemi ne sapeva parecchio.

[1] O ci è posto dal Creatore, dal Fato e dalla Natura, a seconda delle credenze personali.

[2] Che per alcune persone è incredibilmente la vita di tutti i giorni.

[3] Al proposito merita una menzione il progetto intrapreso recentemente dall'American Institute of Mathematics di pubblicare online (http://aimpl.org/pl) alcuni problemi irrisolti, con commenti e proposte. Viceversa per verificare se un problema (matematico) sia già stato risolto e, più in generale, come sito di domande e risposte sulla matematica (anche molto avanzata) è nato Math Overflow: http://mathoverflow.net/.

[4] Non nel senso di crear problemi alle persone, anche se pure in questo aveva le sue doti. Sono leggendarie alcune delle sue avventure a casa di amici matematici, raccontate in "L'uomo che amava solo i numeri", di D. Hoffman.

[5] Di Erdös si è già parlato in "Bello e impossibile" su RM110.


1 *George (György) Pólya.*

George Pólya nasce a Budapest il 13 dicembre 1887 e, pochi giorni dopo, viene battezzato col nome di György: la sua famiglia, pur di origini ebraiche, si era convertita al cattolicesimo l'anno precedente. Anche il cognome, al pari della religione, era di recente acquisizione. Il padre, infatti, nato Pollák, l'aveva cambiato cinque anni prima, nel 1882, in modo che suonasse più ungherese e gli desse la possibilità di inserirsi nell'ambiente universitario, molto nazionalista dopo l'autonomia ottenuta all'interno dell'Impero austroungarico nel 1867.

György frequenta il ginnasio a Budapest, distinguendosi nella letteratura e nella geografia, mentre i risultati ottenuti in matematica non sono eccezionali. Questo è probabilmente conseguenza della scarsa abilità degli insegnanti, come lui stesso sottolineerà in seguito. Forse è anche a causa di questa brutta esperienza che poi affronterà sistematicamente il problema dell'insegnamento della matematica.

Anche all'università l'avvicinamento di Pólya alla matematica non è immediato. Si iscrive dapprima a legge, sulle orme del padre, ma dopo un solo semestre l'abbandona, per dedicarsi allo studio della lingua e della letteratura, sue grandi passioni già a scuola. In due anni ottiene l'abilitazione all'insegnamento del Latino e dell'Ungherese. A questo punto si avvicina alla filosofia ma, invitato dal suo professore ad approfondire le sue conoscenze di matematica e fisica, vi si appassiona, studiandole prima all'Università di Budapest, poi all'Università di Vienna. Dopo aver conseguito il dottorato in matematica a Budapest, passa due anni a Göttingen, che, siamo negli anni 1912-1913, è un punto di accumulazione di matematici di prima magnitudine tra cui spiccano Hilbert[6], Weyl[7], Klein, Carathéodory. Purtroppo la permanenza di György in questo consesso di menti geniali viene bruscamente interrotta: durante un viaggio in treno ha uno scambio di vedute con un altro viaggiatore, in cui ai motteggi Pólya fa seguire un pugno. Malauguratamente il villanzone risulta essere uno studente dell'Università di Göttingen nonché figlio di un pezzo grosso: il Senato Accademico invita quindi György ad allontanarsi dall'università.

Nei primi mesi del 1914 Pólya è in visita a Parigi e riceve due proposte di collaborazione come Privatdozent: una a Francoforte e l'altra, sostenuta da Hurwitz, all'ETH di Zurigo. Sceglie la seconda, anche per poter collaborare con Hurwitz stesso. La decisione si rivela azzeccata e fortunata: nel 1914 scoppia infatti la Grande Guerra. Pólya, che era stato riformato dal servizio militare per un infortunio occorsogli in gioventù, col proseguire del conflitto viene richiamato sotto le armi dalla madrepatria. Pacifista convinto, György rifiuta: per il rischio di essere processato come renitente non farà più ritorno in Ungheria fino al 1967. Domanda ed ottiene la cittadinanza svizzera e, nel 1918 sposa Stella Weber, svizzera anch'ella, figlia di un professore dell'Università di Neuchâtel. Dopo essere stato promosso professore straordinario all'ETH nel 1920, nel 1925 pubblica, assieme a Szegö,

[6] Già festeggiato in "Wir müssen wissen. Wir werden wissen.", RM060.

[7] Protagonista di "Difficile come contare fino a dieci", RM082.

un testo di problemi d'Analisi. L'impostazione di quest'opera contiene una grande novità, frutto della personale esperienza di Pólya nell'avvicinarsi alla matematica: i problemi non sono raccolti in base all'argomento che trattano, bensì a seconda dei metodi risolutivi adoperati.

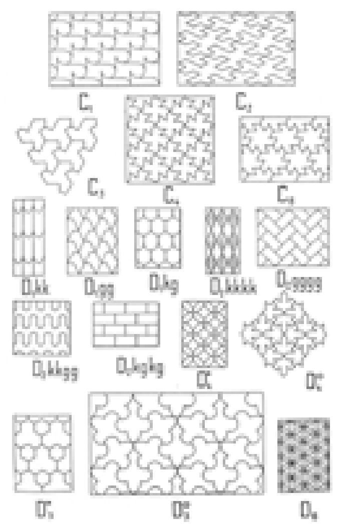
Nel frattempo pubblica risultati in numerosi settori della matematica, ottenendo meritatamente il ruolo di professore ordinario, sempre a Zurigo. Gli anni passano e arriva la Seconda Guerra Mondiale. Nel 1940 Pólya lascia il continente europeo per quello americano, come molti altri e, dopo qualche anno in altre università, arriva alla fine a Stanford, dove rimarrà fino alla pensione, raggiunta nel 1953, e anche oltre, continuando la sua collaborazione didattica anche dopo aver compiuto i novant'anni. Come già il padre prima di lui aveva cambiato il cognome, per meglio inserirsi nell'ambiente statunitense György sceglie di anglicizzare il suo nome in George.

Dopo qualche difficoltà nel 1945 riesce finalmente a pubblicare un volume cui lavorava ormai da anni: "How to solve it". In esso propone il suo approccio, basato sull'euristica, alla risoluzione dei problemi, matematici ma non solo. Esso si sviluppa in quattro passi successivi:

1. capire il problema;
2. sviluppare un piano;
3. portare a compimento il piano;
4. guardare indietro.

Il secondo punto è quello più articolato: il piano va sviluppato osservando se ci sono legami particolari tra dati ed incognite, cercando di far riferimento a problemi analoghi già affrontati, generalizzando o riducendosi a casi particolari (ma non troppo). Non bisogna però trascurare gli altri: nel portare avanti il piano il solutore deve verificare e giustificare ogni passo, chiedendosi se è lecito o meno fare ciò che ci si propone e, una volta concluso, controllare che il risultato ottenuto sia accettabile. La strategia risolutiva di Pólya diventa un punto di svolta nell'ambito del *problem solving*.

George continua a contribuire anche negli anni seguenti al campo della didattica della matematica e, in particolare, al risolvere problemi. Questo è senza dubbio il contributo che ha lasciato più traccia, anche perché i semi sono stati sparsi in un campo assai vasto: l'euristica di Pólya può infatti essere applicata anche ad altri tipi di problemi, non solo quelli matematici. Prima però di salutare il nostro protagonista e andare a testare le sue tecniche sui problemi che seguono, abbiamo ancora qualcosa da dire su di lui.



2 *Alcune delle tassellazioni di Pólya*

In matematica il nome di George Pólya fa spesso capolino, negli ambiti più impensati. Nella sua lunga carriera, infatti, egli si lascia portare dalla sua curiosità e dalla voglia di affrontare e risolvere problemi. Così il risultato matematicamente più eclatante che porta il nome di Pólya è il teorema di enumerazione, nel campo della combinatoria: un contributo di grande importanza, con ricadute nella teoria dei grafi, così come nella chimica. Collabora con Hardy e Littlewood[8] alla stesura di un testo intitolato "Inequalities", ma lascia le sue tracce anche nel campo dell'arte. Infatti è prendendo spunto da un suo articolo sui gruppi cristallografici, in cui George illustra ciascuno di essi mediante una tassellazione del piano, che Escher inizia i suoi studi sui

[8] Vedi "Stanlio e Ollio" in RM049.

disegni modulari[9], in cui ricopre le tavole con pesci e gabbiani o coccodrilli poi in fuga dal foglio.

3 *M. C. Escher*

Anche la probabilità conserva le tracce dell'opera di Pólya: è lui che nel 1921 dimostra che "un uomo ubriaco torna certamente a casa, mentre un uccello ubriaco non ritrova più il suo nido". Con ciò si riferisce al fatto che se facciamo equiprobabilmente un passo avanti o uno indietro ogni secondo, torneremo con probabilità uno al punto di partenza. Allo stesso modo un ubriaco che, a Torino[10], vagasse per le strade scegliendo a ogni crocicchio una delle quattro vie in modo equiprobabile, tornerebbe quasi certamente a casa. Invece nelle dimensioni superiori ciò non è più vero: quindi un uccellino disorientato che, ogni metro, sceglie a caso tra le sei direzioni possibili (su, giù, avanti, indietro, destra, sinistra), torna al proprio nido solo in un caso su tre, all'incirca[11].

Sempre in questo campo George lascia un modello, semplice, che però dà luogo, nel miglior spirito dei bei problemi, a molte generalizzazioni: l'urna di Pólya. Nella sua versione base abbiamo un'urna (o un sacchetto, una scatola) contenente due bilie, una bianca e una nera: a ogni istante estraiamo una bilia, rimettendola poi nell'urna assieme ad un'altra del medesimo colore. La distribuzione della proporzione delle bilie bianche sul totale tende ad una distribuzione uniforme sull'intervallo [0,1], al tendere all'infinito del numero di bilie nell'urna.

4 *L'urna di Pólya?*

Come generalizzare? Abbiamo solo l'imbarazzo della scelta: possiamo prendere bilie di più colori, aggiungere più di una bilia per volta, o addirittura non agire in modo deterministico, ma scegliendo in modo casuale tra varie opzioni in base alla composizione dell'urna al momento dell'estrazione. Lo studio di queste varianti dell'urna di Pólya è pieno di sorprese, di oggetti probabilistici che possono essere simulati mediante opportuni modelli ad urne, ma anche di applicazioni ad altri ambiti delle scienze.

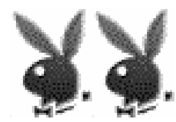
[9] Facendosi aiutare dal suo amico Coxeter, quello di "Hamburger o Portaerei?" in RM097, che pure studiava l'argomento.

[10] Oppure a New York, insomma, in una città fatta a griglia. Il problema, tra i preferiti del Capo, è stato proposto in RM081, e ne proponiamo la soluzione di ***Qfwfq*** in RM082. Recentemente la triade redazionale ha proposto lo stesso problema su *Le Scienze*, altri spunti sul blog: http://rudimatematici-lescienze.blogautore.espresso.repubblica.it/2009/11/30/il-problema-di-novembre-495-ritorno-allorigine/.

[11] Se fate una passeggiata, fatela pure aleatoria se siete coi piedi per terra, non se siete nello spazio. Un simpatico *divertissment* in una pausa caffè può essere una passeggiata aleatoria lungo il corridoio: lanciate ripetutamente una moneta, se esce testa avanzate di un passo, altrimenti arretrate.

George Pólya muore a Palo Alto, in California, nel 1985, ma ci lascia in eredità la sua curiosità, la passione per i problemi e la voglia di sfidarli, di affrontarli, di ricondurli ad altri noti, generalizzandoli o specializzandoli a seconda dei casi, ricordando però che "*un matematico che sa solamente generalizzare è come una scimmia che sa solamente salire sugli alberi, mentre uno che sa solamente ridurre a casi particolari è come una scimmia che sa solo scendere dagli alberi. In realtà nessuna delle due scimmie è una creatura completa. Una vera scimmia deve essere in grado di trovare cibo e scappare ai propri nemici, arrampicandosi continuamente su e giù dagli alberi. Un vero matematico deve saper sia generalizzare sia ridursi a casi particolari.*"

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
La costanza dà i suoi frutti			
Si è rotta la vecchia valigia!			

2.1 La costanza dà i suoi frutti

Il titolo edificante nasce dal fatto che Rudy, da qualche mese, ha copiato un metodo di Doc per avere un piccolo gruzzolo verso Natale. L'idea di base è quella, la sera, di mettere in un salvadanaio tutte le monete da due euro che ci si ritrova in tasca; a Natale si apre il salvadanaio e si va a mangiare fuori.

Rudy, avendo cominciato tardi, ha deciso che oltre a tutti i due euro che si ritrova, mette nel salvadanaio anche la moneta restante di maggior valore, quindi il "mucchio" ha raggiunto in breve tempo la ragguardevole cifra di 102 Euro e 40 centesimi; il presentarsi al ristorante con una cifra del genere tutta in monetine potrebbe suscitare delle perplessità, quindi Rudy intende mandare i VAdLdRM a cambiare la paccata di soldi; abbiamo un parente che gestisce un bar ed è perennemente affamato di monete di qualsiasi taglio, quindi sarà contento. Logicamente, i due pigri cominciano a litigare per decidere chi debba portare i soldi.

"Senti, giochiamocelo a testa e croce; ogni volta che viene testa segni un punto tu, ogni volta che viene croce segno un punto io; vince chi per primo arriva al valore… (e qui non si è capito, stavano parlando piano), e chi vince porta le monete"

"Oh, una versione 'misère'! Comunque, mi pare lo stesso. D'accordo"

Ora, i nostri avevano appena avuto il tempo di fare sedici tiri che la Pragmatica di Famiglia (sarebbe Paola, loro madre e moglie di Rudy) è intervenuta con un "Vi decidete ad andare, o aspettiamo Pasqua????", il che ha sospeso la partita.

Volendo seguire le loro regole sino in fondo, e considerato che Fred ha fatto due punti più di Alberto, si accordano in modo tale che Fred porta 72,65 Euro, mentre Alberto porta il resto.

Il guaio (per me) è che adesso, secondo loro, dovrei essere perfettamente in grado di capire non solo il loro ragionamento per quanto riguarda la divisione ma anche quale fosse il valore al quale avevano deciso di fermarsi.

Ora capite perché mia moglie sostiene che il gene della mentalità contorta è sicuramente dominante…

2.2 Si è rotta la vecchia valigia!

Beh, tanto ormai serviva solo più a contenere vecchie ricevute. E poi la moglie di Rudy (la stessa del problema precedente: battuta scontata) si dimenticava sempre la combinazione. Per fortuna la serratura era stata la prima cosa a rompersi, almeno parzialmente: infatti, delle tre rotelle a dieci posizioni, bastava ce ne fossero a posto due qualsiasi che si riusciva ad aprirla; Paola (la moglie di Rudy, per chi non se lo ricordasse), l'ultima volta che aveva dovuto aprirla se ne era uscita con un "Vai a tappare le orecchie ai pargoli, che devo partire con i miei soliti cinque minuti di turpiloquio sulla combinazione…"

"Figurati, quelli potrebbero darti lezioni, in merito… Ma come mai ci metti cinque minuti?"

"Beh, impiego tre secondi per provare ogni combinazione; per azzeccare le due rotelle mi servono dieci per dieci uguale cento tentativi (Murphy docet: la combinazione giusta è sempre l'ultima), trecento secondi fanno cinque minuti. Credi di essere l'unico capace a far di conto, qui dentro?"

"Mah, diciamo che anche con il tuo pessimismo alla Murphy, credo si possa impiegare meno di cinque minuti…"

E logicamente Rudy ci è riuscito, facendo durare il turpiloquio di Paola ben più di cinque minuti per non averci pensato anni prima.

Adesso potete provare voi, e vincere l'indubbio onore di ritrovare la bolletta del gas di quindici anni fa: *che metodo usate, e quanto ci mettete?*

"E perché metti la domanda in corsivo?" Semplice, perché continuo a parlare e il resto non fa parte della domanda. Anche i disattenti così trovano qual è la domanda vera.

La soluzione di questo problema ne ha ricordato a Rudy un altro, presentato in RM016 (Maggio 2000, l'altro millennio… Soluzione a giugno): ve lo riscriviamo qui sotto.

> ***Ceci n'est pas un problème***, come direbbe Magritte.
>
> Avete presente gli U2? Sono a piedi davanti a un ponte (tutti dalla stessa parte) e, tra 17 minuti, comincia il concerto dall'altra parte del ponte. Per traversare il ponte hanno a disposizione una torcia elettrica.
>
> Purtroppo, il ponte non può reggere più di due membri del gruppo per volta (anche i ponti hanno un senso estetico), quindi se passano prima due, uno di questi dovrà tornare indietro per portare la lampada agli altri (e dopo dovrà riattraversare); il possesso della lampada è requisito necessario per passare il ponte; inoltre, non è possibile lanciarla, posarla, clonarla o "qualcosarla", barando.
>
> Inoltre, ogni componente del gruppo cammina ad una velocità diversa:
>
> Bono: 1 minuto per traversare il ponte
>
> Edge: 2 minuti per traversare il ponte
>
> Adam: 5 minuti per traversare il ponte
>
> Larry: 10 minuti per traversare il ponte (i batteristi sono sempre un po' "suonati"...).
>
> Logicamente, se traversano in due procedono entrambi alla velocità del più lento; quando uno torna indietro, torna alla sua velocità tipica.
>
> Senza trucchi: come fanno?

Ecco, Rudy si chiedeva (ma non ha soluzione, quindi questo è solo un commento) come siano generalizzabili problemi di questo genere: avete n persone, ciascuna delle quali passa il ponte in un certo tempo $k_1, k_2, \ldots, k_n$, e dovete farli passare in un tempo minore di w. Come sono legate tutte le variabili per avere un problema "difficile"?

Come dicevamo, non è un problema; ma se qualcuno vuole pensarci, pubblicheremo di sicuro.

Ah, dimenticavo un dato importante: Fred va a lezione di batteria, da cui si capisce la battuta su Larry.

3. Bungee Jumpers

Il raggio del cerchio che circoscrive un n-agono regolare $A_1 A_2 \ldots A_n$ è pari a R. Provare che:

1. La somma dei quadrati di tutti i lati e di tutte le diagonali è pari a $n^2 R^2$.
2. La somma di tutti i lati e di tutte le diagonali del poligono è pari a $n \cot \frac{\pi}{2n} R$.
3. Il prodotto di tutti i lati e tutte le diagonali del poligono è pari a $n^{\frac{n}{2}} R^{\frac{[n(n-1)]}{2}}$.

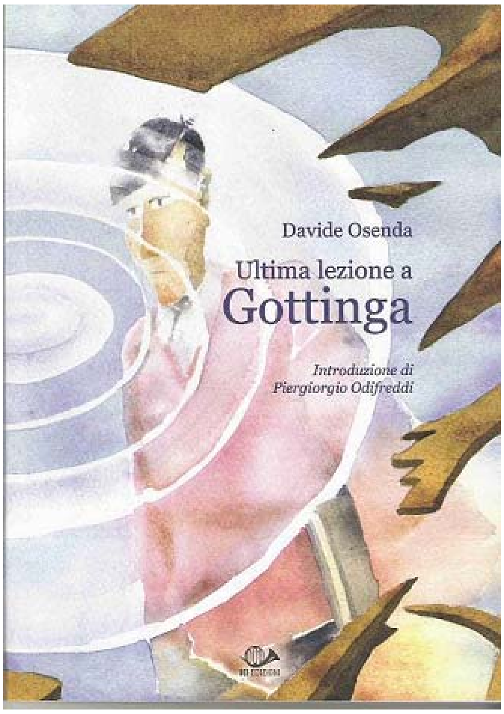
Abbiamo ricevuto svariate soluzioni alternative dei lettori per quanto riguarda i problemi dei due mesi scorsi, ringraziamo e pubblicheremo.

Lo scopo di quei due problemi era di risolvere questo; uno dei quesiti presentati è già stato risolto nei problemi, ma questi ci pare abbiano una generalità interessante.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

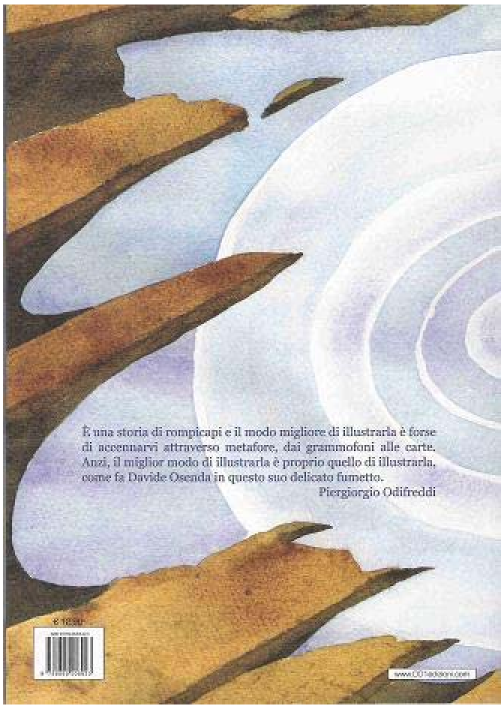
Che questa sia una rubrica asincrona (eufemismo per non dire "cronologicamente isterica") lo abbiamo ripetuto più d'una volta: non dovrebbe quindi risultare troppo stupefacente che dopo un anno di silenzio possa giungere una sequenza di numeri di RM che invece questa rubrica contengono. Anche le regole di apparizione *("…si recensiscono solo opere in cui mettono mano lettori o amici di RM…")* sono quasi sempre ripetute, e non dovrebbe essere necessario ricordarle ulteriormente. Forse però è opportuno rammentare perché la rubrica si chiama così come si chiama; non certo per semplicità di acronimo: in Redazione la chiamiamo affettuosamente EUNBET, ma la sigla sembra riferirsi più a un'agenzia continentale di giochi e scommesse che a uno spazio recensioni. Il titolo, come spiegammo a suo tempo, è semplicemente la citazione degli "*incipit*" dei romanzi che Snoopy scrive sul tetto della sua cuccia. Il bracchetto di Charlie Brown è sempre stato uno dei più nobili abitatori delle nostre fantasie, ed "*Era una notte buia e tempestosa*" è indubbiamente uno dei pochi incipit degni di reggere il confronto con *Moby Dick*, *Lolita* o l'*Iliade*. Ciò basta a spiegare perché, nell'immaginarci i lettori di RM alle prese con opere di scrittura, ci sia venuto in mente il romanziere da cuccia per eccellenza. Curiosamente, questo richiamo ai fumetti e alla frase di Snoopy torna utile per introdurre il libro di cui parliamo questo mese: e, per una volta, davvero di coincidenza si tratta.



4.1 Ultima lezione a Gottinga

«È con una certa inquietudine
che mi trovo qui, stasera.»

Era il 14 Settembre del 2008. Come ogni 14 del mese, la blogosfera celebrava il *Carnevale della Matematica*[12], ovvero l'occasione per un blog, scelto a turno tra una serie di blog candidati e interessati, di riportare in un solo articolo tutti i link ai post di argomento matematico usciti nel mese. In quel Settembre d'un anno fa toccava a noi ospitare il Carnevale, nel nostro blog di Le Scienze: era solo la quinta edizione del Carnevale, e la prima ospitata da noi[13]. Pochi giorni avanti avevamo ricevuto la segnalazione dell'esistenza di un fumetto di argomento matematico, di cui si stava parlando un po' in giro: in particolare, a parlarne erano soprattutto il blog di Andrea Plazzi (se non lo conoscete significa che non conoscete RatMan, e questo è molto grave) e lo stesso autore del fumetto, Davide Osenda, trentaseienne bassista cuneese, come Peano. A dire la verità, Peano era cuneese ma non bassista, ma del resto anche Davide è tale e quale: cuneese e non bassista; perlomeno, non professionista. Magari suona meglio di Jack Bruce o di Flea o di Les Claypool (anche qui, come per RatMan: se non sapete di chi stiamo parlando, preoccupatevi), e sappiamo per certo che adora il basso, ma non lo abbiamo mai sentito suonare, quindi non possiamo sapere se Peano suonasse meglio o peggio di lui. Ma stiamo già divagando.



Davide suona il basso e dipinge acquerelli. Lavora anche come informatico, ma quello lo facciamo quasi tutti, e non staremo a parlarne qui. Acquerello dopo acquerello, era riuscito a mettere in bella mostra al Festival della Matematica di Roma del 2008 le prime tavole del suo fumetto "*Gottinga*", e a cogliere uno sguardo interessato perfino nel nume tutelare del Festival, ovvero Piergiorgio Odifreddi. Del resto, lo stesso Odifreddi aveva già ricevuto una versione ridotta dell'opera osendiana, e quindi era in un certo senso già preparato a vedere l'università di Göttingen degli anni

[12] Di origine come al solito americana, ma voluto in versione italiana dall'instancabile ***.mau.***, il matematico carnevale dei blog italici è ormai giunto alla sua 19ª edizione (l'ultima è ospitata da un altro RMer di vaglia, ***Zar***: http://proooof.blogspot.com/2009/11/carnevale-della-matematica-19.html). Solo poche ore fa (per voi che leggete: per noi che scriviamo, il tempo reale è "fra pochissimi giorni") dovrebbe essere partita in pompa magna la prima edizione (simultanea in Italia e Spagna) del *Carnevale della Fisica*, grazie ai buoni uffici di Gravità Zero (http://carnevaledellafisica.ning.com): molto più sponsorizzato del fratello maggiore (ne parlano almeno due radio, la rivista *Wired* e *l'Unione Astrofili Italiani*), si merita un roseo futuro.

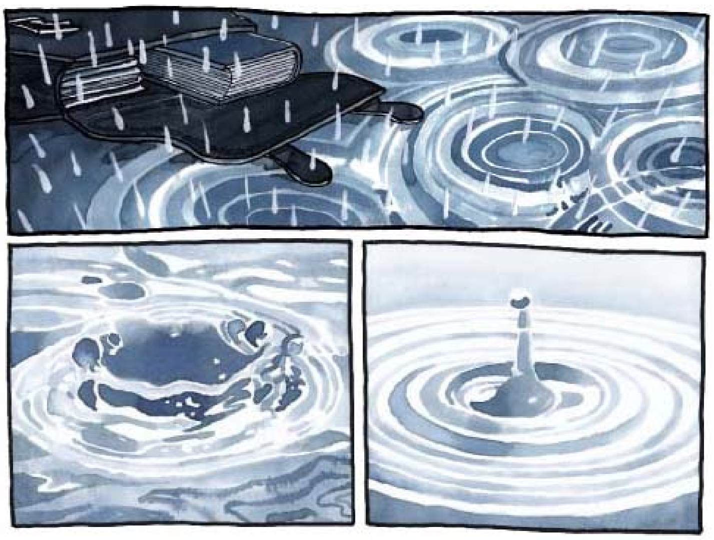
[13] http://rudimatematici-lescienze.blogautore.espresso.repubblica.it/2008/09/14/carnevale-della-matematica-5/

Trenta prendere forma sulle pareti dell'Auditorium di Roma. Quando, nel Settembre del 2008, noi parliamo di Gottinga nel nostro blog non siamo quindi certo i primi a farlo, ma ne siamo ugualmente orgogliosi come se fossimo gli autori. Davide ci aveva inviato una copia a bassa risoluzione del suo fumetto, autorizzandoci a metterlo a disposizione di chi avesse avuto voglia di leggerlo. Noi lo abbiamo subito piazzato nel nostro Bookshelf[14], e lì lo trovate ancora, se siete curiosi.

Però, dateci retta: se davvero siete curiosi, vale la pena spendere la dozzina di euro necessari per procurarsi l'albo. Un po' perché un fumetto, più dei libri, abbisogna della carta vera, non virtuale; un po' perché le ottanta pagine della storia non sono tutte presenti nella copia elettronica; un po' perché è un bel fumetto, ed è bella matematica, ed è bello convincere le piccole case editrici che fanno bene ad occuparsi di cose belle come la matematica.

Potremmo cominciare a parlare proprio di questi contenuti che si ritrovano nelle pagine di Davide. E bisogna precisare subito che non è matematica facile, come potrebbe far presupporre l'idea del disegno a fumetti. E neppure matematica svenduta, per strizzare l'occhio alle mode. Nelle prime tavole dell'albo occhieggia un ritratto acquerellato di Hilbert, nelle ultime uno di Paul Cohen, in mezzo, tra i due volti (disegni nei disegni), si snodano tutti i punti cruciali della matematica del Novecento: l'infinito e gli Aleph di Cantor, i Teoremi di Incompletezza di Gödel, l'Assioma della Scelta, l'Ipotesi del Continuo. Sono le conclusioni di Cohen sull'indecidibilità della IC a chiudere la storia, ma tra la prima immagine degli austeri edifici dell'Istituto di Matematica di Göttingen e l'ultima d'un volto riflesso nello specchio si incontrano anche altri luoghi classici della divulgazione: i grammofoni per spiegare i paradossi gödeliani, gli alberghi dalle infinite stanze per introdurre i molteplici infiniti cantoriani, le carte da gioco per la prova diagonale, e così via.

E però, nonostante questa sovrabbondanza di matematica, non c'è solo matematica. Il fumetto ha sua dinamica propria, una regia realmente da *graphic novel*, non da banale pretesto narrativo per la divulgazione dei concetti matematici. Il professore che tiene, di fronte all'aula vuota, la sua *ultima lezione a Gottinga* si chiama Fiz: e si può certo immaginare che il nome discenda dalla facile assonanza con il sistema FZ, quello di Fraenkel Zermelo: un nome visceralmente matematico; però la sua ultima lezione non è destinata, come egli crede, solo all'aula vuota: invisibile, nel buio, c'è il suo ultimo allievo, e questi si chiama Alkuin Winkler. E se Fiz è pura matematica, il suo ultimo e imprevisto discepolo è invece già commistione tra passato e futuro, tra numeri e America. Ha il nome di Alcuino, precursore della matematica medievale e ricreativa, e il cognome dell'attore che interpreta Fonzie. Perché la matematica sa essere spettacolo.



Se amate i fumetti, potreste divertirvi a cercare i segnali di stile che marcano la mano di Davide Osenda. Uno dei protagonisti principali di *Ultima lezione a Gottinga* è l'assenza. L'aula vuota, resa più drammaticamente deserta dalla contrastante presenza di Alkuin;

[14] http://www.rudimathematici.com/Bookshelf/Gottinga%20(D.Osenda).pdf .

l'università senza professori e studenti, messa in evidenza dal bidello che, solo, mantiene continuità tra gli edifici e gli umani cacciati. E, soprattutto, il silenzio. Ma come fare per far sentire il silenzio, in un fumetto? Non facendo parlare i personaggi? Disegnando tavole vuote? Davide Osenda usa di nuovo l'artificio del contrasto: ogni piccolo rumore di contorno, quelli che normalmente sono inaudibili, nella sua storia sono presenti e sottolineati. Passi leggeri, ticchettii, cigolii delle porte: si sentono tutti, si leggono tutti: e nel sentire loro si sente il silenzio, l'abbandono, il nulla che resta a Gottinga dopo che sono passate le epurazioni naziste.

Fumetto, non solo matematica. Ma davvero tanta matematica, non solo fumetto. Per questo le introduzioni sono due: la prima del matematico più noto d'Italia, Piergiorgio Odifreddi, che ricorda nelle sue righe introduttive il reale sbigottimento di Hilbert, ultimo rimasto della grande scuola di Göttingen, proprio negli anni in cui la storia di Osenda è ambientata. Se non credete alle coincidenze, potreste rimanere stupefatti come noi nello scoprire come si intitola cotanta prefazione: si intitola proprio "Era Una Notte Buia e Tempestosa", tale e quale a questa rubrica. Odifreddi, in verità, si riferisce più alla "notte" della ragione, in cui la veemenza razzista della Germania hitleriana alzò il buio tempestoso e criminale dei massacri verso tutti coloro che riteneva diversi. La nostra notte è molto meno buia e tempestosa, ma è comunque curioso notare la coincidenza titolatrice.

Se l'aspetto matematico è sancito dalle parole di PGO, la natura di fumetto è sacramentata dalla seconda introduzione, che è invece proprio di Andrea Plazzi. Vale la pena leggere le sue parole: si scopre così che le contaminazioni sono sempre più di quelle che uno normalmente si aspetta. Chi avrebbe mai immaginato che Plazzi fosse anche lui un matematico? Chi avrebbe mai sperato che *Ultima lezione a Gottinga* potrebbe avere un seguito? Eppure, è così, e queste cose si scoprono solo leggendo le introduzioni.

Resta un unico mistero: noi ci eravamo offerti di scrivere un'introduzione al libro, perché ci è sempre piaciuto molto. Essendo noi tre estremamente più bravi e famosi di Plazzi e di Odifreddi, siamo rimasti un po' perplessi nel vedere che Davide ha preferito rivolgersi ad altri. Pensandoci un po', credevamo di aver capito la causa: noi recensiamo opere solo a fronte del pagamento di *tre* copie dell'opera stessa, una per redattore. Verosimilmente, mobilitando solo i due recensori che ha mobilitato, il nostro è riuscito a risparmiare sui costi. Almeno così credevamo: finché non abbiamo visto arrivare nelle nostre buche delle lettere l'*Ultima Lezione*, pur senza aver scritto nessuna prefazione. Commossi e imbarazzati, non potevamo fare altro che quello che abbiamo appena finito di fare: scrivere questo EUNBET.

Titolo	Ultima lezione a Gottinga
Autore	Davide Osenda
Introduzioni	Piergiorgio Odifreddi Andrea Plazzi
Editore	001 Edizioni
Data di Pubblicazione	Ottobre 2009
Prezzo	12,50 Euro
ISBN	978-88-95208-92-3
Pagine	80

5. Soluzioni e Note

Finalmente è arrivato Dicembre, con le feste, il Natale, il Calendario di RM e tanta allegria. Questo numero di S&N sarà parecchio spesso, per cui cercheremo di evitare lunghe premesse, ma in questi mesi che chiudono l'anno non possiamo che spendere almeno una riga per ringraziarvi. Grazie a tutti i solutori, ai lettori, a coloro che ci criticano e correggono, a coloro che ci seguono da sempre e a quelli che ci hanno appena scoperto. Grazie a tutti. Ed ora veniamo al sodo.

Il mese scorso abbiamo proposto a dimostrazione di ***Ezio*** dell'esistenza di infiniti numeri primi, chiedendoci cosa ne pensavamo. Sono giunte in redazione un paio di risposte, e sperando di fare cos utile (non solo ad Ezio, ma anche a quelli che sono interessati al discorso, pubblichiamo volentieri qui. Per esempio ***Silvano***:

> L'idea è buona, ma non sono sicuro della logica della dimostrazione ti dico perché. Dici che dalla fattorizzazione UNICA: $N=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ "È altresì logico, ponendo M=hN scrivere: $M=hN=\prod_{j=1}^{l} p_j^{\alpha_j}=h\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$."
>
> Da cui si deduce che $p_i \neq p_j$, ma questo *in generale NON è vero*. Mi spiego meglio:
>
> $$M=Nh=\prod_{j=1}^{l} p_j^{\alpha_j}=\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}\right)\prod_{j=k+1}^{l} q_j^{\alpha_j} \Rightarrow h=\prod_{j=k+1}^{l} q_j^{\alpha_j}$$ oppure h è primo.
>
> Dire che $p_i \neq q_i$ in generale non è vero, insomma il tuo caso 2.a è proprio il motivo per cui non funziona, secondo me ovviamente; chi ti dice che non rientri sempre nel caso 2.a.
>
> Il problema lo puoi ovviare se dimostri che N e N+1 sono fattorizzati SEMPRE in primi diversi es.
>
> Lemma 1: Fattorizzazione – *Due numeri naturali consecutivi si fattorizzano sempre in numeri primi distinti.*
>
> DIM: Fattorizzati due numeri consecutivi si ha: $N=\prod_{i=1}^{l} p_i^{\alpha_i}$ ed $N+1=\prod_{j=1}^{l} q_j^{\alpha_j}$, ma sostituendo N in N+1 si ha: $\prod_{i=1}^{l} q_i^{\alpha_i}-\prod_{j=1}^{l} q_j^{\alpha_j}=1$, che per il TEO del MCD rende i due numeri primi tra loro (del resto su questo si basa, se non sbaglio il crivello di Eratostene…).
>
> Dal lemma precedente con la successione che hai fatto puoi dire:
>
> Lemma 2: Successione che genera primi ad ogni passo – *La successione* $N_k=N_{k-1}\cdot(N_{k-1}+1)$ *con* N_0 *primo genera ad ogni passo una scomposizione in fattori primi di* N_k *che contiene almeno un primo in più.*
>
> Dim: Per induzione utilizzando il lemma [1].
>
> 1. Primo passo: $N_0=p_0$, $N_1=p_0\cdot(p_0+1)$, utilizzando il lemma [1] (p_0+1) si fattorizza in primi diversi da p_0.
> 2. Vero per N_{k-1} dimostro per N_k: $N_k=N_{k-1}\cdot(N_{k-1}+1)$, ma per [1] questo si ha ovviamente.
>
> c.v.d.

> Teo: *I numeri primi sono infiniti*
>
> Dim: dal Lemma [2] discende che potendo iterare la successione indefinitivamente genero infiniti numeri primi.

Silvano preferisce la dimostrazione classica per assurdo, a quanto pare. C'è ancora un commento da ***Franco57***:

> Ieri sera ho riletto con attenzione la dimostrazione di ***Ezio*** che all'inizio non avevo compresa bene. A me pare corretta gli faccio quindi i miei complimenti. Il succo è tutto nel caso 2b.
>
> Io semplificherei il ragionamento così:
>
> 1) Prendo un numero intero N maggiore di 1 e lo scompongo in fattori primi.
> 2) Se considero il suo successivo $N+1$, posso dire che la sua scomposizione introduce nuovi primi [e qui una giustificazione ce l'avrei messa, ad esempio se per assurdo esistesse un fattore primo p tale che $N=p \cdot a$ e $N+1=p \cdot b$, allora $(N+1)-N=1=p \cdot (b-a)$ che è impossibile poiché $p>1$ e $b-a$ intero]. È importante osservare che per dimostrare che ogni numero naturale sia scomponibile in fattori primi non si fa uso del fatto che esistano infiniti numeri primi.
> 3) Se ripeto il procedimento con $N \cdot (N+1)$ al posto di N introduco sempre nuovi numeri primi, all'infinito.
>
> Se ci si pensa bene il ragionamento non è troppo diverso da quello classico: se p_1, p_2,... p_k fossero tutti i numeri primi, il successivo di $N=p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, non può invece essere il prodotto di quella lista di fattori primi.

Noi ci manteniamo neutrali e speriamo di non trovare numeri primi sotto l'albero. Del resto lo sappiamo bene di non essere stati troppo buoni, ma almeno un po' di carbone, in questi tempi di crisi...

5.1 [130]

5.1.1 Quasi un Summer Contest

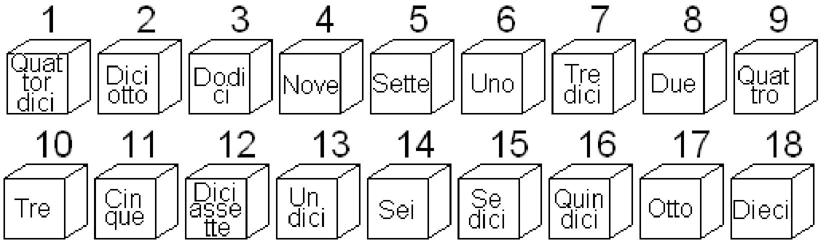
Dicevamo già il mese scorso che il testo di questo problema era tanto criptico che ognuno l'aveva interpretato a modo proprio. Ecco, ***Flo*** ha letto tutte le soluzioni proposte in RM131 il mese scorso (***Br1***, ***FrancoZ***, ***Gnugnu***, ***Franco57*** e ***Diego***), ma non ha trovato la sua, e così ce l'ha mandata. Ma prima rivediamo il testo:

> *Si tratta di un gioco a squadre, ogni squadra composta da diciotto ragazzini. Sfruttando il fatto che all'interno di ogni gruppo i diciotto nomi sono tutti diversi, a ogni squadra verrà presentata una fila di diciotto scatole numerate, ognuna delle quali conterrà il nome di uno dei componenti della squadra stessa. Naturalmente, nessuno conoscerà il contenuto delle scatole. Il gioco consiste nel fatto che ogni pischello, a turno, dovrà aprire nove scatole, e sperare di trovare in una di queste il proprio nome. Se è fortunato e lo trova, bene, torna tra i suoi compagni e un altro dei diciotto si cimenterà subito dopo nella stessa impresa, e così via. Se invece non trova il suo nome nelle nove scatole che apre, amen, gioco finito: tutta la sua squadra ha perso. Evidentemente, si può parlare prima del gioco, ma quando si comincia silenzio totale ed è vietato lasciare segni sulle scatole o sui biglietti.*
>
> *Riuscite a trovare una strategia di gioco con una probabilità decente di riuscita?*

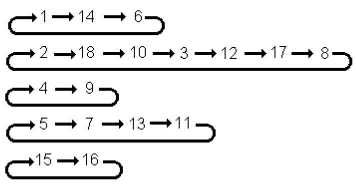
Ed ecco la soluzione di ***Flo***:

> Riguardo al problema "Quasi un Summer Contest" del numero 129, ho trovato una strategia per riuscire ad avere una probabilità di vittoria dignitosa, senza bisogno di spostare le scatole, né facendo comunicare in alcun modo i ragazzi coinvolti, né avendo bisogno che un ragazzo veda quanto fatto dai precedenti.

Suppongo anch'io come ***Br1*** che i ragazzi si chiamino Uno, Due, Tre, ecc., fino a Mister Diciotto (e devo dire che Otto è il più fortunato, con dei nomi del genere!). La strategia è semplice: quando viene il proprio turno, ogni ragazzo dovrà guardare nella scatola con il numero uguale al suo nome. Se non trova il nome giusto, dovrà guardare nella scatola con il numero uguale al nome che ha appena trovato nella scatola. E così via, fino alla fine delle possibilità a sua disposizione. Facciamo un esempio: supponiamo che la disposizione dei nomi nelle scatole sia la seguente:



Arriva Mr. Uno, e cosa fa? Apre la scatola 1. Non trova il suo nome, ma trova quello di Mr. Quattordici. Allora apre la scatola 14. Non trova il suo nome, ma trova quello di Sei. Apre la 6, e finalmente ci trova dentro il suo nome. Insomma, ce l'ha fatta, in solo 3 aperture. Il turno passa a Due, che apre la scatola 2, poi la 18, poi la 10, quindi la 3, la 12, la 17, e infine trova il suo nome nella 8.Quando è il turno di Mr. Tre, si ha lo stesso ciclo di 2, ma a cominciare da un'altra parte: le scatole aperte in sequenza sono la 3, poi la 12, la 17, la 8, la 2, la 18, e infine la 10. In pratica si creano dei "cicli di apertura", fatti così:



Quindi, con questa strategia, la probabilità che la squadra se la cavi si trasforma magicamente nella probabilità che ci siano solo cicli di lunghezza minore o uguale a 9, e non ci siano quindi cicli di 10, 11, 12, 13... aperture. Stabiliamo quindi che la squadra vince con la probabilità:

$$P_{successo} = 1 - P_{insuccesso}$$

$$P_{insuccesso} = P_{10} + P_{11} + P_{12} + P_{13} + P_{14} + P_{15} + P_{16} + P_{17} + P_{18}$$

Dove P_{10} è la probabilità che ci sia un ciclo di lunghezza 10, e così via. Bene, adesso calcoliamo P_{10}. Questo sarà il rapporto tra tutti i casi favorevoli, ovvero tutte le possibili configurazioni con un ciclo di lunghezza 10 (e ringraziamo che non ce ne possono essere più di uno), e i casi possibili, che sono tutti i modi in cui i nomi possono essere infilati nelle scatole (ovvero 18!). Le configurazioni ammesse sono date dal modo in cui si possono estrarre i 10 numeri su cui avviene il ciclo dai 18 possibili (ovvero il coefficiente binomiale, B(18,10)), moltiplicato per tutti i modi in cui è possibile scambiare le scatole lasciate fuori dal ciclo (ovvero (18–10)!=8!), moltiplicato ancora per tutti i modi in cui si possono scambiare quelle nel ciclo (ovvero 9! – Attenzione: non 10!, proprio perché dobbiamo tener conto del vincolo che le scatole costituiscono un ciclo). Detto in formule, che forse si capisce meglio:

$$P_{10} = \frac{\binom{18}{10} \cdot 8! \cdot 9!}{18!} = \frac{18!}{10} \cdot \frac{1}{18!} = \frac{1}{10}$$

> Allo stesso modo, P_{11} sarà 1/11, P_{12} sarà 1/12, e così via. In generale, con un numero di ragazzi N e la possibilità di aprire N/2 scatole (lasciatemi scrivere il numero dei ragazzi N come N=2n), si avrà:
>
> $$P_{successo} = 1 - P_{n+1} - P_{n+2} - \ldots - P_{2n} = 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \ldots - \frac{1}{2n}$$
>
> Nel nostro specifico caso, troviamo quindi:
>
> $$P_{successo} = 1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12} - \frac{1}{13} - \frac{1}{14} - \frac{1}{15} - \frac{1}{16} - \frac{1}{17} - \frac{1}{18} \approx 0.33$$
>
> Et voilà. In circa un terzo dei casi, ci si salva. È vero che questa probabilità di vittoria è inferiore a quelle trovate con i metodi degli altri vostri solutori, ma non abbiamo dovuto "barare": non abbiamo avuto bisogno di scambiare posto alle scatole, né di far parlare i ragazzi, né di farli comunicare in alcun modo. Insomma, il bello di questo metodo è che funziona anche con scatole di puro marmo di Carrara da una tonnellata l'una, e persino se le scatole e i ragazzi non del turno si trovano in stanze diverse. Niente trucco, niente inganno.
>
> E se poi invece era davvero un "test di ingresso per un partito politico", come sintetizzato splendidamente da ***Gnugnu***, mi sa che ho fallito miseramente. Oh, bhè, tanto le elezioni sono ancora distanti...

E meno male... Non so se avete notato che ormai i lettori di RM si parlano tra le soluzioni e si fanno complimenti a vicenda. Pensate che pubblichiamo solo una parte di quello che riceviamo…

5.1.2 Bungee Jumpers

Ne facciamo sempre una. Il mese scorso il *BJ* aveva TRE parti, e solo la prima era risolta a *Pagina 46*. Come se non bastasse per fornire un piccolo addendo di soluzione in queste pagine, sono arrivate parecchie soluzioni alternative, così eccoci qui.

Cominciamo con la soluzione di ***Simone***, che riprende il Grande Capo:

> Faccio solo una piccola osservazione riguardo alla formulazione del problema: In realtà il punto M il punto andava preso "sulla circonferenza", e non "sul cerchio" e infatti nella dimostrazione che avete fornito a "pagina 46" M viene preso sulla circonferenza. Io, che quando i problemi sono costituiti di più punti, ho il pessimo vizio di leggere solo un punto alla volta, ho tentato inutilmente di dimostrare l'asserzione considerando M come un punto qualunque del cerchio. Poco male, senza rendermene conto avevo dimostrato l'asserto oggetto della SECONDA PARTE (me ne sono accorto solo successivamente, quando finalmente mi sono deciso a proseguire la lettura delle altre due parti del problema).

Ed ecco come dimostra il resto:

> **Parte Seconda**
>
> Assumiamo che M si trovi nella regione piana individuata dall'angolo convesso delimitato dalle semirette $O-A_1$ e $O-A_2$. Sia l=MO. Ponendo $\alpha=A_1OM$ si ha che

$$A_2OM = \frac{2\pi}{n} - \alpha$$

$$A_3OM = 2\frac{2\pi}{n} - \alpha$$

...

$$A_nOM = (n-1)\frac{2\pi}{n} - \alpha$$

Applicando il teorema di Carnot ai triangoli A_iMO i=1,2 , ..., n si trova che:

$$A_1M^2 = l^2 + R^2 - 2lR\cos\alpha$$

$$A_2M^2 = l^2 + R^2 - 2lR\cos\left(\frac{2\pi}{n} - \alpha\right)$$

$$A_3M^2 = l^2 + R^2 - 2lR\cos\left(2\frac{2\pi}{n} - \alpha\right)$$

...

$$A_nM^2 = l^2 + R^2 - 2lR\cos\left((n-1)\frac{2\pi}{n} - \alpha\right)$$

Per cui

$$A_1M^2 + ... + A_nM^2 = n\left(l^2 + R^2\right) - 2lR\left(\cos\alpha + \cos\left(\frac{2\pi}{n} - \alpha\right) + .. + \cos\left((n-1)\frac{2\pi}{n} - \alpha\right)\right)$$

Poiché, in base all'identità vista nel numero 129, si ha che

$$\cos\alpha + \cos\left(\frac{2\pi}{n} - \alpha\right) + .. + \cos\left((n-1)\frac{2\pi}{n} - \alpha\right) = \frac{\sin\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\cos\left(\alpha + \frac{(n-1)\pi}{n}\right) = 0$$

Si trova $A_1M^2 + ... + A_nM^2 = n\left(l^2 + R^2\right)$, che è il risultato che si doveva dimostrare.

Parte Terza

Sia M' la proiezione ortogonale di M sul piano del poligono. Sia $x=M'O$ e sia $h=MM'$. Per il teorema di Pitagora si ha che: $A_iM^2 = A_iM'^2 + h^2$ per i=1, 2,..., n e $l^2 = OM^2 = x^2 + h^2$.

Pertanto $A_1M^2 + A_2M^2 + ... + A_nM^2 = A_1M'^2 + A_2M'^2 + ... + A_nM'^2 + nh^2$.

Poiché, in base a quanto dimostrato nella PARTE 2, si ha che: $A_1M'^2 + A_2M'^2 + ... + A_nM'^2 = n\left(R^2 + x^2\right)$,

e quindi $A_1M^2 + A_2M^2 + ... + A_nM^2 = n\left(R^2 + x^2\right) + nh^2 = n\left(R^2 + l^2\right)$, che è l'asserto che si doveva dimostrare.

A questo punto ci si potrebbe ritenere soddisfatti, ma mentre il Capo si chiedeva dove aveva dimenticato le due parti mancanti, ecco che arriva ***Alberto R.***, che precisa:

Leggo su Bungee Jumpers di RM 130 un problema diviso in tre parti riguardante la somma dei quadrati delle distanze dei vertici di un poligono regolare da un punto M. Poi, alla "pagina 46" trovo la soluzione solo della prima parte.

Non entro in merito al calcolo pieno di seni e coseni, ma mi domando: perché faticare tanto quando ciò che si vuol dimostrare è una conseguenza immediata del noto teorema di Huygens/Steiner sui momenti d'inerzia?

Peraltro utilizzando detto teorema si scopre che non è necessario che il poligono sia regolare; basta che sia iscritto in un cerchio e che il baricentro di masse unitarie poste ai suoi vertici coincida con il centro del cerchio, cosa che, ad esempio, accade con qualunque rettangolo.

Vedete? E non è ancora tutto, c'è anche la soluzione di ***Franco57***:

Vi propongo la soluzione che ho elaborato per il problema del Bungee Jumpers dell'ultimo numero che può interessare non solo perché è completamente diversa, ma anche perché mostra una formula più generale.

In uno spazio euclideo di qualsiasi dimensione, prendiamo gli n punti $A_1, A_2, \cdots, A_n$ a caso, senza nessun vincolo e calcoliamo la somma $S(M)$ dei quadrati delle distanze di essi da un altro punto M, utilizzando il prodotto scalare $\langle (x_1, \cdots, x_1), (y_1, \cdots, y_1) \rangle = x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_k \cdot y_k$:

$$S(M) = \sum_i \overline{A_i M}^2 = \sum_i \left\| A_i - M \right\|^2 = \sum_i \langle A_i - M, A_i - M \rangle = \sum_i \left(\langle A_i, A_i \rangle - 2 \cdot \langle A_i, M \rangle + \langle M, M \rangle \right) =$$

$$= \sum_i \langle A_i, A_i \rangle - 2 \cdot \left\langle \sum_i A_i, M \right\rangle + n \cdot \langle M, M \rangle = \sum_i \langle A_i, A_i \rangle - 2 \cdot n \cdot \langle B, M \rangle + n \cdot \langle M, M \rangle$$

essendo $B = \frac{1}{n} \cdot \sum_i A_i$ il baricentro degli n punti.

Abbiamo in particolare che

$$S(B) = \sum_i \langle A_i, A_i \rangle - 2 \cdot n \cdot \langle B, B \rangle + n \cdot \langle B, B \rangle = \sum_i \langle A_i, A_i \rangle - \cdot n \cdot \langle B, B \rangle$$

E in definitiva che:

$$S(M) - S(B) = n \cdot \langle B, B \rangle - 2 \cdot n \cdot \langle B, M \rangle + n \cdot \langle M, M \rangle = n \cdot \langle M - B, M - B \rangle = n \cdot \left\| M - B \right\|^{2^2}$$

$$\boxed{S(M) - S(B) = n \cdot \overline{MB}^2}$$

La formula trovata ci dice che il luogo geometrico dei punti per cui la somma dei quadrati delle distanze dai punti A_i è costante è una (iper-)sfera dello spazio euclideo, essendo $S(B)$ una costate che dipende solo dall'insieme stesso. Inoltre il minimo si raggiunge quando M coincide col baricentro B.

Poiché abbiamo fatto uso solo delle proprietà algebriche del prodotto scalare, la formula è in realtà valida in tutti gli spazi con prodotto scalare interno su uno spazio vettoriale (http://it.wikipedia.org/wiki/Prodotto_scalare) come gli spazi di Hilbert. Nella forma $\frac{1}{n} \cdot S(M) = \frac{1}{n} \cdot S(B) + \overline{MB}^2$, la proprietà è estensibile anche ad un insieme continuo sostituendo le sommatorie con gli integrali con ed n con la misura dell'insieme.

Se l'insieme dei punti è costituito dai vertici di un poligono regolare su una circonferenza di raggio R, abbiamo evidentemente che $S(B) = n \cdot R^2$, poiché il baricentro coincide con il centro O del cerchio e quindi che

$S(M) = n \cdot (R^2 + l^2)$, dove $l = \overline{MO}$, che è la formula più generale nel caso 3.

Non commentiamo, visto che il Capo sui *BJ* non ci spiega mai niente. Ci ha solo detto e ripetuto che per il BJ di questo mese aveva bisogno solo del primo risultato, e gli altri non servivano…

5.2 [131]

5.2.1 A gentile richiesta

Visto che ci siamo dilungati sui numeri precedenti, non perdiamoci in chiacchiere qui, e presentiamo il problema:

Supponete di avere un dado (da sei, ma non perdiamo in generalità); è abbastanza evidente che si può definire un gioco onesto dicendo "da uno a tre vinci tu, da quattro a sei vinco io"; con qualche (non noioso, ma lunghetto) calcolo, dovreste riuscire a stabilire le regole per un gioco onesto con due dadi (se non l'avete mai fatto, fatelo).

Bene, adesso di dadi ne avete tre: solo che il terzo dado sopra non ha dei numeri, ma su tre facce ha il segno "+", sulle altre tre ha il segno "–". Regola vuole che se esce il segno "+" si sommano i valori dei restanti due dadi, mentre se esce il segno "–" si sottrae il minore dal maggiore; è possibile, con questa terna, costruire un gioco equo?

Due idee che ci sono venute in mente in questo momento: …e se il terzo dado avesse anche il "per" o il "diviso"? Sempre equiprobabili, evidentemente (per questo abbiamo scritto "o": sei diviso quattro, raramente fa un intero). E se i dadi non fossero a sei facce (qui quattro segni potrebbero starci, equiprobabili)?

Non solo, ma… Qualche numero fa vi avevamo fatto analizzare il "seven-eleven", altrimenti noto come "craps"; riuscite a trovare un modo per giocare un gioco del genere con i dadi di cui sopra (scegliete il caso che preferite: "+/–", "tre operazioni", "non necessariamente sei facce"…).

Ora, fermo restando che noi abbiamo a malapena analizzato il primo caso, se diciamo "Yahtzee" a qualcuno vengono delle idee? Rudy, per un bel gioco complicato, sarebbe disposto anche a sacrificare il suo set da Dungeons & Dragons.

Le soluzioni sono arrivate, anche se non in gran numero: ***.mau.***, ***Alberto R.***, ***Silvano***, ***Cid***, ***Franco57***. Dato che è un po' che non riceviamo soluzioni fulmine da ***.mau.***, non perdiamo certo l'occasione di pubblicare questa, arrivata a stretto giro di posta della newsletter con RM130:

Con il dado +/– (che poi può tranquillamente essere una moneta, le probabilità non cambiano) un gioco equo si ha se A prende i numeri da 1 a 4 e 11, mentre F gli altri. Infatti, se esce meno ci sono 6 possibilità su 36 di ottenere 0 (i due dadi hanno lo stesso valore, capita una volta su 6) e due possibilità di ottenere 5 (1-6 e 6-1). Quindi in 28 casi su 36 si ha un valore da 1 a 4. Se esce più c'è una possibilità su 36 di avere 2, due di avere 3 o 11, tre di avere 4; in totale si hanno 8 casi per avere da 1 a 4.

E di più non ci ha scritto, in merito. Vediamo la versione di ***Alberto R.***:

Si chiede di costruire le regole per un gioco equo tra due giocatori, utilizzando vari tipi di "dadi" le cui uscite si combinano con vari operatori aritmetici. Il problema proposto diventa banale se non si impongano tre limitazioni omesse nel testo. Omissione certamente dolosa, frutto del noto sadismo degli autori di RM.

1. Il gioco è simmetrico, cioè la parola "equo" è interpretata in senso stretto e significa che la probabilità di vincere è uguale alla probabilità di perdere. Infatti, secondo l'usuale significato del termine, un gioco "equo" o "onesto" può benissimo essere asimmetrico. Si richiede solo che la vincita per probabilità di vincere sia uguale alla perdita per probabilità di perdere. Ad esempio, con un normale dado, tu dai a me 5 euro se esce il 6, io do a te 1 euro se esce qualunque altro numero. Se non si impone tale limitazione qualunque problema si risolve subito scegliendo arbitrariamente le uscite favorevoli al primo giocatore e compensando le diverse probabilità di vincere con diverse entità della vincita.
2. La partita si conclude dopo un solo lancio. Infatti, se sono ammessi due lanci, comunque strano sia il meccanismo che estrae il punteggio finale dai simboli mostrati dagli N dadi lanciati, basta stabilire che il primo giocatore vince se il punteggio del primo lancio supera quello del secondo lancio. (I dadi non hanno memoria!)
3. Non è possibile il pareggio. L'assenza di questa limitazione banalizza (quasi?) tutti i problemi. Ad esempio: inventare un gioco equo con un dado a 7 facce. Semplice: 1,2,3 vinco io; 4,5,6 vinci tu; 7 pareggio. Ma se escludiamo il pareggio l'impresa diventa ardua. Altro esempio: inventare un gioco equo con 4 dadi tradizionali le cui uscite a, b, c, d si combinano a formare il risultato finale con la seguente formula (è solo un esempio, potrebbe essere ancora più complicata): $F = a\cdot(b+c)^d$. L'uscita a=b=c=d=1 ha probabilità $1/6^4$ e determina F=2. L'uscita a=b=c=d=6 ha la stessa probabilità e determina F=139314069504. Poiché i due suddetti valori di F non possono essere ottenuti altrimenti, basta stabilire che il 2 consegna la vittoria al primo giocatore, l'altro numeraccio al secondo, e i casi restanti significano pareggio. I due esempi citati sono teoricamente equivalenti ma ben diversi in pratica. Nel primo caso la probabilità di pareggio e piccola e il metodo è praticamente utilizzabile; ma se un notaio fosse incaricato di sorteggiare uno di due canditati a "Il Grande Fratello" (perché classificatisi "in par condicio turpitudinis" nella precedente selezione) e volesse usare la $F = a\cdot(b+c)^d$, passerebbe ore a lanciare dadi e a verbalizzare pareggi e, forse, di fronte a un siffatto scimmiesco comportamento, il produttore rinuncerebbe a entrambi i candidati e offrirebbe la parte al notaio stesso.

Veniamo ai casi concreti. Due dati tradizionali. Somma dei punti.

Possibili risultati	2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
Probabilità in 36esimi	1 2 3 4 5 6 5 4 3 2 1

Soluzione:

Un giocatore vince se esce un numero rosso: Prob. = (1+3+5+5+3+1)/36 = 1/2. L'altro vince se esce nero.

Ma i numeri rossi e neri non sono altro che i numeri pari e dispari. È un caso? No è una regola generale. Se lanciamo alcuni dadi, il primo con A facce, il secondo con B facce, il terzo con C facce etc. e sommiamo i punteggi di ciascun dado, il numero N dei risultati possibili, tutti equiprobabili, è N=A·B·C· … (naturalmente molti valori sono ripetuti).

Se almeno uno dei dadi ha un numero pari di facce, gli N risultati saranno sempre per metà pari e per metà dispari. (Dimostrazione facile, ognuno se la trovi da solo!)

Dunque la semplice parità del risultato dà un criterio valido per un gioco equo, simmetrico e concluso con un sol lancio.

Ma c'è di più. Il criterio continua a valere anche se la formula che combina i risultati dei vari dadi contiene l'operatore differenza (poiché la sottrazione agisce sulla parità con le stesse regole dell'addizione), e ciò anche quando l'alternativa somma/differenza è lasciata al caso tramite un ulteriore dado che reca sulle facce i simboli + e – .

Infine il criterio vale anche se compare un elevamento a potenza poiché tale operazione non altera la parità.

Se, invece, tutti i dadi hanno un numero dispari di facce, allora N=A·B·C· …è dispari e non può essere diviso in due gruppi ugualmente numerosi. Non è quindi possibile, ad esempio, ottenere con un solo lancio un gioco equo e simmetrico sommando le uscite di due dadi a 3 facce.

Con il prodotto le cose si complicano. Partiamo con due dadi tradizionali a 6 facce. Sulla prima riga i possibili risultati, sotto le relative probabilità in 36esimi

1 2 3 4 5 6 8 9 10 12 15 16 18 20 24 25 30 36

1 2 2 3 2 4 2 1 2 4 2 1 2 2 2 1 2 1

Dove è finita la successione bilatera, bella, pulita, regolare, simmetrica che avevamo trovato con la somma? Qui siamo nel caos più completo. Il motivo è presto detto: i possibili modi in cui un numero può essere ottenuto come prodotto di altri due dipende dai fattori primi contenuti nel numero stesso. Ma la classe di numeri primi – è risaputo – è una classe di ragazzacci indisciplinati; ognuno si colloca dove cavolo gli pare a dispetto di ogni legge e di ogni ordine.

Questo fatto mi fa sospettare che, nel caso del prodotto, non esista una regola generale per un gioco equo, del tipo di quella trovata per la somma/differenza.

Ciò non toglie che siano possibili soluzioni caso per caso. Ad esempio, con due dadi a 6 facce, funziona bene la regola " Vinco io se il risultato è un multiplo proprio di 3; vinci tu in tutti gli altri casi". (Controllate con la tabella innanzi riportata).

Da parte di ***Franco57***, un interessante contributo:

Ho esaminato il caso di somma punteggio a fronte del lancio di un numero qualsiasi di dadi ciascuno con un proprio numero di facce, quindi non necessariamente dadi cubici (naturalmente non è facile costruire dadi poliedrici onesti al di fuori dei solidi platonici, ma se fossimo su Flatland non avremmo problemi!).

Ogni dado ha una numerazione progressiva che parte da 1 (ma questo dettaglio non serve) e tutte le facce sono equiprobabili. Si tira una sola volta tutti i dati, si fa la somma, e, in base al punteggio ottenuto, si decide chi ha vinto tra i due giocatori.

Bisogna definire le regole per un gioco *onesto*.

Premesse:

- chiamo dado pari un dado con un numero pari di facce, altrimenti il dado è dispari;
- chiamo dimensione d di un dado il numero delle sue facce;
- chiamo situazione una delle possibili configurazioni dopo il lancio, cioè ad esempio dado 1 faccia F_1, dado 2 faccia F_2, etc.

Se ci sono n dadi di dimensioni rispettivamente $d_1, d_2, \cdots, d_n$ il numero di possibili situazioni, tutte equiprobabili per l'indipendenza tra i dadi lanciati, è pari al prodotto delle dimensioni $d_1 \cdot d_2 \cdots d_n$ (il punteggio invece non è in generale equiprobabile).

Ho trovato che: **una regola per un gioco onesto esiste se e solo se c'è almeno un dado con numero pari di facce.**

Dimostrazione:

caso negativo) tutti i dadi sono dispari

Il numero possibile di situazioni dopo il lancio è dispari perché prodotto di dispari, quindi comunque siano fatte le regole di assegnazione di vittoria in base al punteggio, alla fine ad ognuno dei due giocatori saranno assegnate come vittoria un numero differente di situazioni, perché insieme devono coprire tutte le situazioni possibili.

NB: questo vale non solo se il punteggio viene cacolato sommando i valori delle facce, ma anche se si applica qualsiasi altra funzione per calcolarlo.

caso positivo) esiste almeno un dado pari

In questo caso, una regola onesta è <u>giocare pari contro dispari</u>. Infatti isoliamo il dado pari di dimensione d. Gli altri dadi possono dare vari punteggi $s_1, s_2, \cdots, s_k$ con rispettive probabilità $p_1, p_2, \cdots, p_k$. Fissiamo uno qualsiasi di questi punteggi s_j e tutte le possibili situazioni parziali S_j che lo hanno potuto generare. Con l'aggiunta del punteggio del dado isolato, si generano queste nuovi possibili situazioni, relativi punteggi e probabilità:

situazioni finali	punteggio	probabilit à
$(S_j, 1)$	$s_j + 1$	$p_j \cdot \frac{1}{d}$
$(S_j, 2)$	$s_j + 2$	$p_j \cdot \frac{1}{d}$
...	...	...
(S_j, d)	$s_j + d$	$p_j \cdot \frac{1}{d}$

Poiché d è pari, considerando il contributo del dado isolato, si aggiungono nuove situazioni di vincita distribuite in modo equiprobabile per i due giocatori, essendo metà degli $s_j + i$ pari e l'altra metà dispari. E questo vale per ogni situazione S_j degli altri dati, situazione che è indipendente dal risultato del dato isolato, quindi la equiprobabilità di vittoria vale in generale.

Dato che ognuno ha affrontato la faccenda in modo diverso, è impossibile selezionare le soluzioni, però ***Cid*** ci ha sorpreso inventando un gioco per il Capo:

Di seguito riporto le regole della mia variante di Yahtzee, che si gioca con due dadi tradizionali e un dado tetraedrico che riporti sulle sue facce le quattro operazioni. Questa mia variante l'ho chiamata GULP

<u>GULP – (Variante di Yahtzee)</u>

Gulp è un gioco di strategia che si svolge con 3 dadi. Di questi tre dadi: due sono dadi tradizionali, mentre il terzo è un dado a forma tetraedrica e riporta sulle sue facce le quattro operazioni +, –, x, : (un'operazione per ogni faccia)

Si gioca minimo in due giocatori e non c'è un numero massimo.

Sono previste tredici combinazioni che ogni giocatore deve realizzare lanciando i dadi. Ottenuta la combinazione il giocatore guadagna il punteggio previsto per la combinazione. Una combinazione non può essere ripetuta.

Il gioco termina dopo 13 turni di lancio dei dadi, anche quando non sono state realizzate tutte le combinazioni.

Ad ogni turno il giocatore può (se lo ritiene opportuno) tirare di nuovo per una volta uno dei tre dadi a sua scelta, al termine deve segnare obbligatoriamente un punteggio in una delle caselle del segnapunti non ancora utilizzata. Se alla fine del turno di gioco non viene realizzata una delle possibili combinazioni ancora libera sul tabellone, il giocatore deve scrivere "P" in una delle caselle ancora a sua disposizione. (ad indicare che perde la possibilità di realizzare quella combinazione.)

Vince il giocatore che ha totalizzato il maggior numero di punti. A parità di punti vince chi ha il maggior numero di combinazioni valide (cioè quello con il minor numero di "P")

<u>Lancio dei dadi</u>

Ad ogni turno il giocatore dopo aver lanciato i tre dadi può scegliere di rilanciare uno dei tre dadi per cercare di ottenere un risultato migliore. (Solo uno dei tre dadi)

Il giocatore può scegliere di non utilizzare il successivo lancio di un dado, nel caso ad esempio che si sia già realizzata una combinazione utile.

<u>Combinazioni</u>

- **Coppia di 1** (Punteggio: risultato dell'operazione): Si ottiene quando i due dadi numerati hanno valore uguale a 1. Il punteggio è il risultato dell'operazione. Ad esempio: 1 + 1 vale 2
- **Coppia di 2** (Punteggio: risultato dell'operazione): Si ottiene quando i due dadi numerati hanno valore uguale a 2. Il punteggio è il risultato dell'operazione. Ad esempio: 2 : 2 vale 1
- **Coppia di 3** (Punteggio: risultato dell'operazione): Si ottiene quando i due dadi numerati hanno valore uguale a 3. Il punteggio è il risultato dell'operazione. Ad esempio: 3 x 3 vale 9
- **Coppia di 4** (Punteggio: risultato dell'operazione): Si ottiene quando i due dadi numerati hanno valore uguale a 4. Il punteggio è il risultato dell'operazione. Ad esempio: 4 – 4 vale 0
- **Coppia di 5** (Punteggio: risultato dell'operazione): Si ottiene quando i due dadi numerati hanno valore uguale a 5. Il punteggio è il risultato dell'operazione. Ad esempio: 5 x 5 vale 25
- **Coppia di 6** (Punteggio: risultato dell'operazione): Si ottiene quando i due dadi numerati hanno valore uguale a 6. Il punteggio è il risultato dell'operazione. Ad esempio: 6 + 6 vale 12
- **Bonus** (Punteggio: 35) si ottiene quando si realizzano almeno 3 delle sei combinazioni precedenti. Da cio deriva che, se dopo aver realizzato due delle combinazioni precedenti (ad esempio 3 + 3 e 4x4) venisse fuori l'operazione 5 – 5 potrebbe risultare utile tenerla buona segnando un punteggio di zero punti piuttosto che perderla rischiando cosi di perdere il bonus di 35 punti)

Prima di descrivere le successive combinazioni, occorre dire che nel caso in cui il dado tetraedrico riportasse l'operazione "–", il risultato da considerare è il numero maggiore meno il numero minore; allo stesso modo se il dado tetraedrico riportasse l'operazione ":", nel risultato il numero maggiore sarà a numeratore della frazione e il numero minore si troverà a denominatore.

- **Triangolo** (Punteggio: 20): Si ottiene quando il risultato dell'operazione è un numero triangolare.

- **Primo** (Punteggio: 21): Si ottiene quando il risultato dell'operazione è un numero primo.
- **Cubo** (Punteggio: 26): Si ottiene quando il risultato dell'operazione è il cubo di un numero intero positivo, (cioè quando il risultato è uguale a 1 oppure a 8)
- **Frazione** (Punteggio: 31): Si ottiene quando il risultato dell'operazione è una frazione propria (cioè quando non è un numero intero)
- **Zero** (Punteggio: 38): Si ottiene quando il risultato dell'operazione è uguale a zero (cioè quando i due dadi tradizionali hanno lo stesso valore e il dado tetraedrico ha il valore "–")
- **GULP** (Punteggio: 50): Si ottiene quando il risultato è uguale a 36. Se GULP viene ripetuto lo si utilizza in un'altra combinazione libera segnando un punteggio di 100 punti, e scrivendoci sotto **SUPERGULP** (attenzione: benché GULP e SUPERGULP siano combinazioni realizzate con due 6, non devono essere considerate di tipo COPPIA e quindi non vanno conteggiate nelle tre combinazioni di tipo coppia utili per ricevere il bonus di 35 punti. Nemmeno nel caso in cui SUPERGULP sia stato inserito al posto di una combinazione libera di tipo COPPIA) (La combinazione SUPERGULP può essere utlizzata una sola volta)
- **Risultato** (Punteggio: risultato dell'operazione): Qualsiasi combinazione ottenuta. Questa è una possibilità che potrebbe risultare utile quando non si riesce a realizzare nessuna delle combinazioni precedenti o la combinazione realizzata è già stata utilizzata precedentemente. Anche questa combinazione può essere utilizzata una sola volta.

Segnapunti

Il gioco può essere pensato come una tabella da riempire.

Per semplicità il conteggio dei punti e lo svolgimento del gioco possono essere annotati in una tabella dove ogni giocatore è una colonna mentre le combinazioni rappresentano le righe.

Ad ogni turno deve necessariamente essere utilizzata una casella a scelta, cioè ogni giocatore deve necessariamente utilizzare (o perdere) una combinazione e prendere il punteggio che ha ottenuto.

	Gioc. 1	Gioc. 2	Gioc ...
Coppia di 1			
Coppia di 2			
Coppia di 3			
Coppia di 4			
Coppia di 5			
Coppia di 6			
Totale di coppie valide			
Bonus (35) per almeno 3 coppie valide			
Triangolo (20)			
Primo (21)			
Cubo (26)			
Frazione (31)			
Zero (38)			
GULP (50)			
Risultato (dell'operazione)			
Punteggio Totale			

Bello vero? Il Capo si è già pentito della sua di sacrificio, se arrivano altre proposte come questa…

Comunque il concorso non è terminato, e soluzioni a questa proposta di problema saranno bene accette anche nei mesi a venire.

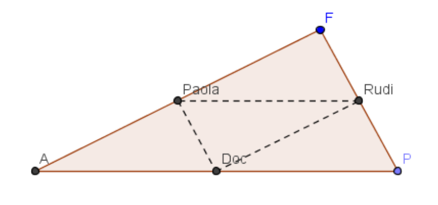
Un approccio con tabelle e probabilità per essere sicuri di ottenere un gioco equo è quello scelto da ***Silvano***, ma ahimè, anche se non ci stanchiamo mai delle vostre soluzioni, dobbiamo passare al secondo problema.

5.2.2 L'ultima avventura del TRE-mendo duo

Anche qui, vediamo subito il problema:

> *Immaginate una gara di frisbee, che coinvolge l'intero staff dei VAdLdRM (Fred, Alberto e Paolo), Piotr, Rudy e la moglie di Rudy (Paola): ci sono tre persone ai vertici di un triangolo e le altre tre dentro al triangolo; mentre i tre vertici si scambiano il frisbee, i tre in mezzo devono riuscire a prenderlo.*
>
> *Rudy è a metà strada tra Fred e Paolo, Doc a metà strada tra Alberto e Paolo e Paola a metà strada tra Alberto e Fred; le distanze tra due qualunque dei tre giovani teppisti o tra due qualunque degli arzilli vecchietti è sempre un numero pari; non solo, ma la distanza tra Alberto e Fred è maggiore della distanza tra Alberto e Paolo che è maggiore della distanza tra Fred e Paolo, che cercano di stare il più vicini possibile.*
>
> *Allora, secondo voi, quanto erano distanti i tre teppisti tra di loro?*

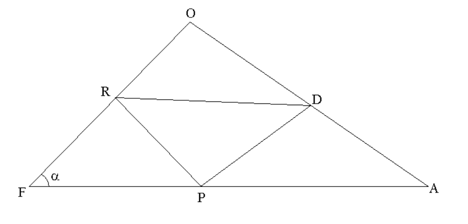
Le soluzioni sono arrivate da ***.mau.***, ***Cid***, ***Simone***, ***Franco57***, ***Alberto R.*** e ***Fabrizio***. Anche qui partiamo con ***.mau.***, che si sbriga velocemente scrivendo a Piotr:



5 *La figura di **.mau.***.

> Per il secondo problema, non capisco la difficoltà. Il disegno allegato mostra le posizioni reciproche; il triangolo tratteggiato ha i lati paralleli a quello grande, e quindi basta porre numeri interi pari i suoi lati. Se vuoi una soluzione MOLTO degenere, c'è un'ammucchiata, tutti nello stesso punto, ma ammetto che non è una grande soluzione fisica soprattutto pensando a te (Rudi lo si può forse anche approssimare a un segmento...); se vuoi una soluzione degenere ma fattibile fisicamente senza due persone nello stesso punto basta porre FP=4, AP=12 e AF=16, lasciandovi tutti sulla stessa retta ma comunque distanziati; se vuoi una soluzione standard devi mettere FP=12, AP=16 e AF=20 in modo che il triangolo interno abbia lati 6, 8 e 10.

Beh, il Doc non ha apprezzato molto la battuta... vediamo la soluzione di ***Fabrizio***:



6 *La figura di **Fabrizio***.

> Con riferimento alla figura e sfruttando il teorema di Carnot si ha che:
>
> $$OA^2 = FO^2 + AF^2 - 2FO \cdot AF \cdot \cos\alpha \quad (1)$$
>
> $$RP^2 = FR^2 + FP^2 - 2FR \cdot FP \cdot \cos\alpha \quad (2)$$
>
> Poiché $FR = \frac{1}{2}OA$ e $FP = \frac{1}{2}FA$, ne consegue che $RP = \frac{1}{2}OA$. Dalla relazione precedente si deduce che la lunghezza del segmento *RP* è pari se e solo se la lunghezza del segmento *OA* è un multiplo di 4. Lo stesso ragionamento può essere applicato anche agli altri due lati del triangolo.
>
> Si può pertanto concludere che i segmenti *RP*, *RD* e *PD* che individuano il triangolo interno hanno una lunghezza pari se e solo se i segmenti *FO*, *OA* e *AF* hanno una lunghezza multipla di 4.
>
> Sempre dalla relazione (1) si ha poi che dato un qualsiasi triangolo FOA e fissati *FO* ed *AF* sussiste la relazione:
>
> $$|FO - AF| < OA < |FO + AF| \quad (3)$$

Una condizione posta dal problema è che il segmento *FA* sia il più corto possibile. Per quanto visto prima il valore minimo che tale segmento può assumere è 4 mentre per *FO* possiamo scegliere un qualunque valore multiplo di 4.

Consideriamo dunque il caso: *FA*=4, *FO*=4*k*, con *k*=2, …, *n*. Dalla relazione (3) si ha che $4(k-1) < OA < 4(k+1)$, e dunque $2(k-1) < RP < 2(k+1)$, che ha come unica possibilità *RP*=2*k* dato che anche deve essere un numero pari; ciò implica anche che *OA*=4*k* ossia sia uguale ad *FO*, soluzione che però non è ammessa dal problema.

Consideriamo adesso il caso *FA*=8, *FO*=4*k* con *k*=3, 4, …, *n*, ed in particolare soffermiamoci sul valore *k* = 3. Dalla relazione (3) si ha che 4<*OA*<20. Ma per quanto detto prima *OA* deve anche essere un multiplo di 4. Scartando le soluzioni *OA*=8 ed *OA*=12 (in quanto in entrambi i casi il triangolo FOA avrebbe due lati uguali violando le richieste del problema stesso) rimane l'unica soluzione ammissibile *OA*=16.

Concludendo il triangolo OAF (*FA*=8, *FO*=12, *OA*=16) è il più piccolo triangolo avente lati di lunghezza pari in grado di generare il triangolo RDP i cui vertici sono presi a metà di ciascun lato ed i cui lati sono anch'essi pari.

Qui dobbiamo fermarci, purtroppo. Nel ringraziarvi per i contributi, vi ricordiamo che vi aspettiamo il mese prossimo, continuate a seguirci!

6. Quick & Dirty

Durante una delle ultime gite, Rudy si è trovato davanti ad una colonna *ettagonale* e, mentre guardava questa stranezza, si è accorto che vedeva quattro dei sette lati. Se vi trovate ad alcuni metri dalla colonna, qual è la probabilità che vediate quattro lati? E quale che ne vediate tre?

7. Pagina 46

[1]

Il mese scorso abbiamo verificato che la somma dei quadrati delle distanze da un punto su un cerchio circoscritto a un *n*-agono regolare a tutti i suoi vertici è pari a $2nR^2$; se facciamo coincidere il punto con il vertice A_1 dell'*n*-agono, allora la somma di tutti i lati e delle diagonali originati dal vertice è pari a $2nR^2$.

Se moltiplichiamo questa somma per *n*, numero dei vertici del poligono, otterremo il doppio della somma di tutti i lati e di tutte le diagonali, in quanto ogni lato e ogni diagonale, avendo due estremi, sono contate due volte; quindi la somma che cerchiamo risulta pari a $\frac{n}{2} \cdot 2nR^2 = n^2R^2$.

[2]

Per un poligono regolare, la somma di tutte le diagonali originanti da A_1 vale:

$$2R\left[\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right] = 2R\frac{\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = 2R\cot\frac{\pi}{2n}.$$

Moltiplicando questo per *n* e dividendolo per due, otteniamo il risultato richiesto.

[3]

Il prodotto di tutti i lati e tutte le diagonali del poligono uscenti da un vertice valgono:

$$2^{n-1} R^{n-1} \sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = 2^{n-1} R^{n-1} \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Elevando il prodotto all'n-esima potenza ed estraendone la radice quadrata, otteniamo il risultato richiesto.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Dalli all'untore!

Nota tecnica

Questo pezzo nasce da una serie di ricerche nate per un post che abbiamo scritto altrove (http://rudimatematici-lescienze.blogautore.espresso.repubblica.it/2009/11/16/il-vaccino-e-un-gioco-in-un-certo-senso). Qui, affrontiamo il problema da un punto di vista più teorico e matematico.

Disclaimer

Non abbiamo la più pallida intenzione di spiegarvi se dovete vaccinarvi o no; per decidere in merito, se siete a corto di fondi potete guardare il post di cui sopra o il post del nostro "dirimpettaio di blog": http://bressanini-lescienze.blogautore.espresso.repubblica.it/2009/11/16/un-vaccino-testato, mentre se siete in vena di spendere qualche soldo e attivare qualche neurone vi consigliamo un noto best-seller (ne abbiamo parlato nell'EUNBET di RM119).

Acknowledgements

Tutto quanto segue viene principalmente da Wikipedia (inglese) e da Eric Weisstein (Wolfram).

Premessa

Tranquilli, mettiamo una tabellina con i simboli. Sono un mucchio. Ora, avendo esaurito le endnotes prima ancora di scrivere il pezzo, forse è il caso di cominciare.

Il motivo per cui abbiamo tirato lungo sulle note prima del pezzo, è che la cosa sarà anche interessante dal punto di vista matematico, ma a prima pelle è una schifezza; infatti, vogliamo parlare di epidemie.

Come sempre, partiamo da lontano, o meglio cerchiamo uno stato *stabile*: un momento in cui la nostra epidemia sia stazionaria, con un certo numero di infetti. Una malattia infettiva si definisce *endemica* se resiste in una popolazione senza il bisogno di input esterni; questo significa che ogni persona in grado di trasmettere la malattia infetta, in media, *esattamente* un'altra persona; se ne infettasse di più avremmo una crescita esponenziale e sarebbe un'epidemia, mentre se ne infettasse di meno la malattia sparirebbe; matematicamente, se definiamo come R_0 il rateo base di infezione[15], ossia quante persone (in una popolazione composta da S persone sane ma infettabili) possa infettare in media un singolo infetto, abbiamo che deve essere $R_0 \cdot S = 1$; la cosa è piuttosto ovvia[16], in quanto possiamo mantenere lo stato endemico anche con alti indici di virulenza solo se la popolazione suscettibile è molto bassa.

Se poi L rappresenta la speranza di vita media in una popolazione e A l'età alla quale si diventa suscettibili di infezione[17], possiamo esprimere la popolazione suscettibile di

[15] Tranquilli: useremo un mucchio di simboli, ma stiamo tenendo a parte una tabella riepilogativa che inseriremo più avanti.

[16] Come ama dire Doc, "ovvio" è parola pericolosissima, in matematica; "S", qui da "numero" è diventata "percentuale", oltretutto trasformata in numero minore di uno. Siamo d'accordo che formalmente il ragionamento è orribile, ma ci pare che il passaggio alla percentuale sia facilmente deducibile dal contesto, quindi continuiamo in questo modo.

[17] Se la cosa vi suona strana ("o sei immune o non lo sei!"), vi ricordiamo che le cosiddette "malattie infantili" sono una settimana a casa da scuola se prese nell'infanzia, ma si rischia grossissimo se arrivano nell'età adulta. non solo, ma se l'avete fatta da piccoli per molte di queste siete immuni anche da grandi (come se foste vaccinati).

infezione S come il rapporto tra l'età A e la speranza di vita L; inserendo questo rapporto nell'espressione che definisce l'endemicità della malattia, otteniamo:

$$R_0 = \frac{L}{A}, \qquad \text{[1]}$$

ossia possiamo stimare la virulenza di una malattia in funzione di parametri ben noti.

Questo calcolo, però, è semplicistico, assumendo che tutta la popolazione raggiunga l'età L; più realisticamente, si assume una distribuzione *esponenziale* (negativa) dell'età, il che porta, attraverso calcoli poco più complessi di quelli visti sopra, a stimare il rateo base di infezione come:

$$R_0 = 1 + \frac{L}{A}.$$

Questo significa che possiamo calcolare R_0 anche per distribuzioni dell'età diverse da quella uniforme.

Sinora, abbiamo preso in considerazione solo la popolazione infettabile; supponiamo ora esista una percentuale q che (o per aver già contratto la malattia ed essere guarita o per una qualche forma di vaccinazione) sia immune: siccome o si è immuni o non lo si è, lavorando sulle percentuali deve essere $S = (1-q)$ e, sostituendo nella formula di livello endemico, otteniamo:

$$q = 1 - \frac{1}{R_0}.$$

Da questa si ricava, se ci passate il termine, l'equazione fondamentale dell'epidemia: se per un motivo o per l'altro riusciamo ad avere un numero di persone immuni *maggiore* di uno meno l'inverso del rateo base di infezione, la malattia scompare: data l'importanza di questo numero, per festeggiare si cambia simbolo e si definisce la *soglia di immunizzazione critica* come:

$$q_c = 1 - \frac{1}{R_0}.$$

Cerchiamo adesso di capire cosa succede se si introduce un vaccino; per semplicità, supponiamo che una parte $q < q_c$ della popolazione sia immune dalla nascita (o, se preferite, sia stato vaccinato prima di aver raggiunto l'età A alla quale si diventa suscettibili al virus); questo cambia il valore di R_0, che indichiamo con un nuovo simbolo:

$$R_q = R_0(1-q). \qquad \text{[2]}$$

Ossia, il rateo base di infezione diminuisce: la cosa è piuttosto logica, in quanto *diminuisce* la popolazione suscettibile, quindi il virus ha meno bersagli.

Questo però influisce anche sull'età media A alla quale si rischia l'infezione: infatti, dalla [1] possiamo ricavare l'espressione di A_q in funzione di R_q, ed effettuare quindi la sostituzione data dalla [2]:

$$A_q = \frac{L}{R_q} = \frac{L}{R_0(1-q)} = \frac{A}{1-q}.$$

Che è equazione importantissima, in quanto mostra che un programma di vaccinazione innalza l'età media dell'infezione, ossia gli individui non vaccinati *sperimentano una diminuita virulenza della malattia*; quindi per l'eradicazione di una malattia non è necessario che si vaccini il 100% della popolazione, ma solo una percentuale critica che, grazie alle formule sopra ricavate, possiamo calcolare[18].

Tutto questo, secondo noi, rappresenta un'interessantissima applicazione di matematica applicata; resta da valutare quale sia la sua effettiva utilità, visto che molte delle cose che abbiamo considerato costanti hanno la pessima abitudine, quando si arriva al mondo reale, di diventare delle variabili.

Per risolvere questo problema, si utilizzano quelli che vengono detti ***Modelli Compartimentali***: si divide la popolazione in categorie e si cerca di stabilire la loro dinamica rispetto alle diverse epidemie. Cominciamo dal modello più semplice.

7 *Il modello "S.I.R."*

L'idea è indicata nella Figura 7: Un gruppo di persone sono suscettibili alla malattia (***S***); col tempo, alcune si ammalano e passano nello stato di infetto (***I***) per poi guarire (***R***); dalle iniziali dei tre stati, il modello è noto come "***Modello S.I.R.***"[19]. Ora, quello che si vorrebbe riuscire a definire è come si comporti un sistema di questo genere. Per prima cosa, come al solito, ci servono un po' di parametri, in particolare sapere quali siano i ratei di transizione tra una fase e l'altra.

Per il passaggio da ***S*** a ***I***, il rateo di transizione viene indicato con βI; in pratica β rappresenta la probabilità che un ***S***, entrando in contatto con un ***I***, divenga un ***I***.

Il passaggio da ***I*** a ***R*** viene indicato come υ: questo valore si misura piuttosto facilmente una volta che sia nota la durata della malattia *D*; molto semplicemente, $\upsilon = \frac{1}{D}$; questo valore non è a tutti gli effetti una costante, potendo dipendere da moltissime variabili; di solito, si assume una distribuzione esponenziale (negativa), ma se ne possono usare anche altre[20]. Supponiamo inoltre che ***D*** sia un periodo molto breve confrontato con la speranza di vita della popolazione, in modo tale da non dover tener conto dei cicli di nascita e morte all'interno del nostro modello.

Bene, l'evoluzione di questi stati nel tempo si descrive attraverso tre semplici equazioni (evidentemente differenziali, visto che studiamo come variano nel tempo):

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta IS \\ \frac{dI}{dt} = \beta IS - \upsilon I \\ \frac{dR}{dt} = \upsilon I \end{cases} \qquad [3]$$

[18] Vi diciamo, casomai voleste fare qualche conto, che il rateo base di infezione della H1N1 è dalle parti di 2,3 (mentre stiamo scrivendo pare sia stata rilevata una mutazione resistente agli antivirali standard, ma fortunatamente non è aumentato R_0 e il vaccino ha la medesima efficacia). La "spagnola" viaggiava dalle parti del valore 2,8 e le più grandi epidemie del passato avevano valori di R_0 stimati tra 5 e 20.

[19] Il modello può sembrarvi molto semplice, ma è stato una meraviglia nell'analisi di alcune malattie infantili quali morbillo, parotite (orecchioni) e rosolia.

[20] Non ultima, una che abbiamo trattato di recente (PM128, "Fast Food"), l'Erlang(h)iana. Certo che per considerare l'infezione un "servizio" ce ne vuole, ma a quanto pare funziona…

Siccome a noi piacciono molto le cose con un nome, questo è noto come ***Modello di Kermak e McKendrick***; l'aspetto è ingannevolmente semplice, in quanto il sistema non è lineare e non ammette soluzione analitica; comunque, un po' di cose si possono vedere.

Tanto per cominciare, notate che dal nostro sistema non sparisce nessuno e non compare nessuno (abbiamo detto che non teniamo conto di nascite e morti); questo si esprime come:

$$\frac{dS}{dt}+\frac{dI}{dt}+\frac{dR}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad S(t)+I(t)+R(t)=N$$

ossia è costante e pari all'intera popolazione; questo, dal punto di vista matematico, significa che possiamo far saltare una delle variabili.

Inoltre, se ci pensate un attimo, ritroviamo un nostro vecchio amico:

$$R_0=\frac{\beta}{v}$$

e sappiamo che questo è calcolabile con ragionevole facilità.

Il sistema [3] diventa allora un po' più trattabile e si ottiene

$$S(t)=S(0)e^{-R_0(R(t)-R(0))};$$

attenzione che R_0 è cosa ben diversa da $R(0)$; quest'ultimo indica il valore iniziale dei soggetti guariti (tra i quali sono compresi gli immuni e i vaccinati); comunque anche questa equazione è abbastanza intrattabile; si ricava però che per $t \to +\infty$, per quanto riguarda i guariti si ha:

$$R_\infty=1-S(0)e^{-R_0(R(t)-R(0))}.$$

Che è sempre intrattabile, ma si possono almeno fare alcune interessanti considerazioni: ad esempio che anche alla fine di un'epidemia, *non tutti sono guariti, quindi qualcuno resta suscettibile*, ossia un'epidemia termina quando diminuisce il numero degli infetti, non quando spariscono i suscettibili.

A qualcuno può essere venuto il dubbio che il modello sia un po' troppo semplicistico, visto che non tiene conto del fatto che la gente nasce ed ha una certa speranza di vita; per lasciare i conti semplici, supponiamo una popolazione in cui i ratei di nascita e di morte siano uguali, e quindi la popolazione si mantenga costante: indichiamo questi ratei con μ e modifichiamo le equazioni differenziali di [3]:

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt}=-\mu N-\mu S-\beta\dfrac{I}{N}S\\ \dfrac{dI}{dt}=\beta\dfrac{I}{N}S-(v+\mu)I\\ \dfrac{dR}{dt}=vI-\mu R\end{cases} \qquad [4]$$

(i nostri "***I***" sono stati divisi per ***N***, ma questo solo per il fatto che prima parlavamo di percentuali mentre adesso trattiamo una data popolazione); inoltre abbiamo sempre il fatto che $S+I+R=N$, e anche in questo caso possiamo calcolare il rateo base di infezione:

$$R_0=\frac{\beta}{\mu+v}.$$

E qui succedono delle cose interessanti. Infatti, tanto per cominciare si vede che:

$$R_0 \leq 1 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty}[S(t),I(t),R(t)] = [N,0,0]$$

ossia ***se il rateo di infezione primario è minore o pari a 1, la malattia scompare***; questo stato è di solito indicato con la sigla ***DFE***, ed è uno stato stabile libero da infezione (Disease-Free Equilibrium).

Nel caso inverso la cosa è più complessa, ma anche qui possiamo ricavare uno stato stabile:

$$R_0 > 1, I(0) > 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty}[S(t),I(t),R(t)] = \left[\frac{N}{R_0}, \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1), \frac{\upsilon}{\beta}(R_0 - 1)\right]$$

e anche questo è uno stato stabile, visto che tutti e tre i valori tra parentesi quadre sono delle costanti (abbiamo imposto anche che all'inizio ci sia una malattia, con un certo numero di persone infette); la nostra malattia è diventata ***endemica*** e lo stato è indicato con la sigla ***EE*** (Endemic Equilibrium).

Se siete riusciti a seguirci sin qui, probabilmente avete in mente un'obiezione del tipo: "Guarda che il raffreddore di solito si prende d'inverno…". Vero, infatti la complicazione successiva è quella di considerare la forza dell'infezione come una funzione *periodica*, ossia:

$$F = \beta(t)\frac{I}{N}, \quad \beta(t+T) = \beta(t);$$

nel caso del raffreddore, T vale giustamente un anno; questo modifica il nostro modello (dal quale escludiamo la variabile R, visto che comunque $R = N - S - I$) come:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = \mu N - \mu S - \beta(t)\dfrac{I}{N}S \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta(t)\dfrac{I}{N}S - (\upsilon + \mu)I \end{cases}. \qquad [5]$$

Vediamo prima il caso semplice: calcoliamo la media sul periodo (l'anno, nel caso del raffreddore) e supponiamo questa sia minore di 1:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\beta(t)}{\mu + \upsilon}dt < 1 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty}[S(t),I(t)] = [N,0],$$

ossia ***siamo in un DFE***, l'equilibrio in assenza di malattia; nel caso invece il parametro sia maggiore di uno, iniziano dei fenomeni di ***risonanza*** che, giustamente, sono decisamente caotici; nei casi più semplici questo modello spiega il fatto che ci sia una periodicità poliennale nella virulenza della stessa malattia.

Chi ha parlato di vaccini? Ottima domanda. Anche qui, partiamo da un caso semplice: supponiamo basti vaccinarsi in tenera età e che questa vaccinazione ci renda immuni per tutta la vita; una volta tanto, il caso semplice è anche un caso reale, come dovreste sapere tutti.

Supponiamo che una parte $P \in (0,1)$ della popolazione si vaccini; cambiamo la nostra variabile ***R*** in ***V*** (nel senso che consideriamo una categoria unica sia quelli guariti e diventati immuni che i vaccinati) e le nostre equazioni diventano:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\mu N(1-P) - \mu S - \beta \dfrac{I}{N} S \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta \dfrac{I}{N} S - (\upsilon + \mu) I \\ \dfrac{dV}{dt} = \mu NP - \mu V \end{cases} . \qquad [4]$$

La nostra nuova classe V tenderà, col passare del tempo, a NP e il nostro comportamento di lungo periodo per raggiungere la sparizione della malattia (stato ***DFE***):

$$R_0(1-P) \le 1 \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} [S(t), I(t)] = [N, 0]$$

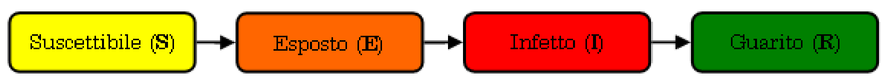
Il caso dell'equilibrio endemico diventa allora:

$$R_0(1-P) > 1, I(0) > 0 \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} [S(t), I(t)] = \left[\frac{N}{R_0(1-P)}, \frac{\mu}{\beta}(R_0(1-P)-1), \frac{\upsilon}{\beta}(R_0(1-P)-1) \right]$$

insomma, tutti gli R_0 sono moltiplicati per $(1-P)$, e questo cambia decisamente le cose; infatti, a questo punto esiste un valore $P^* = 1 - \dfrac{1}{R_0}$ ***critico***: per ratei di vaccinazione maggiori di questo valore, *la malattia viene eradicata*[21].

Il ***S.I.R.*** è un ottimo modello ma, come dicevamo all'inizio, non necessariamente funzionante per tutte le malattie; infatti esistono altri modelli per altre malattie (tranquilli, li vediamo molto alla svelta: tanto, se siamo arrivati qui siamo ormai quasi degli esperti).

Per alcune malattie, bisogna prevedere un periodo nel quale la persona è infettata, ma non è ancora infettiva: ossia, c'è un periodo di latenza tra l'infezione vera e propria e la comparsa della malattia: il soggetto è *Esposto* alla malattia (da cui il nome dello stato). Il diagramma diventa quello di Figura 8 e il modello prende il nome di ***S.E.I.R.***.



8 *Il modello "S.E.I.R."*

Come prima, dobbiamo prevedere dei parametri per il periodo di latenza; anche qui, di solito, si assume che sia una variabile casuale distribuita esponenzialmente secondo un parametro a (ossia il periodo medio di latenza è a^{-1}): le equazioni differenziali del sistema non dovrebbero più spaventarci, visto che sono le solite: semplicemente, ne abbiamo introdotta un'altra contenente il parametro α:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = \mu N - \mu S - \beta \dfrac{I}{N} S \\ \dfrac{dE}{dt} = \beta \dfrac{I}{N} S - (\mu - \alpha) E \\ \dfrac{dI}{dt} = \alpha E - (\upsilon - \mu) I \\ \dfrac{dR}{dt} = \upsilon I - \mu R \end{cases} \qquad [5]$$

[21] Ultimo caso, la vaccinazione antivaiolosa: non è più obbligatoria.

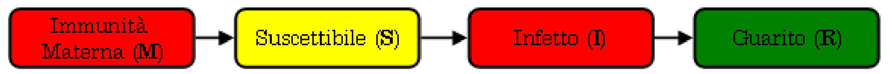
Anche qui possiamo eliminarne una, sempre in funzione del fatto che $S+E+I+R=N$.

Siccome sappiamo benissimo quale sia il parametro più importante, ci limitiamo a dire che in questo caso:

$$R_0 = \frac{\alpha}{\mu+\alpha}\frac{\beta}{\mu+v};$$

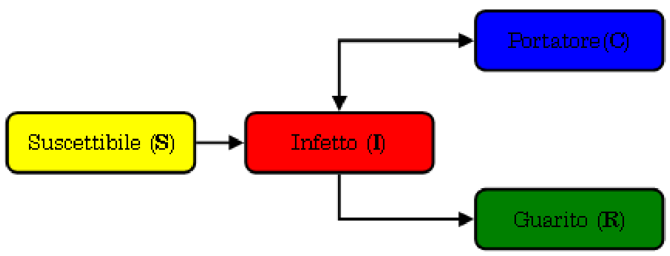
qui, se il modello "funziona come il raffreddore" (ossia il rateo di infezione per contatto varia) le cose diventano decisamente complicate, e lasciamo perdere.

Poco sopra, avevamo detto "morbillo"; ora, se ci pensate un attimo, questa malattia ha un modello leggermente diverso da quelli visti sinora; infatti in questo caso non si nasce nello stato S (suscettibile), ma esiste un certo periodo in cui si è immuni grazie agli anticorpi materni; questo introduce un nuovo stato M (immunità materna) nel modello, che quindi diventa come quello indicato in Figura 9: prima immuni, poi suscettibili, quindi infetti e infine guariti; in quest'ultimo stadio, viene trasmessa l'immunità per i primi mesi di vita. No, non ci facciamo conti sopra; le equazioni ve le scrivete voi.



9 *Il modello M.S.I.R.*

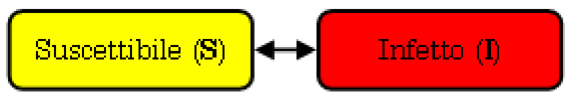
Per completezza, vi diamo un altro modello, o meglio un altro stato che potete applicare a uno qualsiasi dei modelli precedenti; esistono delle malattie (come ad esempio la tubercolosi) per le quali la guarigione non è mai completa: è possibile entrare in uno stato di *portatore* (indicato con ***C***, dall'inglese "Carrier") dal quale si può tornare allo stato di infetto (mostrando i sintomi) o comunque essere portatori sani (non mostrando i sintomi ma infettando altre persone[22]). In questo caso il diagramma di stato diventa quello di Figura 10: notate che, in questo caso, la freccia che collega lo stato di infetto con quello di portatore è *bidirezionale*, ossia diventa possibile tornare a mostrare i sintomi della malattia ed essere malati a tutti gli effetti: dipende, appunto, dalla malattia.



10 *Il modello "a portatore"*

Due buone notizie: il prossimo è l'ultimo, ed è anche il più semplice. Torniamo al raffreddore.

Qui, anche se la cosa non è piacevole, di sicuro è facile da spiegare: non esiste lo stato di "guarito, e in qualsiasi momento si rischia di riprenderlo: insomma, il sistema ha due stati, "suscettibile" e "infetto":



11 *Il modello "S.I.S."*

[22] La nostra copia del 1968 del *Guinness Book of Records* riporta il triste record di Mary Mallon (detta Mary la tifoidea) che, continuando a lavorare nel campo alimentare pur essendo portatrice di febbre tifoide, infettò un numero imprecisato ma comunque notevole (Wikipedia qui è contraddittoria: mentre la pagina di epidemiologia dice "ventidue", quella dedicata a Mary Mallon dice "cinquantatrè") di persone. Citiamo l'anno del Guinness in quanto non sappiamo se l'AIDS abbia consegnato questo non invidiabile trofeo a qualcun altro.

notate che, come nel caso del portatore, il legame tra i due stati è bidirezionale: o uno è raffreddato o non lo è, se lo è può diventarlo e se non lo è può guarire.

"E dove sarebbe, la buona notizia?" Che le equazioni del sistema sono facili da scrivere:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma I \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \end{cases}$$

e le condizioni al contorno (somma delle due derivate pari a zero e $S + I = N$) sono abbastanza evidenti: non solo, ma se le inserite nel sistema ottenete:

$$\frac{dI}{dt} = (\beta N - \gamma)I - \beta I^2 .$$

Forse è meglio se vi do la "buona notizia": in questo caso, la dinamica dell'infezione è governata dall'*equazione logistica*, che conosciamo abbastanza bene; quindi, sempre sotto la condizione iniziale che all'inizio ci sia qualcuno infetto (ossia $I(0) > 0$), il caso endemico diventa:

$$\frac{\beta N}{\gamma} > 1 \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} I(t) = \frac{\beta N - \gamma}{\beta}$$

E questo è tutto, credo.

"Rudy! Ferma! Avevi detto che ci davi una tabella con i simboli!" Oops… Vero. Beh, ve la metto qui. Tanto ormai non dovrebbe servirvi più a nulla. Siete vaccinati, nei confronti delle equazioni ostiche.

R_0	Rateo base di infezione
L	Speranza di vita della popolazione
S	Popolazione suscettibile di infezione
A	Età alla quale si diventa suscettibili di infezione
q	Percentuale immune (per vaccinazione o guarigione)
q_c	Soglia di immunizzazione critica
β	Probabilità di infezione per il contatto tra un Suscettibile e un Infetto
D	Durata della malattia
υ	Rateo di passaggio da Infetto a Guarito (inverso di D)
μ	Rateo di nascita (e di morte) di una popolazione
P	Rateo di vaccinazione della popolazione: $P \in (0,1)$
a^{-1}	Periodo di latenza della malattia (infetto ma non infettivo)

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms