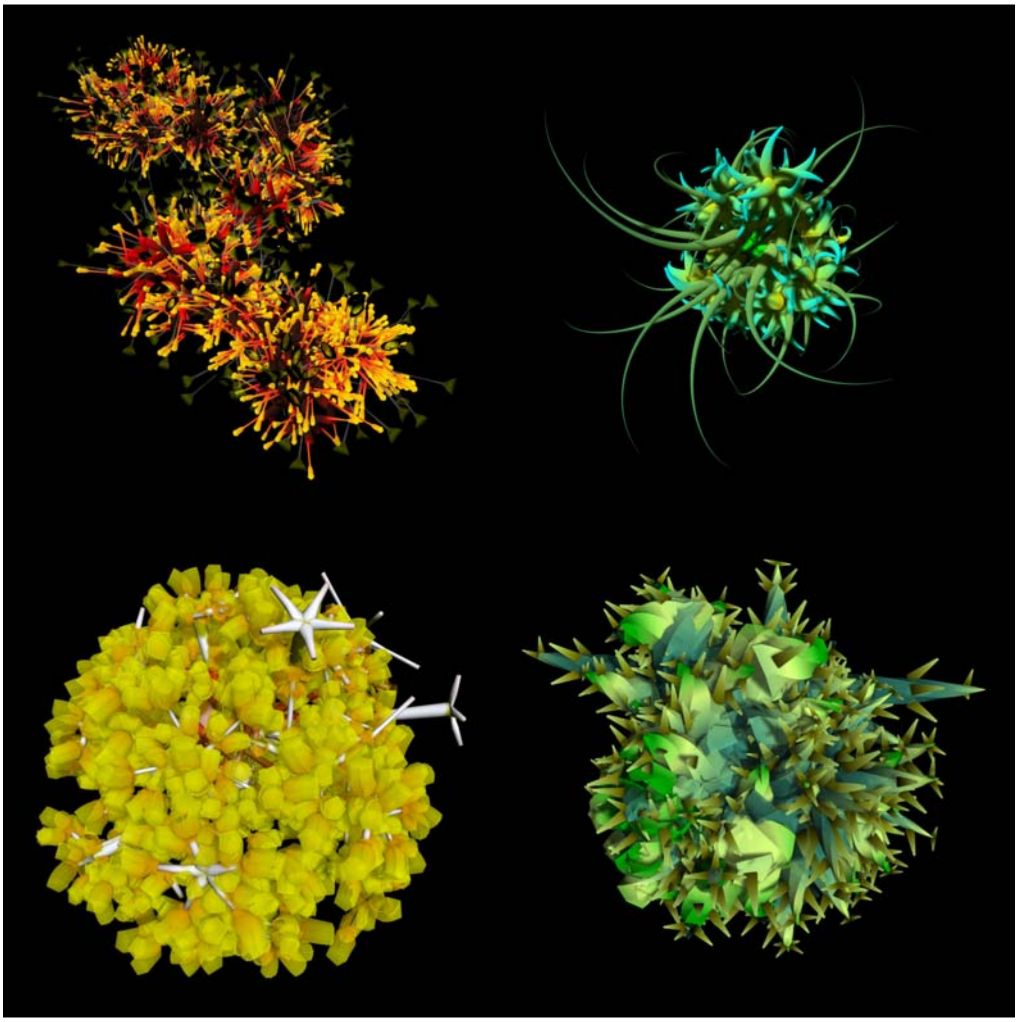
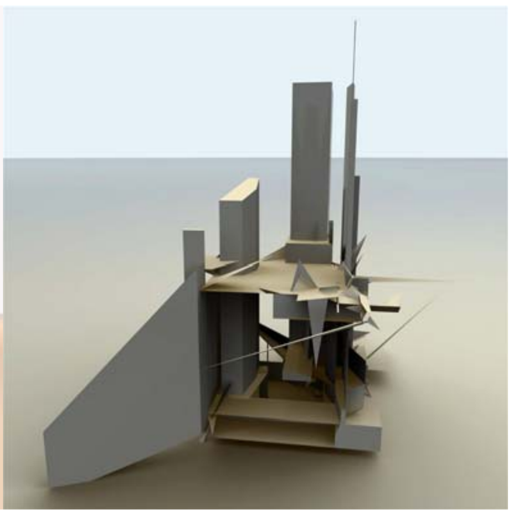
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 128 – Settembre 2009 – Anno Undicesimo





Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM127 ha diffuso 2403 copie e il 27/08/2009 per Google eravamo in 8'760 pagine.

Alex DRAGULESCU (non ce ne voglia, ma il cognome è tutto un programma) ha preso i codici dei *malware* più diffusi e, dandoli in pasto a un programma del quale non conosciamo i dettagli, ha ottenuto le stupende immagini della copertina. Un po' meno riuscita secondo noi – ma sempre interessante – è l'analisi effettuata nelle ultime due immagini sulla diffusione dei messaggi di *spam* attraverso i diversi domini. Altri avevano ottenuto opere d'arte dalla spazzatura, ma nessuno ci aveva ancora provato con quella virtuale (nota per gli addetti ai lavori: il primo in alto a destra è *MyDoom*).

1. Le sue prime settanta pagine

> *This discovery, indeed, is almost of that kind which I call* Serendipity, *a very expressive word, which, as I have nothing better to tell you, I shall endeavour to explain to you: you will understand it better by the derivation than by the definition. I once read a silly fairy tale, called the three Princes of Serendip: as their Highnesses travelled, they were always making discoveries, by accidents and sagacity, of things which they were not in quest of: for instance, one of them discovered that a mule blind of the right eye had travelled the same road lately, because the grass was eaten only on the left side, where it was worse than on the right--now do you understand Serendipity?* [1] (Horace Walpole in una lettera a Horace Mann, 1754)

Una volta si chiamava Ceylon: e, a dire il vero, si chiama ancora così su moltissime scatole da tè. Poi, come molte altre ex-colonie, ha deciso di presentarsi al mondo con un nome che fosse sentito proprio più dagli ex-colonizzati che dagli ex-colonizzatori[2], e ha preso il posto nell'atlante con il nome di Sri Lanka. La terra, che tutti i turisti e i documentari sono concordi a dichiarare bellissima, è comunque sempre quella: l'isola a forma di goccia sotto il vertice del grosso triangolo dell'India.

È facile associare lo Sri Lanka al mare celeste e alle spiagge candide dell'Oceano Indiano; altrettanto facile – tant'è che lo abbiamo già fatto – legarlo al tè e alla cannella, e volendo, anche alla lunga e affascinante storia della Compagnie delle Indie Orientali. E, volendo essere un po' più attuali e presenti a questo secolo, si potrebbe facilmente deviare il discorso sull'ennesimo conflitto etnico, sulla difficile e sanguinosa convivenza tra Cingalesi e Tamil. Ma tanto più è facile l'associazione tanto meno è sorprendente, ed è per questo che ci alletta molto di più segnalare le sorprendenti relazioni tra lo stato di Colombo e l'acido lisergico, il forno a microonde, la penicillina, Urano, la dinamite, il Viagra, il teflon, l'America, le colle ciano-acriliche, la saccarina, l'aspartame, la pillola anticoncezionale, i biscotti al cioccolato, il dualismo onda-corpuscolo, e altre diecimila scoperte fondamentali dell'umanità.

La relazione sta tutta in una favola, quasi a dimostrare per l'ennesima volta che la fantasia aderisce alla memoria e ai sentimenti con una forza che la scienza deve ancora imparare a riprodurre. La favola, o meglio il racconto, si intitola "*I tre principi di Ceylon*"; fu reso celebre da Horace Walpole[3], che ne parlò in una lettera ad un amico. Walpole, in un afflato per quei tempi insolito di correttezza terminologica e politica, usò nella

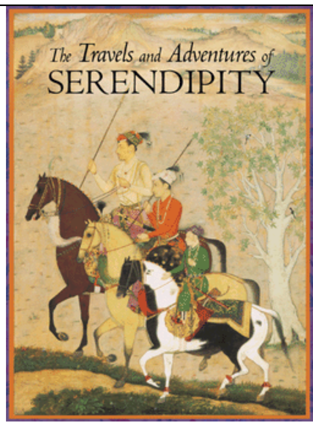
---

[1] «*Questa scoperta, in realtà, è quasi di quel tipo che io chiamo* Serendipità*, un termine molto espressivo che, visto che non ho niente di meglio da dirti, ora vado ad illustrarti: lo capirai meglio dalla sua derivazione piuttosto che dalla definizione. Una volta ho letto una sciocca favoletta intitolata i tre Principi di Serendip; quando le loro Altezze Reali viaggiavano facevano sempre delle scoperte, per caso e per sagacità, di cose di cui non erano affatto in cerca; ad esempio, uno di loro capì che un mulo cieco dall'occhio destro aveva in precedenza percorso la stessa strada, perché l'erba risultava mangiata sul lato sinistro, benché fosse peggiore di quella a destra. Capisci ora la Serendipità?*». In realtà, l'episodio citato da Walpole è proprio il primo della storia, ed è solo una parte di una complicata inferenza e deduzione che i principi fanno su un particolare cammello perduto. La somiglianza con la deduzione di Guglielmo da Baskerville all'inizio del *Nome della Rosa* di Umberto Eco è impressionante.

[2] A dispetto del nome Ceylon, i primi colonizzatori furono in realtà i portoghesi, che infatti chiamarono l'isola *Ceilão*; il toponimo inglese è la traslitterazione albionica del termine portoghese.

[3] Horace Walpole (1717-1797), conte di Orford, scrittore inglese. Noto soprattutto per aver scritto nel 1764 quello che viene considerato il primo romanzo gotico, *Il castello di Otranto*. A dimostrazione del sovrumano potere della *Serendipità* (o forse solo della suprema *Banale Coincidenza*) questo pezzo è stato inconsapevolmente scritto a pochi chilometri di distanza da quello stesso castello. Al momento, detto maniero ospita un'interessante mostra di Mirò: dubitiamo comunque che il pittore catalano possa rientrare nel discorso, serendipità o meno.

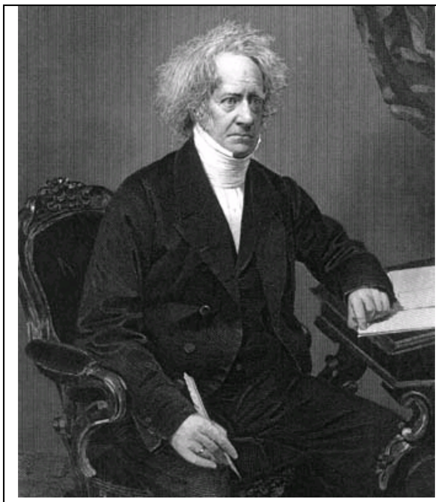
citazione il vecchio nome persiano dell'isola, e scrisse nella sua lettera di aver appena finito di leggere la *sciocca favoletta* intitolata "*The Three Princes of Serendip*". E siccome la favola parlava di questi tre agiati e fortunati reali rampolli che viaggiando scoprivano cose meravigliose e affascinanti senza fare neppure la fatica di cercarle – anzi, sembravano trovarle proprio quando meno si aspettavano di rinvenire alcunché di interessante – Walpole adottò il termine *serendipity* per illustrare all'amico quello stato di grazia fortunata in cui qualcuno, senza averne l'intenzione, fa una scoperta interessante e importante, o quantomeno più interessante e importante di quanto stava eventualmente cercando.



1

2 *I principi di Serendip*

Per quanto poco aderente ai principi della correttezza politica e di genere, la definizione più divertente di serendipità è probabilmente quella data da Julius H. Comroe: "*La serendipità è cercare un ago in un pagliaio e trovarci la figlia del contadino"*, anche se a voler prendere letteralmente la battuta si rischia di interpretare il termine solo come una scoperta fortunata. In realtà, come dice fin dall'inizio l'inventore del termine, un elemento importante e non trascurabile della *serendipity* è proprio la *sagacity*, ovvero la sagacia, la capacità di interpretare abilmente, con intelligenza, i piccoli segnali imprevisti che possono portare alla grande scoperta inattesa[4]. In effetti, tanto per tornare agli eventi precedentemente elencati, la scoperta dell'acido lisergico avvenne per caso mentre David Hofmann cercava applicazioni mediche di alcuni funghi della segale, e non dubitiamo che per prevedere le possibili applicazioni del LSD occorra una certa sagacia, e molta capacità visionaria. Ma ogni scoperta inattesa richiede particolari capacità di osservazione, e soprattutto un'elevata apertura mentale, una prontezza nel cambiare direzione e obiettivo, quando si presenta la fortunata occasione. Percy Spencer stava testando un magnetron destinato ad un sistema radar, quando scoprì di aver praticamente tostato una nocciolina che aveva in tasca, esponendola alle onde del magnetron. Fleming aveva mal disinfettato una cultura di batteri, prima di partire per le vacanze, così al ritorno potè accorgersi che le muffe di Penicillium avevano ucciso i batteri che erano sopravissuti alla sua cattiva pulizia.



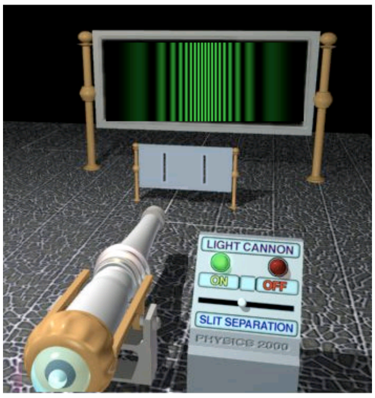
3 *J.F. William Herschel*

Urano fu inizialmente preso per una cometa dal grande William Herschel, anche perché il nostro stava proprio cercando comete. Fu il notare l'orbita stranamente circolare dell'astro a farlo insospettire, e in ultima analisi a fargli scoprire il primo pianeta oltre quelli noti fin dalla notte dei tempi. Fu per caso, per accidente, che Alfred Nobel si ritrovò a mescolare nitroglicerina e fulmicotone, ottenendo la gelignite che poi avrebbe ulteriormente perfezionato in dinamite. Il *sildenafil citrate* che probabilmente infesta ancora di spam la vostra mailbox era stato sperimentato come farmaco contro l'ipertensione e l'angina pectoris: i risultati del test furono abbastanza deludenti, ma Ian Osterloh si accorse di un curioso effetto collaterale che poteva avere interessanti sviluppi commerciali, ed è per questa osservazione che il farmaco si trova oggi in tutte le

[4] Insomma, la definizione di Comroe potrebbe essere più calzante (anche se certo meno divertente) immaginando che, nel cercare l'ago nel pagliaio, un osservatore attento potesse trovare uno spillo, che è cosa diversa: dallo spillo dedurre l'esistenza di una qual certa attività di sartoria, quindi capire che il pagliaio viene usato anche come atelier da qualcuno, e infine scoprire, dietro una parete di balle da fieno, la giovane fanciulla intenta a provarsi un elegante abito appena cucito.

farmacie con il nome *Viagra* scritto sulle etichette. Dell'errore di calcolo nella valutazione del diametro terrestre che portò alla scoperta dell'America non vale neppure la pena parlare, ma il teflon che ricopre le padelle antiaderenti ha quasi una doppia serendipità: fu scoperto cercando un nuovo tipo di gas per frigoriferi, e usato inizialmente come lubrificante, prima che Roy Plunkett, lo scopritore, lo destinasse al ruolo attuale. Di doppia scoperta (o forse di *scoperta ripetuta*) si deve davvero parlare per le colle ciano-acriliche, perché Harry Coover se le ritrovò in laboratorio una prima volta quando cercava di sinterizzare del materiale plastico per mirini, poi tentando di produrre un polimero resistente al calore. I due tipi di ricerche sembrano abbastanza distanti tra loro e dalle supercolle, ma a ben vedere anche i farmaci anti-ulcera e i derivati del catrame di carbone sembrano molto distanti fra loro, eppure l'aspartame deriva dai primi e la saccarina dai secondi: James Schlatter, in realtà, non aveva nessuna intenzione di assaggiare il suo sperimentale farmaco contro l'ulcera, ma questo gli finì in bocca per caso. Allo stesso modo sembrano essere accidentali le scoperte di due popolarissimi oggetti destinati ad essere inghiottiti. I biscotti con le gocce di cioccolato, inventati da Ruth Wakefield, che ottenne le gocce di cioccolato cercando sostituti per ingredienti che non aveva a disposizione, e la pillola anticoncezionale, prodotta in via semi-accidentale da Carl Djerassi mentre cercava di rendere assumibile per via orale il progesterone sintetico.

L'ipotesi di de Broglie sulla duplice natura – corpuscolare e ondulatoria – della materia è, proprio in quanto ipotesi, certo non casuale né accidentale: ma l'esperimento di Davisson e Germer che ne dimostrò la validità fu abbastanza fortunato, visto che non aveva la minima intenzione di dimostrare una così misteriosa proprietà. I due[5] se ne stavano ai Bell Labs indagando sulla struttura atomica dei metalli, e forse non avevano mai neppure sentito nominare Louis de Broglie. I loro esperimenti avevano come target del fascio di elettroni dei bersagli in nickel, ma una falla nel loro sistema a vuoto surriscaldò e portò alla cristallizzazione una delle piastre in nickel. La cristallizzazione del metallo produsse poi le celebri figure di interferenza una volta investito dal fascio degli elettroni, ma Davisson e Germer si limitarono ad essere molto stupiti dell'esito, che non avevano davvero modo di interpretare. Fu poi una discussione con altri colleghi durante una vacanza in Inghilterra a palesare a Davisson l'importanza dell'esperimento, che non per nulla gli valse il Nobel della Fisica nel 1937.



4 *L'esperimento di Davisson e Germer…*

L'elenco delle importanti scoperte avvenute più o meno per caso rischia davvero di essere lunghissima[6]: e, se ci si perdona lo stupido gioco di parole, è abbastanza evidente che una così lunga lista di scoperte accidentali non può essere accidentale. Perfino Shakespeare, che pur essendo un grandissimo non può certo essere considerato un ricercatore sperimentale, nell'Enrico V ricorda che "*tutte le cose sono pronte se lo sono le nostre menti*"; e, in maniera un po' meno poetica ma più esplicita, Louis Pasteur che era un professionista della sperimentazione e delle scoperte casuali: "*nel campo delle osservazioni, il caso favorisce solo le menti preparate*[7]".

[5] Davisson e Germer sono spesso abbreviati, negli articoli non troppo paludati di fisica, con le iniziali accoppiate D&G; noi non ce la sentiamo di farlo, per un'evidente inflazione delle citate iniziali in un campo che con la fisica quantistica ha oggettivamente poco a che vedere.

[6] Quelle che abbiamo riportato noi le abbiamo prese, come al solito, da Wikipedia (sia italiana che inglese); ma sono davvero pochissime rispetto a quelle elencate: e non si può neanche dire che quelle citate siano le scoperte accidentali più importanti.

[7] «*Dans les champs de l'observation le hasard ne favorise que les esprits préparés*».

Sembra pertanto esserci un accordo generale, da Walpole a Pasteur, passando da Shakespeare fino ai giorni nostri, sul fatto che la *serendipità* sia composta da due ingredienti fondamentali, la *fortuna* e *l'intelligenza*. E in italiano l'argomentazione è quasi rafforzata inconsapevolmente dall'assonanza con il termine *serenità*: del resto, fortuna e intelligenza sono doti assai positive, e come tali inducono serenità. E, ancora più evidentemente, lo spirito acuto e nobile dei Tre Principi di Serendip non potrebbe essere tale senza una meditativa pace interiore, una serenità d'animo verso gli uomini e la natura.

Però in questo quadretto positivo e rassicurante manca un elemento: ogni concetto ha il suo contrario, il rovescio della medaglia, la reazione uguale contraria che newtonianamente si oppone all'azione; così, una volta accettata di buon grado l'introduzione del termine *serendipità* nei vocabolari, qualcuno potrebbe prendersi la briga di inventare una acconcia parola per definire il contrario? Perché il contrario di serendipità esiste: se non nei vocabolari, almeno nella realtà. Il candidato ideale potrebbe essere una delle molte varianti della Legge di Murphy[8]: del resto, se nella serendipità si innestano e creano un circolo virtuoso la fortuna e l'intelligenza, non è per niente difficile considerare i disastri che quotidianamente genera la perfida alleanza tra sfortuna e stupidità.

Ci sembra comunque che il vero contrario di serendipità non debba scaturire da entrambi i termini opposti, proprio perché la connivenza di idiozia e malasorte è troppo comune per meritare un termine speciale: piuttosto, questo contrario dovrebbe indicare quei casi particolarmente disgraziati in cui qualcuno, pur attento e intelligente, si ritrovi ad cercare con attenzione e cura nei paraggi di un ricchissimo tesoro, sfiorandolo ripetutamente ma senza avere mai la ventura di trovarlo. A differenza di quanto succede con gli esiti fortunati, non possiamo sapere quante volte sia accaduto qualcosa del genere, proprio perché non esiste alcun "esito" da registrare, da tramandare ai posteri: se siete in possesso del biglietto vincente della lotteria, ve lo ricorderete di certo nel futuro; se lo avete toccato in autogrill senza comprarlo, invece, non lo saprete mai. Esistono comunque dei casi particolari in cui eventi del genere sembrano proprio essere accaduti: e leggendo la sua storia, potremmo provare a proporre il termine "*saccherità"* come candidato contrario di "*serendipità"*.

Giovanni Girolamo Saccheri nacque a Sanremo il 5 Settembre 1667, e probabilmente di lui non sapremmo nulla o quasi se non fosse per la benemerita opera di Eugenio Beltrami: questi fu il primo professore di meccanica razionale della novella Università di Roma capitale, nel 1873, e più in generale fu tra i massimi esperti di geometria differenziale, disciplina che dette lustro a molti nomi di matematici italiani, nel periodo a cavallo tra Ottocento e Novecento. Beltrami riscoprì e mise in risalto un'opera semisconosciuta di Saccheri, che è quella per cui il nostro Giovanni Girolamo viene adesso frequentemente ricordato. Di certo, nei suoi primi anni di vita, lungo la riviera ligure, il piccolo Girolamo non si poneva ancora l'affanno della memoria dei posteri: figlio di un avvocato, mostrò però fin dall'infanzia doti precoci di intelligenza e predisposizione allo studio. Una tale buona predisposizione doveva certo essere assecondata, e in quei tempi, a Genova come nella maggior parte delle altre città italiane, il metodo più diretto e semplice per ottenere una educazione era quello di affidarsi ai Gesuiti. Girolamo entrò quindi appena diciottenne, nel 1685, nel novero della Compagnia di Gesù, dalla quale non si separò mai durante il resto della vita. Del resto, la sezione genovese era da qualche anno molto attiva nell'istruzione di superiore qualità: e lo stesso Saccheri, dopo i primi due anni passati pienamente da studente, cominciò ad insegnare in qualche corso, pur continuando i suoi studi di teologia e filosofia nel Collegio[9]. Ma anche tra i collegi

[8] Ad esempio, come si potrebbe sintetizzare, in un solo lemma da dizionario, il sacrosanto adagio murfiano (o murphiano?) «*la fortuna è cieca, la sfiga ci vede benissimo?*»

[9] Collegio che, del resto, costituì il primo nucleo della futura Università di Genova: l'edificio in cui Saccheri studia è Palazzo Balbi, che oggi è parte integrante della struttura universitaria genovese.

della Compagnia di Gesù esistono differenze, e per meglio formare il promettente giovane, i padri superiori decidono di mandarlo al Collegio di Brera, a Milano, che rappresentava senza dubbio l'eccellenza della formazione superiore gesuitica.

Saccheri, già in grado di tenere corsi agli studenti più giovani, continua a Brera la sua vita da studente, affrontando i corsi usuali di retorica, grammatica, filosofia e teologia. Ed è solo a Milano che viene incoraggiato[10] ad affrontare un po' di matematica, leggendo gli *Elementi* di Euclide; siamo nel 1690, Girolamo ha già ventitré anni ed è ancora del tutto ignaro di aritmetica e geometria.

Nel 1694 Girolamo viene ordinato prete, in quel di Como, ma quasi subito dopo viene nuovamente inviato presso un altro famoso Collegio di Gesuiti, quello di Torino. Qui entra anche nella diplomazia e nei favori di Vittorio Amedeo II di Savoia. Insegna a Torino per tre anni, dal 1694 al 1697, e sono anni importanti per la sua carriera scientifica: è a Torino che scrive il suo primo opuscolo importante, la *Logica Demonstrativa*[11]; non è molto che Girolamo si interessa di matematica, ma il re sabaudo si affida già a lui ogni volta che c'è qualche calcolo complesso da eseguire, e la sua prima opera è già di orientamento logico-matematico. In realtà, l'importanza della *Logica* è superiore a quella che può apparire a prima vista: l'opera si interessa infatti soprattutto di definizioni, e delle possibili differenze all'interno delle stesse: Saccheri intuisce bene la differenza tra quelle che lui chiama "*definitiones quid nominis*" da quelle che battezza invece "*definitiones quid rei*", stanti le prime come semplici attribuzioni di *nomi* e le seconde come descrizioni di enti, di *cose* effettivamente costruibili. Soprattutto, Saccheri mostra che tale distinzione è ben presente ad Euclide stesso, che infatti definisce inizialmente senza remore elementi come *punti* e *rette*, ma nel definire il *quadrato* non ne presuppone l'esistenza prima di averne data una dimostrazione. Non si tratta di meri dettagli: diversi errori nella logica classica discendono proprio dall'errato utilizzo dei due tipi di definizione, e diversi logici moderni[12] riconoscono a Saccheri il merito di aver chiaramente distinto i due diversi tipi di definizione.

Da Torino passò poi ad un nuovo Collegio della Compagnia di Gesù, a Pavia. Qui restò fino alla fine della sua vita, insegnando come sempre teologia e filosofia ma, finalmente, entrando in possesso anche della cattedra di matematica. Morì a Milano, nell'Ottobre del 1733, dopo aver pubblicato anche un libro di statica, intitolato appunto *Neo-Statica*.

L'opera di Saccheri che Beltrami riscoprì nel 1853 era stata pubblicata per la prima volta un secolo e mezzo prima, proprio in quel 1733 che è anche l'anno della morte dell'autore. Si tratta di "*Euclides ab omni naevo vindicatus*", il più celebre dei molti testi che, nella storia della matematica, intendeva dimostrare il Quinto Postulato di Euclide, quello delle parallele. Il titolo stesso dell'opera dimostra in maniera aggressiva quale sia l'opinione di Saccheri sul quinto postulato: è senz'altro un difetto, un neo, un'impurità. E riuscire a dimostrarlo renderebbe l'opera somma di Euclide finalmente perfetta e definitiva, senza più nulla a fare ombra su quel libro geniale. Del resto, anche se è questione davvero stranota e ripetuta in quasi ogni testo di matematica, il Quinto Postulato stona effettivamente nello stile euclideo. Euclide stesso sembra rinviare il più possibile l'uso del postulato, e la sua formulazione appare indiscutibilmente troppo complessa per essere classificabile come affermazione comune o intuitiva. La sua storia è così ricca e le sue citazioni così frequenti che ormai chiunque frequenti anche solo in parte la matematica si

---

[10] Ad incoraggiarlo sono Tommaso e Giovanni Ceva, fratelli matematici. Tommaso è anche (forse soprattutto) poeta.

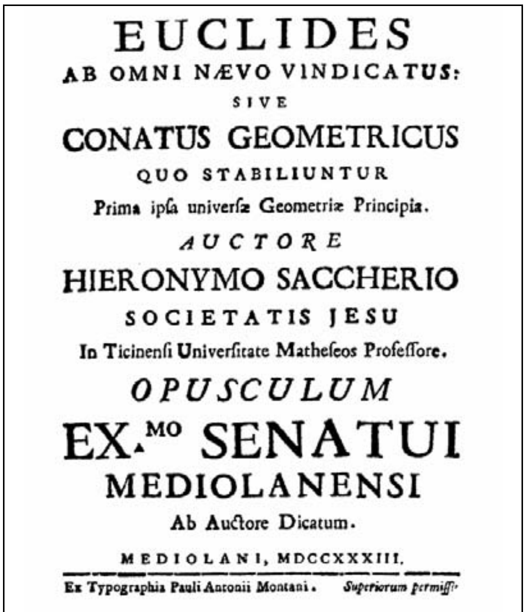
[11] Il libretto, di fatto, contiene il corso di logica che Saccheri teneva a Torino, ma viene pubblicato sotto il nome di uno studente di Saccheri, il conte di Gravere.

[12] Giovanni Vailati, che riscoprì l'opera: "*Questo gli riserva un posto eminente nella storia della logica moderna*"; George Halsted, matematico americano: "*È davvero alto il merito di aver per primo inquadrato questo difficile argomento, e di aver fornito un'analisi dei possibili diversi tipi di errore logico che il mancato riconoscimento delle differenze può generare*"."

è in qualche modo assuefatto alla sua esposizione, ma è soprattutto il confronto con i quattro postulati confratelli a mostrare la sua anomala differenza. Per questo preferiamo riportarli tutti e cinque insieme:

1 - Tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta.
2 - Si può prolungare una retta oltre i due punti indefinitamente.
3 - Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio.
4 - Tutti gli angoli retti sono uguali.
5 - Se una retta taglia altre due rette determinando dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di quella di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove la somma dei due angoli è minore di due retti.

Il quinto è indubbiamente pecora nera nel gregge, vaso di coccio tra vasi di ferro, anello debole della catena: lo si nota anche solo dalla lunghezza dell'enunciato. Gli altri quattro sono, oltre che ragionevolmente evidenti, guidati soprattutto dall'intento di mostrare come si *costruisce* un disegno, o meglio ancora, quali siano le regole lecite per intraprendere un disegno geometrico. Solo in questo senso è interpretabile il quarto, ad esempio, che parla dell'esistenza di molti "angoli retti" e ne impone l'uguaglianza: per Euclide gli angoli retti si costruiscono, e bisogna postularne la congruità. Se il concetto di angolo retto discendesse da una definizione teorica, il quarto postulato non avrebbe necessità di esistere. E l'aspetto *costruttivo* è ben presente anche negli altri: il disegno della retta tra due punti, la sua estendibilità all'infinito, la possibilità di costruire una circonferenza. Il quinto, invece, non c'è davvero nulla da fare: sembra proprio un teorema.


EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissu.

5 *Il frontespizio dell'opera*

Saccheri ha dalla sua l'esperienza fatta con la *Logica Demostrativa*: si rende bene conto che il metodo che ha perfezionato nella sua opera può essergli d'aiuto nella definitiva dimostrazione del Quinto Postulato, e per questo inizia l'azione che, nelle sue intenzioni, deve rendere una volta per tutte immacolata l'opera euclidea[13]. Il suo metodo è infatti molto *logico*, se così si può dire: parte semplicemente da un segmento AB, traccia su di esso le perpendicolari CA e DB, e infine unisce i punti C e D, ottenendo un quadrilatero, che poi sarà chiamato "quadrilatero di Saccheri". A questo punto considera le tre possibilità in merito agli angoli superiori del quadrilatero, quelli in corrispondenza dei vertici C e D: essi potranno essere entrambi retti, entrambi acuti i entrambi ottusi. Conscio del fatto che dimostrare che quegli angoli sono retti equivarrebbe a dimostrare il Quinto Postulato, Saccheri si riserva di procedere per assurdo, dimostrando l'inconsistenza delle altre due possibilità e quindi ottenendo la dimostrazione cercata. Questa ricostruzione della geometria che presuppone di non fare uso del Quinto Postulato viene chiamata da Saccheri "Geometria Assoluta".

Saccheri non ha fretta: da queste premesse comincia a inferire e a dedurre teoremi e proprietà, procedendo con rigore invidiabile. Un percorso di logica e attenzione che deve essergli certo costato molta fatica, ma che è proceduto con sicurezza per gran parte dell'opera. Procede per proposizioni, una dopo l'altra, e arriva alla trentaduesima senza

[13] Oltre a ciò, Saccheri è anche a conoscenza di alcuni tentativi precedenti di dimostrazione, come quello di Wallis e quello di Nasir al Din al Tusi. Forse conosce anche il tentativo di Omar Khayyam, e noi ci rallegriamo nello scoprire come a quel tempo, tra Ceva e Khayyam, poesia e matematica convivessero bene insieme.

trovare alcuna contraddizione, per quanto evidentemente desideri trovarla. In questa ricerca costruisce senza rendersene conto due diverse geometrie, una discendente dall'assunzione che gli angoli superiori del suo quadrilatero siano acuti, l'altra dall'ipotesi che siano ottusi. In termini diversi e moderni, Saccheri ha gettato le basi di quelle che saranno poi chiamate Geometria Ellittica e Geometria Iperbolica: le due principali geometrie non euclidee.

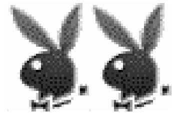
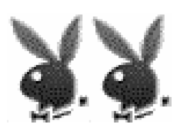
Solo che non se ne accorge. Al contrario dei principi di Serendip, Saccheri cerca qualcosa di importante (la dimostrazione del Quinto Postulato) e nel farlo gira intorno a qualcosa di ancora più grande (le geometrie non euclidee, che contengono al loro interno la dimostrazione che Euclide non aveva bisogno d'essere *vendicato*, e che il Quinto Postulato è effettivamente un postulato), senza rendersi conto di aver trovato un tesoro.

Infatti, lo butta via: dopo la trentaduesima proposizione, si convince d'aver trovato la contraddizione cercata (una sorta di comportamento che *ripugnerebbe* alle rette), e di aver eliminato il difetto dell'opera di Euclide. Non è così: Girolamo non è baciato dalla serendipità, anzi, sembra essere beffeggiato da essa.

Ciò non di meno, le prime settanta pagine di "*Euclides ab omni naevo vindicatus"* sono stupefacenti per costruzione, eleganza e rigore. Sono settanta pagine di perfetta geometria non-euclidea, scritte decenni prima di Gauss, Lobachevsky, Bolyai, Riemann, Poincarè; e, per somma sfortuna, rimaste del tutto ignote a questi maestri delle geometrie non euclidee. Corrado Segre, nel commentarlo dice: "*Le prime settanta pagine (a parte poche frasi isolate) fino alla Proposizione 32 compresa, costituiscono un insieme di acume logico e geometrico che può definirsi perfetto*", e Halstead conferma: "*In merito alla parte costruttiva del lavoro di Saccheri, le prime settanta pagine, fino alla proposizione 32, tutti gli esperti hanno espresso la loro entusiastica ammirazione, il loro piacere nel vederne l'eleganza, lo squisito costrutto artistico*".

Poteva andargli meglio, a Girolamo. Però, in fondo, seppure un po' in ritardo, non gli è andata poi troppo male.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
L'importante non è arrivare: è viaggiare			
Trivial Poursuites			

2.1 L'importante non è arrivare: è viaggiare

…e infatti, grazie alla necessità di dover tenere calmi i VAdLdRM, è durante il viaggio che succedono le cose più interessanti.

Questa volta eravamo diretti in Spagna in due tappe[14], e Fred (reduce dal Comitato di Redazione Zurighese) stava raccontando il tormentone preferito di Doc: "Pensa un numero e dimmelo" "Cinque" "Sbagliato, vinco io", quando ad Alberto è venuto in mente un gioco piuttosto interessante.

"Fred, io penso un numero (naturale) minore o uguale a N (diciamo N=34, ma non perdiamo in generalità); tu hai a disposizione 7 punti, e puoi fare dei tentativi di indovinarlo; ad ogni tentativo io ti dico se il numero da indovinare è maggiore o minore di quello che ho pensato; ad ogni domanda perdi un punto, ma attenzione: se il tuo tentativo è maggiore del numero che ho pensato, di punti ne perdi 2; vinci se indovini il numero senza avere un numero negativo di punti. Piace?"

"Mah, non so se fidarmi di te. Proviamo, ma poi cambiamo il numero dei punti e il valore massimo…"

Reduce da alcune sane letture relative al Dilemma del Prigioniero ripetuto, Alberto è onestissimo nel gioco, anche perché sa che Fred potrebbe proporre di invertire le parti; secondo voi, esiste una strategia vincente? Logicamente, ci aspettiamo uno studio al variare del numero dei punti in funzione del valore massimo del numero pensabile…

Dopo un po' di tempo, Alberto si è accorto che Fred sta inanellando un numero preoccupante di vittorie, quindi ha proposto una variazione sul gioco:

[14] Sosta intermedia a Montpellier: non diciamo che "vale il viaggio", perché francamente non è vero; però il "Parc du Millenaire" ha l'aria di un parco scientifico e sembra di ragguardevoli dimensioni (non l'abbiamo visto); il quartiere "Antigone", esempio di "post-neoclassico" (nome appena inventato), vale la passeggiata. Cercate di immaginarvi lo stile fascisto-classicheggiante di via Roma a Torino tutto in finto marmo bianco, con copie di statue classiche (c'è anche il "Mosè" di Michelangelo) in scala ridotta, le strade con nomi greci (la piazza principale si chiama "Agorá") e il tutto pensato sin dall'inizio come isola pedonale; l'assenza di fasci littori lo rende psicologicamente tranquillo, ma di sera ha comunque un'aria inquietante.

Il centro storico sarebbe bellissimo, se non fosse pavimentato di lattine di birra (vuote e non nostre); noi ci siamo ritrovati a dormire in periferia (in un *relais*), e Rudy si sentiva a casa; tutte le vie attorno avevano nomi di fisici.

"Fred, questa volta voglio essere generoso; ti do' 10 punti, di cui uno è un *jolly*; io penso un numero tra 1 e 50, e tu cerchi di indovinarlo come sopra, alle seguenti condizioni:

1. Se hai zero punti, hai perso;
2. Se hai un numero di punti strettamente positivo, puoi fare un tentativo;
3. Se azzecchi il numero, hai vinto;
4. Se dici un numero minore del numero che ho pensato, perdi un punto;
5. Se dici un numero maggiore del numero che ho pensato, perdi il *jolly*; se lo dici maggiore senza avere *jolly*, hai perso.

Interessa?"

Qui, evidentemente Alberto sta facendo l'avvoltoio; esiste, per Fred, un metodo per almeno accrescere le sue possibilità di vittoria?

2.2 Trivial Poursuites

Nel senso che, essendo ambientato in Spagna, ci pare giusto mettere un titolo mezzo in inglese e mezzo in francese.

Come almeno uno di voi sa, Rudy è stato in ferie dalle parti di Barcellona, e ha scoperto che anche almeno un lettore di RM (Zar) era in zona (e sapeva di Rudy, evidentemente).

Ora, essendo entrambi in ferie, non è che proprio si siano impegnati a cercarsi; non facciamo ipotesi su Zar, ma Rudy era abbastanza terrorizzato dal fatto che il suddetto intendesse porre tutta una serie di domande a proposito di un matematico greco che Zar sta tirando in ballo nel Summer Contest *[…nel senso che **LUI** sta cercando di risolverli, i problemi! Con la fronte imperlata dal sudore della Costa Brava! Mica come voialtri, stravaccati in ufficio con il capo in ferie e l'aria condizionata a palla! (RdA)]*; quindi, si trattava di organizzare veloci vie di fuga in caso di incontro fortuito, e Rudy si è messo a studiare i locali mezzi di trasporto, scoprendo alcune interessanti caratteristiche:

1. I mezzi di trasporto disponibili sono tre: aereo, bus e treno
2. Due città sono legate da un unico mezzo di trasporto
3. Non ci sono tre città legate tra di loro dallo stesso mezzo di trasporto

Adesso, non ci interessa sapere se Rudy ha una strategia di fuga (quella c'è sempre: quando lo chiamano, risponde "*Ya nie panimaiu pa-russky*", e si allontana); preferiamo sapere: al massimo, quante città ci sono in Catalogna?

3. Bungee Jumpers

Provate che, se α e β sono angoli acuti e $\alpha < \beta$, allora è:

$$\frac{\tan\alpha}{\alpha} < \frac{\tan\beta}{\beta}$$

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

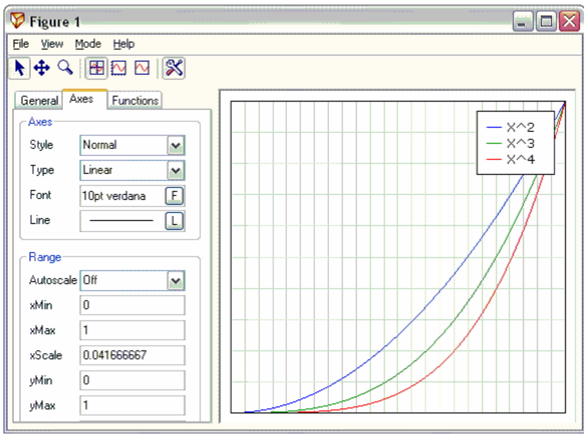
E siamo giunti a settembre, mese tradizionalmente noto per il ritorno alle scuole e al lavoro, ma anche mese in cui questa sezione tende ad essere piuttosto scarna, visto che dipende da contributi agostani.

Come previsto, non è successo molto.

Però c'è sempre qualcosa degno di menzione, come la divertente mail di ***Carlo***, al quale diamo il benvenuto tra solutori e lettori di RM e che si riferisce al problema del concorso proposto il mese scorso proprio in queste *Note*:

> Ho letto il numero 127 e il problema del concorso dei gelati mi sta facendo pensare. Soprattutto la frase "L'assegnazione dei premi avverrà mediante un software di estrazione casuale", sì perché dietro una semplice frase come quella si cela un mondo dove noi analisti (del software) ci imbattiamo in quelli "che richiedono" ma non sanno cosa vogliono, dove ci ripetiamo "ma le specifiche dove sono?", "che algoritmo implemento?".
>
> Se il capo mi dovesse chiedere di elaborare un siffatto software, dopo giorni di caffè e meditazione relazionerei così.
>
> Buongiorno capo, come al solito le specifiche sono lacunose, non si parla di algoritmi, il Cliente non sa cosa vuole, la macchina del caffè non rilascia il cucchiaino; dobbiamo arrangiarci. Come al solito capo.
>
> Siccome mi sono portato il thermos del caffè da casa, ho pensato all'algoritmo e lo farei così.
>
> *Proposta 1.*
>
> a) Un giorno è fatto da 86400 secondi.
>
> b) Alle ore 0:00 genero un numero casuale (o meglio: pseudo-casuale) compreso tra 0 e 86399. Lo chiamiamo 's', come "secondi dalla mezzanotte".
>
> c) Il primo che telefona dopo le ore 's' (convertite da numero di secondi a un orario standard del pianeta Terra) è il vincitore.
>
> d) Semplice, lineare, equo.
>
> e) Sì è vero, se il numero casuale è pericolosamente vicino al limite superiore, rischiamo di non assegnare il premio. Magari come limite superiore non mettiamo proprio 86399, ma mettiamo qualche migliaia in meno, chi se ne accorge?
>
> *Proposta 2.*
>
> a) Decido una probabilità fissa, per esempio 1/100.
>
> b) Decido un numero vincente compreso tra 1 e 100.
>
> c) Ogni volta che qualcuno telefona, genero un numero casuale tra 1 e 100; se esso corrisponde al numero vincente, abbiamo trovato il vincitore.
>
> d) Certo che, se telefonano in pochi oppure tutti quelli che chiamano sono in quadratura astrale, rischiamo di non assegnare il premio… e chi li sente quelli della Associazioni Consumatori? Con tutti gli avvocati che hanno ci mangiano vivi, mentre noi siamo una piccola software house, senza neanche una macchinetta del caffè decente.
>
> e) Va bene, scartiamo la proposta 2.
>
> *Proposta 3.*
>
> a) Facciamo una curva di probabilità crescente: man mano che passano le ore, colui che chiama ha una probabilità sempre maggiore di essere il vincente.
>
> b) Per esempio, tutti quelli che chiamano dalle 0:00 alle 0:59 hanno probabilità 1/100; tutti quelli che chiamano dalle 1:00 alle 1:59 hanno probabilità 2/100, eccetera.
>
> c) Dobbiamo fare in modo però di assegnare il premio ogni giorno, quindi la probabilità di assegnare il premio sarà prossima a 100/100 intorno alla mezzanotte.

d) La funzione di probabilità non dovrebbe essere una retta, ma dovrebbe essere una curva la cui pendenza aumenta man mano che le ore passano, anzi man mano che i minuti passano (non esageriamo lavorando in base ai secondi, tanto il Cliente non si accorge di queste finezze).



6 *Le possibili funzioni della proposta 3.*

e) Capo, ho qui pronta una funzione che fa al caso nostro, è la funzione "eleva a potenza". Ho preparato qualche grafico...

Se eleviamo alla seconda, otteniamo la curva blu; se eleviamo alla terza otteniamo la curva verde, mentre se eleviamo alla quarta abbiamo la curva rossa.

Ogni tacca orizzontale rappresenta un'ora, ogni tacca verticale rappresenta un 10% di probabilità.

Se utilizziamo per esempio la curva rossa, chi telefona alle 6 del mattino ha una probabilità di essere estratto di: (6/24)^4 = 0.0039, un po' pochina, ma se uno telefona alle 6 del pomeriggio la probabilità diventa (18/24)^4 = 0.3164, mica male per essere il vincitore (ma di cosa?).

Però il cliente dovrebbe scegliere con quale "curva" lavorare, magari facciamo un parametro nel server, una interfaccia internet che modifica il parametro in base al numero di telefonate attese che calcoliamo con gli storici nel database e…

A questo punto il capo mi guarda con aria perplessa; non si ricorda bene neanche cos'è un numero razionale, figuriamoci le funzioni e le probabilità. Fa una faccia compiaciuta, pensa tra sé e sé "ma questo qua l'ho assunto io?" e dice:

"Non sono sicuro che il Cliente capisca la proposta 3 e se poi quelli della Associazioni Consumatori vogliono i dettagli perdiamo troppo tempo a spiegarglieli e poi dobbiamo partire col nuovo progetto del Dipartimento di Etologia, quelli vogliono schedare tutti i lombrichi della Patagonia e ci hanno chiesto un software adeguato! Tagliamo corto, fammi la Proposta 1. Hai due giorni per l'analisi tecnica, lo sviluppo e i test. Ah, non dimenticare i manuali e la documentazione."

Ritorno in postazione, il software l'ho già fatto in mezz'ora, Proposta 1 naturalmente. Adesso ho quasi due giorni per trovare qualcosa di interessante in Internet. Magari leggo qualcosa dei Rudi.

Non so se avete notato che il capo di ***Carlo*** è sempre scritto con la minuscola: ne approfittiamo per farvi notare che anche noi abbiamo i nostri capi minuscoli, solo Rudy è il *Capo*.

Ed ora, finalmente, andiamo a vedere come sono andati i problemi di agosto.

Ma prima, vi ricordiamo che stiamo ancora raccogliendo contributi per il Summer Contest (ve lo siete perso? È comparso in RM126 ed i contributi scarseggiano ancora… ma cosa avete fatto in spiaggia, le parole crociate? I *Sudoku*[15] del Capo?), se tutto va bene pubblicheremo ad ottobre, quindi non esitate ad inviare soluzioni, non abbiamo nessuna intenzione di risolvere i problemi noi stessi.

[15] Sì, il Capo ha proposto alcuni *sudoku* in RM124. Ma a quest'ora pensavamo aveste smesso…

4.1 [127]

4.1.1 "... 'tses tôrna si?"

Come da tradizione, per prima cosa ricordiamo il testo del problema:

> *Supponiamo di avere un certo numero (pari) di pietre in un giardino Zen, metà di un tipo e metà dell'altro, messe in modo tale che non ce ne siano mai tre collineari. Cercando le disposizioni "meno simmetriche" possibili, mi interesserebbe minimizzare (portando possibilmente a zero) le disposizioni per cui si possano trovare delle linee passanti per due pietre di tipo diverso tali che da ogni parte della linea ci siano tante pietre di un tipo quante dell'altro.*
>
> *Attenzione: lo scopo sarebbe di trovare una disposizione in cui queste linee di divisione "non esistono", ma tanto per cominciare non ho posto limiti al numero di pietre, secondariamente se chiedo un "valore minimo" è abbastanza probabile che questo sia diverso da zero…*

Poche soluzioni a questo quesito: una, quella del nostro inafferrabile ***Cid***, che vi proponiamo immantinente:

> Se il numero di pietre è uguale a 2·N, le disposizioni delle pietre che separino il piano in due parti in modo da avere in ogni semipiano tante pietre di un tipo quante dell'altro sono uguali a N.
>
> **<u>Dimostrazione</u>**
>
> **Lemma**
>
> Per ogni pietra del primo tipo si può trovare sempre almeno una pietra dell'altro tipo che soddisfi questa condizione, quindi il numero delle disposizioni totali non è mai inferiore a N.
>
> <u>Dimostrazione del lemma</u>
>
> Per ogni pietra immagino una linea che la unisca a una pietra dell'altro tipo, immagino la linea formata da due semirette (una bianca e una nera) che si incontrano nella pietra scelta, la semiretta bianca incrocia l'altra pietra mentre la semiretta nera è dalla parte opposta.
>
> Conto ora quante sono le pietre del primo e del secondo tipo comprese nel semipiano che si ottiene partendo dalla semiretta bianca e procedendo in senso orario fino a quella nera.
>
> Avremo $\left(\frac{N}{2}+x\right)$ pietre del primo tipo e $\left(\frac{N}{2}+y\right)$ pietre del secondo tipo, dove chiaramente x e y possono assumere anche valori negativi.
>
> Se x ed y sono uguali abbiamo già trovato una delle disposizioni cercate, se non sono uguali comincio a far ruotare la retta intorno alla pietra scelta fino a che la semiretta nera incroci la pietra che si trovava prima sulla semiretta bianca. Al termine di questo percorso conto quante sono le pietre del primo e del secondo tipo comprese nel semipiano che si ottiene partendo dalla semiretta bianca e procedendo in senso orario fino a quella nera; ottengo che le pietre del primo tipo sono $\left(N-\left(\frac{N}{2}+x\right)\right)=\left(\frac{N}{2}-x\right)$, mentre le pietre del secondo tipo sono $\left(N-\left(\frac{N}{2}+y\right)\right)=\left(\frac{N}{2}-y\right)$.

Passiamo quindi da $\left(\frac{N}{2}+x\right)$ a $\left(\frac{N}{2}-x\right)$ e da $\left(\frac{N}{2}+y\right)$ a $\left(\frac{N}{2}-y\right)$, siccome i valori dei due numeri di pietre comprese nel semipiano non possono mai variare contemporaneamente (non essendoci mai tre pietre collineari) abbiamo che se x ed y sono diversi tra loro, ruotando le semirette riusciamo comunque sempre a trovare una disposizione tale che da ogni parte della linea ci siano tante pietre di un tipo quante dell'altro. C.V.D.

<u>Dimostrazione della soluzione del problema</u>

Dimostrato il lemma, occorre trovare una distribuzione delle pietre tale che il numero di queste disposizioni sia esattamente uguale a N.

Per ottenere questo risultato basta pensare ad un poligono regolare avente esattamente 2·N lati, nei primi N vertici sistemo le pietre del primo tipo e nei successivi N vertici sistemo le pietre del secondo tipo.

L'unico inconveniente di questa soluzione è che è fortemente simmetrica, mentre il testo del problema chiedeva soluzioni "meno simmetriche" possibili; per ottenere ciò è sufficiente sistemare le pietre non esattamente nei vertici, ma leggermente spostate (di quel poco che basta per perdere la simmetria e stando attenti a non averne mai tre collineari e che non sia possibile trovarne quattro che siano i vertici di un rettangolo).

Se avete qualcosa da dire, fatevi sentire!

4.1.2 Il giardino di Doc

A prima vista, questo problema aveva molte similitudini con il precedente, vediamone il riassunto:

> *Il Doc pianta ogni anno – dopo le feste – il pino natalizio nel suo giardino, facendo in modo che non ce ne siano mai tre allineati, ciò significa che dati tre alberi qualsiasi, questi formeranno un triangolo. Dopo quanti anni il giardino conterrà un* miliardo *di triangoli* acutangoli*?*

Non tante soluzioni, ma tutte interessanti, da ***Silvano***, ***Cid***, ***Carlo***, ***Trentatrè***. Come al solito dovremo fare una scelta, non ce ne vogliate.

Cerchiamo di andare per ordine e vediamo per prima quella di ***Silvano***:

0) Premessa: devo schematizzare il problema per capire dove mi trovo. Se mi trovo su un piano infinito 3 punti generano sempre un solo triangolo; sulla terra 3 punti generano 4 triangoli sferici. Ipotizzo, quindi, di trovarmi su un piano, anche perché altrimenti l'indicazione di non avere 3 alberi allineati su una sfera non ha senso (una retta sulla sfera la attraversa sempre solo per 2 punti…) vediamo le conseguenze… inoltre considero che pianto a caso un albero alla volta; ossia noti 2 punti casuali sul piano prendo il terzo.

1) Per prima cosa mi chiedo quanti triangoli faccio con N alberi non allineati 3 a tre. Calcolo le permutazioni con ripetizione di N elementi presi a gruppi di 3 e N-3, ossia: $P_N^{3,N-3} = \frac{N!}{(N-3)!\cdot 3!} = \frac{N\cdot(N-1)\cdot(N-2)}{6}$

2) Quanti di questi triangoli sono Acutangoli?

Qui viene il difficile.

Il testo ci dice che gli alberi sono disposti in modo casuale sul piano, purché non esistano 3 punti allineati. I punti sono scelti in sequenza.

Metodo A:

Bene allora se non sono allineati considero la circonferenza che passa per essi, e considero un sistema di riferimento con l'origine nel centro ed ascissa che passi per il punto A del triangolo ABC.

Dalle coordinate polari si ha che: $\begin{cases} A = R \cdot cos(0 + K2\pi) \\ B = R \cdot cos(\theta_b + K2\pi) \\ C = R \cdot cos(\theta_C + K2\pi) \end{cases}$

Ora, fissato A, ho 3 variabili aleatorie che sono: R, θ_b , θ_C .

1.) R è una variabile che può assumere un qualsiasi valore tra $R\epsilon(0,\infty)$, ma per il momento la ignoro in quanto il triangolo è acutangolo o no a prescindere dal raggio della circonferenza passante per i 3 punti.

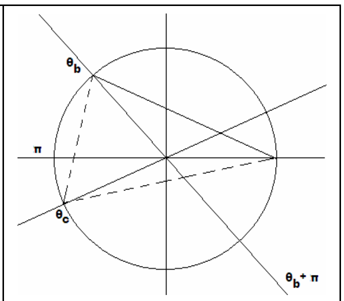
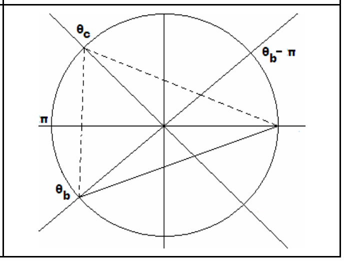
2.) θ_b , θ_C sono variabili aleatorie:

   a) comprese nell'intervallo finito ed uniformi: $\theta_b, \theta_c \in (0,2\pi)$

   b) con distribuzione uniforme

   c) non coincidenti $\theta_b <> \theta_c$

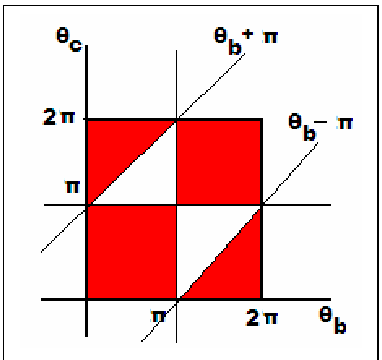
Ora disegnando la circonferenza posso considerare 2 casi:

a) Se $\theta_b(0,\pi)$: dato il disegno seguente (accontentatevi di paintbrush), il triangolo così individuato è acutangolo solo se: $\theta_c\epsilon(\pi,\theta_b + \pi)$.	
b) Se $\theta_b(\pi,2\pi)$: considero il disegno seguente (simile al precedente). Il triangolo è acutangolo se vale: $\theta_c\epsilon(\theta_b - \pi,\pi,)$.	

Portando tutto sul piano individuo le zone di successo e di insuccesso nel quadrato seguente.

Le zone bianche indicano il triangolo acutangolo, le rosse i non acutangoli al variare dei 2 angoli.

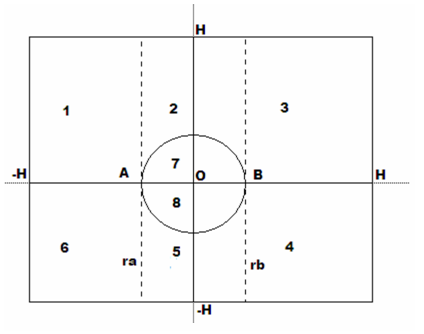
La probabilità che un triangolo casualmente scelto sia acutangolo è quindi di ¼.



7 *Zone di successo e insuccesso.*

Metodo B

Considero fissati i primi 2 punti (gli alberi sono piantati uno dopo l'altro del resto), e scelgo il punto medio del segmento origine del sistema di riferimento; aggiungendo la circonferenza di raggio AB/2 ho la situazione nella figura 8.



8 *Metodo B.*

Considero un quadrato di lato H (che fo tendere all'infinito) si ha che la probabilità che il triangolo sia ottusangolo è maggiore di (tralasciando la circonferenza inutile nel limite):

$$\lim_{H\to\infty} \frac{(A+H)*2H+(H-B)*2H}{2H\cdot 2H}=1$$

Ossia NON Ho MAI un acutangolo.

Dato che il ragionamento mi pareva + o – corretto in ambo i casi mi sono dato alla caccia su google :D ed ho scovato che effettivamente il problema è indeterminato, anche se tra le 2 soluzioni a me piace più la prima dato che calcolo la probabilità dopo aver piantato gli alberi e non prima di piantare un terzo albero.

Il problema è probabilmente legato al fatto che filosoficamente non si può dare una forma quadrata o circolare all'infinito, o definire una ddp uniforme all'infinito.

Risposta: dicci dove abiti, che terreno hai, almeno la forma, ecc. e ti dirò, forse (se non sbaglio) quando! (Ah, dimenticavo, i conti dei due metodi: il primo da come risposta 2886 alberi, il secondo MAI; un miliardo di triangoli (generici) si raggiungono dopo 1819 alberi).

P.S. Visto che per crescere 2000 anni tra un albero ed un altro devono esserci almeno 7 metri (legge del contadino dell'agro pontino) vale che:

$$Sup.\,Giardino \approx 1819 * 3.5^2 * \pi \cong 70000\ m^2 = 7ha\ .$$

Cavolo più di 7 ettari di giardino? Mica sarai a Versailles?

P.S Il link http://us.share.geocities.com/mathrecsources/8.htm, 8.C. PROBABILITY THAT A TRIANGLE IS ACUTE).

Beh, il Doc si è rifiutato di fare dichiarazioni. A quanto pare le generalizzazioni della distribuzione della pineta nel giardinetto di casa cominciano a preoccuparlo, anche se in Redazione sono arrivati dei consigli per altri tipi di coltivazioni. Per esempio ***Cid***:

(...) dal problema relativo al tuo giardino deduco che sia piuttosto grande. Suppongo che una parte di questo bosco/giardino tu l'abbia destinata agli alberi da frutta, cosi hai frutta fresca garantita per tutto l'anno.

Questa è senz'altro una buona idea. Vediamo anche la sua soluzione:

La prima cosa che conviene valutare è la seguente: dati tre punti non allineati, qual è la probabilità che siano i vertici di un triangolo acutangolo? Essendo i tre punti non allineati, esiste un solo cerchio che passa per questi tre punti; il triangolo sarà rettangolo se uno dei lati del triangolo è un diametro di questo cerchio, sarà ottusangolo se in questo cerchio esiste una semicirconferenza che contiene tutti e tre i punti, sarà acutangolo se tutti e tre gli archi di cerchio che rappresentano le distanze sul cerchio tra questi tre punti sono inferiori ad una semicirconferenza,

Qual è la probabilità che ciò accada?

Fissato un punto su un cerchio, traccio un diametro a partire da questo punto ed in tal modo divido il cerchio in due semicirconferenze; la probabilità che i due punti restanti siano nella stessa semicirconferenza è uguale alla probabilità che siano in due semicirconferenze distinte. Quindi abbiamo già un 50% di probabilità che sia ottusangolo.

Se i due punti si trovano su due semicirconferenze distinte, definisco come secondo punto il primo punto che incontro procedendo in senso orario a partire dal primo punto e chiamo A la distanza tra il primo e il secondo punto, considero ora il punto diametralmente opposto al primo punto e chiamo B la distanza tra questo punto e il terzo punto; essendo la distribuzione di probabilità uniforme sia per A che per B, la probabilità che A sia maggiore di B è uguale alla probabilità che B sia maggiore di A. Quindi, considerando che se B è maggiore di A abbiamo un triangolo ottusangolo (perché la distanza tra secondo e terzo punto risulta maggiore di una semicirconferenza) abbiamo che la probabilità totale che il triangolo sia ottusangolo è uguale a: (50+25)=75%.

Quindi dati tre punti qualsiasi, non allineati, la probabilità che determinino un triangolo acutangolo è uguale a: ¼.

Ora conviene calcolare quanti triangoli si possono ottenere con N punti, per farlo basta valutare quante combinazioni di 3 elementi si possono avere su N elementi totali. Il numero delle combinazioni è:

$$\frac{N!}{(N-3)!3!}=\frac{(N-3)!(N-2)(N-1)N}{6(N-3)!}=\frac{(N-2)(N-1)N}{6}=\frac{N^3-3N^2+2N}{6}$$

Siccome la probabilità che un triangolo sia acutangolo abbiamo verificato che è uguale a ¼, il valore atteso del numero di triangoli necessari per avere un miliardo di triangoli acutangoli è uguale a 4·1000000000=4000000000.

Quindi piantando un albero all'anno, il numero N di anni necessari per avere un miliardo di triangoli acutangoli si ricava risolvendo la seguente equazione:

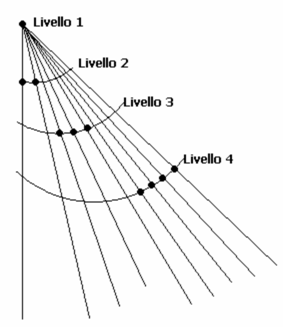
$$\frac{N^3-3N^2+2N}{6}=4000000000.$$

Risolvendola si trova che l'unica soluzione reale positiva è compresa tra 2285 e 2286, quindi il valore atteso del numero di anni necessari è uguale a 2286.

Di ***Carlo*** proviamo a riportare il metodo per piantare gli alberi:

Ovviamente non so quale sia il modo per ottenere il maggior numero di triangoli acutangoli, ma con qualche prova, decido che il modo sia il seguente:

Gli alberi sono organizzati a livelli; il primo livello ha un albero, il secondo due alberi, il terzo tre alberi,… l'ennesimo livello ha n alberi. In ogni livello, gli alberi stanno su una circonferenza con centro nell'albero del primo livello, così non sono allineati. L'angolo formato dalle rette che escono dal primo albero ha ampiezza infinitesima.



9 *Il metodo di giardinaggio di* ***Carlo***.

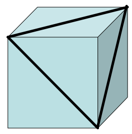
In questo modo il giardino non sarà granché esteticamente, ma rispetta le condizioni di non allineamento.

La parte affascinante del lavoro di ***Trentatrè***, invece, è quella in cui calcola la probabilità che disponendo a caso i punti all'interno del giardino, essi formino triangoli acutangoli, e da alcune simulazioni ottiene il valore che desidera.

A questo punto non ci resta che ringraziarvi tutti e augurarvi un buon ritorno al lavoro: ci aspettiamo molti più contributi a settembre!

5. Quick & Dirty

Le diagonali di due facce di un cubo si incontrano in un vertice. Che angolo formano le due diagonali?



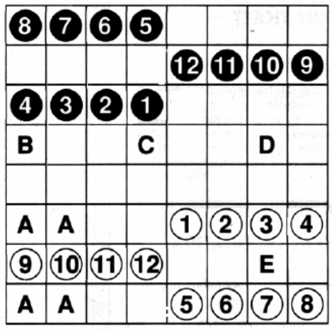
> *Come si vede dal disegno a fianco, il tracciamento della terza diagonale congiungente gli estremi non in comune delle due diagonali genera un triangolo che, essendo il solido di partenza un cubo, è equilatero. Quindi l'angolo formato da due diagonali è di* 60°.

6. Zugzwang!

6.1 Fields of Action

Sempre sotto il sole cocente (e il ventaccio fetente…) della Costa Brava, non abbiamo nessuna voglia di andare a controllare se vi abbiamo già presentato dei giochi inventati da ***Sid Jackson***; nel caso non sia ancora avvenuto, ci affrettiamo a porre rimedio; il Nostro sembra specializzato nell'invenzione di giochi piuttosto semplici per quanto riguarda l'attrezzatura, ma abbastanza intriganti per quanto riguarda la strategia di gioco; non solo, ma quando si degna di spiegarli riduce il tutto all'osso, il che rende sempre le cose più chiare.

Cominciamo con l'***equipaggiamento***: vi serve una scacchiera (8x8) e due set di 12 pedine di colore contrastante; su ognuno dei set, spiccicate i numeri da 1 a 12.



10 *Un esempio di posizione di partenza.*

Passiamo adesso alla ***posizione iniziale***: le pedine vanno sistemate come nella figura a fianco. Non fate caso alle lettere, ci serviranno dopo e vogliamo risparmiare un disegno.

Adesso vediamo il ***gioco***: a turno, ogni giocatore muove un proprio pezzo verticalmente, diagonalmente o orizzontalmente (adesso arriva il colpo di genio) *esattamente* di tante caselle quanti sono i pezzi di qualsiasi colore vicino a lui; un pezzo può saltare gli altri pezzi (amici o nemici), ma non può atterrare su un pezzo amico; se atterra su un pezzo nemico, questo viene catturato e rimosso dal gioco.

Giusto per fare qualche ***esempio***, prendiamo la situazione iniziale; il pezzo **9** può muovere in una qualsiasi delle caselle marcate **A**, mentre il pezzo **12** può muovere nelle caselle marcate **B**, **C**, **D** o **E**; quest'ultima, se stessimo giocando a scacchi, probabilmente sarebbe un'enorme idiozia, ma vi facciamo notare che **12** in posizione **E** è a contatto con *sei* pezzi, e se il nero non se ne accorge alla prossima mossa del bianco gli sparisce la pedina **8** (la nostra **12** viene immediatamente presa dalla **2** o dalla **6** nere – la **7** non può, ha due pedine vicino, una bianca e una nera – ma volete mettere l'impatto psicologico del mangiare "dall'altro capo della scacchiera"?).

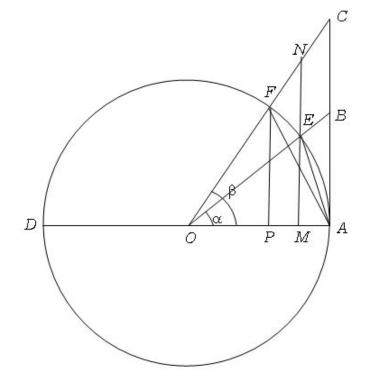
Se volete muovere un ***pezzo isolato***, potete muoverlo di quanto volete nella direzione che preferite, ma in quella mossa non potete prendere e deve atterrare a contatto con almeno due pezzi (di qualsiasi colore).

Si ***vince*** quando si sono catturati (in qualsiasi ordine) cinque pezzi che formano una sequenza numerica o quando l'avversario non ha mosse legali.

Se siete di quelli che prima ancora di giocare già pensano alle ***variazioni***, vi raccomandiamo per prima cosa di fare qualche esperimento con la stessa posizione, ma variando le posizioni "numeriche" delle pedine; il fatto che il buon Sid in persona ci dia questo consiglio ci fa pensare che esistano delle strategie avvantaggianti uno dei due giocatori dalla posizione data, ma questa è solo dietrologia… giocatelo e fateci sapere.

7. Pagina 46

Con riferimento alla Figura 11, in cui $\overline{AC}$ è perpendicolare al diametro $\overline{DA}$ e tangente in A alla circonferenza, indichiamo con $S(OAE)$ l'area del *triangolo* OAE e con $S_C(OAE)$ l'area del *settore circolare* OAE; abbiamo, utilizzando queste notazioni, che:



11 *Figura esplicativa.*

$$\begin{cases} S(OAB) = \frac{1}{2}\tan\alpha; \\ S(OAC) = \frac{1}{2}\tan\beta. \end{cases} \quad \begin{cases} S_C(OAE) = \frac{1}{2}\alpha; \\ S_C(OAF) = \frac{1}{2}\beta. \end{cases}$$

Di conseguenza, si ha:

$$\frac{\tan\alpha}{\alpha} = \frac{S(OAB)}{S_C(OAE)},$$
$$\frac{\tan\beta}{\beta} = \frac{S(OAC)}{S_C(OAF)}.$$

Inoltre, si verifica facilmente che:

$$\frac{S(OAB)}{S_C(OAE)} < \frac{S(OAB)}{S(OEM)},$$
$$\frac{S(OBC)}{S_C(OEF)} < \frac{S(OEC)}{S(OEN)},$$

e che: $\frac{S(OAB)}{S(OEM)} = \frac{S(OBC)}{S(OEN)}$. Da cui:

$$\frac{S(OAB)}{S_C(OAE)} < \frac{S(OBC)}{S_C(OEF)}.$$

Dal fatto che $\frac{S(OBC)}{S_C(OEF)} > \frac{S(OAB)}{S_C(OAE)}$ segue che:

$$\frac{S(OAB)+S(OBC)}{S_C(OAE)+S_C(OEF)} > \frac{S(OAB)}{S_C(OAE)},$$

ossia che

$$\frac{S(OAC)}{S_C(OAF)} > \frac{S(OAB)}{S_C(OAE)},$$

che è la tesi.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Fast Food

Al Ph.D. vi eravate ripromessi di stare sempre assieme…

La cattivissima battuta che ci fa da citazione, pescata da un vecchio "Mad" della nostra infanzia, si conclude con "…e oggi lavorate tutti nello stesso fast-food".

Bene, dimentichiamo la battuta e teniamo il fast-food, come da titolo. Per chiarire il concetto agli addetti ai lavori, ci limitiamo a dire che il testo da cui prendiamo tutto questo contiene anche la citazione:

Se una teoria è matematicamente
bella ed elegante, non è concepibile
che la natura non trovi il modo di utilizzarla
Paul Adrien Maurice DIRAC

Abbiamo intenzione di tagliare ampiamente per i campi, pescando eventualmente qualcosa da approfondire nel caso ci siano degli interessati.

Bene, avete appena deciso di aprire il vostro fast-food, e già vi scontrate con un problema.

La vostra cucina fa talmente schifo che i clienti arrivano, prendono il cibo che hanno ordinato, si siedono, mangiano e (presumendo sopravvivano) se ne vanno; ora, il problema è che oltre ad essere lavatori di piatti e generatori di veleni per gli avventori, voi dovete pure *progettare* il locale.

Insomma, voi vi aspettate una certa distribuzione di arrivo dei clienti; questi non hanno la minima intenzione di aspettare (lo abbiamo detto, che la vostra cucina è un disgusto? Sì, ma lo ripetiamo), e voi dovete decidere il numero dei posti a sedere.

Dal numero di volte che abbiamo fatto considerazioni sulla vostra cucina, dovreste aver capito che l'ingresso di un cliente è, nel vostro caso, un *evento raro* nel tempo; cerchiamo di dare una definizione un po' più precisa del concetto.

Se ignoriamo, per il momento, il fatto che la gente tende a mangiare all'ora di pranzo, possiamo ricavare alcune interessanti ipotesi:

Tanto per cominciare, i vostri clienti non si mettono d'accordo per mangiare da voi, quindi i loro arrivi sono tra di loro *indipendenti*; non solo, ma (probabilmente alla ricerca di un qualcosa di mangiabile) nessuno di loro ha delle preferenze precise, e quindi possono ordinare piatti che prevedono un diverso *tempo di impegno* dei tavolini; data l'aleatorietà di queste grandezze, conviene evidentemente lavorare con i *valori medi* e, forti dell'ipotesi che l'ora di pranzo non esiste, possiamo dire che l'afflusso è *stazionario* o, se preferite i paroloni, *ergodico*[16].

"Rudy, guarda che contrariamente a te la gente di solito mangia all'ora di pranzo…" Vero, ed esiste un opportuno parametro per calcolare anche questo; se prendete la distribuzione (temporale) degli avventori del locale come variabile casuale, oltre al valor medio potete calcolare anche la *varianza*; se il rapporto tra la varianza e il valor medio è maggiore di 1, per definizione è l'ora di pranzo, e quindi fare i conti diventa più complicato.

"Beh, se arrivano e c'è coda, aspettano…" Non è detto che tutti siano così pazienti e, non volendo perdere in generalità, dobbiamo tenere in conto anche gli impazienti e, possibilmente, i maleducati: il bello è che esiste una notazione (nota come *Notazione di Kendall*) che permette di descrivere queste situazioni.

[16] Detto in estrema sintesi, la media temporale e la media probabilistica degli eventi coincidono. No, non ve lo dimostriamo.

La forma più generale della notazione è:

$$A_1 / A_2 / N / K / S,$$

e adesso vediamo cosa significa; ognuno di questi aggeggi descrive una parte del sistema composto dal vostro ristorante e dai clienti.

Il primo termine, A_1, indica come arrivano gli avventori uno rispetto all'altro, ossia quale sia la *distribuzione dei tempi di interarrivo*: le sigle utilizzate per indicare i diversi tipi di distribuzione sono:

- M, nel caso di distribuzione *esponenziale*;
- E_m, nel caso di distribuzione *erlang(h)iana*[17] di ordine m;
- H_m, nel caso di distribuzione *iperesponenziale* di ordine m;
- D, nel caso di distribuzione *deterministica*
- G, nel caso di distribuzione *generale*

Tranquilli, la maggior parte di queste nessuno sa come funzionino; il caso "classico", del quale si sa (quasi) tutto, è la prima; per quelli di voi che si chiedano cosa centri una emme con il termine "esponenziale" (o con "distribuzione di Poisson": vogliono dire, qui, la stessa cosa), vi basti sapere che il tutto è descrivibile attraverso un processo *Markoviano* (e qui la "k" la mettiamo, anche se Eco non sarebbe d'accordo).

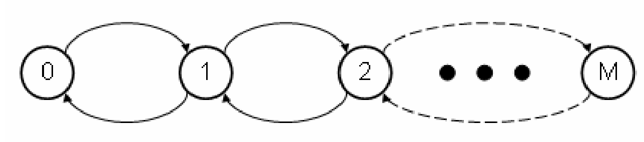
Il secondo termine A_2 indica la *distribuzione dei tempi di servizio*, ossia quanto se ne stanno seduti ad occupare i tavolini i vostri avventori; valgono gli stessi simboli e gli stessi commenti (note incluse) del punto precedente.

Il terzo termine N è facile: rappresenta il numero dei tavolini.

Per quanto riguarda K, rappresenta il numero dei posti disponibili in attesa che si liberi un tavolino, ossia quante persone in piedi potete ospitare nel locale in attesa che si liberi un tavolo senza che la cosa ingeneri risse; infine, S non è altro che il numero dei potenziali clienti del locale.

Tutto chiaro, adesso? Ultima nota: se vedete un Simbolo di Kendall senza gli ultimi due termini, questi sono assunti pari ad infinito.

"Ci spieghi cosa c'entra Markov?" Volentieri, ma solo a grandi linee. Come in ogni distribuzione poissoniana, è estremamente improbabile che *esattamente nello stesso momento* se ne vadano due o più avventori o ne arrivino due o più; in generale, ne arriverà uno per volta, e due avventori saranno distanziati tra di loro da un *tempo di interarrivo* (e "interpartenza", ma non si dice) poissoniano; quindi, possiamo rappresentare il tutto con un *diagramma markoviano* come quello in Figura 12: i diversi stati sono collegati, ma ciascuno solo con i propri vicini, ossia il numero dei vostri clienti varia solo di uno per volta; tecnicamente, questi sono noti come *Processi di Nascita e Morte* (nessuna insinuazione sulla vostra cucina).



12 *Diagramma di stato*

Come dicevamo, solo alcune sono analizzate, quindi state tranquilli; una cosa, però, che ci ha sempre lasciato perplessi è che secondo noi nel Simbolo di Kendall manca qualcosa: il *modo* nel quale si organizza la coda, ad esempio. Anche qui sono pochissimi i modi

[17] Approfittiamo per una piccola indagine: secondo voi la "h" ci vuole o no? Umberto Eco (*"Come si fa una tesi di laurea"*) dice di sì (per lui si scrive "niciano"), i nostri testi (molto tecnici e antiquati) dicono di no. *[Doc, una volta tanto, assumi posizione! (RdA)]*

analizzati matematicamente, ma il nostro amore per gli acronimi non può esimerci dall'elencarvi i più famosi:

- **FCFS**: *First Come First Served*: il prossimo a sedersi è il primo in coda. Molto *british*, è praticamente l'unico caso analizzato a fondo.
- **LCFS**: *Last Come First Served*: prima di borbottare sulla maleducazione, gli informatici più anziani pensino alla parola *stack* e alla sua utilità: è una coda di questo tipo.
- **RSS**: *Random Selection for Service:* scegliete il più simpatico dalla coda. Molto usato al "Grande Fratello".
- **PR**: *Priority:* date una priorità ad ognuno nella coda, modello Pronto Soccorso (e clientelismo, giusto per vedere tutti i lati della medaglia).
- **TS**: *Time Sharing:* Windows e Linux, tanto per dirne due (ma usano anche la Priority… Beh, lasciamo perdere).
- **SJF**: *Shortest Job First:* Tecnica da Ufficio 1: prima faccio il lavoro più corto.
- **LJF**: *Longest Job First:* Tecnica da Ufficio 2: prima faccio il lavoro più lungo.

Tranquilli, consideriamo solo la prima.

Tornando ai tavoli del nostro fast-food, il modello più semplice, usando il Simbolo di Kendall, risulta quello indicato con $M/M/N$; il processo che rappresenta le persone ai tavoli è un processo markoviano di nascita e morte, in cui il numero k sono i tavolini occupati; si verifica (ma non lo facciamo) che la probabilità di passare dallo stato k allo stato $k+1$ (in sostanza: che arrivi un cliente e si sieda, senza che nessuno degli altri se ne vada) è costante, e di solito viene indicata con λ; mentre, la probabilità che si passi dallo stato k allo stato $k-1$ (ossia che se ne vada un cliente senza che ne arrivi nessuno) dipende dal valore di k e viene di solito indicata con $k\mu$; la cosa a noi sembra piuttosto controintuitiva, ma si verifica facilmente partendo da una distribuzione esponenziale e ignorando gli infinitesimi di ordine superiore.

A questo punto, possiamo definire il *successo* del vostro Fast-Food come la quantità di gente che ci entra con l'intenzione di mangiare qualcosa, ossia, se ci passate l'espressione gergale tutta sabauda, quanto *traffico* c'è nel vostro sistema; contato che quelli che escono non contribuiscono ad aumentare l'agitazione del locale, possiamo definire questo parametro come $A=\lambda/\mu$; contato che avete N tavolini, riusciamo a definire il fatto di non avere ressa (o, se preferite, *distribuzione stazionaria*) come:

$$\rho = \frac{A}{N} < 1.$$

Se lasciamo perdere i casi balordi, è abbastanza evidente che questo non significa nient'altro che il fatto che il sistema è stazionario, da cui il nome; ρ, quindi, indica quanto è occupato il singolo tavolino.

Ora, se a qualcuno di voi (come per lo scrivente) è stato un attimo sullo stomaco il comportamento delle μ (sarebbe quando i clienti scappano dal locale), adesso forse capiamo il motivo; infatti, il comportamento cambia brutalmente in funzione di N per il numero di partecipanti all'abboffata:

$$\pi(k)=\begin{cases}\pi_0\dfrac{A^k}{k!} & \text{per } k\le N, \quad \pi_0=\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\frac{A^k}{k!}+\frac{A^N}{N!}\frac{N}{N-A}\right)^{-1}\\ \pi_n\left(\dfrac{A}{N}\right)^{k-N} & \text{per } k>N.\end{cases}$$

Se, da questo aggeggio, calcoliamo le *probabilità di accodamento*, ossia quali siano le probabilità che tutti i tavoli siano occupati e i clienti debbano aspettare, si ottiene:

$$C(N;A)=\sum_{k=-N}^{\infty}\pi_k=\pi_0\frac{NA^N}{N!(N-A)},$$

altrimenti nota come *formula C di Erlang*[18].

Riprendiamo un attimo il fatto che cucinate male.

Già i vostri clienti hanno scelto il vostro fast-food come ultima spiaggia, è comprensibile che non abbiano la minima intenzione di aspettare e quindi, alla minima parvenza di coda, vi mandino al diavolo e se ne vadano; insomma, vi ritrovate a gestire un oggetto il cui Simbolo di Kendall è una cosa del tipo $M/M/N/0$, ossia capacità della coda pari a zero; in questo caso, la probabilità per il cliente di trovare coda (e quindi di andare "in bianco", nel senso gastronomico del termine) risulta essere:

$$B(N;A)=\pi_0\frac{A^N}{N!},$$

e il fatto che si sia cambiata la prima lettera dovrebbe farvi capire il motivo per cui questa è nota come *formula B di Erlang* (sì, compie gli anni lo stesso giorno dell'altro sopra).

"Rudy, guarda che la gente di solito mangia verso l'una…" Infatti, questo è un guaio; l'accesso nel vostro fast-food in questi momenti diventa estremamente difficile da analizzare; infatti (evidentemente, visto che hanno deciso *tutti* di arrivare a quell'ora) i vari accessi non sono più indipendenti, ma *correlati*; e quindi non si può usare la distribuzione di Poisson, e quindi non è un processo Markoviano, e quindi non funziona più niente. Esistono delle analisi, ma a questo punto ve le cercate da soli. O fate espressa richiesta, e allora la tiriamo lunga per qualche altra puntata.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[18] Cercatevi il compleanno sul calendario: non ci vuole molto.