Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 125 – Giugno 2009 – Anno Undicesimo

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell’altro millennio da

Rudy d’Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM124 ha diffuso 2’346 copie e il 03/06/2009 per Google eravamo in 37’100 pagine.

Tutto quanto pubblicato dalla rivista è soggetto al diritto d’autore e in base a tale diritto *concediamo il permesso di libera pubblicazione e ridistribuzione* alle condizioni indicate alla pagina `diraut.html` del sito. In particolare, tutto quanto pubblicato sulla rivista è scritto compiendo ogni ragionevole sforzo per dare le informazioni corrette; tuttavia queste informazioni non vengono fornite con alcuna garanzia legale e quindi la loro ripubblicazione da parte vostra è sotto la vostra responsabilità. La pubblicazione delle informazioni da parte vostra costituisce accettazione di questa condizione.

Non siamo sicuri di avervelo detto, ma grande è la nostra invidia per ***Robert J. Lang***. Oltre ad aver sviluppato le robustissime basi teoriche per la matematica dell’origami di cui abbiamo già parlato, quando si avventura nel mondo reale riesce a fare meraviglie di questo genere: in copertina vedete *Allosaurus Skeleton*, formata da sedici quadrati di carta.

1. Reazioni a Catena

Di principi onestissimi, mio zio,
or che giace ammalato per davvero,
fa sì che lo rispetti infine anch'io;
e non poteva aver miglior pensiero;
esempio agli altri ed ammaestramento;
ma quale noia, o Dio, quale tormento
ad un infermo muoversi d'intorno,
senza mai allontanarsi, e notte e giorno!
Oh, quale ipocrisia, quale meschina
perfidia divertire un moribondo,
aggiustare i guanciali a un gemebondo,
con faccia triste dar la medicina,
sospirare e pensar fra sé: che guai!
quando all'inferno dunque te n'andrai?

(Aleksandr Sergeevič Puškin,
"Evgenij Onegin", 1825
traduzione di Ettore Lo Gatto)

Quanto è lontano l'orizzonte?

I problemi di matematica ricreativa devono avere per forza qualcosa che riesca a farli classificare come tali. Una certa differenza dai normali problemi scolastici: magari un approccio insolito nella soluzione, nei temi trattati, o anche solo nell'ambientazione; ma devono necessariamente avere qualcosa che li distingua dagli esercizi di scuola, perché è regola inflessibile (almeno nei giudizi degli studenti) che di *ricreativo* all'interno delle ore scolastiche possa esserci solo l'intervallo di *ricreazione*. Però, quale che sia la vera essenza della matematica ricreativa, è verosimile che un'idea abbastanza precisa ce l'abbiano proprio i lettori di questo giornalino, che da più di dieci anni ha la velleità di trattare proprio questo tema. E se siamo riusciti a riempire qualche migliaio di pagine su questo tema e per così tanto tempo, vorrà ben dire che, tutto sommato, la materia non è poi così rara.

1 *Orizzonte marino.*

È invece decisamente più difficile trovare esempi di *matematica poetica*, tanto è vero che il termine non esiste neppure in letteratura, e abbiamo dovuto fare esercizio di coraggio per accoppiare il sostantivo a tanto impegnativo aggettivo; ma difficile non significa impossibile.

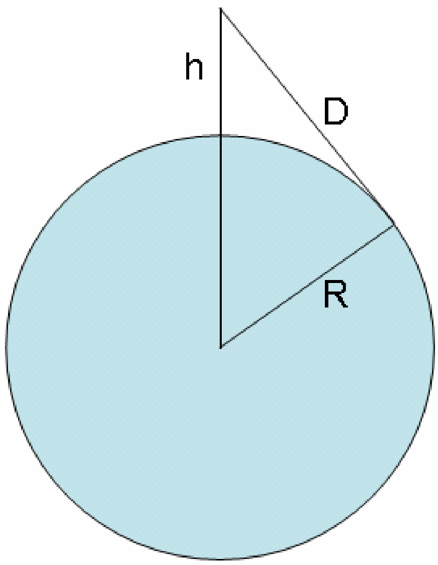
Un buon esempio di questo nuovo genere potrebbe essere proprio la domanda posta in apertura a quest'articolo.

Non c'è essere umano che non si stupisca della profondità del paesaggio, di fronte ad un tramonto marino. Il sole scende lento e si immerge nell'acqua del mare, in un evanescente rincorrersi dei gialli, dei rossi, degli arancioni del cielo che contrastano fortemente col blu del mare, sempre più plumbeo nel lento decadere della luce del giorno. E il sole, che è inevitabile sentire arcaicamente distante, fisicamente irraggiungibile per quanto direttamente emanatore di vita, sembra toccare davvero il pianeta. Se il sole così distante si unisce davvero alla Terra in quella linea lontana, quanto sarà davvero lontana e ineffabile, quella linea?

Gli elementi ci sono tutti: c'è lo sconvolgimento cromatico, c'è la maestà delle grandi distanze astronomiche e terrestri, c'è la morte del giorno – che però è allo stesso tempo vita e rinascita, perché è sempre dall'orizzonte, da qualche altra parte di un qualche altro orizzonte, che proprio nello stesso momento sta nascendo un giorno nuovo – e ci saranno certo i ricordi dell'estate, le prime emozioni delle vacanze, tutto quanto concorre a disegnare nella mente un'immagine calda, quasi sacra, della linea retta d'orizzonte tagliata dalla netta circonferenza del sole che tramonta.

Come se non bastasse, c'è anche la magia. C'è il *raggio verde*, unico e fugace, che alcuni riescono a vedere per un istante nel sole che muore. Di un verde indiscutibile e smeraldino, sembra essere quasi un messaggio destinato a pochi privilegiati; al punto che se per caso una coppia di amanti riesce a vederlo insieme, in una sera d'agosto, sarà quasi impossibile non convincerli che quella visione non fosse esplicitamente destinata a loro, per suggellare in maniera definitiva e soprannaturale la loro unione. Anche perché la leggenda vuole che riuscire a vedere il raggio verde significa avere la capacità di leggere nel cuore degli uomini, dote davvero preziosa e assai rara[1].

In questa densa confluenza tra romanticismo e magia, la linea d'orizzonte del mare si allontana e diventa ancora più remota e aliena a qualsiasi velleità di misurazione; e in questo ambito diventa ancora più sconvolgente (e quindi dissacrante, e perfino rivoluzionario) porre l'innocente domanda iniziale: *quanto è lontano l'orizzonte?*



2 *Quanto è lontano l'orizzonte?*

La risposta, in genere, sorprende molto i ragazzi. Non che gli adulti siano esenti dallo stupore; e poi, non è solo una questione di età: conta molto anche l'essere abituati o meno a vedere gli orizzonti marini. Se si abita di fronte ad un porto, anche i ragazzini delle elementari in breve tempo si abituano a veder comparire navi all'orizzonte e poi a vederle arrivare in porto non troppo tempo dopo la loro comparsa, cosa che li convince rapidamente che dall'orizzonte alla riva non possono esserci migliaia di chilometri. Ma in generale la risposta sorprende, e i ragazzi spesso si sorprendono ancora di più nello scoprire che già posseggono tutta la matematica necessaria a calcolare la risposta ad una domanda così misteriosa ed evocativa. In effetti, per calcolare la distanza D che corre dagli occhi di una persona alta h in piedi su un pianeta di raggio R, tutto quello che serve è il teorema di Pitagora. Niente di più[2], se non proprio la

[1] Difficile togliere l'aspetto magico del raggio verde, e ridurlo a mero, per quanto raro, fenomeno di rifrazione. Jules Verne ci scrisse un romanzo (*Le Rayon Vert*) nel 1882, ed Eric Rohmer diresse nel 1986 un film dallo stesso titolo; più recentemente, nella saga dei *Pirati dei Caraibi*, il raggio verde ha funzioni meno esplicitamente romantiche ma comunque assolutamente soprannaturali, perché è il segnale che uno spirito imprigionato è riuscito a liberarsi. Del resto, neppure il grande Newton riuscì a spiegare il fenomeno, e ci vollero i fisici dell'Ottocento per venirne a capo.

[2] L'esercizio dovrebbero farlo i ragazzi, che sono soliti sbagliare meno di noi; comunque, per un raggio medio terrestre pari a 6371,005 km e supponendo gli occhi dell'osservatore a 1,7 metri dal suolo, si ottiene una linea d'orizzonte lontana solo 4654 metri.

constatazione che il triangolo cui applicarlo è davvero rettangolo, perché l'orizzonte è proprio il punto dove lo sguardo/cateto accarezza, toccante e tangente, la superficie del mare. Il rischio vero è quello solito: forse una certa resistenza a voler considerare la propria altezza sommata al raggio del pianeta niente più di un'ipotenusa, o peggio ancora il generale preconcetto che cataloga la matematica come incapace di trattare, forse anche solo di sfiorare la poesia e il romanticismo. Ma questo, lo sappiamo da tempo, è sbagliato: al punto che matematica e fisica possono invece allearsi per dare una seconda opportunità alla coppia di innamorati che scrutano l'orizzonte alla ricerca del raggio verde: "*meglio cercarlo d'estate, nelle giornate limpide e chiare, e nel momento finale e cruciale del tramonto, quando il sole scompare del tutto*", dice la Fisica, che conosce i meccanismi della rifrazione. E la Matematica, invece: "*Abbassatevi sulla spiaggia; se possibile, stando accucciati*"; certo è un po' meno poetico dello starsene seduti e abbracciati, ma in questo modo si è più pronti a balzare in piedi, e questo può tornare utile. Perché se si ha la fortuna di vedere il raggio verde mentre si è accucciati, si può scattare in piedi subito dopo: e questo alzarsi raddoppia la propria altezza, allontana l'orizzonte, facendo così ricomparire una briciola di sole, e forse a ripetere la fugace visione del raggio verde. E riuscire a vedere due distinti raggi verdi in un solo giorno, durante un solo tramonto, è magia che solo la matematica riesce a fare. E se siete tra coloro che pensano che così facendo si toglie poesia al momento, probabilmente avete una concezione sbagliata della matematica, e soprattutto della poesia.

C'è comunque una sottile e stupefacente contraddizione nell'incanto del tramonto su mare: ed è l'illecita sensazione di infinito. La linea in cui cielo e mare si incontrano dà la sensazione di avere di fronte la migliore rappresentazione possibile in terra dell'infinito, eppure la distanza che appare così profonda è quella che un buon maratoneta copre correndo un quarto d'ora. Invece, se si lascia la riva del mare, le cose possono cambiare sensibilmente. Naturalmente, dal punto di vista geometrico, non cambia nulla se la linea d'orizzonte è fatta di mare o di terra: una sterminata pianura ben piatta lascia agli occhi dell'osservatore la stessa sensazione dell'oceano, come dicono i complessi italiani degli anni settanta[3].

Ci sono dei casi in cui degli elementi nuovi vengono a rompere la somiglianza. C'è un punto, lungo l'autostrada A4, in cui il paesaggio è dominato dal massiccio del Monte Rosa: più o meno tra i caselli di Santhià e Greggio. Se la giornata è limpida, pulita dai venti che di tanto in tanto spazzano la Val Padana, la seconda cima delle Alpi si mostrerà prepotente, nitida e bella, chiudendo il panorama verso nord. Ma se la giornata è davvero limpida, è impressionante quanto lontano possa correre lo sguardo: dirigendolo ad est, dove la pianura si allarga e si perde, si vedono le montagne lombarde che la accompagnano senza mai abbandonarla e si riescono a riconoscere le cime intorno a Varese, il Resegone di manzoniana memoria, e poi ancora oltre, perse nella distanza le vette che probabilmente accompagnano Como e poi forse anche le Orobie sopra Bergamo. Dall'altra parte, verso Ovest, si vede tutto l'arco alpino occidentale, e si immagina perfino il cielo di Francia: un corridoio di rilievi è formato a sinistra dalle colline del Monferrato, che si vedono chiaramente, in lontananza, trasformarsi nella collina torinese dove spicca chiaramente, nonostante la distanza, la sagoma della basilica di Superga: mentre a destra corrono le Alpi e le Prealpi, nascondendo alla vista le cime interne della val d'Aosta, ma comunque correndo tra le creste maggiori del Gran Paradiso, le Uie, le Levanne, e poi giù, fino alla figura perfettamente triangolare del Monviso, che tra tutte le montagne più assomiglia ai disegni dei bambini delle elementari, tanto è perfettamente riconoscibile. E dopo il Monviso poco spazio, l'orizzonte e il corridoio si chiudono, e solo

[3] *Quanto verde tutto intorno, e ancor più in là*
sembra quasi un mare d'erba,
e leggero il mio pensiero vola e va
ho quasi paura che si perda...
("Impressioni di Settembre", Premiata Forneria Marconi, 1971)

l'immaginazione può viaggiare lì in mezzo per raggiungere il mare che, si sa, deve essere giusto sotto quello spigolo di cielo.

Quando si cerca poi sulla carta di ricostruire dove è volato lo sguardo, si rimane meravigliati dalla grandezza dello spazio coperto: i punti riconoscibili e riconosciuti coprono se non la metà, almeno un buon terzo di tutta l'Italia settentrionale, ben oltre il limite dei cinque chilometri dell'orizzonte marino, lo sguardo partito dalla valle sotto il Monte Rosa ha corso per centinaia di chilometri, in una direzione e nell'altra. Il senso di infinito che regala il tramonto sul mare manca, perché ci si sente sempre circondati da elementi familiari, noti, calpestabili; eppure le distanze che si abbracciano sono molto maggiori.

La differenza è data dalle Alpi. Non è una grande scoperta: si sa bene che dall'alto dei monti si riescono a vedere dei panorami titanici e vastissimi, ma in questo caso non è elevando il punto d'osservazione (ovvero la h del disegno precedente) che si guadagna in profondità di paesaggio, perché l'osservatore resta in pianura, ma è chiudendo il paesaggio con una catena di punti elevati. Questo significa che, al pari dei pennoni delle navi negli orizzonti marini, quelle che vediamo perdute in lontananza sono solo le cime dei monti, mentre le loro pendici restano invisibili sotto l'orizzonte terrestre, ma questo basta e avanza per allargare in maniera impressionante i nostri spazi.

Gli Appennini, più giovani e nervosi, non hanno la stessa fortuna: non c'è un punto d'osservazione, una base in pianura che consenta di poterne abbracciare una grande parte tutti insieme: corrono ininterrotti dal Colle di Cadibona all'Aspromonte, a voler considerare solo la loro estensione continentale, ma dal punto vista più strettamente orografico bisognerebbe far loro includere anche i rilievi siciliani, Egadi comprese; ma forse, anche per restituire agli orizzonti marini lo spazio che gli abbiamo fin qui negato, si può trovare, in qualche punto del Tirreno meridionale, un punto di vista che mostri un largo anfiteatro delle coste dell'Italia del Sud. Coste che, come ormai sappiamo, non saranno visibili per merito delle basse spiagge, ma proprio per le creste dei monti: le Maldive saranno certo un paradiso, ma, basse come sono, restano a lungo invisibili.

Alpi e Appennini sono accomunati dal trovarsi in Italia e dall'essere catene montuose. E se della montuosità si è già parlato, il concetto di *catena* rimane un po' meno facilmente classificabile. Pur essendo una delle parole più comuni, è curioso come riesca a riferirsi a concetti diversi, e per di più ad essere usato come metafora per situazioni assai differenti. Già l'etimologia della parola dà adito ad incertezze: *catena* viene direttamente dal latino, ma non si sa se vi arrivi dall'etrusco, o dal sanscrito (dove la radice CAT potrebbe indicare "spezzare", con allusione pertanto ad una sorta di necessità o direttamente alla difficoltà di spezzarla) o dal greco, da *καθ-ενα*, nel senso di "uno dietro l'altro", con evidente riferimento agli anelli che la compongono).

Nel linguaggio comune, la catena entra con significati diversissimi: è simbolo di forza, di legame davvero difficile da rompere, e in tale accezione ha una connotazione generalmente positiva. Per lo stesso principio ha anche una lettura negativa, perché le catene tengono prigioniero l'incatenato, lo schiavo, e il significato traslato di "spezzare le catene" è infatti quello della sacra ribellione, del raggiungimento della libertà. Forza e prepotenza, allo stesso tempo: col che si giustifica quel detto che ogni tanto si sente ripetere "*l'anello più debole è anche il più forte, perché spezza la catena*".


3 *Catene di Crateri.*

La resistenza alla rottura e la tenacia sono quindi le prime caratteristiche che fanno della catena un simbolo: ma sono pur sempre solo una parte della sua natura. Un altro elemento essenziale è l'essere composta di elementi tutti uguali, sequenziali l'uno all'altro, che insieme costituiscono qualcosa di essenzialmente diverso dai singoli elementi. In questo senso si trovano persone disposte a "far catena", nella speranza di raggiungere unite obiettivi che è impossibile raggiungere individualmente: così anche le *catene di negozi*, le già citate *catene montuose* e perfino le catene di crateri, che usualmente sono il risultato di un impatto tra corpi celesti, un po' come i rimbalzi che i sassi piatti riescono a fare sull'acqua quando vengono lanciati con un angolo molto acuto rispetto alla superficie.

Le catene sono soprattutto degli strumenti.

Trasmettono energia, come la comune catena della bicicletta, che però come tutte le catene specializzate in trasmissione, ha una caratteristica matematica rilevante: giace rigorosamente su un piano, non è libera di fluttuare tridimensionalmente come la maggior parte delle sue consorelle.


4 *Catena sconsigliata ai frettolosi.*

Trasmettono energia e talvolta la consumano, anche, come la catena delle motoseghe: altre volte, invece, hanno solo il mero scopo d'aumentare l'attrito, come fanno le catene da neve. L'utilizzo più immediato e casalingo è comunque sempre legato alla dote di resistenza: molte porte di casa hanno una catena che dovrebbe aiutare a resistere alla volontà di entrare senza permesso da parte dei malintenzionati. Quella della figura, per buon peso, sembra voler assicurarsi che il proprietario non decida di aprire l'uscio troppo alla leggera, ma solo dopo aver avuto il tempo di pensarci.

Un'ulteriore caratteristica delle catene non dipende né dalla loro costituzione fatta di elementi tutti uguali né dalla capacità di resistere o di trasmettere energia: più banalmente, è l'idea di sequenza, di successione ad essere messa in evidenza. Nell'industria alimentare esiste la *catena del freddo*, che non deve assolutamente essere interrotta: al contrario, le *catene di sant'Antonio* dovrebbero essere brutalmente interrotte senza troppe remore. Esistono catene in edilizia, nell'industria tessile; e Catena è anche un nome di donna e di paese.

Infine e naturalmente, esistono catene in matematica. La catenaria è una curva bella e interessante[4], ad esempio; la catena stessa è una struttura geometrica fatta di elementi rigidi ma flessibile nel suo insieme, con elementi più o meno bidimensionali che però si intrecciano tramite la dimensione perpendicolare. Nonostante tutto ciò, se si parla di

[4] Tant'è vero che ne abbiamo parlato perfino in RM066, Luglio 2004, in occasione del compleanno di Buckminster Fuller, "*Cuori Curve e Cupole*".

catene in un articolo di matematica, è inevitabile che il pensiero vada di filato alle *catene di Markov*.

5 *Andrei Andreyevich Markov*

Andrei Andreyevich Markov nacque a Ryazan, in Russia, il 14 Giugno 1856. Il patronimico mostra chiaramente che anche il suo augusto genitore si chiamava Andrei: questi non era matematico, ma segretario dell'ufficio forestale di Ryazan. In compenso, anche il figlio del matematico si chiamerà Andrei, cosicché condividerà col padre sia nome sia patronimico: il giovane Andrei Andreyevich Markov junior nascerà a San Pietroburgo il 22 Settembre 1903, e tanto per rendere la differenza tra padre e figlio ancora più sottile di quella che c'era tra nonno e padre, farà anche lui il matematico[5]. Il protagonista di questo compleanno, comunque, è Andrei Senior, che ha un'infanzia sfortunata: una grave malformazione al ginocchio lo costringe a muoversi con l'aiuto delle stampelle. Solo verso i dieci anni si sottopone ad un'operazione che gli consentirà di muoversi agevolmente, lasciandogli solo una leggera zoppia. Anche per questo la sua prima classe scolastica che frequenta è una quinta elementare, nel 1866; qui mostra subito una particolare predisposizione per la matematica, controbilanciata da una scarsa simpatia verso tutte le altre materie.

Verso i diciassette anni si convince di aver scoperto un metodo nuovo per la soluzione di equazioni differenziali lineari, e scrive ai mostri sacri dell'Università di San Pietroburgo, Korkin e Zolotarev, annunciando la scoperta. I due gli rispondono con allegro paternalismo che il metodo è buono, ma tutt'altro che nuovo; e questi primi contatti forse giocano a favore della scelta che Andrei Markov farà nel 1874, subito dopo la licenza ginnasiale: si iscriverà alla facoltà di Meccanica e Matematica dell'università dove i due tengono corsi, insieme ad un altro mostro sacro come Chebyshev. La scelta si rivela giusta: nel 1877 Markov vince una medaglia d'oro per le ricerche sul tema "*Sulle soluzioni di equazioni differenziali con l'aiuto di frazioni continue*". Tre anni dopo discute la sua tesi di laurea[6], e nel 1884 ottiene il dottorato[7]; due anni dopo, su proposta di Chebyshev, viene eletto come membro aggiunto all'Accademia delle Scienze di San Pietroburgo.

La sua carriera accademica procede linearmente: professore associato nel 1880, comincia a tenere il corso di probabilità nel 1883, dopo che Chebyshev ha lasciato l'insegnamento. Diventa professore straordinario nel 1886 e ordinario nel 1893. Nel 1905 otterrà, in segno di riconoscimento, anche il titolo di professore onorario.

[5] Il giovane Markov, che visse fino al 1979, non raggiunse la fama del genitore, ma fu matematico di valore assoluto. Se incontrate la "*regola di Markov*" o il "*principio di Markov*" sappiate che non state trattando cosucce fatte dall'inventore delle catene, ma dal suo valido figliolo (un *VAdL* ante litteram, forse). Del resto, Markov senior, oltre al figlio, aveva anche un fratello, Vladimir (figlio del padre e della sua seconda moglie, quindi fratellastro), che morì di tubercolosi a soli 26 anni, ma dopo essere già diventato matematico di fama internazionale.

[6] Titolo della tesi: "*Sulle forme quadrate binarie con determinante positivo*".

[7] Titolo della tesi: "*Su certe applicazioni delle frazioni continue algebriche*".

Una carriera del tutto limpida e priva di scossoni, eppure la vita e l'atteggiamento di Andrei Markov erano davvero distanti dalla tranquillità: era un attivista politico e un ribelle nato. Appena eletto all'Accademia, rifiutò dei premi che giungevano direttamente dallo Zar per protestare contro la mancata elezione all'Accademia del grande scrittore Maksim Gorkij; di solito, all'Accademia di San Pietroburgo venivano eletti grandi personalità culturali del paese, ma anche nobili della famiglia reale: questa usanza era ferocemente contestata da Markov, che scrisse una ventina di lettere di protesta ai giornali e persino dei versi (abbastanza sconci), al punto che i giornalisti cominciarono a chiamarlo "l'accademico militante" o direttamente "Andrei il furioso". L'abitudine alla contestazione lo accompagnò per tutta la vita: nel 1907 rinunciò pubblicamente ai diritti civili per protestare contro il governo; nel 1912 scrisse al Sacro Sinodo della Chiesa Ortodossa chiedendo di essere scomunicato al pari di Lev Tolstoj, che era incorso nella fustigazione della chiesa l'anno precedente. Ancora: nel 1913 una grandiosa celebrazione era prevista in tutta la Russia, perché ricorreva il terzo centenario della dinastia Romanov, salita al potere nel 1613; in realtà la dinastia era davvero traballante, appena uscita dai moti del 1907 e ormai prossima ad essere abbattuta dai bolscevichi nel 1917. Markov, per mostrare tutto il suo disappunto verso certe ritualità, decise di indire una celebrazione alternativa, festeggiando il secondo centenario della Legge dei Grandi Numeri.

Non erano battaglie solo provocatorie, perdute in partenza: Gorkij fu infine ammesso all'Accademia, ad esempio, ed è certo che le proteste di Markov ebbero il loro peso in merito; un'altra battaglia lunga e feroce la combatté contro Pavel Nekrasov, come lui matematico interessato al calcolo delle probabilità, che però, allineato alle teorie della Società Matematica di Mosca, tentava di usare la statistica e la probabilità per dimostrare la dottrina teologica del libero arbitrio.

Andrei conobbe la sua futura sposa, Maria Ivanovna, quando erano entrambi molto giovani. Andrei era ancora studente, ma già molto bravo in matematica e bravissimo negli scacchi. Il padre di Maria, che era anche il datore di lavoro del padre di Andrei, chiese al giovane studente di dare delle ripetizioni di matematica alla figlia. Le lezioni di matematica dovettero dare buoni frutti, se in capo a poco tempo Markov chiese formalmente la mano di Maria ai genitori di lei. Il permesso alle nozze, però, si fece attendere molto a lungo: soprattutto la futura suocera non vedeva di buon occhio il fidanzamento con un giovanotto senza risorse, e negò il suo assenso alle nozze fino a quando Markov non dimostrò di poter mantenere decentemente la sua sposa. Questo accadde solo nel 1883. Nella foto qui sotto si vedono Andrei e Maria con il piccolo Andrei Andreivich, nato nel 1903.

6 *Andrei, Andrei e Maria*

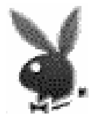
Andrei Markov aprì un'intera nuova disciplina nel calcolo delle probabilità, quando introdusse quelle che oggi sono universalmente conosciute come *Catene di Markov*: in poche parole, si possono definire come sequenze di variabili casuali in cui le variabili future sono determinate dalle variabili presenti, ma che sono indipendenti dal modo in cui lo stato attuale è stato determinato dai suoi predecessori. Su di esse lavoreranno poi Norbert Wiener e Andrei Kolmogorov, mostrandone appieno la potenza.

Nel 1913, quando uscì la terza edizione del suo libro *Ischislenie veroyatnostej*, "Calcolo delle Probabilità", Markov celebrò, come già accennato, i duecento anni della pubblicazione del testo di Bernoulli, e riportò integralmente l'edizione del suo libro del 1907. Per arricchire quell'edizione, il testo del 1913 riportava queste parole: "*Terminiamo l'articolo e l'intero libro con un buon esempio di prove dipendenti che possono approssimativamente essere considerate come una singola catena…*". L'esempio era il suo studio attuato su ventimila lettere dell'opera "Evgenij Onegin" di Puškin, e calcolando la probabilità stazionaria e dipendente delle vocali seguite da vocali e seguite da consonanti.

Andrei Markov ha lottato per dare un seggio all'Accademia Maksim Gorki, ha chiesto di essere scomunicato per solidarietà con Lev Tolstoj, ha usato per dimostrare la validità della sua massima opera un poema di Puškin.

Niente male, per un ragazzino che andava male in lettere.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Non è un duplicato!			
Mezza bilancia?			

2.1 Dovrebbe intitolarsi "Lotteria", ma lo intitoliamo "Non è un duplicato!"

Lo specifichiamo perché qualcuno potrebbe ancora avere in mente il problema del mese scorso, quello nel quale si compravano le biglie. Dobbiamo dire che la cosa che ci piace di più, di questo, è giustappunto la sua similitudine con l'altro.

Come dovrebbe dire il titolo, trattasi di lotteria; voi potete comprare dei biglietti, ciascuno dei quali ha un valore di vincita t; variabile casuale uniformemente distribuita tra 0 e 1 Euro; ogni biglietto costa un certo prezzo c, anch'esso compreso tra 0 e 1 Euro; voi potete comprare, se volete, anche zero biglietti (non vincendo niente ma neppure spendendo niente); la "fregatura" (ce n'è sempre una, in ogni lotteria) è che se non vi piace il biglietto che avete comprato, lo gettate via e ne comprate un altro (sempre al costo c).

Supponiamo che, in un momento di acuta capacità di analisi, adottiate la miglior strategia; quanto vi aspettate di vincere, come funzione di c?

Per andare ancora più vicino al problema dell'altra volta, supponiamo voi non siate costretti a buttare via i biglietti precedenti, ma quando vi stufate di regalare soldi al Lottatore (insomma, l'organizzatore della Lotteria!) possiate presentare all'incasso un solo biglietto a vostra scelta; in questo caso, quanto vi aspettate di vincere?

2.2 Mezza bilancia?

"Rudy, è da tanto che non parli di bilance".

Vero. Probabilmente ricordando le folli e interessantissime divagazioni portate da un nostro lettore tempo fa sul concetto di "trilancia", ovvero la bilancia a tre piatti. Le bilance sono comunque tornate in auge qualche tempo fa, alla domanda di un amico dei Validi Assistenti di Laboratorio su cosa fosse una stadera; la risposta del Nostro è stata "È un tipo di bilancia che oggi si trova solo nei libri di fisica".

La cosa interessante è stata che al termine della descrizione del funzionamento della stadera, è spuntata la domanda: "…Ma se è una bilancia ad un piatto, perché non si chiama *monolancia*?".

Sorvoliamo sui commenti che sono seguiti a questa dichiarazione; la cosa interessante è che i Validi Assistenti qualche giorno dopo (intenti a ~~preparare una torta~~ combinare guai in cucina) hanno probabilmente costruito un qualcosa che può essere a tutti gli effetti considerato una *monolancia*. Il guaio è che vorrebbero capire un po' di più sul suo funzionamento, e quindi stanno mettendo Rudy in notevoli ambasce.

L'idea è, approssimativamente, di prendere una di quelle teglie parallelepipedali (o *parallelepipoidali*? Insomma, il concetto è quello) che servono di solito per fare il pancarré e piazzarla su un supporto in modo che sia perfettamente bilanciata; a questo punto, dovendo pesare della farina, la compattiamo sulla sinistra, che formi un parallelepipedo all'interno della teglia riempiendola completamente per una certa lunghezza.

Questo squilibrerà la *monolancia*, costringendoci a spostare il punto di appoggio sulla sinistra della teglia, sino a raggiungere un nuovo punto di equilibrio; il nuovo punto di equilibrio sarà funzione della quantità di farina contenuta e quindi (con opportune tarature che lasciamo quale semplice esercizio agli ingegneri) abbiamo inventato uno strumento di misura.

Il quale strumento, come al solito, crea dei problemi, a prescindere dalla farina da tutte le parti; infatti Fred si è posto un'interessante domanda: "Ma senza sapere niente del peso della teglia o della farina, se io continuo ad aggiungerne e intanto sposto il fulcro, ci sarà un momento in cui il punto di appoggio sarà nel punto più a sinistra possibile, per poi ricominciare a spostarsi verso il centro… Ma in quel momento, fin dove arriva la farina nella teglia? È a sinistra o a destra del centro teglia?"

E qui Rudy si è trincerato dietro un "…Dunque, vediamo…"; ma Alberto non poteva essere da meno, e ha cominciato a chiedersi se fosse possibile determinare precisamente la posizione cui arriva la farina quando il punto di appoggio è il più a sinistra possibile.

Rudy: "…beh, credo…"

Fred: "E tieni anche conto del fatto che stai lavorando con farina *integrale*, quindi con delle impurità che ti fanno variare il peso lungo il 'panetto'… in questo caso, cambiano le tue risposte?"

Rudy: "…se me le lasciate cercare…"

Alberto: "Credo ci vogliano un po' di numeri: la nostra farina pesa 10 grammi per ogni centimetro di lunghezza di teglia, la teglia è lunga 20 centimetri e pesa 300 grammi; adesso, dovremmo poter trovare il punto di appoggio più a sinistra…"

Rudy: "Insomma! Se continuate a parlare non riesco a pensarci!" E si allontana sdegnato.

Anche stavolta, come ama dire, ha schivato l'oliva, ma quei due hanno l'aria di voler tornare presto alla carica; riuscite a trovare le risposte? In tempi brevi, possibilmente; i VAdLdRM hanno tutta l'aria di voler tornare alla carica, e Rudy non può stare chiuso nel *Math Manor* per molto tempo…

3. Bungee Jumpers

Provate che, per un qualsiasi insieme di n numeri positivi $a_1, a_2, \dots, a_n$, si ha:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

e che l'uguaglianza è valida se e solo se $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Bentornati su queste pagine dedicate a voi lettori. Le soluzioni giunte questo mese sono state poche, ma corpose, per cui cercheremo di essere brevi in questa introduzione.

Annunciamo con orgoglio che finalmente è terminata la stagione dei compleanni per RM: anche l'ultimo, quello del nostro Postino, è passato, e non sappiamo descrivere i doni sotto forma di bit in diverse distribuzioni e quantità che ha ricevuto.

Annunciamo con molto meno orgoglio che Rudy il mese scorso ne ha combinate due delle sue:

1. Nella soluzione del Sudoku di Scholtz, come si sono accorti coloro che l'hanno risolto, le celle (5,5) e (5,6) sono invertite tra di loro. Il motivo è che Rudy lo ha risolto a matita copiando poi la soluzione e ha invertito le due celle.
2. Come ha acutamente notato (il solo) ***Mariano Tomatis***, la soluzione del Q&D è 18/39, non 19/39. Qui, è proprio scivolato il dito.

Durante questo periodo di celebrazioni la Redazione è stata particolarmente felice di ottenere, oltre a classici auguri, anche problemi da risolvere, che hanno tenuto occupati i Redattori stessi per mesi. Se otterremo il permesso dei diretti interessati potremmo pubblicare le meraviglie in Bookshelf, voi fateci un giro questo mese e vedete se c'è qualcosa di nuovo.

Grazie, grazie a tutti.

4.1 [124]

Scarseggiano le soluzioni nel mese che finalmente segnala l'arrivo del caldo: a quanto pare i solutori di RM hanno utilizzato al meglio le opportunità di passare più tempo all'aperto, e noi ne siamo contenti.

4.1.1 Finché siamo in tempo...

Il primo problema del mese riprendeva un vecchio e caro adagio del Capo, l'estrazione di biglie colorate. Eccone il testo riassunto:

> *Dentro un sacchetto ci sono tre biglie, ciascuna delle quali è o bianca o nera e abbiamo la stessa probabilità che ci siano 0, 1, 2 o 3 biglie bianche. Le palline bianche valgono mille, le nere zero. Il giocatore ha la possibilità di comprare una biglia ad un certo prezzo, compreso tra zero e mille (estremi esclusi); quando compra una biglia, la si estrae (casualmente) dal sacchetto ed è sua: liberissimo di guardare il colore e tenersela. Può andare avanti a comprare biglie sin quando vuole, decidendo di fermarsi in qualsiasi momento. Supponendo utilizzi la miglior strategia possibile: come varia il guadagno atteso in funzione del costo delle biglie? Attenzione che abbiamo scritto "guadagno", quindi dal ricavo dovete detrarre il costo delle biglie comprate..*

Come si diceva, pochi solutori, ma affezionati: ***Alberto R.*** e ***Cid***. Dato che per il prossimo problema abbiamo parecchio da riferire, ci limiteremo alla soluzione di ***Cid***, per quanto lui stesso non si fidi dei propri risultati a causa della febbre…

> Comincio costruendo la tabella di tutte le permutazioni possibili delle quattro configurazioni delle biglie del sacchetto; le quattro configurazioni sono: sacchetto con 0 biglie bianche, sacchetto con 1 biglia bianca, sacchetto con 2 biglie bianche, sacchetto con 3 biglie bianche.
>
> Le permutazioni indicano tutti i modi in cui possono essere estratte le tre biglie dal sacchetto.
>
> La tabella è la seguente:

Configurazione 1						Configurazione 2						Configurazione 3						Configurazione 4					
N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	N	N	B	B	B	B	B	B
N	N	N	N	N	N	N	N	B	B	N	N	B	B	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B
N	N	N	N	N	N	B	B	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B

Da questa tabella si vede subito che la probabilità che la prima biglia estratta sia bianca è uguale al 50%, e che se estraggo una biglia bianca alla prima estrazione aumenta la probabilità che siano bianche anche quelle successive, mentre se la estraggo nera aumenta la probabilità che siano nere anche le biglie estratte in seguito.

Conviene ora considerare quale sia la probabilità di estrarre una biglia bianca, sulla base del colore delle biglie estratte in precedenza.

Se la prima biglia estratta è nera, ci troviamo nella seguente situazione:

Configurazione 1						Configurazione 2						Configurazione 3						Configurazione 4					
N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	N	N	B	B	B	B	B	B
N	N	N	N	N	N	N	N	B	B	N	N	B	B	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B
N	N	N	N	N	N	B	B	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B

Essendo nera la prima biglia estratta sappiamo di trovarci in una delle colonne rosse, quindi la probabilità che alla seconda estrazione la biglia sia bianca è uguale al numero di B presenti nelle colonne rosse sulla riga corrispondente alla seconda estrazione diviso per il numero di colonne rosse.

Abbiamo 12 colonne rosse e 4 B rosse sulla riga corrispondente alla seconda estrazione, dunque la probabilità che alla seconda estrazione la biglia sia bianca se era nera la prima biglia estratta risulta essere uguale a: $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$. Calcolo ora la probabilità che la terza biglia sia bianca se le prime due estratte erano nere:

Configurazione 1						Configurazione 2						Configurazione 3						Configurazione 4					
N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	N	N	B	B	B	B	B	B
N	N	N	N	N	N	N	N	B	B	N	N	B	B	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B
N	N	N	N	N	N	B	B	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B

essendo nere le prime due biglie estratte sappiamo di trovarci in una delle colonne viola, quindi la probabilità che alla terza estrazione la pallina sia bianca è uguale al numero di B presenti nelle colonne viola sulla riga corrispondente alla terza estrazione diviso per il numero di colonne viola.

Abbiamo 8 colonne viola e 2 B viola sulla riga corrispondente alla terza estrazione, dunque la probabilità che alla terza estrazione la biglia sia bianca se erano nere le prime due biglie estratte risulta essere uguale a: $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$. Sicuramente, la situazione peggiore è quella in cui le prime due biglie estratte siano entrambe nere; in questo caso conviene proseguire il gioco ed estrarre anche la terza biglia solo se il prezzo della biglia non è superiore a: $1000\cdot\frac{1}{4}=250$.

Quindi se il prezzo della biglia non è superiore a 250 conviene sempre estrarre tutte e tre le biglie, considerato che per ogni riga della tabella abbiamo 12 B e 12 N, si ricava che ad ogni estrazione la probabilità di estrarre una biglia bianca è uguale al 50%. Quindi ad ogni estrazione, il valore atteso del guadagno è uguale a: $\frac{1000}{2} - x$

e di conseguenza dopo 3 estrazioni risulta uguale a: $1500 - 3x$.

Allo stesso modo si possono calcolare le probabilità di avere una biglia bianca o una biglia nera in funzione di quali sono i colori delle biglie estratte fino a quel momento.

Considero ora quale possa essere il valore del guadagno atteso, se decido di estrarre la terza biglia solo se c'è almeno una biglia bianca tra le prime due biglie estratte.

Disegno la tabella:

Configurazione 1						Configurazione 2						Configurazione 3						Configurazione 4					
N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	N	N	B	B	B	B	B	B
N	N	N	N	N	N	N	N	B	B	N	N	B	B	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B
N	N	N	N	N	N	B	B	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B

Il valore atteso del costo delle biglie è: $2x + x \cdot \frac{16}{24} = \frac{8}{3}x$.

Il valore atteso del ricavo è: $\frac{1000}{2} + \frac{1000}{2} + 1000 \cdot \frac{10}{24} = \frac{4250}{3}$.

Il valore atteso del guadagno è uguale quindi a: $\frac{4250 - 8x}{3}$.

Questa situazione risulta conveniente solo quando il costo della biglia è tale che non risulti conveniente proseguire se le prime due biglie estratte sono nere. Considerando quindi solo l'ultima riga, se io proseguo comunque il mio guadagno atteso è uguale a: $\frac{1000}{2} - x$, se io proseguo solo se tra le prime due estratte c'è una biglia bianca il guadagno atteso dell'ultima estrazione è: $\frac{1250 - 2x}{3}$. Dalla disuguaglianza $\frac{1250 - 2x}{3} \geq 500 - x$ si ottiene ciò che già avevamo visto prima, cioè che questa strategia conviene solo se il prezzo delle biglie non è inferiore a 250.

Cosa succede se io estraggo le altre biglie, solo se è bianca la prima biglia estratta? Disegno la tabella:

Configurazione 1						Configurazione 2						Configurazione 3						Configurazione 4					
N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	N	N	B	B	B	B	B	B
N	N	N	N	N	N	N	N	B	B	N	N	B	B	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B
N	N	N	N	N	N	B	B	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B

Il valore atteso del costo delle biglie è: $x + x \cdot \frac{12}{24} + x \cdot \frac{12}{24} = 2x$.

Il valore atteso del ricavo è: $\frac{1000}{2} + 1000 \cdot \frac{8}{24} + 1000 \cdot \frac{8}{24} = \frac{3500}{3}$.

Il valore atteso del guadagno è uguale quindi a: $\frac{3500-6x}{3}$.

Questa situazione risulta conveniente solo quando il costo della biglia è tale che non risulti conveniente proseguire se la prima biglia estratta è nera. Considerando quindi solo le ultime due righe, se io proseguo comunque il mio guadagno atteso è uguale a: $(500-x)+\left(\frac{1250}{3}-\frac{2}{3}x\right)=\frac{2750-5x}{3}$, se io proseguo solo se la prima biglia estratta è bianca il guadagno atteso delle restanti estrazioni è: $\frac{2000-3x}{6}+\frac{2000-3x}{6}=\frac{2000-3x}{3}$. Dalla disuguaglianza $\frac{2000-3x}{3} \geq \frac{2750-5x}{3}$ si ottiene che questa strategia conviene solo se il prezzo delle biglie non è inferiore a 375.

Infine considero cosa succede se io interrompo il gioco alla prima biglia nera estratta:

Configurazione 1						Configurazione 2						Configurazione 3						Configurazione 4					
N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	N	N	B	B	B	B	B	B
N	N	N	N	N	N	N	N	B	B	N	N	B	B	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B
N	N	N	N	N	N	B	B	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B

Il valore atteso del costo delle biglie è: $x + x \cdot \frac{12}{24} + x \cdot \frac{8}{24} = \frac{11}{6}x$.

Il valore atteso del ricavo è: $\frac{1000}{2} + 1000 \cdot \frac{8}{24} + 1000 \cdot \frac{6}{24} = \frac{3250}{3}$.

Il valore atteso del guadagno è uguale quindi a: $\frac{6500-11x}{6}$.

Questa situazione risulta conveniente solo quando il costo della biglia è tale che non risulti conveniente proseguire se estraggo una biglia nera. Considerando quindi solo l'ultima riga, se io estraggo comunque la terza biglia nel caso in cui sia bianca la prima biglia estratta, il mio guadagno atteso alla terza estrazione è uguale a: $\frac{1000}{3}-\frac{x}{2}=\frac{2000-3x}{6}$, se io proseguo solo se è bianca anche la seconda biglia il guadagno atteso della terza estrazione è: $\frac{1000}{4}-\frac{x}{3}=\frac{750-x}{3}$. Dalla disuguaglianza $\frac{750-x}{3} \geq \frac{2000-3x}{6}$ si ottiene che questa strategia conviene solo se il prezzo delle biglie non è inferiore a 500.

Chiaramente proseguire solo se le biglie estratte fino a quel momento sono bianche è la strategia che minimizza il rapporto qualità/prezzo, ma anche questa strategia ha un valore del costo delle biglie per il quale non risulta più conveniente; ciò avviene nel caso in cui il guadagno atteso diventa negativo. In tal caso conviene rinunciare ad estrarre le biglie.

Impongo quindi la condizione: $\frac{6500-11x}{6} \geq 0$ ed ottengo che questa strategia conviene per: $500 \leq x \leq \frac{6500}{11}$.

Riassumendo, il valore del guadagno atteso è:

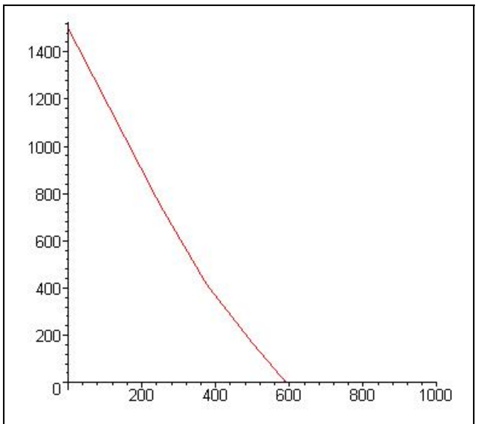
$1500-3x$ (per $0 < x \leq 250$)

$\frac{4250-8x}{3}$ (per $250 \leq x \leq 375$)

$\frac{3500-6x}{3}$ (per $375 \leq x \leq 500$)

$\frac{6500-11x}{6}$ (per $500 \leq x \leq \frac{6500}{11}$)

0 (per $\frac{6500}{11} \leq x < 1000$)



7 *Risultato di **Cid***

Volendo rappresentarlo graficamente si ottiene il grafico qui a lato.

Avevamo già chiuso il numero, quando è arrivata la soluzione di ***Franco57***: purtroppo non abbiamo fatto in tempo a modificare niente e solo ad aggiungere questa frase, ne riparleremo se potremo.

4.1.2 Vecchi ricordi

Il problema del Dazio del Pino del Pino, detto anche DdP^2, ha avuto un discreto successo di pubblico, e soprattutto nel risvegliare ricordi più o meno piacevoli, ha ispirato i nostri lettori. Per prima cosa riprendiamo il problema:

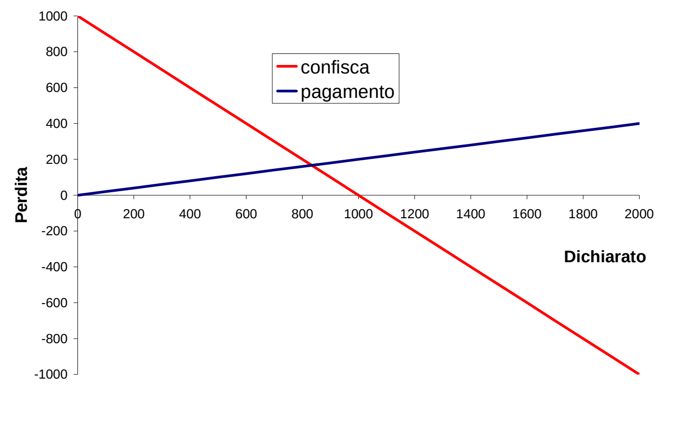
> *Supponiamo un dazio basato su una ragionevole fiducia negli esseri umani: quando il camionista arriva, dichiara il valore del carico e paga una tassa pari al venti per cento del carico. Se il doganiere ritiene che la valutazione sia troppo bassa, ha il diritto di comprare a quel prezzo l'intero carico, senza proteste.*
>
> *Un camionista arriva con un carico da mille euro, ed è intenzionato a guadagnare dal carico il più possibile: quanto dichiara?*
>
> *Se Alberto arriva con un camion che ha un carico del valore di un migliaio di euro e a poche ore di distanza c'è suo fratello Fred alla guida di un camion con lo stesso carico; i due hanno deciso di dividersi i guadagni, e sanno che il dazio può ospitare un solo camion comprato. Quanto dichiarano, quando arrivano al dazio?*
>
> *Si può andare avanti in questo modo con n camion e n–1 depositi… Se nel deposito ci stanno due camion, e gli amici sono 5 in tutto, questa volta, però, arrivano tutti assieme: quanto valuta ciascuno il proprio carico?*
>
> *Conviene di più continuare ad arrivare uno per volta? E quanto?*

Le soluzioni giunte sono di ***Rub***, l'infaticabile ***Cid*** e ***Martino***. Cominciamo con ***Rub***, che è arrivato per primo:

> Iniziamo con le definizioni che ci servono: V è il valore del carica (1000 euro), T il tasso doganale (20%), e D la cifra dichiarata. La cifra da pagare, se il doganiere non esercita l'opzione di confisca del carico, è evidentemente T·D. Se invece l'avido funzionario preferisce requisire il carico, ci pagherà la cifra D e quindi la nostra

perdita ammonta a V–D. Tale formula vale anche nel caso di una dichiarazione D>V, ove evidentemente invece di una perdita abbiamo un guadagno. Il testo è – come sempre! – volutamente ambiguo, perché mi sembra strano che in tale caso la tassa doganale non debba essere dovuta, e mi sembrerebbe più logico che il carico ci venisse rimborsato con una somma pari a (1–T)·D, trattenendo la quota T·D come tassa. Ma in prima approssimazione ignoriamo tale falla logico/fiscale…

Esiste un valore D tale che T·D=V–D ovvero la nostra perdita è indipendente da ogni scelta aleatoria discrezionale del doganiere; tale valore è D=V/(1+T).

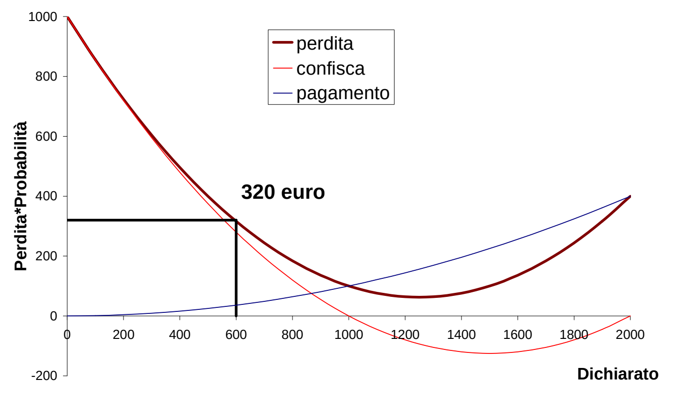


8 *La prima tabella di **Rub***

Ipotizziamo adesso che la mentalità del doganiere, oltre che avida, sia probabilisticamente lineare, e che sia ragionevolmente esperto nel valutare il valore del carico. Alla nostra dichiarazione D=0 sicuramente lui accetterà di confiscare, mentre per D=V possiamo ipotizzare il 50% di probabilità che lui confischi o no. Estrapolando linearmente, troveremo che per D=2V lui certamente sceglierà di farci pagare la tassa.

Incrociando la distribuzione di probabilità di pagare e di essere confiscati con la perdita relativa, otteniamo la distribuzione pesata della perdita complessiva, ed il valore medio della perdita attesa, che ammonta a **320** euro nel caso in esame.

La curva della perdita pesata complessiva (in marrone grassetto) ci indica che il valore atteso di perdita si ottiene dichiarando circa 600 euro, e mediamente perdiamo 320 euro o in tasse o in valori confiscati. Io sceglierei decisamente l'opzione che ci mette al sicuro da ogni rischio, ovvero dichiarare **833 euro**, scegliendo la perdita certa (indifferentemente dalle scelte daziarie) di solo **167 euro**.



9 *La seconda tabella di **Rub**.*

Cosa cambia se abbiamo la tassa anche sul valore confiscato?

La perdita in caso di confisca aumenta a V–(1–T)·D ed il valore di equilibrio collassa a D=V: l'onestà viene premiata!

Restiamo nello spirito del problema iniziale, senza tassa sulla confisca, e vediamo come gestire il carico di Fred. Se io pago, allora Fred non ha altra scelta che denunciare V/(1+T); la perdita complessiva sui due carichi sarà T·D+T·V/(1+T).

Se io vengo confiscato, Fred allegramente dichiarerà D=0, sicuro dell'impunità. La perdita allora sarà solamente V–D del primo carico. Ancora, eguagliando per non avere aleatorietà doganale, otteniamo la sorprendente

$D=V/(1+T)^2$

Si potrà estrapolare per *n* camion ad il valore

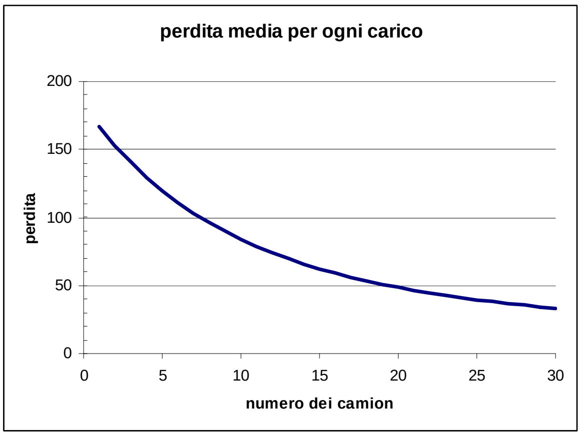
$D=V/(1+T)^n$

Se ho a disposizione 5 mezzi, seguo la seguente logica: al primo denuncio $1000/1.2^5=402$ euro; se vengo confiscato, perdo 598 euro e per tutti gli altri denuncio zero e non perdo più nulla, con una perdita media di 120 euro per ciascun carico.

Se pago il dazio (80), allora per il secondo denuncio 482 euro = $1000/1,2^4$; se vengo confiscato perdo 518 euro, poi denuncio sempre zero, con la stessa perdita totale 598=80+518 euro. Come si vede dalla tabella seguente, la perdita complessiva è costante e pari a 598 euro (per tutti i successivi carichi denuncio secondo la formula oppure zero, se ho già avuto una confisca precedente; il caso di confisca del carico è evidenziato in giallo).

CAMION	DENUNCIO	PERDITA					
#1	402	598	80	80	80	80	80
#2	482 o 0	0	518	96	96	96	96
#3	579 o 0	0	0	421	116	116	116
#4	694 o 0	0	0	0	306	139	139
#5	833 o 0	0	0	0	0	167	167
TOTALE		**598**	**598**	**598**	**598**	**598**	**598**

Il grafico seguente mostra la perdita media per carico, seguendo la logica sopra esposta, in funzione del numero di camion. Persino con 30 mezzi ho convenienza a denunciare a crescere da 4 euro al primo, sino ad 833 euro (se ancora necessario) all'ultimo, perdendo così 996 euro in totale, invece che denunciare – come sembrava più logico a priori – sempre zero, con una perdita certa di 1000 euro.



10 *Ultimo grafico di* ***Rub***.

Anche questa volta un intervento molto interessante. La soluzione che vi proponiamo adesso è di ***Martino***, ed è – in linea con il titolo del problema – romanzata. Speriamo di riuscire a rendergli giustizia con l'impaginazione classica di RM per le soluzioni, ma soprattutto speriamo che vi diverta quanto ha divertito noi.

Il Problema "2.2 Vecchi ricordi" del N. 124 di RM, ovvero il Problema del Dazio del Pino del Pino, ovvero DP^2 richiede a mio avviso di essere preventivamente inquadrato dal punto di vista fiscale e da quello economico-sociale.

Vista l'ambientazione al Dazio del Pino del Pino, mi permetto di spostare gli eventi in quel periodo del XIX secolo che va da Roma Capitale ai primi anni del secolo successivo, di conseguenza i prezzi sono espressi in Lire, Soldi e Centesimi, in quanto al luogo dove la merce viene venduta è ovviamente il mercato di Porta Palazzo, così ben descritto da Guido Gozzano in "*Torino suburbana. La gran cuoca*"[8]. Naturalmente la merce viene trasportata a spalle o su carri trainati da un

[8] «un villaggio intero» «con le vie regolari tra banco e banco, diviso e suddiviso in quartieri». Bella descrizione, vero? Peccato che, come evidenziato da una ricerca di Giorgio Padoan negli anni '60, si tratti di un plagio sfacciato da "Le ventre de Paris" di Èmile Zola in cui si descrive il parigino mercato de Les Halles.

cavallo e per semplificare le cose intendo occuparmi unicamente di cavoli e legna da ardere.

Il problema originale parla di 1'000 Euro, trasformandoli in 1'000 Soldi, pari a 50 Lire o 5'000 Centesimi, si ottiene un valore passabilmente coerente con quello che avrebbe avuto all'epoca un carro di cavoli o di legna.

Rinviando al N. 124 di RM per la versione originale, riassumo il problema DP[2]:

a) si paga il dazio come percentuale del valore della merce portata all'interno della cinta daziaria;

b) se il valore dichiarato è considerato troppo[9] basso, l'ufficio del dazio può (può, non deve) acquistare coattivamente la merce per lo stesso importo;

c) sono da valutare diversi scenari di attraversamento del dazio: da soli o con dei compari (contemporaneamente o separatamente) secondo diverse ipotesi di possibilità e/o propensione all'acquisto coattivo da parte dell'ufficio del dazio. In tutti i casi si deve trovare la maniera migliore per fregare la gabella e ottenere il massimo guadagno.

1 Considerazione: Chi sono i giocatori?

Possiamo definire vari livelli di complessità.

0. La contadina che va in città con le scarpe appese al collo, una cesta di cavoli al braccio, una caciotta nascosta sotto i cavoli in modo che venga trovata e tre o quattro giri di salamini nascosti sotto i vestiti in modo che non vengano trovati. In questo caso abbiamo un solo giocatore che combatte contro l'avverso destino ed il fiuto del cane dei doganieri svolge il ruolo che aveva nella tragedia greca la bilancia del fato in pugno a Zeus.
1. Il Trasportatore e il Dazio. I giocatori sono due e sanno fare molto bene i loro conti nella valuta corrente del regno; il secondo ha natura impersonale ma in qualche modo deve essere rappresentato in terra da uno o più funzionari comunali in carne e ossa.
2. Il Trasportatore, il Dazio e il Mercato. Il terzo giocatore è impersonale ma è quello che fornisce il valore alla merce e giustifica una tariffa daziaria percentuale e non una fissa, commisurata al quantitativo della merce[10].
3. Il Trasportatore, il Dazio, il Mercato e i Compari del Trasportatore. Più avanti analizzeremo meglio il ruolo dei Compari, per il momento è opportuno notare che il problema parla di «tuo fratello Fred» e implicitamente suggerisce problemi di affidabilità reciproca.
4. Il Trasportatore, il Dazio, il Mercato, i Compari del Trasportatore e i Concorrenti del Trasportatore. Per caso pensate che il nostro Trasportatore sia l'unico ad attraversare quel particolare casello del Dazio per portare quel particolare prodotto al mercato? o che quello sia l'unico varco nella cinta daziaria attraverso cui lo stesso tipo di merce può raggiungere il mercato[11]? Ebbene, vi sbagliate.
5. Tutti i precedenti più il delegato all'annona, vari gabellotti, i birri dell'annona, gli informatori dei birri, il reverendo parroco di *** e molti altri ancora a seconda delle necessità sceniche.

[9] Considerazioni successive porteranno a sostituire l'espressione "troppo basso" con "sufficientemente basso".

[10] Ad esempio: due soldi per ogni cesta di cavoli, indipendentemente dal prezzo (coincidente con il valore in questo schema estremamente rozzo di tassazione) che può essere effettivamente ottenuto alla vendita.

[11] "mercato" minuscolo in quanto usato come denominazione del luogo fisico in cui avviene il "Mercato".

2 Considerazione: Cosa si intende per "valore della merce"?

Bella domanda: un'analisi adeguatamente risolutiva – o risolutivamente adeguata – vale un Premio Nobel per l'Economia, soffro abitualmente di deliri di onnipotenza ma non sino a questo punto e non incomincio nemmeno. Ipotizzerò un "valore tipico" del prodotto, non una media scientifica dei prezzi di mercato, ma qualcosa ottenuto con un procedimento analogo al seguente.

> Secondo Pautasso, che coltiva l'orto in collina, la sera all'osteria chiede ad un conoscente venuto dalla città: «Damiano, a quanto li vendono i cavoli in città?».
>
> «A dieci soldi la cesta.»
>
> Torna a casa e dice alla moglie: «Consolata, domattina all'alba porti una cesta di cavoli a vendere in città. E già che ci sei cerca di far fuori un po' di quei salamini che non ci fidiamo a mangiare, quelli che abbiamo fatto con il maiale che abbiamo trovato morto nello stabbio il mese scorso.».

È un metodo estremamente ingenuo, che non tiene conto del costo di produzione dei cavoli, dato che vengono dall'orto e sono un soprappiù di quelli destinati all'autoconsumo, non hanno nemmeno richiesto spese di concimazione, essendo questa fornita dal secondo tipico uso dell'orto in voga nelle campagne. Non tiene conto nemmeno dei costi di trasporto visto che la camminata andata e ritorno in città richiede un consumo energetico all'incirca uguale a quello speso nel tempo corrispondente passato a zappare l'orto o a far fieno per le bestie; Consolata non consuma neanche le scarpe perché viaggia a piedi nudi e le mette solo arrivando in vista del casello del dazio[12] e, poiché torna a casa molto prima di mezzodì, non deve nemmeno spendere per mangiare fuori[13].

È però il metodo con cui ragionano i probabili, tipici acquirenti per valutare la congruità del prezzo richiesto per la merce. Soprattutto è quello seguito dallo spirito delle leggi con cui venivano istituiti i dazi, fornisce pertanto il valore della merce sia per Secondo e Consolata, sia per il Trasportatore professionale, sia per il Dazio.

È altrettanto evidente che il venditore professionale, che, in campagna, acquista o produce su scala più ampia per rivendere in città, deve tener conto sia del costo iniziale della merce sia dei costi per il trasporto e la vendita e che se questi costi sono una frazione notevole del valore o meglio del prezzo di vendita realmente spuntabile al mercato, l'incidenza del dazio – pagato prima della vendita e senza

[12] Per evitare che qualcuno sospetti che stia esagerando, vi comunico che la mia bisnonna, da ragazza, nel 1885, si comportava esattamente in quel modo, e questo nelle pianure fra Tanaro e Bormida non sui monti dell'Arcadia.

[13] Una poesiola per educare i bambini all'alacrità, che girava nelle stesse pianure fluviali tanto tempo fa, recitava:

> *La Pigrizia andò al mercato*
> *ed un cavolo comprò,*
> *Mezzogiorno era suonato*
> *quando a casa ritornò,*
> *prese l'acqua, accese il fuoco,*
> *si sedette e riposò.*

Chi andava al mercato come compratore lo faceva nelle primissime ore della giornata, quindi i venditori arrivavano praticamente all'alba sia per mettersi nei posti migliori sia perché le prime ore erano quelle in cui si spuntavano i prezzi di vendita massimi, poi qualcuno, per paura di restare con merce invenduta, incominciava ad abbassare i prezzi; in questa fase il Mercato proponeva il miglior rapporto qualità/prezzo per i compratori ed era il momento scelto per comprare da chi doveva fare acquisti di importo notevole; i venditori che più tardi si fossero ritrovati con della merce avanzata nelle ceste rischiavano di recuperare a malapena l'importo del dazio; vedremo come in alcuni scenari questa variazione dei prezzi durante la giornata può diventare significativa.

sapere quale sarà l'andamento delle vendite! – può abbassare drasticamente il guadagno finale o addirittura rendere passiva l'intera operazione.

3 Considerazione: Sulle spalle di chi, alla fin dei conti, grava il dazio?

Oh bastala! Sulle spalle dei grassi contadini, dei ricchi incettatori di derrate alimentari e degli avidi mercanti, lo sanno tutti. Beato chi ci crede. Come al solito le tasse sui cavoli e sulla legna da ardere gravano su chi i cavoli li mangia e su chi deve risparmiare su ogni singolo ciocco per scaldarsi.

Lo scopo dichiarato di questi dazi sui beni di prima necessità era quello di imporre una tassa a favore della città – e formalmente quindi a favore dei suoi abitanti – su coloro che da fuori venivano a vendere e "si approfittavano avidamente della povera plebe urbana", in realtà erano delle vere e proprie tasse sui cittadini poveri, visto che questi sono sempre molto più numerosi dei ricchi e, in ogni caso sono costretti a mangiare, vestirsi e scaldarsi.

Direte che alla fin dei conti non cambia niente e che il prezzo richiesto per la merce ovviamente contiene anche l'importo del dazio, altrimenti non converrebbe a nessuno venire in città a vendere, e che i cittadini e il fisco comunque lo sanno anche se fanno finta di non saperlo.

Invece le cose cambiano, anche se questi aspetti esorbitano dall'impostazione originaria del problema dei Rudi Mathematici; e cambiano per motivi letteralmente politici, cioè legati ai rapporti fra l'amministrazione della Città ed i Cittadini. Quanto più l'amministrazione vuole – ha bisogno di – fare "bella figura col popppolo" tanto più probabilmente emette regolamenti annonari volti a limitare i prezzi massimi di vendita, soprattutto in periodi di scarsità dei prodotti, e molto probabilmente lo fa imponendo che il prezzo di vendita non sia maggiore di quello dichiarato al Dazio, registrato su un qualche foglio con tanto di grosso timbro della gabella. Qui entrano in gioco i giocatori supplementari del capo 5° della 1° Considerazione, ognuno con il suo carattere, la propria inflessibile incorruttibilità o avidità e chi più ne ha più ne metta.

Formalizzare dal punto di vista matematico questa considerazione vale probabilmente un secondo Premio Nobel per l'Economia, ma non dimentichiamoci che chi arriva al mercato per vendere rischia di trovarsi a sorpresa un'ordinanza comunale che ne limita la libertà di contrattazione verso l'alto[14].

Affrontiamo i problemi

Per evitare grane trascuriamo quanto esposto nella 3° Considerazione e ipotizziamo che il Dazio si accontenti della "punizione" che può irrogare a chi dichiara un valore troppo basso, acquistandone coattivamente la merce.

1° Scenario

Si suppone che il Dazio possa acquistare merce in quantità illimitata, quindi chi arriva con il suo carico deve aspettarsi che ciò accada sempre se il Dazio ritiene il prezzo troppo basso, parimenti si suppone che sia realmente possibile vendere il carico al suo valore tipico. Se la merce trasportata ha un valore tipico di 50 Lire

[14] Se qualcuno nota una qualche assonanza con gli anni '70 del trascorso secolo ha perfettamente ragione: è intenzionale. Per i più giovani e gli smemorati ricordo che in quel periodo veniva regolarmente aumentata l'IVA sui prodotti di uso comune, ma il governo e gli organi di stampa sostenevano che i prezzi al pubblico **non sarebbero aumentati**, che i prezzi **non dovevano aumentare** e che **si sarebbe vigilato fermamente** acciocché non aumentassero. E l'IVA era (è) un imposta che grava interamente sul consumatore finale, figuriamoci casa poteva capitare un secolo prima con dei dazi che formalmente ricadevano sul trasportatore/venditore e che venivano applicati anche a coloro che andavano personalmente a fare acquisti fuori città nel momento in cui attraversavano la cinta daziaria. La legge italiana ha previsto questo tipo di dazi sino all'introduzione dell'IVA con il DPR 26/10/1972 n. 633.

(equivalenti a 1'000 soldi, ovvero 5'000 centesimi) e l'aliquota daziaria è del 20%, quanto deve dichiarare il trasportatore per ottenere il massimo utile? (Oltre naturalmente all'impagabile soddisfazione di aver fregato il Dazio?)

Si suppone di non considerare i costi di trasporto e di vendita della merce sia per il Dazio sia per il Trasportatore che verranno studiati in uno scenario successivo.

Gli aspetti matematici del problema si spostano immediatamente e interamente dal trasportatore e dalla sua intenzione di ottenere il massimo guadagno alla convenienza del Dazio di ottenere il massimo vantaggio economico, scegliendo se incassare la gabella o acquistare la merce per rivenderla o per autoconsumo.

Definiamo:

V_t [Valuta] : Valore tipico;

V_d [Valuta] : Valore dichiarato;

a [Valuta / Valuta]: Aliquota daziaria;

M [Valuta] : Margine del Dazio sull'operazione commerciale;

I [Valuta] : Imposta riscossa.

Se il Dazio acquista al prezzo V_d per rivendere a V_t, allora:

$$M = V_t - V_d \qquad (1)$$

Se il Dazio preferisce riscuotere la gabella:

$$I = V_d \cdot a \quad (2)$$

Al Dazio conviene acquistare se M > I, cioè se:

$$V_d < V_t/(1+a) \qquad (3)$$

o anche:

$$V_d/V_t < 1/(1+a) \quad (4)$$

Per un'aliquota del 20% il Dazio ha convenienza ad acquistare se $V_d/V_t < 0{,}83$ (3 periodico), mentre ha convenienza a riscuotere la tassa se $V_d/V_t > 0{,}83$ (3 periodico); il caso in cui $V_d/V_t = 0{,}83$ (3 periodico) non può essere considerato perché la valuta non è infinitamente suddivisibile e diventa indispensabile eseguire l'arrotondamento al centesimo, ma vedremo subito che proprio a causa degli arrotondamenti, possono verificarsi situazioni in cui I = M, da decidersi ad arbitrio dei gabellieri.

Ovviamente sarà la gabella ad essere calcolata per eccesso[15] e quindi:

<u>Complessità Giocatori 1: Carro del Valore tipico di 50 Lire (5'000 Centesimi)</u>

V_d = 4'165 Centesimi (41 L, 13 S, 0 C); I = 833 C; M = 835 C (acquisto coattivo)

V_d = 4'166 Centesimi (41 L, 13 S, 1 C); I = 834 C; M = 834 C (lancio monetina)

V_d = 4'167 Centesimi (41 L, 13 S, 2 C); I = 834 C; M = 833 C (riscossione gabella)

È immediato notare come al trasportatore convenga dichiarare V_d = 4'166 Centesimi perché in ogni caso il suo utile finale sull'intera operazione non potrà mai essere superiore ai 4'166 C dichiarati e, se la merce viene acquistata dal Dazio,

[15] Poiché le abitudini del fisco sono cambiate poco dall'epoca di Hammurabi, mi sembra ragionevole supporre che la tassa sia da calcolare secondo le attuali norme per la registrazione dell'IVA per le vendite al dettaglio: l'imposta si calcola arrotondandola sempre per eccesso al centesimo superiore (con un leggero peggioramento rispetto al 2001 in cui si arrotondava alla Lira superiore).

si risparmia i costi e il tempo (anche se in questo scenario supposti trascurabili) del resto del viaggio andata e ritorno sino al mercato.

Nel caso in cui il trasportatore debba in ogni caso andare al mercato per acquistare merci da rivendere nelle campagne e soprattutto per non perdere i clienti abituali che si è fatto in città, allora ha convenienza a dichiarare V_d compreso fra 4’167 C e 4’170 C[16] per essere sicuro di proseguire.

Complessità Giocatori 0: Cesta del Valore tipico di 10 Soldi (50 Centesimi)

V_d = 40 Centesimi (0 L, 8 S, 0 C); I = 8 C; M = 10 C (acquisto coattivo)

V_d = 41 Centesimi (0 L, 8 S, 1 C); I = 9 C; M = 9 C (lancio monetina)

V_d = 42 Centesimi (0 L, 8 S, 2 C); I = 9 C; M = 8 C (riscossione gabella)

Le considerazioni sono identiche a quelle del paragrafo precedente, ma figuratevi se Consolata si accontenta di vendere i cavoli ai dazieri, in ogni caso deve cercare di far fuori i suoi salamini tossici nascosti sotto il vestito, e poi volete mettere stare un po’ lontana da casa e dal marito, andare a girare per il mercato con le sue stoffe, il pentolame e i pettegolezzi, soprattutto i pettegolezzi: Consolata dichiara 42 Centesimi, pregando che il cane dei gabellieri trovi la caciotta ammuffita e puzzolente nascosta sotto i cavoli e non fiuti i salamini[17], e prosegue per Porta Palazzo in ogni caso.

Complessità Giocatori 2:

Rinviata ad altri scenari.

Complessità Giocatori 3a: Il Trasportatore ed un Compare

Il 1° Scenario in cui non compare il Mercato (con i costi della merce, i costi di trasporto e di vendita e, soprattutto, senza le variazioni verso l’alto o verso il basso del prezzo di vendita) ci impone, innanzitutto, di supporre che al Dazio siano scemi, cioè che non sappiano che “se aspettano un po’ e portano pazienza” arriva qualcuno che fa un prezzo più basso e acquistano a migliori condizioni: dobbiamo, cioè, supporre che acquistino il primo carico con $V_d \leq$ 4’165 C che arriva al casello. Stiamo anche supponendo che trasportatore e compare siano tanto strettamente imparentati da non fregarsi a vicenda.

La miglior strategia consiste nell’arrivare separati: il primo dichiara V_d = 4’165 C e vende la merce al Dazio per questo importo, il secondo dichiara V_d = 5 C, paga 1 C di dazio e prosegue per il mercato[18]. In questo modo il bilancio complessivo dell’operazione è:

Bilancio = 4’165 + 5’000 – 1 = 9’164 Centesimi (91 L, 12 S, 4 C)

Se arrivassero contemporaneamente dovrebbero dichiarare per entrambi i carri V_d = 4’165 C, uno dei due carichi viene acquistato e sul secondo grava la gabella di 833 C

Bilancio = 4’165 + 5’000 – 833 = 8’332 Centesimi (83 L, 6 S, 2 C)

Qualsiasi altra combinazione di V_d produrrebbe un bilancio finale peggiore.

La differenza fra i due casi è di 832 C (8 L, 6 S, 2 C)

16 Per V_d = 4’171 C la gabella passa a 835 C.

17 Sto supponendo che la pena per i trasportatori di merce nascosta sia la confisca della stessa, se i salamini vengono sequestrati Secondo e Consolata possono sempre sperare che ai gabellotti venga un bel mal di pancia.

18 È ovviamente ipotizzabile che quando arriva il primo carro il Dazio abbia già fatto il suo acquisto, in questo caso V_d = 5 C per entrambi i carri ed il Bilancio passa a 9’998 Centesimi, ma non è detto che sia sempre possibile.

Complessità Giocatori 3b: Il Trasportatore ed alcuni Compari

Anche in questo caso dobbiamo supporre che trasportatore e compari siano tanto strettamente imparentati da non fregarsi a vicenda.

Analogamente a sopra: arrivano prima due carri che vengono ceduti al dazio per 8'330 C complessivi, seguono tre carri che pagano in totale 3 C di gabella.

Bilancio = 8'330 + 15'000 – 3 = 23'327 Centesimi (233 L, 5 S, 2 C)

Se arrivassero contemporaneamente dovrebbero dichiarare per tutti i carri V_d = 4'165 C, due dei cinque carichi vengono acquistati e sugli altri tre grava la gabella di 833 C cadauno

Bilancio = 8'330 + 15'000 – 2'499 = 20'831 Centesimi (208 L, 6 S, 1 C)

Qualsiasi altra combinazione di V_d produrrebbe un bilancio finale peggiore.

La differenza fra i due casi è di 2'496 C (24 L, 19 S, 1 C)

Se ogni carico avesse V_t = 1'000,00 € la differenza sarebbe di 499,98 € che costituisce la risposta al problema originale posto su RM N. 124

Complessità Giocatori 4:

Rinviata ad altri scenari

Complessità Giocatori 5:

Rinviata ad altri scenari

2° Scenario (e successivi)

Rinviati a quando il lavoro mi lascerà il tempo di esaminarli e di scrivere una storia che li contenga, soprattutto trovo difficile far intervenire il reverendo parroco di ***, personaggio a cui tengo molto, ma mi sto facendo venire qualche idea.

Occorre tener conto del costo originale della merce, dei costi di trasporto e di vendita al dettaglio (che possono essere diversi per il Dazio e per il Trasportatore), della variabilità dei prezzi di Mercato in base all'ora di arrivo al mercato, dell'eventuale corruttibilità dei gabellieri e di tanti altri fattori che trasformano il 1° Scenario, sostanzialmente monoparametrico (l'aliquota daziaria), in uno con numerosi parametri indipendenti o parzialmente indipendenti.

Non siete anche voi in attesa delle prossime puntate? A noi soprattutto farebbe piacere sapere che ne è stato dei salamini tossici. Però inevitabilmente potrebbero essere rimaste alcune domande senza risposta. ***Cid***, con un approccio classico, prende i problemi uno per volta, e li risolve:

Problema 1

Con un carico da mille euro, il guadagno massimo per il camionista è: $1000\cdot\frac{5}{6}$.

Infatti, se il valore dichiarato è uguale a *x*, se viene comprato dal doganiere il guadagno è *x*, mentre se si paga il dazio il guadagno è $1000-\frac{x}{5}$; il guadagno massimo lo abbiamo nel punto di intersezione di queste due rette, quindi quando $1000-\frac{x}{5}=x$. Da cui ottengo: $\frac{6}{5}x=1000$, moltiplicando ambo i membri per $\frac{5}{6}$ ottengo: $x=1000\cdot\frac{5}{6}$.

Problema 2

Se Fred ed Alberto arrivano con un carico da 1000 euro, il guadagno massimo lo avranno nel caso in cui Alberto giunto per primo dichiari un valore di $1000 \cdot \frac{25}{36}$ e Fred giunto poche ore dopo dichiari: 0 euro se il carico di Alberto è stato comprato dal doganiere, mentre se non è stato comprato dichiari un valore pari a $1000 \cdot \frac{5}{6}$.

Infatti, in questo caso dobbiamo risolvere l'equazione: $x + 1000 = 1000 - \frac{x}{5} + 1000 \cdot \frac{5}{6}$, che risolta fornisce un valore di x pari a $1000 \cdot \frac{25}{36}$.

(In questo caso il loro guadagno complessivo risulta pari a: $1000 \cdot \frac{25}{36} + 1000 = 1000 \cdot \frac{61}{36}$).

<u>Intermezzo</u>

Con n camion e n–1 depositi, il k-esimo camionista che attraversa il dazio per massimizzare il guadagno complessivo dichiarerà un valore pari a: $1000 \cdot \frac{5 \cdot \left(6^{n-k} - 1\right)}{6^{n-k+1}}$ se tutti i camion passati prima di lui sono stati comprati dai doganieri, mentre dichiarerà un valore pari a $1000 \cdot \frac{5}{6}$ se è passato almeno un camion che non è stato comprato.

(Non riporto la dimostrazione di questo caso, in quanto nel testo del problema questo caso viene appena menzionato senza dargli tanta importanza; passo quindi, dopo questo breve intermezzo, a quello che mi pare il caso più importante)

<u>Problema 3</u>

Abbiamo 5 camion e due depositi, per risolverlo occorre prima valutare cosa succede con n camion e un solo deposito. Otteniamo un sistema lineare di n–1 equazioni in n–1 incognite. Le incognite rappresentano il valore che conviene dichiarare al k-esimo camionista se il deposito non è stato ancora occupato.

Ad esempio, con 4 camion e un solo deposito

$$\begin{cases} x + 1000 + 1000 + 1000 = \left(1000 - \frac{x}{5}\right) + y + 1000 + 1000 \\ x + 1000 + 1000 + 1000 = \left(1000 - \frac{x}{5}\right) + \left(1000 - \frac{y}{5}\right) + z + 1000 \\ x + 1000 + 1000 + 1000 = \left(1000 - \frac{x}{5}\right) + \left(1000 - \frac{y}{5}\right) + \left(1000 - \frac{z}{5}\right) + 1000 \cdot \frac{5}{6} \end{cases}$$

che fornisce le seguenti soluzioni: $x = \frac{625}{1296} \cdot 1000$, $y = \frac{125}{216} \cdot 1000$, $z = \frac{25}{36} \cdot 1000$.

(In generale, con n camion e un solo deposito, il k-esimo camionista che attraversa il dazio per massimizzare il guadagno complessivo dichiarerà un valore pari a: $1000 \cdot \frac{5^{n-k+1}}{6^{n-k+1}}$ se tutti i camion passati prima di lui non sono stati comprati dal dazio, mentre dichiarerà un valore pari a zero se è passato almeno un camion che è stato comprato.)

Occorre anche verificare cosa avviene quando si hanno 4 camion e 2 depositi; in tal caso chiamando con la variabile w il valore dichiarato dal primo camionista, se il carico del primo camionista viene comprato il guadagno complessivo è uguale a (w + il guadagno con 3 camion e 2 depositi), mentre se non viene comprato è uguale a $\left(1000-\frac{w}{5}\right)$ + il guadagno con 3 camion ed un solo deposito.

Risolvo quindi l'equazione:

$$w+\frac{125}{216}\cdot 1000+2000=1000-\frac{w}{5}+1000-\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{175}{216}\cdot 1000\right)+2\cdot\left(\frac{5}{6}\cdot 1000\right)$$

$$w=\frac{1000}{1296}\cdot 1000$$

Con i risultati trovati finora, per risolvere il problema di 5 camion e due depositi, basta risolvere soltanto una ulteriore equazione:

$$c_1+\frac{625}{1296}\cdot 1000+3000=\left(1000-\frac{c_1}{5}\right)+\frac{1000}{1296}\cdot 1000+\frac{125}{216}\cdot 1000+2000$$

$$c_1=\frac{5625}{7776}\cdot 1000$$

Questo è il valore dichiarato dal primo camionista, se il carico viene comprato si passa al problema di n camion e un solo deposito e si applica la strategia trovata per questo caso; mentre se non viene comprato ci troviamo nel problema di 4 camion e due depositi ed applicheremo la strategia richiesta per questo caso.

Tutto ciò è valido se i camion non arrivano tutti assieme, in tal caso sarebbero costretti a dichiarare tutti un valore di $1000\cdot\frac{5}{6}$ con un guadagno complessivo uguale a $5000\cdot\frac{5}{6}$; mentre arrivando uno dopo l'altro, il guadagno complessivo è uguale a: $1000\cdot\left(\frac{5625}{7776}+\frac{625}{1296}+3\right)=\frac{32703}{7776}\cdot 1000$.

Calcolando in euro e centesimi di euro:

$$1000\cdot\frac{5}{6} = 833{,}33\ € \qquad 5\cdot 833{,}33\ € = 4166{,}65\ €$$

$$1000\cdot\frac{5625}{7776} = 723{,}38\ € \qquad 1000\cdot\frac{625}{1296} = 482{,}25\ €$$

$$723{,}38 + 482{,}25 + 3000 = 4205{,}63\ €$$

La differenza risulta quindi uguale a: 4205,63 – 4166,65 = 38,98 €.

(Che corrisponde ad un risparmio per camionista di circa 7 € e 80 centesimi).

Ce l'abbiamo fatta ad arrivare fino in fondo! Con questo è tutto. Che giugno vi sia propizio!

5. Quick & Dirty

Sapete che 121 è il quadrato di 11, almeno sin quando restiamo in base dieci.

In quali altre basi succede la stessa cosa?

6. Pagina 46

Per n=2 abbiamo:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}\ .$$

Assumiamo che l'ineguaglianza del problema sia stata provata per un certo numero n di interi positivi; mostreremo che deve valere anche per n+1 interi positivi.

Siano $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ n+1 interi positivi, ordinati in modo tale che a_{n+1} sia il maggiore; da questo, deriva che:

$$a_{n+1} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\ .$$

Se definiamo

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n} = A_n\ ,$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots a_{n+1}}{n+1} = A_{n+1}\ ,$$

abbiamo che

$$A_{n+1} = \frac{nA_n + a_{n+1}}{n+1}\ .$$

Essendo però $a_{n+1} \geq A_n$, possiamo scrivere $a_{n+1} = A_n + b$, con $b \geq 0$; allora,

$$A_{n+1} = \frac{nA_n + A_n + b}{n+1} = A_n + \frac{b}{n+1}\ .$$

Se eleviamo il primo e l'ultimo membro dell'espressione qui sopra alla potenza n+1, otteniamo:

$$\begin{aligned}
(A_{n+1})^{n+1} &= \left(A_n + \frac{b}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= (A_n)^{n+1} + \binom{n+1}{1}(A_n)^n \frac{b}{n+1} + \ldots \\
&\geq (A_n)^{n+1} + (A_n)^n b = (A_n)^n (A_n + b) = (A_n)^n a_{n+1}\ .
\end{aligned}$$

Dall'assunto iniziale della dimostrazione per induzione che la diseguaglianza sia valida per n numeri, ossia che:

$$(A_n)^n \geq a_1 a_2 \ldots a_n\ ,$$

segue che:

$$\left(A_{n+1}\right)^{n+!} \geq \left(A_n\right)^n a_{n+!} \geq a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}$$

e, di conseguenza,

$$A_{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}} \,.$$

E, se non tutti i numeri sono uguali tra loro, allora $b > 0$ e vale la diseguaglianza stretta.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Una semplice associazione di combinazioni

Non fate caso al titolo, almeno sino alla fine; Rudy vorrebbe un certo vantaggio, nella fuga.

Come *tutti* sanno[19], un politopo n-dimensionale è la copertura convessa (non degenere) di una collezione di punti in uno spazio vettoriale $\Re^n$.

Un po' più con calma, in due dimensioni si chiamano *poligoni*, e rappresentano quei cosi che hanno dei vertici (i punti della collezione) uniti tra di loro da dei lati (la copertura); in tre dimensioni, dovreste ricordarvi dei *poliedri*, anche se qui la cosa è leggermente più complicata; infatti, la copertura in questo caso è formata, oltre che dalle congiungenti i vertici, anche dalle facce; giusto per capire tutte le parole, per "convessa" si intende che la forma non ha concavità (ehm… no, non abbiamo intenzione di essere formali), mentre per "non degenere" si intende che le *n* dimensioni le usate tutte; ad esempio, è degenere nello spazio bidimensionale andarsi a cercare tre punti allineati (che usano quindi una dimensione sola), con i quali non riuscite a costruire un triangolo; stessa cosa se, in tre dimensioni, andate a mettere quattro punti tutti sullo stesso piano

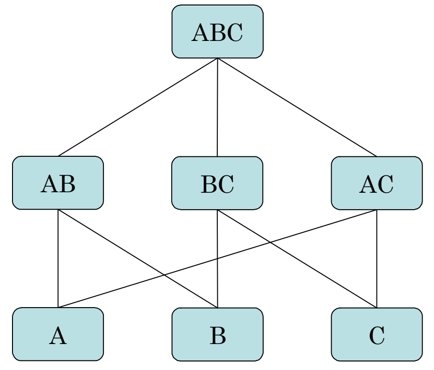
Bene, per chiarirci le cose, cominciamo dal più semplice, il (giustappunto) *simplesso*. In questo caso, trattasi di n+1 punti che *non* sono in n–1 dimensioni; ad esempio, in due dimensioni ci servono tre punti che non siano collineari, e abbiamo il *2-simplesso*, altrimenti noto come triangolo; in tre dimensioni di punti che ne servono quattro non complanari e otteniamo il tetraedro… e avanti così.

Ora complichiamoci un po' la vita; definiamo come *facce* di un simplesso i sottoinsiemi che ne definiscono il contorno; in questo modo, la cosa si complica in quanto le facce hanno dimensioni diverse; sempre tornando al nostro triangolo, abbiamo che le facce del triangolo sono:

1. I suoi vertici, **A**, **B**, **C**.
2. I suoi lati, **AB**, **BC**, **CA**.
3. L'intero triangolo, **ABC**.

Semplice problema di denominazione, non dovreste avere problemi a capire che il tetraedro ha facce:

1. I vertici, **A**, **B**, **C**, **D**.
2. Gli spigoli, **AB**, **AC**, **AD**, **BC**, **BD**, **CD**.
3. I triangoli (no, non le chiamo "facce"!) **ABC**, **ABD**, **ACD**, **BCD**.
4. L'intero tetraedro, **ABCD**.



11 *Un triangolo, anzi alcuni. O meglio, tutti.*

Dovrebbe risultare immediato che, trattando le "facce" con questa libertà, possiamo definire una specie di *relazione d'ordine*, ossia dire che una faccia è "minore" di un'altra se la prima è contenuta (propriamente) nella seconda.

Se trattiamo i simplessi in questo modo, vediamo che per un dato numero di dimensioni tutti i simplessi sono sostanzialmente uguali, e questa è

[19] Non fateci caso: da quando ha visto una conferenza di O'Shea, Rudy si diverte con frasi di questo tipo.

sempre una caratteristica interessante; tra l'altro, questa specie di ordinamento ci permette di definire un *grafo* che, per così dire, cattura l'essenza medesima del politopo; in Figura 11 trovate il grafo di definizione del triangolo (facile); il tetragono è poco più complicato e ve lo disegnate da soli, il dodecaedro e l'icosaedro vi consigliamo di tenerli per i giorni di pioggia (tutti e due: potrebbe uscirne qualcosa di interessante, visto che sono duali…).

Quello che ci interessava far notare è che possiamo descrivere i politopi in termini *strettamente combinatori*, ossia unicamente in funzione di sottoinsiemi dell'insieme dei suoi vertici e come questi siano contenuti nelle "facce" (*sensu latu*); bene, abbiamo visto i più semplici, andiamo a cercarci dei guai.

Partiamo da una sequenza di *n* copie della stessa variabile, e mettiamo queste variabili dentro delle parentesi *ben bilanciate* (ossia come dicono i prof di matematica), ma con l'aggiunta di due regolette:

1. Non potete mettere in parentesi l'intera sequenza
2. Non potete mettere le parentesi attorno ad una sola (o meno) variabili.

Esempio semplice? Partiamo da *n*=4, cioè da xxxx e, aggiungendo un primo livello di parentesi, otteniamo i blocchi:

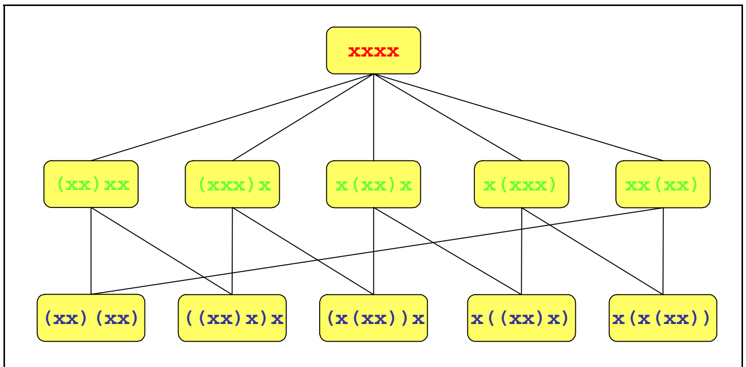
(xx)xx

(xxx)x

x(xxx)

xx(xx)

x(xx)x



12 *Apro una parentesi…*

Quando inserite la seconda coppia di parentesi ottenete (attenzione che alcuni si generano più volte: il primo con una coppia genera il primo e il secondo, il secondo genera il secondo e il terzo… Insomma, alla fine ne avete molto meno di quanto sembra):

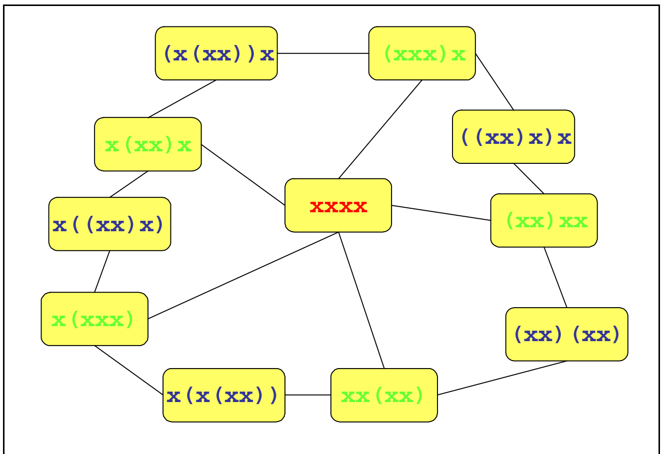
(xx)(xx)

((xx)x)x

(x(xx))x

x(x(xx))

x((xx)x)



13 *Dovrebbe essere familiare*

Se a qualcuno di voi è venuto in mente di organizzare un grafo gerarchico, bravi, è proprio quello che facciamo in Figura 12. Non solo, ma sfruttando le incredibili capacità di PowerPoint[20], possiamo dire le stesse cose in un modo molto più elegante, come indicato in Figura 13. Adesso però questo lo guardiamo un attimo bene.

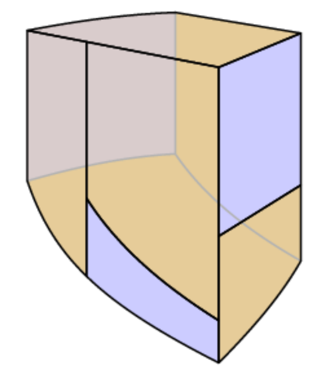
[20] Col cavolo: lo abbiamo ridisegnato.

L'aggeggio totale (rosso) è fatto di cinque cosi verdi; ogni coso verde ha, appeso, un cosino blu e di fronte ad un verde c'è un blu e viceversa; non solo, ma dal fatto che non possiamo più effettuare suddivisioni con le parentesi deduciamo che gli aggeggi blu devono essere *angoli*, quelli verdi (che sono al piano di sopra nel grafo gerarchico) saranno segmenti e messi assieme daranno l'aggeggio che abbiamo appena descritto. Ora, a voi cosa viene in mente fatto di cinque segmenti e cinque angoli?

Insomma, tutta 'sta fatica per inventare il pentagono[21].

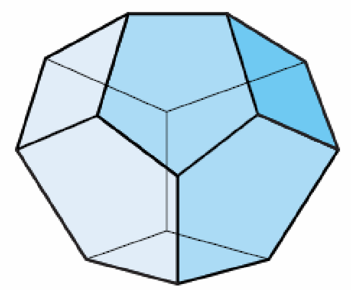
Un attimo, che forse qui c'è qualcosa di importante. Solo ancora un (mezzo) esempio. Se prendendo quattro "x" disegniamo una struttura unica in $\Re^2$, c'è da presumere che prendendo cinque "x" si disegni una struttura unica in $\Re^3$ e, genericamente, prendendo n–1 "x"[22] si disegni una struttura unica in $\Re^{n-3}$; e questo è decisamente interessante.

Adesso, comunque, il grafo gerarchico con cinque "x" ve lo disegnate da soli; caso mai vi interessasse, l'aggeggio lo ha scoperto **Jim Stasheff**, che ci ha (come si dice in America) difeso la tesi di Ph.D.



14 *Il (brutto) risultato di Jim*

"E che figura viene fuori?" Beh, qui c'è un (per noi, non per Jim) grazioso aneddoto; Stasheff è riuscito ad ottenere una rappresentazione insoddisfacente, che richiedeva l'uso di superfici curve (la vedete in Figura 14); ne ha parlato per tutta la tesi e solo alla fine si è accorto che **John Milnor**, uno dei prof che lo stavano a sentire, aveva davanti a sé il modellino di cartone che vedete in Figura 15. Non sappiamo se la cosa sia stata positiva per la tesi di Stasheff, ma capirete che a quel punto probabilmente non si sentiva troppo bene.



15 *Il (decisamente migliore) risultato di John*

A questo punto, se non resistete più dall'andare a cercarvi questi aggeggi in Rete, fate attenzione che qualcuno chiama l'ultimo sarchiapone che abbiamo visto K_5, mentre altri preferiscono K_6; il motivo del "5" dovrebbe essere immediato (vi servono cinque "x" da parentesizzare, per fare il disegno), e adesso cerchiamo di capire il motivo del "6".

Proviamo a pensare ad un modo ordinato per fare la nostra parentesizzazione; personalmente, comincio con una parentesi aperta il più a sinistra possibile, mettendo la chiusa anche lei il più vicino possibile (dopo due "x", quindi), poi sposto la parentesi chiusa a destra sin quando posso, poi metto la parentesi aperta dopo la prima "x",... e avanti così; poi, quando si tratta di mettere la seconda coppia, mi organizzo in un modo simile per sottoinsiemi.

Se non vi piace, trovatevene pure uno voi; per me funziona questo, ed è, dal mio punto di vista, ragionevolmente ordinato; mi accorgo subito, se "manca qualcosa in mezzo", quindi una specie di relazione d'ordine esiste.

L'abbiamo chiamata "una specie", e infatti nessun matematico si sognerebbe di dire che si tratta di una relazione di ordinamento completa; però un pochino funziona. Bene, aggeggi

[21] …e vi abbiamo risparmiato quello che parte da tre "x". Aiutino: viene monodimensionale.

[22] Il "meno uno" non nasce da amor di complicazione, ma da motivi storici. Tranquilli, lo dimenticheremo prima di subito.

del genere si chiamano *insiemi parzialmente ordinati*, in inglese "partially orderet set", abbreviato solitamente in "*poset*"[23].

Affrontiamo, con la nostra abituale *nochalanche*, una stringa di "x" parentesizzata.

- Prima abbiamo un po' di "x".
- Poi troviamo una parentesi aperta.
- Poi potremmo avere un'altra parentesi aperta, oppure qualche "x"; nel caso si sia trovata una parentesi aperta, dopo almeno due "x" dovremmo ritrovare la stessa parentesi chiusa.
- Dopo zero o più "x", dovrebbe chiudersi la prima parentesi; possono seguire delle altre "x".

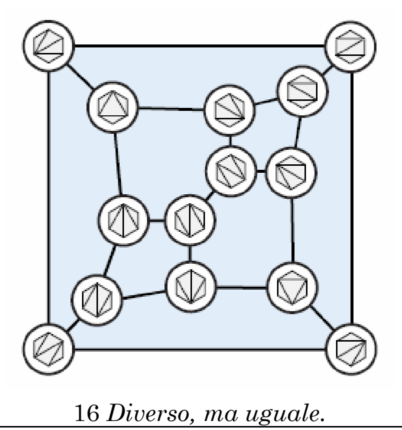
Se vi sembra cabalistico, provate questa; prendete un esagono, con un paio di diagonali non intersecanti, partite da un angolo e fate il giro esterno.

- Prima avete un po' di angoli.
- Poi trovate una diagonale uscente dall'angolo.
- Poi potreste avere un'altra diagonale uscente dallo stesso angolo, oppure più niente e passare all'angolo dopo; nel caso abbiate trovato una diagonale uscente, dovrete arrivare almeno al secondo angolo dopo quello dove siete per ritrovare la stessa diagonale.
- Due o più angoli dopo, comunque, dovreste ritrovare la prima diagonale che avete incontrato; potreste avere ancora degli angoli da girare prima di finire il giro.

Vi siete accorti, che sono la stessa cosa? Infatti, la parentesizzazione delle stringhe è *isomorfa* alla diagonalizzazione di un poligono; semplicemente, la stringa è composta da n–1 termini, mentre il nostro poligono è un n-agono[24]. Ossia, se lavorate con le parentesi lo chiamate K_5, se usate l'esagono lo chiamate K_6.

Grande: tre pagine per inventare il pentagono, e solo una per passare all'esagono, per Natale arriviamo al dodecagono?

Per punizione non guardate la prossima figura. Nel caso dell'esagono, infatti, definire il POSet è decisamente più semplice: partite da una configurazione, spostate una (e una sola) diagonale da qualche altra parte (vicina) e, se avete più possibilità di spostamenti, biforcate la strada; dovreste ottenere l'aggeggio che trovate in Figura 16 che, guarda caso, non è altro che lo "spiaccicamento sul piano" di K_6 (aprendolo su uno dei quadrati).


16 *Diverso, ma uguale.*

Questi oggetti rischiano di diventare rapidamente noiosi, soprattutto una volta che siete riusciti a costruirli con il buon vecchio GeoMag. Parliamo d'altro, tanto ci ritorniamo lo stesso.

Essendo in crisi di astinenza dall'invenzione di termini balordi, Rudy è partito alla ricerca e, dall'aria contenta che si ritrova, deve aver trovato qualcosa.

[23] Una volta tanto preferiamo la terminologia inglese; Rudy, che vuole essere originale a tutti i costi, di solito scrive "POSet", tenendo maiuscole le iniziali dell'acronimo.

[24] I più anziani lettori di una Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa potrebbero a questo punto ricordarsi che abbiamo già visto il giochino delle parentesi (PM_014); quindi da adesso in poi parleremo con noncuranza di Numeri di Catalan di prima e seconda specie. Così la prossima volta studiate.

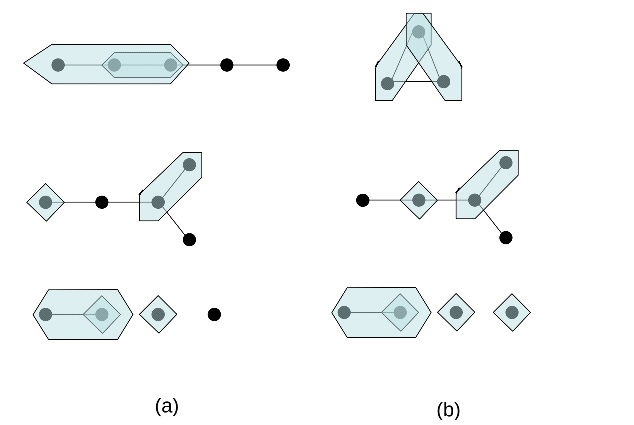
Prendiamo un grafo (finito) G; si definisce *tubo* un insieme *proprio* di nodi di G tali che il grafo da esso indotto (insomma, i punti e le righe nel tubo) sia un sottografo *proprio* e *connesso* di G. Ora, possiamo avere tre tipi di interazioni tra due tubi u_1 e u_2:

1. Due tubi sono *nidificati* se $u_1 \subset u_2$;
2. Due tubi si *intersecano* se $u_1 \cap u_2 \neq 0$ e i due tubi non sono nidificati.
3. Due tubi sono *adiacenti* se $u_1 \cap u_2 = 0$ e se $u_1 \cup u_2$ è un tubo in G.

Non preoccupatevi delle ultime due; un insieme di tubi si dice *compatibile* se non si intersecano e non sono adiacenti, e nel seguito ci occuperemo solo di tubi compatibili.

Ora, si definisce *tubatura*[25] U del grafo G un insieme di tubi di G tale che qualsiasi coppia di tubi sia compatibile.

Notate, tanto per cominciare, che la condizione che il grafo indotto sia *proprio* fa sì che almeno un punto del grafo di partenza sia fuori dalla tubatura; giusto per raccogliere le idee, in Figura 17 vi diamo qualche tubatura valida (a) e qualcuna non valida (b); giusto per chiarire il concetto, le tubature non valide sono tali perché ci sono dei tubi intersecanti (la prima), perché ci sono dei tubi adiacenti (la seconda) e perché il sottogruppo che originano non è proprio (l'ultima); notate che nell'ultima della (a) i due tubi *non* sono adiacenti, visto che il grafo è non connesso.



17 *Tubature valide (a) e non valide (b)*

Evitiamo per favore la battuta che "non servono a un tubo"; adesso arriva una cosa complicata.

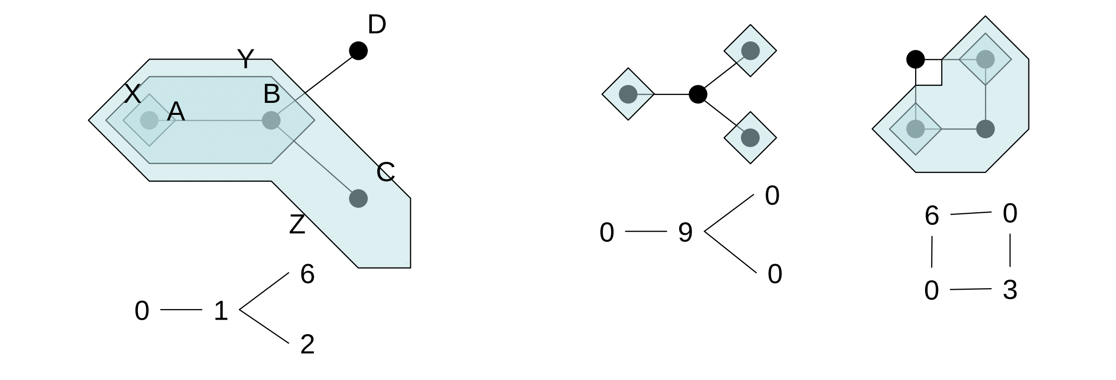
Farebbe comodo avere un modo per associare dei valori alle tubature: la buona notizia è che esiste un modo; la cattiva è che è complicato. Infatti, definiamo una *mappa* f_V dai nodi v del nostro grafo G sugli interi: se $v = t(v)$ (ossia se stiamo considerando un tubo con dentro un solo nodo), allora $f_v(v) = 0$; tutti gli altri nodi di G devono soddisfare la relazione ricorsiva:

$$\sum_{v_i \in t(v)} f_v(v_i) = 3^{|t(v)|-2}.$$

Se la guardate per due settimane con l'aria perplessa[26], dopo un po' forse vi accorgete della sua potenza, soprattutto se considerate che, quando fate il conto rispetto all'unico nodo non compreso nella tubatura, dovete contare anche lui. Tranquilli, adesso facciamo con calma qualche conto. Prima, però, vi diamo alcuni esempi. Provate a calcolarveli da soli, se la cosa vi sembra ovvia. Ne trovate tre in Figura 18, e siamo fermamente intenzionati a spiegarvi solo il primo, quello con le lettere sopra.

[25] Ecco, l'avevamo detto, che si inventava un termine balordo. D'altra parte, come tradurreste *tubing*?

[26] Questo è uno dei motivi per cui questo numero è uscito in ritardo.



18 *Qualche semplice calcolo.*

Cominciamo dal più facile, il nodo ***A***; è contenuto, tanto per cominciare, nel tubo ***X***, e qui ci viene in aiuto la caratteristica che, se il tubo contiene un solo nodo, la nostra funzione vale $f_v(v) = 0$; e quindi, nel grafo numerato, scriviamo 0 nella posizione corrispondente ad ***A***.

Se consideriamo il tubo ***Y*** (quello che contiene ***A*** e ***B***), dobbiamo usare la formula; sulla sinistra mettiamo il valore di *tutti i nodi del tubo **Y***; per quanto riguarda il secondo membro, il "modulo" che trovate ad esponente non è altro che la "lunghezza" (o norma, se preferite) del tubo, ossia *quanti nodi contiene*; qui sono due, e se chiamiamo ***x*** il valore del nodo ***B*** otteniamo la formula:

$$0 + x = 3^{2-2},$$

da cui $x = 1$, che è il valore[27] che assegniamo a ***B***.

Il tubo ***Z*** contiene un nodo (***A***) a valore ***0***, un nodo (***B***) a valore 1 e un nodo (***C***) a valore incognito ***x***; lunghezza 3, quindi la nostra formula diventa:

$$0 + 1 + x = 3^{3-2},$$

e i conti ve li fate da soli.

La fregatura arriva con ***D***; non appartiene a nessun tubo, ma conto come "lunghezza" tutto il grafo:

$$0 + 1 + 2 + x = 3^{4-2}.$$

Ci abbiamo messo mezza pagina (abbondante); le due settimane di Rudy sono nate dal fatto che il tutto (formula generale compresa) era spiegato in esattamente due righe (in merito, si ringraziano i ritardi delle Ferrovie dello Stato).

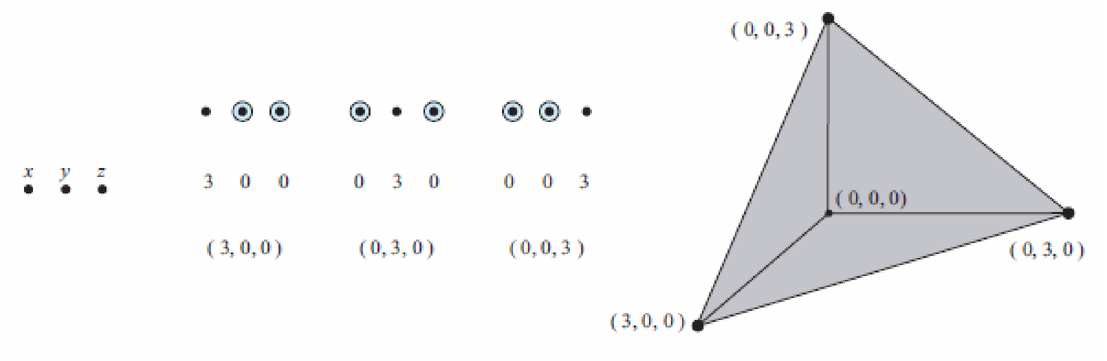
Bene, adesso cominciamo a giocarci[28].

Per prima cosa, consideriamo un caso di ***n nodi disgiunti***. L'insieme delle tubature massime ha n elementi, ognuno composto da una scelta di n–1 nodi, ciascuno in un proprio tubo; prendiamo la mappatura numerica come un insieme di coordinate in uno spazio n-dimensionale, e quello che otteniamo non è altro che il ***simplesso dello spazio (n–1)-dimensionale***: nella figura vedete il caso n=3, che genera il 2-simplesso (ignorate

[27] Facciamo notare di passaggio che, in questa strana matematica, se applicate la formula anche al nodo coincidente con il tubo, ottenete un'assurdità del tipo $3^{-1} = 0$; qui funziona, quindi non ci poniamo domande.

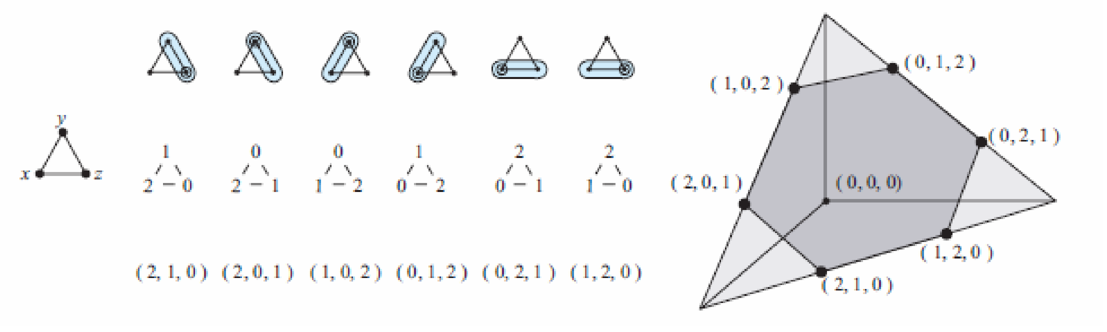
[28] Siccome il numero è già in ritardo, rubiamo i prossimi disegni a ***Satyan Devadoss***, che ha scritto le due righe di cui sopra.

l'origine, che non appartiene all'insieme), ossia il triangolo. E la cosa funziona anche per gli spazi di dimensione superiore.



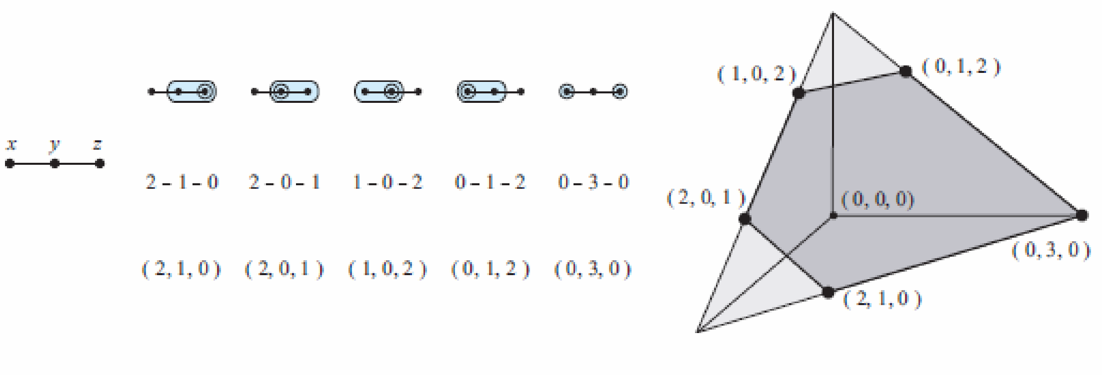
19 *Le tubature massime dell'insieme di tre punti disgiunti e la loro copertura convessa, ossia il* 2-*simplesso*

Poi, consideriamo l'***n*-grafo completo**. L'insieme delle tubature massime non è altro che una nidificazione sequenziale degli n nodi (più dettagli in figura, con l'esempio), ossia è equivalente (isomorfo) alle permutazioni di n lettere. Prendiamo la mappatura numerica come un insieme di coordinate in uno spazio n-dimensionale, e quello che otteniamo non è altro che l'***(n–1)-permutoedro***; in figura vedete il caso n=3, che origina l'oggetto noto come 2-permutoedro, ossia l'esagono (e se guardate le coordinate, capite perché si chiama così).



20 *Le tubature massime del* 3-*grafo completo e la loro copertura convessa, ossia il* 2-*permutoedro*

Indi, consideriamo l'***n*-cammino**, ossia n punti connessi tra di loro in modo unico. L'insieme delle tubature massime ha un numero di elementi pari al numero di Catalan (di prima specie: vi avevamo detto di ripassarli) $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$; prendiamo la mappatura numerica come un insieme di coordinate in uno spazio n-dimensionale, e quello che otteniamo non è altro che l'***(n–1)-associaedro***; non fate quella faccia stupita, lo avete già incontrato; nella figura vedete il caso n=3, che genera il 2-associaedro, ossia il pentagono.



21 *Le tubature massime del* 3*–cammino e la loro copertura convessa, che genera il* 2*–associaedro*

Infine (coraggio, è l'ultimo) prendete un ***n*-ciclo**, ossia n punti connessi in cerchio; l'insieme delle tubature massime è pari al numero di Catalan (di seconda specie) $\binom{2n-2}{n-1}$; qui non vi diamo la figura per n=3 (andate a riprendervi la Figura 20, e meditateci sopra), ma vi diciamo che si chiama ***(n–1)-cicloedro*** e che è particolarmente importante nello studio dei nodi (cercate "invarianti di Bott e Taubes", se volete ulteriori dettagli, e scriveteci un pezzo: pubblicheremo).

E, per tornare (ciclicamente) all'inizio, se non avete capito il fetentissimo gioco di parole vuol dire che siete più fusi di me.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms