Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 124 – Maggio 2009 – Anno Undicesimo

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM123 ha diffuso 2335 copie e il 04/05/2009 per Google eravamo in 23'800 pagine.

Abbiamo già detto che non apprezziamo particolarmente il Sudoku, ma sappiamo che piace molto ad alcuni nostri lettori. Non ci pronunciamo su alcune sue *applicazioni*, come la **Sudoku Pizza** presentata in copertina. Prima di prenderla come una semplice bizzarria, vi invitiamo a considerare attentamente le posizioni di (1) olive, (2) basilico, (3) patate, (4) cipolla, (5) aglio, (6) salame, (7) zucchini, (8) salsiccia e (9) spinaci. Ora, una ricetta che inizia con "Prendete un Sudoku correttamente risolto…", di sicuro attira la nostra attenzione.

1. Viaggio in Italia

Ma quando artisti grandi e geniali realizzano opere così mediocri, non è immeritatamente che espongono al ridicolo la loro cecità; giacché non v'è nulla che retto giudizio aborre più della pittura perpetrata senza la conoscenza tecnica, anche se realizzata con abbondanza di cura e di diligenza. E infatti la sola ragione per cui questi pittori non si rendono conto dei loro stessi errori è che non hanno studiato la Geometria, senza la quale nessuno può essere o diventare un artista completo; ma la colpa di questo è da imputare ai loro maestri, che sono essi stessi ignoranti in quest'Arte.
L'Arte della Misura (1525)

In genere, partivano da Dover. Gli inglesi, ovviamente; ma erano appunto soprattutto inglesi quelli che l'hanno reso famoso, nell'Ottocento. Dalle bianche scogliere sulla Manica toccavano il continente a Calais, tanto è vero che l'accoppiata Dover-Calais è diventata non meno celebre dell'antica e omerica coppia Scilla e Cariddi, o delle due rive del Bosforo e dei Dardanelli[1], che marcano il confine acquatico tra Europa e Asia, o delle Colonne d'Ercole, che separano Africa ed Europa.

In terra di Francia, il giovane inglese benestante seguito da servi e tutore acquistava una carrozza e si dirigeva a Parigi. Nella città delle luci e dei piaceri prendeva lezioni di ballo, ma imparava anche a danzare e a cavalcare, nel caso non fosse già sufficientemente esperto nell'etichetta da seguire in groppa ad un destriero. Parigi, già allora, dettava legge nella moda e nell'eleganza dei comportamenti. Per questo, per non perdere neppure un briciolo della verve gallica, il viaggiatore di solito acquistava i servigi di una guida e interprete francese. Chi intraprendeva certi viaggi, del resto, non lo faceva solo per piacere, ma anche per prepararsi al futuro. Erano i figli della nobiltà britannica, destinati ad un futuro in politica o in diplomazia, e le regole dei perfetti comportamenti di corte e dell'alta società erano appunto dettati dalla capitale francese. Il loro era, in grande misura, un vero e proprio viaggio-studio.

Dopo Parigi, quasi nient'altro della Francia: più frequente il giro in Svizzera, tra Ginevra e Losanna, e da qui, magari dopo aver passato qualche giorno ad apprendere i rudimenti dello sport molto in voga a qual tempo, l'alpinismo, finalmente si poteva discendere verso il giardino d'Europa. Con intenzioni meno bellicose e qualche difficoltà in meno di quanto fece venti secoli prima Annibale, il giovane inglese si predisponeva a superare le Alpi; le valicava normalmente dal Gran San Bernardo[2], in genere dopo aver fatto smontare e assemblare in pacchi trasportabili a dorso di mulo la carrozza acquistata in Francia: avrebbe dovuto rimontarla una volta giunti nelle pianure italiane.

Una volta giunto nel Bel Paese, era inevitabile una visita a Torino, frequente una deviazione per Milano, ma la prima destinazione che richiedeva un soggiorno prolungato era indubbiamente Firenze. Non per caso ancora oggi la Toscana è uno dei rifugi più naturali degli inglesi attratti dal continente: una lunga e consolidata tradizione portò addirittura alla costituzione di una numerosa comunità inglese nel capoluogo toscano. Del resto, la culla del Rinascimento Italiano e i tesori degli Uffizi bastavano ad incantare

[1] Curioso come, per alcuni stretti, ogni riva abbia un nome caratteristico (caso appunto della Manica e dello stretto siciliano) mentre per altri no, o per lo meno non sufficientemente noti al di fuori della geografia locale. In compenso, per separare Europa e Asia Minore di stretti ce ne vogliono due, e quindi il bilancio della nominazione torna comunque in pareggio.

[2] Scelta abbastanza naturale per chi proviene dall'Europa del Nord-Ovest. Il punico predecessore, nel 218 a.C., passò invece più a sud. Non c'è passo alpino che non rivendichi in qualche modo il celebre ed elefantiaco (in tutti i sensi) passaggio dal Monginevro al Moncenision fino al Piccolo San Bernardo; ultimamente, gli storici ritengono che un ottimo candidato possa essere il Colle dell'Autaret, nelle Valli di Lanzo.

il giovanotto londinese per intere settimane. Inoltre, Firenze era una splendida base per visitare le altre città del centro-nord: da lì ci si spostava per fare un salto a Pisa, a Bologna, perfino a Padova e addirittura a Venezia.

1 *La cascata delle Marmore.*

La tappa successiva e definitiva era, naturalmente, Roma[3]. Il centro del mondo antico, con le sue vestigia di mille anni governo del mondo era il punto d'arrivo del viaggio. Certo, chi aveva disponibilità di mezzi e di tempo poteva permettersi di proseguire ancora: a Napoli, che era allora la capitale europea della musica, o per visitare Ercolano e Pompei (ma questo vale solo per i viaggiatori di fine Ottocento). C'era chi arrivava in Sicilia, in Grecia addirittura, a cercare le radici più profonde della cultura occidentale. Ma, più frequentemente, da Roma la carrozza volgeva di nuovo verso nord, intenzionata a superare di nuovo le Alpi verso la mitteleuropa. Innsbruck, Vienna, Berlino, e poi Olanda e Fiandre. E da qui, poi, di nuovo attraverso la Manica, e finalmente a casa.

[3] Le radici umbre di uno di noi non possono fare a meno di sottolineare come il trasferimento da Firenze a Roma fosse in genere fatto attraverso le città dell'Umbria: almeno un giorno di sosta era destinato, ad esempio, alla Cascata delle Marmore, cantata anche da Byron nel quarto canto del *Childe Harold's Pilgrimage*:

The roar of waters! From the headlong height
Velino cleaves the wave-worn precipice.
The fall of waters! Rapid as the light
the flashing mass foams shaking the abyss.
The hell of waters! Where they howl and hiss,
and boil in endless torture; while the sweat
of their great agony, wrung out from this
their Phlegeton, curls round the rocks of jet
that gird the gulf around, in pitiless horror set,
and mounts in spray the skies, and thence again
returns in an unceasing shower, which round,
with its unemptied cloud of gentle rain,
is an eternal April to the ground,
making it all one emerald. How profound
the gulf! And how the giant element
from rock to rock leaps with delirious bound,
crushing the cliffs, which, downward worn and rent
with his fierce footsteps, yield in chasms a fearful vent
to the broad column which rolls on, and shows
more like the fountain of an infant sea
torn from the womb of mountains by the throes
of a new world, than only thus to be
parent of rivers, which flow gunshingly,
with many windings through the vale. Look back!
Look! Where it comes like an eternity,
as if to sweep down all things in its track,
charming the eye with dread, a matchless cataract
horribly beautiful! But on the verge
from side to side, beneath the glittering morn,
and Iris sits, amidst the infernal surge,
like Hope upon a deathbed, and unworn,
its steady dyes, while all around is torn
by the distracted waters, bears serene
its brilliant hues with all their beams unshorn;
resembling, 'mid the torture of the scene,
Love watching madness with unalterable mien"

2 *Turner - Veduta di Roma.*

È il *Grand Tour*, il più classico dei viaggi culturali: quello che dà il nome stesso ai *turisti*, in fondo; prima di essi, i viaggiatori erano solo pellegrini.

Ma non erano solo inglesi, gli europei che venivano in Italia alla ricerca del passato, del paesaggio, e soprattutto dell'arte. Per ogni Turner c'è un Corot, per ogni inglese c'è un francese, un tedesco, un olandese curioso dei luoghi italiani. Per quanto incapaci per lungo tempo di aggregarsi in nazione, quando già da secoli altri europei avevano consolidato la loro unità nazionale, gli italiani erano comunque visti come gli eredi di un passato maiuscolo, che occorreva conoscere. Ma non era solo Ottocento. La penisola più caratteristica del Mediterraneo accoglieva da sempre pellegrini, e da sempre artisti. Il Rinascimento prende le mosse dall'Italia, e insegna l'arte a tutto il mondo; cosa c'è di più naturale di un artista che voglia venire ad imparare l'arte in Italia? Arrivano da tutta Europa: Spagna, Francia, Inghilterra, Germania. Arrivano e imparano, e diventano bravi: talvolta bravi quanto i loro maestri. E tornano nelle loro terre, artisti compiuti e senza più nulla che si possa aggiungere al loro talento. Arricchiti da un prezioso viaggio in Italia.

Certo, a differenza di quanto accade oggi, quelli erano viaggi che si facevano una volta sola per la vita. Erano avventure che duravano mesi, anni: molto costose e tutt'altro che prive di rischi. Senza aerei né treni, con strade non troppo diverse né troppo più numerose di quelle consolari vecchie di duemila anni, l'inglese dell'Ottocento non aveva poi molti vantaggi più del pellegrino francese medievale o del mercante tedesco del Seicento. Viaggi di studio o d'esperienza, ma ben diversi da un week-end fuori porta. Si andava alla ricerca di qualcosa di più che il semplice svago: e una volta ottenuto, a che serve tornare? Il futuro diplomatico conosce il mondo, il futuro politico conosce il continente, il giovane artista ha imparato la tecnica della sua arte. Tanto forti erano le ragioni per il primo viaggio quanto lo erano quelle che giocavano contro la ripetizione dell'esperienza. A meno che non ci fossero ragioni ulteriori, e ancora più stringenti.

3 *Albrecht Dürer - autoritratto.*

Albrecht Dürer nasce nella libera città imperiale di Norimberga il 21 maggio 1471, ed è uno dei massimi pittori del Rinascimento. Certo, soprattutto da questa parte delle Alpi si è talmente abituati a considerare il Rinascimento come un prodotto dell'italico ingegno che sembra quasi innaturale definire rinascimentale un artista dal nome così fortemente germanico come Albrecht; eppure bisognerebbe abituarsi a leggere la definizione Rinascimento Italiano non soltanto come indicativa del luogo geografico di origine del movimento, ma anche come limitazione geografica: il rinascimento è un movimento che spazia per tutta l'Europa, e annovera anche artisti non italiani, soprattutto fiamminghi.

Nascendo nel 1471, Dürer si palesa come quasi coetaneo di Michelangelo, che è di soli quattro anni più giovane del tedesco; coevo di Leonardo, che ha diciannove anni quando Albrecht emette il primo vagito: ed è ancora ben vivo il grande Piero della Francesca, che in quel di Sansepolcro ha ormai una cinquantina d'anni.

4 *Albrecht Dürer - Norimberga.*

A Norimberga, il padre di Albrecht è arrivato dall'Ungheria. Lavora come orafo e gioielliere, mette al mondo la bellezza di diciotto figli, e ha un cognome che in ungherese suona Ajtos. Non sembra esserci nessuna assonanza tra Ajtos e Dürer, e infatti la relazione non è nel suono, ma nel significato: Ajtos significa "porta" e in tedesco porta di dice "Tür"; da Tür a Türer e poi a Dürer il passo è breve, tant'è vero che Albrecht in molti casi alternava nel firmarsi Türer a Dürer.

5 *Autoritratto a tredici anni.*

Albrecht, nel conteggio dei diciotto figli di papà Albrecht[4] e mamma Barbara, si piazza ad un onorevole terzo posto. Dopo appena un accenno di scuole, Albrecht comincia a fare da apprendista nel laboratorio del padre, anche perché è subito palese il suo senso artistico: quello che vedete qui a fianco è il suo primo autoritratto, dipinto all'età di tredici anni.

Il padre, preso atto della predisposizione che il suo terzogenito mostra per la pittura, fece esattamente la stessa cosa che facevano i genitori fiorentini di quei tempi: mise il figlio a bottega presso un pittore rinomato. A Norimberga, il meglio che si potesse trovare era Michael Wolgemut, ed è presso di lui che Albrecht comincia il suo apprendistato.

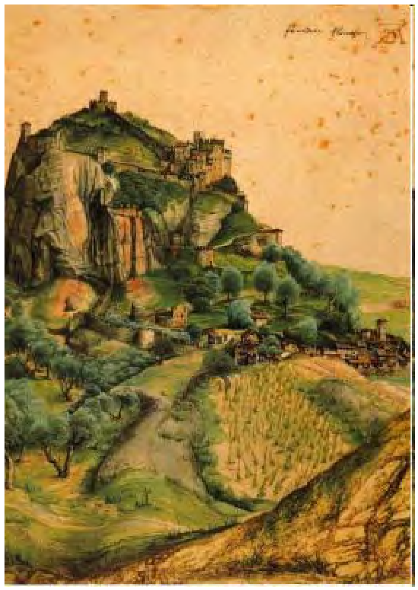
Come tutti i bravi maestri, Michael non si meraviglia troppo quando Albrecht, nel giro di pochi anni, mostrò di aver imparato tutto il possibile e di aver già superato il maestro; tutt'altro che invidioso, esortò il giovane discepolo a viaggiare e ad imparare tutte le tecniche possibili. Naturalmente, gli suggerì di andare quanto prima in Italia, dove erano i migliori artisti del tempo, e dove si trovava un florilegio di stili diversi. Con una sorta di modestia teutonica, Albrecht rinviò il suo viaggio nella penisola finché non si sentì pronto e padrone di tutto quanto può imparare in patria. Cominciò così a viaggiare, dirigendosi verso l'Olanda e le Fiandre, poi verso altre città tedesche come

[4] Con evidente scarsa fantasia, il padre si chiamava anch'egli Albrecht; essendo di solito il nome del padre trasmesso al primo figlio, deduciamo che prima del nostro eroe all'orafo e signora siano nate due femminucce.

Ulm e Costanza, e infine verso le città del Reno, Colmar e Strasburgo, fino a raggiungere Basilea, in Svizzera.

Solo nel 1494, ormai ventitreenne, si decise a compiere due passi significativi per la sua vita: sposò Agnes Frey, e partì per l'Italia.

Raggiunse la nostra terra da nordest: Trento, Verona, Venezia. A Venezia rimane incantato dalla tecnica di Giovanni Bellini[5], e le conseguenze si vedono subito nelle sue prime opere italiane. Dalla sua "veduta di Arco", presso Trento, si nota l'acquisita e completa padronanza della prospettiva e della tecnica pittorica.



6 *Albrecht Dürer - Veduta di Arco.*

Non sembra servigli più nient'altro: nel 1495 torna infatti a Norimberga, dove comincerà a darsi con trionfale successo alle incisioni e ai ritratti: diventerà uno dei cittadini più ricchi della sua città.

In Italia, non sembra che abbia avuto occasione di incontrare artisti del calibro di Leonardo, né di conoscere scienziati e matematici che, al pari degli artisti, popolavano a quei tempi soprattutto la nostra penisola. Eppure deve essere accaduto qualcosa, in quel primo viaggio, che marcò Albrecht Dürer profondamente. Non aveva più molto da imparare, nella tecnica della pittura: la nascente borghesia tedesca era clientela affezionata che anelava ad avere ritratti del maestro di Norimberga, e le sue xilografie dell'Apocalisse lo avevano reso celebre in tutto l'Europa del Nord. Parte del suo fascino stava anche in alcuni aspetti rivoluzionari: il suo più celebre *autoritratto*[6] lo raffigura in una prepotente posizione frontale che a quel tempo era riservato esclusivamente alle rappresentazioni del Cristo; o all'attenzione particolare anche a soggetti prettamente naturali, come il suo celeberrimo *Leprotto*.

7 *Albrecht Dürer - Leprotto*

Cosa mancava ancora, ad un artista oramai così maturo e completo?

Mancava la matematica.

O meglio, questo è ciò che lui credeva; noi non siamo certo in grado di giudicare criticamente un simile talento. Certo è che Albrecht torna dall'Italia con il forte desiderio di studiare seriamente matematica. Probabilmente aveva incontrato Jacopo dè Barbari, e questi era riuscito a mostrargli cosa fosse in grado di fare la matematica applicata all'arte.

C'è un passaggio molto significativo in una bozza inedita del testo di Dürer sulle proporzioni umane che sembra proprio riferirsi al dè Barbari, e che palesa l'ammirazione di Albrecht per la capacità "matematica" di riproduzione delle corrette proporzioni: *"...Non ho trovato nessuno che abbia scritto qualcosa*

[5] Detto anche "il Giambellino": da lui prende il nome il quartiere di Milano.

[6] Quello che abbiamo riportato poche pagine indietro, come "ritratto di riferimento" del protagonista di questo compleanno.

sui canoni delle proporzioni umane, eccetto un uomo chiamato Jacob, nato a Venezia e pittore affascinante. Mi mostrò le figure di un uomo e una donna, che realizzò in base a dei canoni matematici di proporzione, così ebbi modo di vedere ciò che intendeva, anche se egli non volle mostrarmi completamente i suoi principi, come intesi chiaramente."[7]

Può sembrare curioso che tale "*pittore affascinante*" sia, ai più, probabilmente del tutto sconosciuto. In verità, è probabilmente meno sconosciuto di quanto si potrebbe pensare a prima vista, perché è a lui attribuito[8] uno dei dipinti più noti a chi si interessa di matematica: il celebre ritratto di Luca Pacioli.

8 *Jacopo dè Barbari - Ritratto di frà Luca Pacioli.*

Certo è che la teoria delle proporzioni prima, poi la prospettiva, poi la geometria stessa, a prescindere dalle relazioni dirette con l'arte, cominciarono ad interessare oltre modo Albrecht Dürer. Si decide infatti per fare un secondo viaggio in Italia, tra il 1505 e il 1507 e, abbastanza curiosamente per un pittore, il suo è un viaggio dedicato assai più alla matematica che all'arte vera e propria. Del resto, era ormai veramente famoso, e non ci si poteva aspettare che venisse con l'abito del discepolo[9].

Andò a Bologna, ad incontrare proprio Pacioli, che era probabilmente il maggior matematico del suo tempo: si incontrò nuovamente con Jacopo dè Barbari, e alla fine del suo secondo viaggio in Italia si ritrovò a casa, a Norimberga, ancora più convinto della necessità di studiare matematica, se si voleva essere grandi pittori. Decise per questo di

[7] Testo preso integralmente da Wikipedia.

[8] Attribuzione non certa, ma probabile.

[9] E come molti grandi (artisti e non) era anche abbastanza paranoico: si narra che rifiutasse gli inviti a cena dei colleghi italiani per timore che questi, gelosi, tentassero di avvelenarlo.

scrivere un grande trattato di matematica destinato agli artisti, "*Underricht der Malerei*" ("Guida alla Pittura"), che però non riuscì mai a completare perché il suo progetto iniziale era troppo vasto, soprattutto in relazione a quanta matematica erano disposti ad assorbire il pittori del suo tempo. Ne ricavò allora un'opera ridotta, la "*Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit"* ("Istruzioni sulle Misure con riga e compasso") che è stato il primo testo di matematica mai stampato in lingua tedesca[10].

La matematica lo aveva catturato per sempre: tra i cultori della scienza dei numeri, la sua opera più celebre è senza dubbio la "*Melencolia I*".

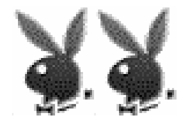
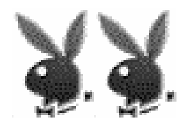
9 *Albrecht Dürer – Melencolia I*

Dove, tra gli altri molti simboli matematici, compare in alto a destra un quadrato magico 4x4. Le due caselle centrali dell'ultima riga contengono i numeri 15 e 14, facendo così anche da data dell'opera, che è infatti del 1514.

Ci sono ancora moltissime persone convinte che matematica e arte siano cose diversissime e distanti. Ci piacerebbe molto sapere cosa potrebbe dir loro Albrecht Dürer.

[10] E, vista quanta matematica in lingua tedesca è stata prodotta nei secoli successivi, ci sembra un record degno del massimo rispetto.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Finché siamo in tempo			
Vecchi ricordi			

2.1 Finché siamo in tempo...

…nel senso che non abbiamo alcuna certezza che le varie biglie, colori e ammennicoli vari di gioventù dei Validi Assistenti restino in circolazione ancora per lungo tempo; come dice Rudy, qui la distribuzione dei voti somiglia sempre di più ad una Poissoniana (e Rudy non è assolutamente convinto che interrogazioni e verifiche siano *eventi rari nel tempo…*).

Capite quindi che, se il Capo vuole effettuare qualche simpatico esperimento di simulazione, è meglio se si sbriga e se i giochi sono veloci, ossia se i numeri sono piccoli. Liberissimi, se ve la sentite, di giocarci usando numeri grandi.

L'ultima tortura che il Nostro ha trovato ha coinvolto il VAdLdRM più amante del gioco d'azzardo (Fred[11]) e un sacchetto con pochissime biglie.

"Dunque, qui dentro ci sono tre biglie, ciascuna delle quali è o bianca o nera e abbiamo la stessa probabilità che ci siano 0, 1, 2 o 3 biglie bianche. Le palline bianche valgono mille, le nere zero. Tu hai la possibilità di comprare una biglia ad un certo prezzo, compreso tra zero e mille (estremi esclusi); quando compri una biglia, la estraggo (casualmente) dal sacchetto ed è tua: liberissimo di guardare il colore e tenertela. Puoi andare avanti a comprare biglie sin quando vuoi, decidendo di fermarti in qualsiasi momento. Supponiamo, una volta tanto, tu utilizzi la miglior strategia possibile: quanto ti aspetti di vincere, come funzione del prezzo della biglia?"

Logicamente Fred ha cominciato a contrattare sul prezzo delle biglie, ma Alberto si è mostrato irremovibile: anzi, sta pensando di usare il giochino per spiegare a Fred il concetto di *variabile indipendente*. Prima che quest'ultimo si arrabbi, potete dargli una

[11] Con questo non intendiamo dire che stia dilapidando il patrimonio di famiglia: molto semplicemente, abbiamo notato che di solito Alberto tiene il Banco e Fred fa il Giocatore. Quest'ultimo sostiene che è molto più facile imparare le regole del Giocatore piuttosto che quelle del Banco e quindi il divertimento comincia prima; visto che la giocata massima consiste in un biglietto da cinquecento del Monopoli ("Ferrari Edition", quindi sono Euro), la cosa non preoccupa nessuno, almeno sin quando dopo rimettono in ordine. E poi (*tutto papà…*), quando Alberto gioca, non è azzardo.

mano? Come varia il guadagno atteso in funzione del costo delle biglie? Attenzione che abbiamo scritto "guadagno", quindi dal ricavo dovete detrarre il costo delle biglie comprate.

Svelti, che non abbiamo il tempo di aspettare che la Poissoniana diventi una Gaussiana…

2.2 Vecchi ricordi

Certe volte, i Validi Assistenti di Laboratorio di RM sono convinti che Rudy abbia passato la gioventù in uno sperduto paesino sulle Ande e sia stato bruscamente portato al contatto con la realtà e la tecnologia dall'arrivo dei *conquistadores*. Il seguente dialogo si svolge infatti con Rudy al volante:

"Oh, *No!*"

"Problemi, *Pater*?"

"… Hanno tirato giù il Dazio del Pino del Pino! E i Carabinieri di fianco non hanno fatto niente per impedirlo! Adesso mi arrabbio e vado a dirgliene quattro…"

"Frena, Genitore. Tanto per cominciare spiegaci cos'è il Dazio col Pino al Quadrato, poi cosa c'entra la Benemerita e poi perché la cosa ti spiace. Indi, forti delle tue spiegazioni di Teoria dei Giochi, valuteremo se lasciarti andare a presentare un informale ricorso o rinchiuderti in camicia di forza".

"Avevo suppergiù la vostra età, e la sera ci si trovava di solito sotto la tettoia del Dazio della strada per Pino Torinese, che aveva un pino da una parte e un posto di controllo dei Carabinieri dall'altra; questo ultimo fatto rendeva ragionevolmente tranquilli i genitori dei frequentatori del Dazio, che si fidavano quando i figli dicevano 'Vado al Dazio del Pino'. C'era la ragionevole sicurezza che non assumessero sostanze psicotrope vietate (data la vicinanza dei Carabinieri) e che non prendessero influenze da raffreddamento, grazie alla tettoia. Nella mia piovosa gioventù, era il posto di ritrovo delle nostre serate: la tettoia offriva un ragionevole riparo dalle idrometeore (le chitarre non sopportano l'umidità). L'avevo visto in funzione come Dazio, ci ho suonato sotto quando era ormai inutilizzato… Beh, mi spiace."

"…Hai visto pagare il dazio? L'avevano inventato nel Medio Evo, se non sbaglio…"

"Non ho detto che ho visto pagare il primo dazio della storia, ho detto che ho visto pagare gli ultimi! E, come all'epoca diceva Rabelais, tu non fare lo scemo per non pagare il dazio!"

"Mah, giusto per consolarti, posso proporti un problema, sul dazio…"

"Tu? Un problema? Sul dazio?"

"Certo. Ne so di dazi quanto di problemi, non dovrebbe essere difficile mettere assieme le due cose. Potresti metterlo in RM…"

"Prova."

"Supponiamo un dazio basato su una ragionevole fiducia negli esseri umani: quando il camionista arriva, dichiara il valore del carico e paga una tassa pari al venti per cento del carico…"

"…e tutti dichiarano valore zero, se ben conosco i miei simili…"

"Ho detto *ragionevole* fiducia: se il doganiere (o il daziere? Beh, fa lo stesso) ritiene che la valutazione sia troppo bassa, ha il diritto di comprare a quel prezzo l'intero carico, senza proteste"

"Interessante. E dov'è il problema?"

"Semplice. Tu arrivi con un carico da mille euro, e sei intenzionato a guadagnare dal tuo carico il più possibile: quanto dichiari?"

"Uh. Carino, ma facile. Forse si riesce a complicarlo…"

"Per una volta che sapevo risolvere un problema…"

"Aspetta. Supponi di arrivare *tu* con un camion che ha un carico del valore di un migliaio di euro; a poche ore di distanza c'è tuo fratello Fred, alla guida di un camion con lo stesso carico; avete fatto l'accordo che vi dividerete i guadagni, e sapete che il dazio può ospitare *un solo camion* comprato. Quanto dichiari, quando arrivi al dazio?"

"Confesso che parlo d'altro perché non ho intenzione di pensarci. Puoi andare avanti in questo modo per un bel po' di tempo, con n camion e n-1 depositi…"

"Beh, possiamo sempre provare a cambiare un po' i numeri. Supponi nel deposito ci stiano *due* camion, ma che voi reclutiate altri *tre* amici, totale cinque; questa volta, però, arrivate tutti assieme; quanto valuta ciascuno di voi il proprio carico?"

"Credo la fregatura sia nel 'tutti assieme', stavolta… Sei sicuro che non convenga continuare ad arrivare uno per volta?"

"Probabile… Quello che non riesco a calcolare, visto che sto guidando, è quanto convenga di più…".

3. Bungee Jumpers

Raggruppate le cifre da 1 a 9 in modo tale da formare tre numeri di tre cifre ciascuna che, moltiplicati tra di loro, diano il risultato:

1. Il più piccolo possibile
2. Il più grande possibile

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Siete sopravvissuti agli scherzi di aprile? E alla pioggia?

Non c'è tempo per niente, qui in Redazione, si lavora a testa bassa, è questa la verità. Alcuni di noi non si sono nemmeno accorti che pioveva, tanto erano presi. Ad esempio il Doc: dopo settimane di resistenza ha infine descritto il suo resoconto della festa della matematica, che vi passiamo senza ulteriori indugi:

10 *Il logo della Festa della Matematica*

Non riusciremo certo ad essere obiettivi. Oscilliamo come sempre tra la più pudica modestia e lo sfrenato esibizionismo egocentrico, quindi come potremo raccontarvi obiettivamente quel che è successo lo scorso 20 Marzo, in occasione della torinese ***Festa della Matematica***? Tutto dipende dal "registro" della narrazione che, come insegnano i professori di lettere, è in fondo proprio ciò che più caratterizza un testo; figuriamoci poi se quel testo è una cronaca.

La cosa migliore che potremmo fare è rimandarvi direttamente al sito ufficiale (http://www.festadellamatematica.bussola.it/), non fosse altro che per invitarvi a spulciare da soli la galleria fotografica, per vedere se ritrovate qualche faccia nota. Ma se proprio volete che vi si faccia un resoconto diretto, per quanto piccolo e veloce, cercheremo di accontentarvi. La Festa della Matematica di Torino è giunta ormai alla sua sesta edizione (è nata nel 2004) e, alla faccia di chi accusa gli insegnanti di essere poveri di iniziativa e entusiasmo, è ribaldamente organizzata da un gruppo di entusiastici ed eroici professori di scuola superiore. Con il patrocinio diretto della Associazione Subalpina Mathesis (sezione Bettazzi), sono riusciti a far venire al Lingotto (una ex-fabbrica di una nota azienda automobilistica torinese) un esercito di studenti delle scuole superiori della provincia sabauda, tutti pronti ad affrontarsi nella gara di matematica a squadre che li avrebbe nel pomeriggio.

Come premiare cotanto entusiasmo giovanile e matematico? Con crudeltà sopraffina, i prof hanno deciso che i giovani atleti dovevano (beh, a dire il vero *potevano*, non necessariamente *dovevano*) ritemprarsi mente e corpo sorbendosi due conferenze prima dello scontro all'ultimo sangue, pardon, all'ultimo calcolo. E passi la prima delle due conferenze: a tenerla era infatti un vero luminare, il professor Antonio Fasano dell'Università di Firenze; intitolata "*Quando la matematica esce dal suo habitat*", era incentrata sulle applicazioni tutto sommato impreviste della matematica, dalla biologia molecolare al comportamento degli enzimi, fino al restauro delle opere d'arte. In fondo, come insegna *Numbers*, la matematica non ha nessuna intenzione di restarsene relegata sulle lavagne delle aule.

Il guaio è che la seconda conferenza (che lo speaker ha addirittura chiamato *conferenza-spettacolo*) è toccata invece proprio a noi. Alice, con la scusa che abita lontano, si è limitata ad inventare il titolo ("*Chi ha paura della matematica*") e poi ha mantenuto la promessa di defilarsi, di restare in contumacia, assente ingiustificata, lasciando soli i due maschietti a cavarsela di fronte ad una platea giovane, sveglia, attenta e assetata di sangue. Forse "assetata di sangue" è un po' esagerata, come descrizione, ma ai due poveri e timidi relatori sembrava proprio così. In realtà, i ragazzi sono stati attenti e gentili: applaudivano e ridevano, cosa che li classifica definitivamente come ragazzi generosi e di buon animo, perché siamo sicuri che hanno fatto largo uso di tolleranza e condiscendenza nei nostri confronti. Non possiamo far altro che ringraziarli, oltre ad essere orgogliosi e contenti di esserci stati. Una bella signorina armata di videocamera, microfono e sorriso ci ha perfino intervistati, ma non abbiamo proprio idea di quale fine abbia fatto quella registrazione.

Loro, i ragazzi, poi si sono davvero dati battaglia: erano quasi trenta scuole, le une contro le altre armate, a far scorrere sudore e grafite lungo le spiraleggianti rampe del Lingotto. Alla fine ha trionfato il liceo scientifico "Galileo Ferraris" di Torino, davanti al liceo classico "Carlo Botta" di Ivrea e al liceo scientifico "Niccolò Copernico" di Torino. Noi, invece, siamo andati a farci belli, facendo finta di essere personaggi importanti (eravamo del resto accompagnati da veri matematici e veri professori). E, come ormai si sa, fare finta è una delle cose che ci riescono meglio.

A parziale – molto parziale invero – giustificazione di Alice, bisogna riconoscere che non è restata con le mani in mano. Senza dirci niente, mentre noi maschietti ci crogiolavamo sotto i riflettori e sopra i palchi, lei rilasciava interviste ad uno dei più bei blog scientifici d'Italia: ***Gravità Zero***, nelle sembianze di Claudio Pasqua, ha infatti realizzato una blog-intervista proprio per Treccia. La trovate qua (http://www.gravita-zero.org/2009/04/francesca-ortenzio-la-voce-gentile-dei.html).

Vale la pena di fare un giro sul posto. Non solo per leggere di Alice; non solo perché ha ospitato l'ultimo Carnevale della Matematica; non solo perché è il sito che probabilmente meglio ha celebrato i cento anni di Rita Levi-Montalcini; ma per tutte queste cose insieme, e molto di più.

Beh, un po' di più di un resoconto, direi.

Ma passiamo velocemente al resto, che c'è altro da dire. Per esempio, vi ricordate il problema degli interruttori proposto in RM120? Un gruppo di solutori ha chiesto (ed ottenuto) di potersi consultare per trovare una soluzione più soddisfacente al tutto. Non appena il loro documento sarà pronto lo pubblicheremo, molto probabilmente sul Bookshelf o addirittura in un PM, ma qualcosa di ancora più eccezionale è successo: i magnifici otto (***Gnugnu***, ***Emanuele***, ***Allanon***, ***GinoPieri***, ***Trekker***, ***Millenium Bug***,

Cid, ***Franco57***, ***Fabrizio***) si sono divertiti talmente tanto nel processo da voler continuare ad affrontare insieme vecchi problemi di RM. Insieme hanno creato un gruppo che è pronto ad accogliere nuovi volontari e solutori: si chiama CiVuDi e basta seguire il link http://groups.google.com/group/CiVuDi per scoprire come farne parte o di cosa si è già parlato.

Ed ora le soluzioni dei problemi, che stavate tutti aspettando.

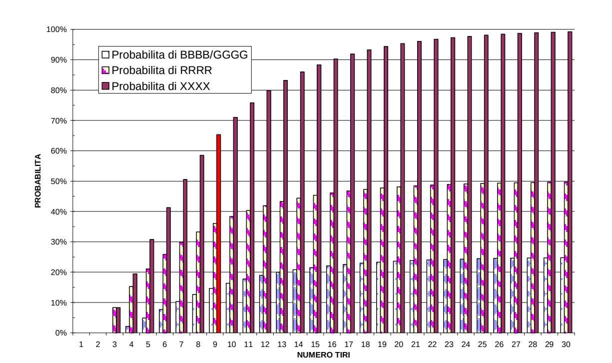
4.1 [122]

4.1.1 Sono tornati anche i colori!

Il problema delle biglie colorate del mese scorso è tornato all'onore delle cronache, ve lo ricordiamo:

> *In un sacchetto ci sono quattro biglie di colori diversi, e sono dati i quattro colori equivalenti. Estraggo una biglia e la tengo fuori, poi ne estraggo un'altra e la dipingo dello stesso colore della prima. Appena il colore è asciutto, rimetto entrambe le palline nel sacchetto. Quante coppie di estrazioni dovrei aspettarmi di fare, prima di avere tutte le palline dello stesso colore?*

Su RM123 abbiamo pubblicato le soluzioni di ***.mau.***, ***Alberto R.***, e ***Gnugnu***. ***Rub*** ha trovato entusiasmante la risposta di ***Alberto R.*** e si complimenta sinceramente per l'approccio idraulico che esprime il risultato in maniera intuitiva ed efficace. Ci manda inoltre un contributo addizionale che pubblichiamo volentieri.

> È sorprendente come un gioco così semplice lasci riflettere – se non sui Massimi Sistemi – almeno sugli effetti del caso…
>
> Abbiamo un fenomeno fortemente irreversibile, in cui non appena un colore viene cancellato non ha più la possibilità di riapparire. Le estrazioni sono casuali, ed è il caso a dominare il gioco in tutti i momenti. Eppure il sistema evolve verso uno stato di massimo ordine, collassando in quattro palle tutte uguali, apparentemente violando i Principi Fondamentali che vorrebbero un continuo aumento del disordine e dell'entropia. Ma la contraddizione è solo apparente: basta l'azione umana di scelta del processo di colorazione per impedire al caos primordiale di dominare. È esattamente come il diavoletto di Maxwell, che "con intelligenza" riesce ad ordinare le molecole di un gas separandolo in duo metà a temperatura diversa. Possiamo proporre questo esempio didattico nei prossimi corsi di termodinamica!
>
> 
>
>
> 11 *Il grafico di **Rub***
>
> Solamente dopo la prima estrazione, in cui un colore muore per sempre ed abbiamo lo stato effettivo di partenza RRGB, possiamo notare che tale unica, singola azione è stata sufficiente per creare una sproporzione nelle probabilità dei risultati finali: effettuando il calcolo dettagliato, si scopre che il sistema potrà collassate in quattro palle BBBB o GGGG con probabilità che asintoticamente raggiunge il 25% ciascuna, mentre RRRR tende al 50%. La probabilità complessiva di avere une dei tre possibili stati era stata presentata il mese scorso, con un valore medio di estrazioni pari a 9.
>
> Il grafico mostra l'evoluzione dei singoli stati, evidenziando il numero medio di estrazioni per il caso complessivo; ciascun risultato, invece, ha un valore di

estrazioni ben diverso, ovvero 2,5 per BBBB e GGGG, e 4 per RRRRR. Il totale genera il 9 che ci aspettavamo, ed il significato di questi singoli valori mi sembra oscuro. Certamente non vogliono dire che dopo 4 estrazioni sono il valore atteso per RRRR, ma che, dato come assodato che occorrono 9 estrazioni, in 4/9 volte ho RRRR, ed in 2,5/9 volte ho BBBB o GGGG.

...a volte la statistica ha in serbo sorprese nascoste…

Siamo d'accordo con ***Rub***...

4.2 [123]

4.2.1 Bellezza classica, ovvero: vietato ai minori

Questo problema non era nemmeno dematematizzato! Il Capo voleva la dimostrazione del Teorema di Viete:

L'area del 2^n *–agono di perimetro unitario vale* $2^{-(n+2)}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}}}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}}}$, *in cui ci sono* $n-1$ *"2" sotto ciascuna delle sequenze di radici annidate.*

Le soluzioni arrivate in Redazione sono tante, e – almeno secondo il parere di Alice – tutte bellissime. Rudy si è rifiutato di dirci quale fosse la sua dimostrazione, e noi ci siamo trovati a dover scegliere tra i gioielli di ***Drako84***, ***Elena***, ***Millenium Bug***, ***Cid***, ***Angus89***, ***Eddie Devde***, ***Franco57***, ***Gnugnu*** e ***Fabrizio***.

Per esempio quella di ***Elena***:

Il 2^n-agono regolare di perimetro unitario è costituito da 2^n triangoli isosceli, di base $l_n=\frac{1}{2^n}$ ed altezza $h_n=\frac{1}{2^{n+1}}\cdot ctg\frac{\pi}{2^n}$. Ne segue che la sua area vale:

$$A_n=2^n\cdot\frac{l_n}{2}\cdot h_n=2^n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\cdot ctg\frac{\pi}{2^n}=2^{-(n+2)}\cdot ctg\frac{\pi}{2^n}.$$

Bisogna quindi dimostrare l'uguaglianza:

$$ctg\frac{\pi}{2^n}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2}}}}}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2}}}}}$$ (dove compaiono n-1 "2" sotto ciascuna delle sequenze di radici annidate).

Si può fare per induzione, ricordando che $ctg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{ctg^2\alpha+1}+ctg\alpha$ (per $0<\alpha\le\frac{\pi}{4}$). Si prova facilmente per n=2: $ctg\frac{\pi}{4}=1=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$. Supposto, per ipotesi, che l'uguaglianza sia vera per n=k, cioè:

$$ctg\frac{\pi}{2^k}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2}}}}}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2}}}}}$$ (dove compaiono k-1 "2" sotto ciascuna delle sequenze di radici annidate)

è comodo scriverla in forma "abbreviata":

$$ctg\frac{\pi}{2^k}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{R_{k-2}}}}{\sqrt{2-\sqrt{R_{k-2}}}}$$ (dove R_{k-2} indica i due radicandi uguali contenenti ciascuno k-2 “2”).

Sia ora n=k+1:

$$ctg\frac{\pi}{2^{k+1}}=\sqrt{ctg^2\frac{\pi}{2^k}+1}+ctg\frac{\pi}{2^k}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{R_{k-2}}}{2-\sqrt{R_{k-2}}}+1}+\sqrt{\frac{2+\sqrt{R_{k-2}}}{2-\sqrt{R_{k-2}}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{4}{2-\sqrt{R_{k-2}}}}+\sqrt{\frac{2+\sqrt{R_{k-2}}}{2-\sqrt{R_{k-2}}}}=\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{R_{k-2}}}}{\sqrt{2-\sqrt{R_{k-2}}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{R_{k-2}}}\right)^2}{4-\left(2+\sqrt{R_{k-2}}\right)}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{R_{k-2}}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{R_{k-2}}}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots\sqrt{2}}}}}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\dots\sqrt{2}}}}}$$ (dove compaiono k “2” sotto ciascuna delle sequenze di radici annidate).

Praticamente allo stesso modo si può provare che l’area del “triplo 2^n-agono” regolare di perimetro unitario vale:

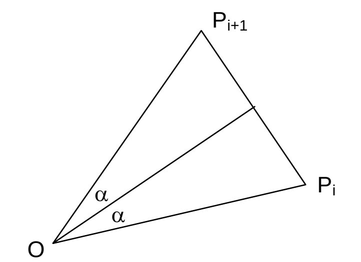
$$A_n=\frac{2^{-(n+2)}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\dots\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}$$ (dove compaiono n-1 “2” e 1 solo “3” sotto ciascuna delle sequenze di radici annidate)

a partire dal dodecagono (cioè per $n\geq 2$).

Niente male anche l’approccio di ***Millenium Bug***:

Questa la dimostrazione che ho trovato io. Mi è sembrata abbastanza immediata da trovare e quindi suppongo sia quella a cui si riferisce Rudy, anche se a me non sembra tanto “fetente”. Ma forse io ho dei canoni estetici diversi…

Prendiamo un generico poligono regolare a 2^n lati; sia O il centro del cerchio circoscritto e consideriamo i 2^n settori triangolari uguali in cui si può scomporre il poligono.



12 *Il disegno di **Millenium Bug***

Chiamiamo α il semiangolo al centro di ognuno di questi settori e r il raggio OP_i.

Abbiamo:

$$\alpha=\frac{2\pi}{2^{n+1}}$$

$$\overline{P_iP_{i+1}}=2r\cdot\sin\alpha$$

Il perimetro e l’area del poligono sono quindi rispettivamente:

$$2p = 2^n 2r \cdot \sin\alpha$$

$$A = 2^n \cdot r\sin\alpha \cdot r\cos\alpha$$

Imponendo la condizione 2p=1 ricavo per A questa simpatica espressione:

$$A = 2^{-(n+2)}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

che già mi ricorda qualcosa…

Rispolvero le buone vecchie formule di bisezione per seno e coseno

$$\cos\alpha = \sqrt{1+\cos 2\alpha}\ ,\ \sin\alpha = \sqrt{1-\cos 2\alpha}$$

che riscrivo come:

$$\sqrt{2}\cos\alpha = \sqrt{2+2\cos 2\alpha}\ ,\ \sqrt{2}\sin\alpha = \sqrt{2-2\cos 2\alpha}$$

Ricordando la relazione tra α e n vista prima, applico il tutto ricorsivamente per n-2 volte, previa moltiplicazione per radice di due dei membri della frazione, di modo che mi rimangono due bei $2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ e il gioco è fatto.

Non sarà a livello della Venere di Milo o della formula di Eulero, però fa anche lei la sua figura…

Mentre ***Cid***, nell'introdurre la sua – come al solito ottima – soluzione, si lancia in battute classiche quanto la bellezza:

... considerato il titolo del problema e l'accenno alla Venere di Milo, immagino che non vi sarebbe dispiaciuto vedere un bel seno nella soluzione. Per quanto riguarda la mia soluzione dovrete però accontentarvi di coseno e cotangente...

Con rammarico abbiamo spazio solo per una soluzione ancora, quella di ***Gnugnu***, al solito ricca di pungente ironia:

Non credo sia possibile evitare l'uso, più o meno esplicito, dell'induzione e per cercare di aumentare l'interesse (mio) voglio provare a condurre la dimostrazione della parte più importante senza utilizzare l'editor delle formule (il monitor conferma, con due lampi di gioia, la soddisfazione del computer); non so se piacerà a Rudy o se sosterrà, come al solito, che non ci si capisce alcunché.

Dato un poligono regolare di *m* lati inscritto in una circonferenza di raggio *r*, supponiamo note le formule che ne esprimono le misure della superficie e del perimetro, (si possono ricavare facilmente considerando il settore corrispondente ad un lato del poligono).

$$A(m) = r^2 m\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}\right);\quad 2p(m) = 2r\,m\sin\left(\frac{\pi}{m}\right),$$

da cui, ponendo $m = 2^n$, si ottiene

$$\frac{A^2(2^n)}{\left(2p(2^n)\right)^2} = \frac{r^2 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{4r^2 2^{2n}\sin^2\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \frac{1}{2^{n+2}}\frac{\cos\left(\frac{\pi/2}{2^{n-1}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi/2}{2^{n-1}}\right)}.$$

Confrontando questo risultato con la 'bella' da dimostrare, notato che la potenza del 2 che precede le frazioni è la stessa, basterà provare che:

$$\frac{\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n-1 volte}}{\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n-1 volte}}=\frac{\cos\left(\frac{\pi/2}{2^{n-1}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi/2}{2^{n-1}}\right)}\qquad\forall n\in N_0\setminus\{1\}.$$

Il proditorio, ma lecito, dimezzamento dei radicali serve solo per normalizzare i risultati dei successivi punti 1 e 2.

Consideriamo la successione formata dai primi membri dell'uguaglianza precedente al crescere del numero 1, 2, …, k, ... di "2" nei radicandi.

Prendiamone un qualsiasi termine e facciamo il quadrato del numeratore e del denominare Le radici più esterne scompaiono e notiamo che:

1. la somma di questi quadrati è uguale a 1;
2. la loro differenza coincide col numeratore della frazione immediatamente precedente (tranne, naturalmente, per la prima frazione dove vale zero).

La (1) ci permette di affermare che numeratore e denominatore sono il seno e il coseno del medesimo angolo. La positività dei radicali ci dice che l'angolo appartiene al primo quadrante e, fra le due possibilità, optiamo per il primo ottante, in modo che il numeratore (più grande) sia il coseno e il denominatore (più piccolo) il seno. Ogni termine della successione è dunque esprimibile come rapporto fra coseno e seno di angoli, per ora incogniti, appartenenti al primo ottante.

Il primo termine della successione contiene un solo 2 sotto le radici ed è uguale al rapporto fra il coseno e il seno di metà di un angolo retto, dunque l'uguaglianza è soddisfatta nel caso $k = 1$.

La (2), a questo punto, non è altro che la formula di duplicazione per il coseno, sufficiente per provare che passando da una frazione alla precedente l'angolo raddoppia; quindi, passando alla successiva si dimezzerà, così come si dimezza l'angolo dell'espressione a secondo membro quando l'esponente viene incrementato di 1.

Se l'uguaglianza è vera per un arbitrario valore di k, lo sarà, allora, anche per il successivo. C.V.D.

Volendo, per pignoleria, verificare, si può constatare che il denominatore di ciascuna frazione è esattamente uguale al doppio del prodotto fra numeratore e denominatore della successiva – formula di duplicazione per il seno..

Qualche *pistino* potrebbe, a ragione, osservare che uno dei passaggi contiene un'ipotesi implicita, dubitando della sua verità, ma ormai avvezzo, da quando frequento questa losca rivista, a tagliare per prati, gli rispondo che, se l'ha notato, è anche in grado di dimostrarne, immediatamente, la correttezza.

Concordiamo soprattutto sulla parte che concerne l'attraversamento di zone erbose.

4.2.2 Arriva la bella stagione...

Questa volta si trattava di un gioco, e di verificarne le strategie vincenti:

Dato un mucchio con le trenta monete, quando tocca a un giocatore può prenderne una, due o tre, ma non può prenderne tante quante ne ha prese il giocatore alla *mossa precedente. Perde o chi non ha nulla da prendere, o chi prende l'ultima moneta.*

Il problema va analizzato con due giocatori, ma cosa succede se anche Rudy vuole giocare? In questo caso, la regola diventerebbe che non può prendere un numero di gettoni pari a quella del giocatore immediatamente precedente… Si complica, la cosa?

Anche qui, tante soluzioni: ***Alberto R.***, ***Millenium Bug***, ***Claudio***, ***Cid***, ***Gnugnu***, ***Franco57***. Proprio a ***Franco57*** cediamo la parola per primo:

Per chi deve muovere lo stato del sistema non è determinato solo dal numero di monete (*n*) ma anche da quante ne sono state giocate prima (*p*), quindi tre stati per ogni numero di monete ($S_{n,p} \quad p \in \{1,2,3\}$). Fa eccezione solo la prima giocata per la quale lo stato dipende solo dal numero di monete (S_n).

Possiamo quindi rappresentare gli stati $S_{n,p}$ come un vettore di tre celle per ogni numero naturale che rappresenta il numero di monete:

		numero monete							
		1	2	3	4	5	6	7	...
	1	$S_{1,1}$	$S_{2,1}$	$S_{3,1}$					...
mossa prec.	2	$S_{1,2}$	$S_{2,2}$	$S_{3,2}$					...
	3	$S_{1,3}$	$S_{2,3}$	$S_{3,3}$					...

È utile rappresentare graficamente i possibili stati di partenza P (cioè prima di una mossa), fissato lo stato di arrivo A (cioè dopo la mossa).

Questo lo si può fare indipendentemente dal numero di monete dello stato di arrivo:

		n	n+1	n+2	n+3	n	n+1	n+2	n+3	n	n+1	n+2	n+3
	1	A						P					P
mossa prec.	2		P			A							P
	3		P					P		A			

I tre schemi si riferiscono nell'ordine alla mossa: tolgo 1 moneta, tolgo 2 monete, tolgo 3 monete. Dei tre stati di partenza con n+1, n+2 o n+3 monete rispettivamente, ho tolto quello per il quale si violerebbe la regola "non puoi prenderne tante quante ne ha prese il giocatore alla mossa precedente".

Quando si gioca in due, in ogni stato, uno dei due giocatori (uno solo ovviamente) ha la vittoria in pugno, se gioca in modo ottimale.

Questa è una regola generale, se:

1. sono pre-assegnati degli stati di fine partita (nel nostro caso perde chi non può giocare o chi è obbligato a prendere l'ultima moneta);
2. tutti gli stati devono giungere, prima o poi, ad uno stato di fine partita.

Se il giocatore che ha la strategia vincente è quello di turno assegniamo convenzionalmente il valore 1 allo stato, altrimenti il valore 0.

Infatti, partendo dagli stati finali, possiamo ricorsivamente assegnare il valore 1 ad uno stato se può portare ad uno stato 0. Altrimenti, cioè se tutte le mosse portano in uno stato 1, lo stato vale 0.

Nel nostro caso, gli stati di fine partita sono di perdita e sono quelli con una sola moneta o con due monete ma la mossa precedente di 1 moneta. Li rappresento graficamente:

		numero monete								
		1	2	3	4	5	6	7	8	...
mossa prec.	1	0	0							...
	2	0								...
	3	0								...

Usando la tabella di dipendenza delle partenze dagli arrivi trovo il valore 1 per altri stati:

		numero monete								
		1	2	3	4	5	6	7	8	...
mossa prec.	1	0	0	1	1					...
	2	0	1	1	1					...
	3	0	1	1						...

Lo stato con numero di monete più basso è adesso $S_{4,5}$ e non può che valere 0 (come si fa per i numeri primi con il crivello di Eratostene) e determina a sua volta altri due stati a 1:

		numero monete								
		1	2	3	4	5	6	7	8	...
mossa prec.	1	0	0	1	1			1		...
	2	0	1	1	1			1		...
	3	0	1	1	0					...

Procedendo si verifica che gli stati si ripetono modulo 4 sul numero di monete. Diciamo che questo è un blocco. Poiché, secondo le regole di generazione date, un blocco di 4x3 stati dipende solo dal blocco precedente, si può affermare che la ripetizione avviene all'infinito.

		numero monete														
		1	2	3	4	5	6	7	8	...	25	26	27	28	29	30
mossa prec.	1	0	0	1	1	0	0	1	1	...	0	0	1	1	0	1
	2	0	1	1	1	0	1	1	1	...	0	1	1	1	0	
	3	0	1	1	0	0	1	1	0	...	0	1	1	0	0	
		blocco 1				blocco 2				...						

Quando si inizia una nuova partita, il primo a giocare, visto che può fare 3 mosse, è come se potesse scegliere una mossa precedente fittizia che non lo limiti nella sua intenzione di gioco, quindi $S_n = \max(S_{n,1}, S_{n,2}, S_{n,3})$ cioè vale 1 se almeno uno tra $S_{n,1}, S_{n,2}, S_{n,3}$ vale 1.

Abbiamo quindi $S_n = 0 \Leftrightarrow n \equiv 1 \pmod 4$ e in particolare $S_{30} = 1$. È il primo giocatore, quindi ad avere una strategia vincente, e la realizza muovendo sempre verso uno stato 0 quando è il suo turno.

Per analizzare il caso con 3 giocatori ho trovato più utile, invece, rappresentare gli arrivi A dalle possibili partenze P sempre indipendentemente dal numero di monete:

		n-3	n-2	n-1	n
mossa prec.	1				P
	2		A		
	3	A			

n-3	n-2	n-1	n
		A	
			P
A			

n-3	n-2	n-1	n
		A	
	A		
			P

Poiché uno solo dei tre giocatori perde, ci saranno due vincitori ed un perdente, quindi eventualmente anche più di un giocatore in un determinato stato (n,p) potrà avere una strategia vincente.

In ogni casella (n,p) inserisco 1, 2, 3 se, a partire da questo stato, c'è una strategia vincente rispettivamente per il primo, per il secondo, per il terzo giocatore. Da notare che possiamo inserire anche più di un valore.

Ecco come si può precedere per trovare chi ha strategia vincente:

1. Prima di tutto nelle situazioni di fine-gioco a chi ha vinto assegniamo una "strategia vincente". In (0,p), p qualsiasi, è il giocatore che ha appena mosso ad aver perso, cioè quello di turno 3, quindi segno 1 e 2; in (1,1) è il giocatore di turno, cioè lo 1, ad aver perso, poiché non può muovere, quindi segno 2 e 3:

		numero di monete						
		0	1	2	3	4	5	6
mossa prec.	1	1 2	2 3					
	2	1 2						
	3	1 2						

2. Poi si deduce ricorsivamente chi ha la strategia vincente per gli stati che arrivano direttamente a quelli per i quali è stata già trovata (quindi sul numero di monete). Le regole di deduzione sono queste:
   a. se e solo se tra gli stati che possono essere raggiunti ve ne è almeno uno con strategia vincente per 3, allora inserisco 1, poiché è lo stesso giocatore;
   b. se tutti gli stati che possono essere raggiunti (in realtà sono al più due) riportano 1, allora segno 2, in altri termini, anche se il giocatore al secondo turno non decide la mossa, ovunque si finisca, esso ha poi una strategia vincente perché sarà il giocatore di turno 1;
   c. analogamente, se tutti gli stati che possono essere raggiunti riportano 2, allora segno 3
3. Appena si nota un blocco di stati con strategie assegnate ripetuto per un periodo almeno uguale alla profondità delle regole (cioè 3), sappiamo che si ripeteranno fino all'infinito.
4. Infine, per le strategie a inizio partita basta fare l'unione delle possibili strategie con p=1,2,3

Applicando la procedura, quello che si ottiene è:

		numero monete modulo 6						
		0	1	2	3	4	5	6
mossa prec.	1	1 2	2 3	2 3	1 3	1	1 2	1 2
	2	1 2	2 3	1 3	1 3	1	1 2	1 2
	3	1 2	2 3	1 3	1 3	1 2	1 2	2
inizio partita			2 3	1 3	1 3	1	1 2	1 2

Poiché $30 \equiv 6 \pmod 6$ con 30 monete la strategia vincente ce l'hanno sia il giocatore al primo turno che il giocatore al secondo turno.

Infine, è interessante notare che non esistono strategie di coalizione vere e proprie, tali cioè che due giocatori possano battere il terzo solo se si alleano. Tuttavia, in se $n \equiv 4 \pmod 6$, il giocatore al primo turno, che possiede la strategia vincente, con la prima mossa può decidere quale degli altri due potrà avere anch'esso una strategia vincente. Inoltre, in (n,3) n≡6 il primo giocatore, anche se non possiede una strategia vincente vorrà togliere due monete per giungere in (n,2) n≡4, da cui poi il secondo giocatore potrebbe favorirlo "regalandogli" la strategia vincente senza avere niente da perdere.

Infine la soluzione di ***Cid***, che si è dedicato alla matematica modulare:

<u>Analisi con due giocatori</u>

Vince sempre il primo giocatore se si parte con trenta monete.

La strategia vincente è la seguente:

Inizialmente il primo giocatore prende una moneta, in modo che le monete restanti al secondo giocatori siano uguali a: (un multiplo di 4) + 1

Ora tocca al secondo giocatore, se il secondo giocatore prende tre monete, il primo giocatore alla mossa successiva ne prende una in tal modo le monete restanti al secondo giocatori sono ancora uguali a: (un multiplo di 4) + 1

Se il secondo giocatore prende due monete, il primo giocatore alla mossa successiva ne prende tre, tocca quindi al secondo giocatore che può prendere o una moneta o due monete,

- se ne prende una, il primo giocatore ne prende due,
- se ne prende due, il primo giocatore ne prende una

Totale: 2 + 3 + (1 + 2) = 8. Quindi le monete restanti al secondo giocatori sono ancora uguali a: (un multiplo di 4) + 1.

Ripetendo questo procedimento (con l'aggiunta che se il secondo giocatore prende una moneta, il primo giocatore alla mossa successiva ne prende tre) si giunge o a far prendere l'ultima moneta al secondo giocatore (e quindi vince il primo) o a farlo restare con 5 monete.

Se il secondo giocatore resta con 5 monete:

- se ne prende una, il 1° giocatore ne prende tre e vince (in quanto il 2° giocatore resta con 1 moneta)
- se ne prende tre, il 1° giocatore ne prende una e vince (in quanto il 2° giocatore resta con 1 moneta)
- se ne prende due, il 1° giocatore ne prende tre e vince (in quanto il 2° giocatore resta con 0 monete)

> *In generale vince sempre il* 1° *giocatore se il mucchio iniziale è composto da un numero di monete che diviso per quattro fornisce un resto diverso da* 1
>
> Analisi con tre giocatori
>
> La situazione si complica in quanto bisogna tener conto di possibili alleanze tra gli altri due giocatori. In ogni caso, con 30 monete, chi gioca per secondo è sicuro di vincere.
>
> Dopo la prima mossa, il numero di monete rimaste per il secondo giocatore è un numero compreso tra 27 e 29
>
> - Se sono 29, ne prende tre in modo che restino 26 monete per il terzo giocatore
> - Se sono 28, ne prende tre in modo che restino 25 monete per il terzo giocatore
> - Se sono 27, ne prende due in modo che restino 25 monete per il terzo giocatore
>
> Il terzo giocatore si troverà quindi con 25 o 26 monete. Quando toccherà di nuovo al secondo giocatore:
>
> - se gli altri due hanno preso (1 + 2) monete ne prenderà 3
> - se gli altri due hanno preso (1 + 3) monete ne prenderà 2
> - se gli altri due hanno preso (2 + 3) monete ne prenderà 1
>
> Quindi ad ogni giro il mucchio calerà esattamente di 6 monete, si giungerà quindi ad un punto che il terzo giocatore si troverà con 1 o 2 monete.
>
> Se si trova con 1 moneta ha perso e gli altri due hanno vinto.
>
> Se si trova con 2 monete, ne prende una o due e il primo giocatore resta con 1 o 0 monete, in questo caso il 1° giocatore perde e gli altri due vincono.
>
> *In generale vince sempre il* 2° *giocatore, mentre degli altri due quello che perde è determinato dalle possibili alleanze tra gli altri due giocatori.*

E con questo ci aggiorniamo. È sempre più difficile prendere un paio di soluzioni da pubblicare, ma noi speriamo sempre che quelle scelte vi possano anche divertire.

Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Bene, visto quello che è successo con le carte e i giochini inventati da Alberto, forse è meglio se ricominciamo dai *basics*.

Prendiamo un mazzo di carte da 40, e "tagliamolo" mettendo la parte sopra sotto; avremo una carta visibile, della quale ci annotiamo il colore.

Adesso "tagliamolo" di nuovo, mettendo la parte sopra sotto; avremo una carta visibile di cui ci annotiamo il colore.

Scommettereste (*pre-facto*) che i due colori sono uguali?

> *Non vi conviene: visto che "tagliamo" e non "mescoliamo", la prima carta estratta* non può essere *la seconda carta estratta, quindi la scelta "stesso colore" ha una possibilità in meno. Le probabilità che le due carte siano dello stesso colore risultano quindi 18/39, meno di 1/2.*

6. Zugzwang!

6.1 "La mossa, Signor Sulu!"

Avevamo detto che non avremmo mai parlato di scacchi, e questa regola l'abbiamo già violata un paio di volte. Avevamo detto che non avremmo mai parlato di giochi non giocabili, ma a giudicare da alcuni che abbiamo presentato abbiamo pattinato sul confine più di una volta. Questa volta abbiamo intenzione di parlare di scacchi – non scacchi giocabili – non giocabili; o meglio, parlare di un gioco che esiste e, contemporaneamente, non esiste.

Dal titolo, dovreste averlo capito.

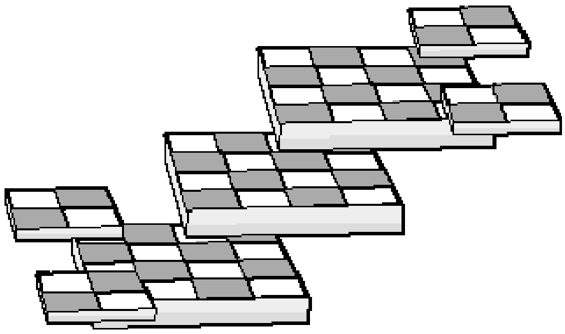
Uno dei Grandi Problemi Irrisolti della Teoria dei Giochi Giocabili è, al momento, lo stabilire se sia più complicato procurarsi una scacchiera per gli scacchi di Star Trek o imparare le regole del gioco; vorremmo offrire il nostro modesto contributo alla soluzione di questo problema spiegandovi come è fatta la scacchiera e cercando di recuperare le regole, così come sono indicate nello *Starfleet Technical Reference Manual*.

Per quanto riguarda la scacchiera, alcuni esemplari (estremamente insoddisfacenti, ci dicono) si trovano in vendita su eBay.

Dunque, la scacchiera.

13 *La scacchiera di Star Trek*

Nella foto a destra vedete l'originale; siete pregati di evitare i commenti estetici, tanto dopo ne useremo altre versioni.



14 *Schematizzazione della scacchiera*

Lavoriamo per schemi; qui sulla sinistra, vedete una schematizzazione della scacchiera a inizio gioco e senza i pezzi. Partiamo da questa, per l'analisi.

Ci sono *tre* scacchiere 4x4, fisse; inoltre, abbiamo *quattro* scacchiere 2x2 mobili; totale, *sette* piani (forse).

Per quanto riguarda la posizione iniziale, notiamo che le scacchiere mobili sono piazzate in modo tale da avere la casella interna corrispondente con la casella esterna della scacchiera fissa, e colore coincidente; per quanto riguarda la scacchiera fissa in alto, le scacchiere mobili sono al di sopra del primo fisso (costituendo quindi un livello superiore), mentre le altre due sono tra il terzo e il secondo fisso[12].

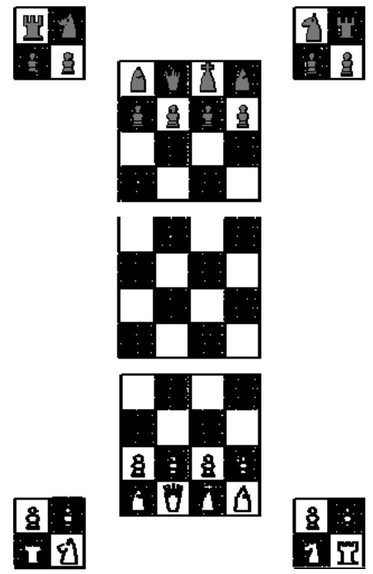
Ora, le scacchiere mobili, come dice il nome medesimo, possono muoversi; la regola, che contiene più informazioni di quanto sembri, è che le caselle nere devono sempre essere *sopra o sotto* delle caselle nere fisse, e ugualmente le caselle bianche devono sempre essere *sopra o sotto* delle caselle bianche fisse.

Bene, adesso proviamo a mettere a posto i pezzi; nella prossima immagine trovate la posizione iniziale. Per adesso teniamo i pezzi "classici", fermo restando che una volta

[12] Non ne siamo sicuri, ma ci pare che questo rappresenti un vantaggio per chi gioca "dal basso". Aspettate di vedere le regole, poi diteci la vostra opinione.

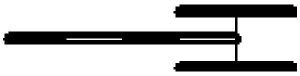
capito il gioco può essere divertente trovare dei nomi diversi e riprogettare i pezzi (nel caso, fateci sapere)[13].

Semplifichiamoci (forse…) la vita: chiamiamo le scacchiere mobili *livelli,* e le scacchiere fisse *scacchiere*.



15 *La posizione iniziale*

Ora, i livelli; ognuno di questi può trovarsi al di sopra o al di sotto di un qualsiasi angolo delle scacchiere; non solo, ma nulla impedisce che ci siano contemporaneamente due livelli al di sotto dello stesso angolo di scacchiera, come indicato nel disegno qui sotto.



Bene, crediamo a questo punto di aver chiarito che i livelli, essendo mobili, si possono muovere; non resta che chiarire come si muovano.

Le regole fondamentali sono tre:

1. Il livello che viene spostato è vuoto;
2. Il livello che viene spostato contiene un solo pedone del giocatore che muove il livello;
3. Il movimento del livello non genera uno scacco al re.

In realtà esiste un'ulteriore regola: il posto dove si muove il livello non deve essere occupato da un altro livello; la cosa, comunque, ci pare evidente (tipo mettere due pezzi nella stessa casella degli scacchi "normali") e quindi non la includiamo tra le regole da seguire.

La successiva domanda consiste evidentemente nel chiedersi dove vadano i livelli quando muovono; qui, secondo noi, ci sono dei veri colpi di genio (o generatori di mal di testa, fate voi).

1. Un livello può spostarsi dall'altra faccia della scacchiera; ossia, se si trovava sulla faccia sotto una data scacchiera può spostarsi sulla faccia sopra della medesima scacchiera.
2. Un livello può spostarsi su un angolo adiacente della stessa scacchiera; ossia, se un livello è sopra sul lato alto a sinistra di una certa scacchiera, può spostarsi sopra sul lato alto a destra o sopra sul lato basso a sinistra della medesima scacchiera.
3. Un livello può muoversi su un angolo adiacente della successiva scacchiera; ossia, se si trova sopra un angolo di una scacchiera, può muoversi sotto l'angolo corrispondente della scacchiera superiore o, se si trova sotto una scacchiera, può muoversi sopra il medesimo angolo della scacchiera inferiore; regola aggiuntiva, la scacchiera di arrivo in questo caso deve essere vuota.

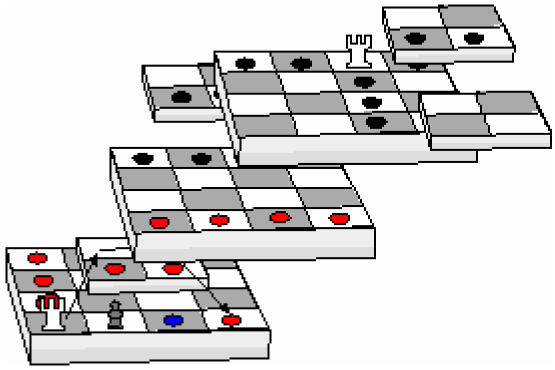
Complicato? Certo, altrimenti avremmo già costruito l'*Enterprise*. Aspettate a vedere come muovono i pezzi.

Buona notizia: i pezzi muovono come gli scacchi normali.

Cattiva notizia: ad ogni passo, un pezzo che si trovi su un certo livello o scacchiera può sfruttare le scacchiere o i livelli adiacenti per effettuare il movimento; se notate il fatto che le parole "livello" e "scacchiera" sono scambiate nella definizione, capite che ci vuole sempre uno dei due in mezzo per fare il movimento, ossia non potete saltare da

[13] Immagine rubata brutalmente al sito principe delle varianti scacchistiche: http://www.chessvariants.org.

scacchiera a scacchiera o da livello a livello; vi serve uno degli altri in mezzo. Comunque, se ad esempio avete un livello tra due scacchiere (o una scacchiera tra due livelli… no, lasciamo perdere) potete passare da scacchiera a scacchiera.



16 *Mosse di torre*

Per capirci, qualsiasi pezzo può “saltare”, se ha un livello/scacchiera a disposizione: guardate cosa combinano le Torri nel disegno qui di fianco: la torre sulla scacchiera bassa può saltare il pedone e andare in una qualsiasi casella blu o rossa[14]. Per quanto riguarda l’altra torre (sulla scacchiera alta), attenti che ci sono un paio di puntini invisibili sulla scacchiera intermedia.

Crediamo qui di avervi dato le notizie generali in grado di dissuadervi anche dal solo provarci, ma se qualcuno ha voglia di scrivere un manuale *completo* (per intenderci: cosa combinano i cavalli? E, a questo punto, mantengono la loro importanza per il poter “saltare”? Cosa posso fare di bello se due livelli sono allo stesso “livello”, o uno sopra e l’altro sotto ma nello stesso angolo di scacchiera?), garantiamo il nostro interesse. Gli appassionati, probabilmente, si accontenterebbero anche solo di una soluzione ingegneristicamente soddisfacente per muovere i livelli quando sopra c’è un pedone senza seminare il tutto per l’iperspazio.

7. Pagina 46

Il più piccolo

La cifra più significativa di ognuno dei tre numeri deve essere la più piccola possibile, quindi possiamo assumere che i tre numeri abbiano la forma[15]:

$$\overline{1Aa}, \overline{2Bb}, \overline{3Cc}$$

Vogliamo dimostrare che $A < B < C$ e che $a < b < c$; non solo, ma ognuna delle cifre a, b, c è maggiore di ognuna delle cifre A, B, C.

Supponiamo sia $A > B$; in questo caso deve essere $\overline{Aa} > \overline{Bb}$, e quindi:

$$\begin{aligned}\overline{1Aa} \cdot \overline{2Bb} - \overline{2Aa} \cdot \overline{1Bb} &= \left(100 + \overline{Aa}\right) \cdot \left(200 + \overline{Bb}\right) - \left(200 + \overline{Aa}\right) \cdot \left(100 + \overline{Bb}\right) \\ &= 100\left(\overline{Aa} - \overline{Bb}\right) > 0\end{aligned}$$

il che significa

$$\overline{1Bb} \cdot \overline{2Aa} \cdot \overline{3Cc} < \overline{1Aa} \cdot \overline{2Bb} \div \overline{3Cc},$$

Ossia, se $A > B$ il prodotto sulla destra non sarebbe il minore, come richiesto dalle condizioni del problema.

Supponendo sia $B > C$ si giunge, con lo stesso metodo, ad una contraddizione dello stesso tipo.

Supponiamo ora sia $a > b$; allora,

---

[14] “…e perché una è blu?” Perché il movimento all’inizio non ci convinceva, e volevamo attrarre la vostra attenzione su di lui.

[15] Come per noi usuale, la sopralineatura indica la composizione del numero; per esempio, $\overline{2Bb} = 2 \cdot 10^2 + B \cdot 10 + b$

$$\overline{1Aa}\cdot\overline{2Bb}-\overline{1Ab}\cdot\overline{1Ba}=\left(10\cdot\overline{1A}+a\right)\left(10\cdot\overline{2B}+b\right)-\left(10\cdot\overline{1A}+b\right)\left(10\cdot\overline{2B}+a\right)$$
$$=\left(10\cdot\overline{2B}-10\cdot\overline{1a}\right)\left(a-b\right)>0,$$

il che significa

$$\overline{1Ab}\cdot\overline{2Ba}\cdot\overline{3Cc}<\overline{1Aa}\cdot\overline{2Bb}\div\overline{3Cc},$$

che è anch'essa una contraddizione.

Supponendo sia $\underline{b<c}$ si giunge con lo stesso metodo ad una contraddizione dello stesso tipo.

Infine, supponiamo sia $\underline{C>a}$, o meglio imponiamo $C=a+x,\ x>0$.

Secondo la prima dimostrazione, C è la cifra più grande nella terna A, B, C; inoltre secondo la seconda dimostrazione a è la cifra più piccola della terna a, b, c. Quindi dovremmo avere:

$$\overline{1Aa}\cdot\overline{3Cc}-\overline{1Ac}\cdot\overline{3Ac}=\overline{1Aa}\cdot\left(\overline{3Ac}+10x\right)-\left(\overline{1Aa}+x\right)\cdot\overline{3Ac}$$
$$=x\left(10\cdot\overline{1Aa}-\overline{3Ac}\right)>0,$$

che porta alla contraddizione:

$$\overline{1Ac}\cdot\overline{2Bb}\cdot\overline{3ac}<\overline{1Aa}\cdot\overline{2Bb}\cdot\overline{3Cc}.$$

Da queste tre dimostrazioni segue che deve essere

$$A<B<C<a<b<c,$$

e quindi il prodotto cercato è composto come:

$$147\cdot 258\cdot 369.$$

Il più grande

Evidentemente, le cifre più grandi devono essere le cifre più significative di ognuno dei tre numeri, e quindi il prodotto può essere scritto nella forma:

$$\overline{9Aa}\cdot\overline{8Bb}\cdot\overline{7Cc}.$$

Utilizzando tecniche perfettamente identiche a quelle utilizzate nella prima parte, si prova facilmente che $A<B<C$ e che $a<b<c$; non solo, ma ognuna delle cifre a,b,c risulta minore delle cifre A,B,C, ossia deve essere:

$$a<b<c<A<B<C$$

e quindi il prodotto maggiore risulta essere:

$$941\cdot 852\cdot 763.$$

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Numeri Celibi

Domanda facile: in quante lingue sapete tradurre il titolo di questo pezzo?

Adesso arzigogoliamo un attimo, in modo da allontanare la risposta dal vostro campo visivo diretto (quello che permette la lettura veloce e il salto delle frasi assolutamente inutili come questa), anche perché come al solito la parola abbiamo intenzione di scriverla in corsivo, visto che trattasi di parola straniera e, almeno alla sua prima apparizione, corretta scrittura vuole si faccia in questo modo; tanto la risposta l'avete sbagliata, perché la conoscete in una lingua in più rispetto a quelle che avete detto, visto che in giapponese si dice *sudoku*; se ci pensate un attimo, la cosa è ragionevolmente logica, visto che in ogni riga, in ogni colonna e in ogni scatola ogni numero compare una volta sola, quindi è, effettivamente, celibe. Tra l'altro, se trovate un termine migliore di "scatola" per indicare il quadrato di tre per tre, ditecelo; come vi spiegheremo prima della fine, durante la scrittura di questo pezzo ci divertiremo a tradurre nel modo più strano possibile tutta una serie di parole gergali; esiste una *matematica* del sudoku, ma è stata sviluppata in terre anglofone e non ci risulta sia mai stata tradotta in italiano; quindi, una volta tanto, "facciamo matematica", almeno inventando i termini. Bene, la parola l'abbiamo nascosta abbastanza, quindi possiamo andare a capo.

Non vorremmo aver rovinato la sorpresa piazzando uno schema proprio nella prima pagina, andiamo ancora avanti ancora per un po' con gli arzigogoli. Il gioco, pur avendo un nome giapponese, nasce in Inghilterra (con successo ragionevolmente scarso) ed è inglese uno dei suoi massimi creatori (si chiama Michael Nepham: lo incontreremo di nuovo, prima della fine); se volete capire il motivo per cui un gioco del genere ha avuto un successo tale in Giappone da fargli attribuire il nome in quella lingua, provate a pensare un attimo quanto sia semplice fare uno schema di parole crociate in giapponese (questa è, secondo Rudy, una delle più belle battute dell'umorismo *british*: essendo umorismo british, va fatta notare altrimenti non se ne accorge nessuno). Tra l'altro, in inglese rispondeva al poco appetibile nome di *number crosswords*, e purtroppo il disamore per la matematica non è solo italiano: le ragioni dello scarso successo sono immediate; tant'è che l'inizio della presentazione delle regole del gioco su molti giornali che lo pubblicano quotidianamente è: "…non serve conoscere la matematica…".

Va detto che il conoscerne la matematica fa perdere il fascino al 96,72% dei giochi pubblicati[16]; anche per questo, visto che non consideriamo il gioco propriamente entusiasmante, ci affrettiamo a spiegarla.

Inventeremo un mucchio di termini in italiano, visto che il tutto lo hanno trattato in inglese; volendo trattare le cose in modo formale, iniziamo da una definizione che tutti conoscono.

Definizione 1: La soluzione di un sudoku prevede che ogni riga, ogni colonna e ogni scatola contenga tutti i numeri nell'insieme $\{1,2,\ldots,9\}$ e che ogni cella sia occupata da uno e da un solo numero.

…e, se guardate, c'è scritto tutto quello che serve. Adesso cominciamo a inventarci i nomi.

Definizione 2: Un *Insieme di Prelazione* (preemptive set) è composto da numeri dall'insieme $\{1,2,\ldots,9\}$ ed è un insieme di dimensione *m,* $2 \leq m \leq 9$, i cui elementi sono potenziali ed esclusivi occupanti di *m* celle, dove "esclusivi" significa che nessun numero

[16] Come avemmo a dire tempo fa, il 98,3875398469874698% delle statistiche millantano una precisione che in realtà non hanno.

che non sia membro dell'Insieme di Prelazione[17] può essere occupante potenziale di queste celle. Un Insieme di Prelazione si indica con la notazione:

$$\{[n_1, n_2, \ldots, n_m], [c(i_1, j_1), c(i_2, j_2), \ldots, c(i_m, j_m)]\},$$

dove $[n_1, n_2, \ldots, n_m]$ è l'insieme dei numeri appartenenti all'Insieme di Prelazione, mentre $[c(i_1, j_1), c(i_2, j_2), \ldots, c(i_m, j_m)]$ è l'insieme delle m celle in cui l'insieme $[n_1, n_2, \ldots, n_m]$ *o un suo sottoinsieme* compare in modo esclusivo.

La prossima domanda è: dove mettiamo l'Insieme di Prelazione; beh, in un Campo.

Definizione 3: Il *Campo* (range) di un Insieme di Prelazione è una riga, una colonna o una scatola in cui si trovano tutte le celle dell'Insieme di Prelazione.

Se preferite una definizione più operativa, l'Insieme di Prelazione è l'insieme di m numeri distinti presi dall'insieme $\{1,2,\ldots,9\}$ e di m celle occupate in modo esclusivo dai numeri dati *o da un loro sottoinsieme*, con la proprietà che la distribuzione degli m numeri nelle m celle non è nota nel momento della scoperta dell'Insieme di Prelazione.

Poco chiaro? Vero, poco chiaro. Prima di vedere un esempio, definiamo un altro termine: si dice *Segnatura* (markup) di una cella l'insieme di tutti i possibili numeri che possono occupare quella cella.

Allora, l'esempio: prendiamo un pezzo di Sudoku con la sua Segnatura e cerchiamo qualche Insieme di Prelazione, trovate il pezzetto nel disegno qui a fianco (si capisce? I numeri grossi sono dati all'inizio, quelli piccoli sono le Segnature, quelli fuori dal bordo sono coordinate, una doppia linea su una cifra della Segnatura significa che è cancellata).

	1	2	3
7	3459	459	6
8	23478	1	~~2~~34~~8~~
9	234579	24579	~~2~~345

Si vede che esiste un Insieme di Prelazione (quadruplo):

$$\{[3,4,5,9], [c(7,1), c(7,2), c(8,3), c(9,3)]\}.$$

Se guardate, vedete che la cifra "8" che compare nella Segnatura di $c(8,1)$ è un *Singleton*[18], e quindi può essere solo in quella cella e quindi in quella cella non ci potranno essere i numeri dell'Insieme di Prelazione; ora, eliminando i numeri dell'Insieme di Prelazione quadruplo presenti in $c(8,1)$ (dove scriviamo "8"), si vede che possiamo costruire l'Insieme di Prelazione:

$$\{[2,7], [c(9,1), c(9,2)]\},$$

il che ci trasforma la quadrupla in una coppia; vedete, qui sotto, il risultato dal punto di vista delle Segnature, e scusate se è poco.

	1	2	3
7	3459	459	6
8	8 ~~2347~~8	1	~~2~~34~~8~~
9	2~~345~~7~~9~~	2~~45~~7~~9~~	~~2~~345

Ormai, il nostro apparato è abbastanza robusto da resistere all'enunciazione di un teorema:

Teorema 1: Sia X un Insieme di Prelazione in una Segnatura; allora qualsiasi numero in X che appaia in una Segnatura di celle non in X sul Campo di X non può far parte della soluzione.

Non stiamo a dimostrarlo, anche se è ragionevolmente semplice (l'applicazione del Principio delle Piccionaia, che qui la fa da padrone, porta

[17] Siamo debitori all'Avvocato Preferito di Rudy per la dimostrazione che questa traduzione è molto meno stupida di quanto sembra.

[18] Questo non lo traduciamo: si usa anche nel Bridge.

rapidamente ad un assurdo considerando l'ipotesi inversa); ci limitiamo a far notare che la letteratura del sudoku (ad esempio il *Nepham*; come dicevamo uno dei massimi esperti) segue metodi sostanzialmente equivalenti quando parla delle "coppie nascoste" o delle "triplette nascoste"; queste non sono altro che analisi su Segnature parziali.

Il prossimo teorema, comunque, rappresenta la base sulla quale dimostrare che l'Insieme di Prelazione è lo strumento di base nella risoluzione del Sudoku:

Teorema 2: Esiste sempre un Insieme di Prelazione che può essere utilizzato per rivelare un insieme nascosto, il che trasforma l'insieme nascosto in un Insieme di Prelazione (tranne nel caso di un Singleton).

Gli insiemi nascosti (in particolare i Singleton e le coppie) sono forse più utili per gli umani, in quanto è molto più facile trovarli piuttosto che individuare un Insieme di Prelazione, ma dal punto di vista strettamente matematico quest'ultimo è enormemente più potente.

	3	9	5					
			8				7	
				1		9		4
1			4					3
		7				8	6	
		6	7		8	2		
	1			9				5
					1			8

Vediamo un esempio: per non rovinare il gioco agli appassionati, prima vi diamo il gioco da solo; se volete provate a risolverlo, qui di seguito applicheremo il nostro metodo.

Quello che vedete qui di fianco è piuttosto noto in letteratura: senza essere *il più difficile* conosciuto, il suo creatore lo bolla con un "*Beware! Very Challenging!*". Per coloro che apprezzano le catalogazioni tipo quelle dell'archeologia, è anche noto come lo *Shortz 301*, dal nome dell'autore e dal numero d'ordine di comparizione nel libro scritto da Will(iam Shortz).

Per prima cosa, come normale per il sudoku, cerchiamo di riempire qualche casella; il metodo più semplice, come al solito, consiste nel partire dal numero che compare già scritto con la maggior frequenza, cercare una scatola dove questo numero non compare e cercare di inserirlo, trovando (se esiste) l'unica cella in cui può trovarsi o, come si dice in gergo, dove è *forzato*; quindi si passa al numero con frequenza immediatamente inferiore e così via.

Applicare questo metodo a Shortz 301 significa trovare solo due numeri; infatti, risulta abbastanza semplice scoprire che $c(2,3)=1$ e che $c(2,6)=9$; scriviamo con ragionevole sicurezza questi numeri nella nostra tabella (li mettiamo in rosso), e poi calcoliamo le Segnature delle celle rimaste bianche; è un lavoro lungo, ma si può fare; provateci prima di passare alla pagina successiva perché Rudy potrebbe benissimo introdurre qualche errore.

Nella prossima tabella vedete le Segnature delle celle; controllando la griglia, si vede che esiste un Insieme di Prelazione:

$$\{[1,2,6],[c(1,7),c(1,9),c(2,9)]\}; \qquad \textbf{[1]}$$

nella scatola 3 (quella in alto a destra); quindi, barrando tutti gli 1, 2 e 6 non nell'insieme **[1]**, all'interno della scatola si può porre $c(1,8)=8$.

24678	3	9	5	2467	2467	16	128	126
2456	2456	1	8	2346	9	356	7	26
25676	25678	258	236	1	2367	9	2358	4
1	25689	258	4	25678	2567	57	259	3
2345689	245689	23458	12369	235678	23567	1457	12459	1279
23459	2459	7	1239	235	235	8	6	129
3459	459	6	7	345	8	2	1349	19
23478	1	2345	236	9	2346	3467	34	5
234579	24579	2345	236	23456	1	3467	349	8

Per quelli che vanno sempre a guardare come andrà a finire, facciamo notare che metteremo un pedice "01" al nostro otto per indicare che è il primo che abbiamo piazzato; andremo avanti in questo modo per tutti i vari passaggi.

Non solo, ma il segnare "8" in questa casella ci permette di barrare tutti i numeri diversi da 8 nella stessa casella e tutti gli 8 nella stessa riga, colonna e scatola.

Notiamo ora che nella Segnatura della colonna 9 c'è un Singleton nascosto (un 7) in $c(5,9)$; quindi, barriamo tutto tranne il 7 in questa casella e lo inseriamo; questo ci permette di escludere i 7 in $c(4,7), c(5,5), c(5,6), c(5,7)$.

$c(4,7)=5_{03}, c(2,7)=3_{04}, c(3,8)=5_{05}$ sono immediate; il prossimo passo un po' meno, in quanto bisogna notare che $\{[2,3,6],[c(3,4),c(8,4),c(9,4)]\}$ è un Insieme di Prelazione per quanto riguarda la colonna 4; questo significa che possiamo cancellare i valori 2, 3 e 6 dalle altre celle di quella colonna; questa cancellazione genera la Coppia di Prelazione $[1,9]$ nella colonna 4 e nella scatola 5: siccome però non abbiamo degli 1 o dei 9 da cancellare nella scatola 5, questo è abbastanza inutile per il procedere della soluzione.

Esiste inoltre una Coppia di Prelazione $\{[2,8],[c(3,3),c(4,3)]\}$, il che origina nella scatola 7 la Quadrupla di Prelazione $\{[3,4,5,9],[c(7,1),c(7,2),c(8,3),c(9,3)]\}$.

Non solo, ma abbiamo:

La Coppia di Prelazione $\{[3,4],[c(8,3),c(8,8)]\}$ in riga 8;

La Coppia di Prelazione $\{[2,7],[c(9,1),c(9,2)]\}$ in riga 9;

La Coppia di Prelazione $\{[2,6],[c(8,4),c(8,6)]\}$ in riga 8 e in scatola 8.

Questo significa che abbiamo un Singleton (un 7) in riga 8, più precisamente nella Segnatura di $c(8,7)$; quindi, $c(8,7)=7_{06}$

Da questo momento, nello schema generale, cessiamo di cancellare i numeri nelle segnature, per lasciare un minimo chiaro il tutto.

Si vedono facilmente a questo punto due Singleton: (8_{07}) nella Segnatura di $c(8,1)$ e (3_{08}) in quella di $c(9,4)$; non solo, ma la Coppia di Prelazione $\{[4,5],[c(9,3),c(9,5)]\}$ implica evidentemente le $c(9,7)=6_{09}, c(9,8)=9_{10}$.

Il resto dovreste farcela da soli, visto che resta un sudoku facile; avete la soluzione, in cronologica, nella prossima pagina.

Semplice, no?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	6_{30} 2467~~8~~	3	9	5	7_{29} 2467	4_{27} 2467	1_{17} 16	8_{01} ~~12~~8	2_{31} 126
2	5_{50} 2456	4_{51} 2456	1	8	2_{28} 2346	9	3_{04} 3~~56~~	7	6_{32} 26
3	7_{40} 25676	8_{39} 25678	2_{20} 258	6_{21} 236	1	3_{18} 2367	9	5_{05} ~~23~~5~~8~~	4
4	1	9_{26} 25689	8_{19} 258	4	6_{25} 25678	7_{24} 2567	5_{03} 5~~7~~	2_{12} 259	3
5	3_{56} 2345689	6_{41} 245689	5_{46} 23458	9_{33} 1~~236~~9	2_{35} 2356~~7~~8	8_{47} 2356~~7~~	4_{14} 145~~7~~	1_{13} 12459	7_{02} ~~12~~7~~9~~
6	4_{49} 23459	2_{36} 2459	7	1_{16} 1~~23~~9	3_{34} 235	5_{48} 235	8	6	9_{15} 129
7	9_{44} 3459	5_{52} 459	6	7	4_{53} 345	8	2	3_{42} 1349	1_{11} 19
8	8_{07} 234~~7~~8	1	3_{45} 2345	2_{22} 236	9	6_{23} 2346	7_{06} ~~346~~7	4_{43} 34	5
9	2_{38} 234579	7_{37} 24579	4_{55} 2345	3_{08} 236	5_{54} 23456	1	6_{09} 346~~7~~	9_{10} 349	8

Con questo non vogliamo dire che tutto vada allegro e tranquillo sul deterministico; ogni tanto, in particolare per i più difficili, qualche "scelta casuale" deve essere fatta, ma forse prima è meglio definire cosa intendiamo con questo termine, nel nostro sistema:

Condizione 1: Quando nessun Insieme di Prelazione in una riga, colonna o scatola può essere diviso in Insiemi di Prelazione più piccoli, allora una cella vuota deve essere scelta e un valore dalla sua Segnatura viene scelto casualmente e inserito; si procede sin quando non si incontra una Violazione.

…che, ovviamente, deve essere definita:

Definizione 4: Si definisce Violazione il fatto che uno stesso numero compaia due volte in una riga, in una colonna o in una scatola.

E il momento della violazione, evidentemente, è quello nel quale bisogna innestare la Retromarcia (backtracking).

Bene, detto tutto. Adesso, gli amanti del Sudoku probabilmente saranno arrabbiatissimi per il fatto che gli abbiamo rovinato il divertimento, risolvendo quello qui sopra; per renderli felici, ne pubblichiamo un paio alla fine della rivista.

Il primo è stato presentato al Campionato Mondiale di Praga del 2007; Tomas Snyder (che ha vinto il campionato) lo ha risolto in cinque minuti: l'algoritmo di cui sopra ci mette un'ora, ma si accorge di una strana caratteristica; infatti, ha (almeno) *due soluzioni*.

Il secondo probabilmente lo conoscete: è il famoso *Sudoku Diabolico di Nepham*, considerato, per il momento, il più difficile mai presentato. Qui, le scelte casuali si sprecano

Come si dice "…Auguri…" in giapponese? Con una certa qual connotazione ironica, possibilmente.

	5			2			3	
2					1	7		8
4		7	6					
					5			
5	2						4	7
			7					
					3	5		4
3		6	5					1
	9			7			6	

	9		7			8	6	
	3	1			5		2	
8		6						
		7		5				6
			3		7			
5				1		7		
						1		9
	2		6			3	5	
	5	4			8		7	

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms