Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 123 – Aprile 2009 – Anno Undicesimo

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM122 ha diffuso 2308 copie e il 30/03/2009 per Google eravamo in 26'600 pagine.

Probabilmente seccato dal fatto che *Tilted Twister* (cfr la copertina del mese scorso) riesca a risolvere il cubo facendo le capriole, il buon ***Erno Rubik*** ne ha inventata un'altra: il 5 febbraio di quest'anno, a Norimberga, ha presentato un nuovo gioco. Esprimeremo la nostra gratitudine a chiunque ci spieghi come funziona, ma potremmo anche offrire un paio di birre a chi ci spiega come si risolve.

ULTIME NOTIZIE: Sembra non sia una gran cosa, solo una complicazione sui vecchi labirinti con le sferette d'acciaio da tenere al posto giusto. ***Zar***, in compenso, fornisce l'immagine di un'*interessante estensione* del cubo (***Zar*** usa altri termini, ma non li citiamo…).

1. Padri e Figli

La matematica si distingue da tutte le altre scienze, a parte l'etica, per non avere alcun bisogno dell'etica. Ogni altra scienza, anche la logica, rischia, specialmente nei suoi primi stadi, di evaporare in un vacuo nonsenso, degenerando, come dicono in Germania, in una sottile ragnatela tirata con fili che hanno la stessa consistenza dei sogni. Non c'è nessun rischio del genere per la matematica pura, perché questo è esattamente ciò che la matematica deve essere.
(C.S. Peirce)

Signori,
questa è sicuramente vera, è sicuramente paradossale;
non possiamo capirla, e non sappiamo cosa significhi.
Ma l'abbiamo provata, e pertanto sappiamo che è vera.
(B. Peirce)

Megan Gale ha gli occhi verdi perché faceva la pubblicità ad un'azienda che aveva il logo verde.

La frase che apre questo articolo contiene informazioni, enuncia affermazioni, e presuppone conoscenze pregresse. Tra queste c'è l'identificazione del soggetto: chi legge potrebbe benissimo non associare il nome "Megan Gale" a nessun volto conosciuto, nel qual caso la frase sarebbe considerata a mero livello d'inventario informativo, supponendo di prenderla per vera: esiste qualcuno, probabilmente di sesso femminile[1], che ha gli occhi verdi e che faceva la pubblicità a qualcosa di verde. Possibile estrarre altro dalla frase? Forse sì, forse si possono fare ancora delle considerazioni formali, ma per il momento non prendiamole in considerazione.


1 *Megan Gale*

Se invece chi legge conosce tutti i presupposti informativi l'affermazione assume un aspetto diverso; conoscendo il volto della modella australiana è facile ricordare che i suoi occhi sono effettivamente verdi; avendo visto a suo tempo i primi spot con la fanciulla in questione, è possibile ricordarsi che l'azienda pubblicizzata era la Omnitel, e che il colore caratteristico dell'azienda era effettivamente il verde. Anzi, un osservatore dotato di buona memoria cromatica potrebbe anche ricordare che agli albori del mercato italiano della telefonia mobile si combatteva una sorta di silenziosa battaglia pubblicitaria colorata, perché il verde-Omnitel era naturalmente schierato contro il rosso-Telecom Italia, e sia i manifesti murali che gli spot televisivi erano cromaticamente carichi e significativi: curiosamente, la battaglia colorata è continuata con Wind, che si lasciava connotare dall'arancione, ma ha subito una pausa con Tre, che, forse non a caso, ha puntato su un logo ben definito dal punto di vista formale ma assolutamente libero da vincoli nell'aspetto cromatico.

La battaglia sul fronte dei colori tra i due contendenti principali ha perso poi ragione d'esistere quando la verde e italica Omnitel è stata fatta confluire nella internazionale

[1] Il "probabilmente" presume che l'ignaro lettore sappia almeno che Megan è un nome femminile, o quantomeno che, alla faccia della parità, è ancora un po' più probabile che siano usate belle ragazze anzichè bei ragazzi per fare promozione di prodotti.

Vodafone, che ha come colore aziendale lo stesso rosso della sua maggiore concorrente italiana. A quel punto, i verdi occhi di Megan Gale sono rimasti verdi e bellissimi, ma meno incisivi dal punto di vista dell'identificazione del prodotto commerciale.

2 *Marchi di telefonia e colori*

A prescindere dalle strategie di marketing telefonico, è indubbio che, possedendo tutte le informazioni al contorno, la frase perde il carattere prevalentemente *informativo* che la caratterizzava nel giudizio del lettore ignaro dell'argomento, e assume un carattere assertivo: in altre parole, viene caratterizzata non tanto dalle informazioni *atomiche* "Megan Gale ha gli occhi verdi" e "faceva la pubblicità ad una azienda dal logo verde", quanto dal loro connettore, da quel "perché" che le unisce. In realtà, la stranezza di un connettore causale in questo campo è evidente: gli esseri umani hanno occhi di un determinato colore per cause che Mendel ha ben spiegato un secolo e mezzo fa, non per ragioni commerciali. E questa perplessità formale poteva essere sollevata anche dal primo lettore, quello che non conosceva né gli occhi di Megan né il verde Omnitel.

È però interessante costatare che in qualche modo è comunque possibile riabilitare la frase in questione, restituendole una sorta di possibile verità oggettiva. E si può fare in diversi modi: ad esempio, cambiando il contesto o inserendo la frase in una narrazione dai presupposti diversi. Se Megan Gale avesse in realtà occhi marroni (o se stessimo scrivendo un racconto in cui le cose stanno così) potrebbe essere stata convinta a mettere lenti a contatto colorate di verde per omogeneità col prodotto da reclamizzare, e a non toglierle più vita natural durante. In questo caso, la realtà (o la narrazione) sarebbe certo un po' angosciosa e paradossale, ma la frase che la descrive diventerebbe del tutto legittima.

In maniera assai più tenue e naturale, senza bisogno d'immaginazione o stravolgimenti di realtà, la frase potrebbe diventare legittima semplicemente facendola precedere dalla reggente "Mi ricordo che…". Infatti, l'affermazione "mi ricordo che Megan Gale ha gli occhi verdi perché ha fatto la pubblicità ad un'azienda che aveva il logo verde" non è in nessun modo contestabile; e non perché esprime una affermazione soggettiva, ma perché è formalmente corretta anche dal punto di vista del connettivo causale. Ovviamente, il trucco c'è: il "perché" prima metteva in relazione le due frasi atomiche sul colore degli occhi e il colore del logo, adesso invece giustifica tutt'altra cosa, ovvero la ragione per la quale chi fa l'affermazione si ricorda del colore degli occhi della fanciulla.

È evidente che, fino a questo punto, non si è fatto altro che giocare un po' con le parole, le frasi e la sintassi: per quanto corretta, la dissezione della frase d'apertura non è poi troppo diversa dalla vecchia barzelletta in cui la maestra di Pierino spiega alla classe che non si può mai dire "più maggiore" perché è sbagliato, e Pierino controbatte: "Non è vero: mio zio non è *più maggiore* perché proprio ieri è diventato tenente colonnello". Ciò non di meno, è importante ogni tanto tornare a puntare l'attenzione sulle regole del discorso, perché non è un caso che in esso, nel λόγος, si ritrovi la stessa radice che sta alla base della *logica*.

Le relazioni tra matematica e logica sono sempre state al tempo stesso strettissime e sfuggenti: del tentativo di Frege e altri di ricondurre la matematica a pura logica e degli sconvolgimenti portati dal paradosso di Russell prima e del Teorema di Gödel poi ci è già capitato di parlare[2], e della storia dei sillogismi dai greci ai moderni anche[3]; ma naturalmente siamo ancora ben lontani dall'aver anche solo nominato tutti i possibili impianti logici. Anche perché, come spesso accade, sono le parti più sfumate, meno definite, a essere più sorprendenti, anche se meno rigorose. Se prendiamo ad esempio il classico sillogismo aristotelico:

- Tutte le donne con gli occhi verdi sono belle
- Megan Gale è una donna con gli occhi verdi
- Megan Gale è bella

(d'accordo, forse Aristotele ha usato soggetti ed attributi diversi, ma il principio è assolutamente lo stesso), da una *premessa generale* (la mortalità degli uomini, o la bellezza delle donne con gli occhi verdi) e da *una particolare* (gli occhi verdi di Megan, o l'umanità di Socrate) si giunge ad una *conclusione* inevitabile (la mortalità di Socrate, la bellezza di Megan Gale). Come riconoscono anche gli studenti più svogliati, la cosa meno piacevole di questo scolastico sillogismo è la sua quasi-banalità: le conclusioni cui giunge sono sempre esattissime e necessarie, ma tutto sommato così naturali ed evidenti che è raro trovarlo realmente utile, in pratica: è una dissezione in passi logici di un ragionamento talmente istantaneo da essere scontato, cosa che rende l'analisi non particolarmente esaltante[4]. La cosa più piacevole, invece, è il constatare ancora una volta la dipendenza da una sorta di assiomi anche nei processi logici: nell'esempio classico la premessa maggiore "*tutti gli uomini sono mortali*" è indubbiamente vera, ma nel nostro esempio rivisitato l'affermazione che "*tutte le donne con gli occhi verdi sono belle*" è, se non proprio falsa, quantomeno fortemente opinabile. Ciò non di meno, se si accettano le premesse bisogna per forza accettare anche la conclusione: e da qui nasce probabilmente l'assidua frequentazione tra il sostantivo "logica" e l'aggettivo "stringente".

A voler vedere la fatica di Aristotele sotto un altro punto di vista, si potrebbe parlare non più di premesse maggiori, premesse minori e conclusioni, ma piuttosto di regole, casi e risultati. A prima vista, la cosa può sembrare solo un rimescolamento di terminologia, senza nulla cambiare al solito esempio didascalico:

- *Regola:* Tutte le donne con gli occhi verdi sono belle
- *Caso:* Megan Gale è una donna con gli occhi verdi
- *Risultato:* Megan Gale è bella

Però la nuova terminologia aiuta a definire il flusso del ragionamento: in particolare, questo procedere piano e sicuro dalla regola al risultato attraverso il caso è esattamente ciò che caratterizza il processo *deduttivo*. E la deduzione è l'arma autentica, rigorosa dei processi matematici. È però possibile adesso cambiare l'ordine del flusso logico, e cercare di scoprire cosa succede:

- *Caso:* Megan Gale è una donna con gli occhi verdi
- *Risultato:* Megan Gale è bella
- *Regola:* Tutte le donne con gli occhi verdi sono belle

Prima di tutto, è bene controllare le frasi e assicurarsi che siano esattamente le stesse della situazione precedente: e così è infatti, con tanto di identità anche delle etichette; però la sensazione che si riceve dalla triplice sentenza è adesso radicalmente diversa. Partire dal caso per giungere ad una regola attraverso un risultato è in qualche modo imbarazzante; e l'imbarazzo non discende da una sensazione di *falsità*, quanto da una

[2] Ad esempio nel compleanno di Russell: "*Nemesi*", RM052, Maggio 2003; o in quello di Gödel: "*Assolutamente e completamente determinato*", RM087, Aprile 2006; ma non solo.

[3] Ad esempio, nei Paraphernalia dei numeri RM041 e RM042, Giugno e Luglio 2002, "*Da Aristotele a Lewis Carroll*"; ma non solo.

[4] In realtà, esistono sillogismi ben più complessi e meno banali, ma per questo rimandiamo ad articoli scritti da penne migliori in zone diverse di questa rivista Cfr. nota precedente, imperlappunto.

sorta di *non-necessarietà*. La *regola* cui si arriva non è realmente necessaria: potrebbe essere vera, ma potrebbe anche non esserlo, il flusso non genera quindi una conclusione rigorosa. A dire il vero, questa sensazione è amplificata dall'esempio che è stato scelto, perché la regola alla quale si giunge non è comunemente considerata vera. Se però si fosse usato l'esempio:

- *Caso:* Zero è un numero intero
- *Risultato:* Zero ha un successore
- *Regola:* Tutti i numeri interi hanno un successore

Il senso non sarebbe cambiato, ma la sensazione della normalità del procedere forse sì. Il procedere da caso a risultato a regola è infatti caratteristico dell'*induzione*, processo di cui la matematica è costretta talvolta a far uso, anche se lo fa sempre con estrema fatica. Il punto è che l'induzione non è rigorosa, e in ultima analisi si basa sulla constatazione dell'assenza di controesempi. Una volta verificato che qualsiasi numero intero (cosa che, tra l'altro, implica la necessità di ripetere la tripletta di considerazioni induttiva su molti casi, senza accontentarsi dello zero) che si riesca ad immaginare ha un successore, si conclude che tutti i numeri interi hanno un successore: ma questa inferenza è solo ragionevole, non necessaria. Ed è per questo che l'induzione è sempre vista con un po' di malanimo, in matematica; ma è per la stessa ragione che i processi induttivi sono di solito più piacevoli di quelli deduttivi. Innanzitutto, partire da una serie di casi particolari per giungere ad una regola generale è un accrescimento di conoscenza dal rendimento assai maggiore del contrario. Poi, una deduzione non fatta è sempre una specie di errore, perché il risultato della deduzione è sempre pronto, presente, basta tirarlo fuori dalle premesse.; viceversa, una induzione ha sempre presente un'alea, una dose di rischio, e quindi di coraggio. Per questo, quando va a buon fine, è particolarmente gratificante, con buona pace del fatto che rimanga comunque sempre non garantita dal rigore.

In ogni caso, deduzione e induzione sono da sempre armi ben chiare e definite nell'arsenale del logico. Cosa che non si può dire, invece, della consorella che governa il terzo tipo di flusso logico, quello che dalla regola passa al risultato per giungere al caso:

- *Regola:* Tutte le donne con gli occhi verdi sono belle
- *Risultato:* Megan Gale è bella
- *Caso:* Megan Gale è una donna con gli occhi verdi

Questo tipo di inferenza si chiama *abduzione*[5], ed è verosimilmente la più inquietante. Al pari dell'induzione è priva di rigore, cioè arriva a conclusioni non strettamente necessarie, al più solamente probabili; per di più, ha un aspetto generale insolito: dà la sensazione di essere un ciclo di deduzione nel quale si sia fatto l'errore di invertire le ultime due sentenze. Ed è infatti proprio così: la differenza è proprio nell'anticipazione del risultato rispetto al caso, ovvero il tirare una conclusione su un caso specifico a partire da una regola generale; ma in maniera indiretta, trasversale. Eppure, il processo abduttivo è uno dei più frequenti, e verosimilmente uno dei più fecondi, perché al pari dell'induzione (e a differenza della deduzione) genera un'ipotesi suscettibile di conferma, e quindi propone un arricchimento di conoscenza.

Per quanto già introdotta dal solito Aristotele, l'abduzione è stata riabilitata in tempi moderni e portata in palmo di mano da Charles Sanders Peirce, uno tra i maggiori logici americani del XIX secolo. Nel processo abduttivo Peirce vedeva infatti il meccanismo originario delle scoperte scientifiche, che di solito non procedono per deduzione (perché normalmente la deduzione è automatica, e quindi "completa" una teoria, non la "scopre") né per induzione (per la rarità delle applicazioni induttive dal particolare al generale). Se

[5] Di gran parte delle informazioni alla base di questa parte siamo debitori, come spessissimo accade, a Wikipedia. Altrettanto inevitabilmente, le informazioni sulla biografia dei protagonisti arrivano in gran parte dal sito fondamentale delle biografie matematiche, quello della scozzese Università St.Andrews. Le foto di Megan Gale e i logo telefonici, invece, arrivano dalla rete, saranno probabilmente coperte da copyright e ci scusiamo con i proprietari dei diritti, se ce ne sono. E siamo pronti a scusarci e a ringraziare direttamente anche Megan, se lei volesse sgridarci di persona.

la deduzione produce una tesi, l'abduzione genera invece solo un'ipotesi: se davvero tutte le donne con gli occhi verdi sono belle e appurato che Megan Gale è bella, si può ragionevolmente ipotizzare che Megan Gale abbia gli occhi verdi: ma se si scoprisse poi che li ha in realtà marroni non cadremmo in un paradosso, ma solo nella falsificazione dell'ipotesi. Anche se debole, l'abduzione sembra essere il metodo di inferenza proprio degli scienziati, quantomeno di quelli che devono confrontarsi con la natura e verificare sperimentalmente le proprie ipotesi.


3 *Charles Sanders Peirce*

Charles Sanders Peirce nacque il 10 Settembre[6] 1839 a Cambridge; ma non stiamo parlando della celebre cittadina inglese che ospita la celebre università antagonista di Oxford. La Cambridge di Charles è quella del Massachusetts, USA. Suo padre era uno degli scienziati più famosi d'America, e il clima scientifico che si respirava nella sua casa formò lo humus necessario a farlo diventare un autentico bambino prodigio. Leggeva i testi universitari di logica a dodici anni, e la *"Critica della Ragion Pura"* di Kant a tredici. Come talvolta accade, l'essere un bambino prodigio e un'intelligenza particolarmente brillante non lo aiutò particolarmente nella carriera scolastica: abituato fin da piccolissimo a coltivare indipendenza di pensiero e libertà di giudizio, si trovò poco a suo agio con i rapporti sociali e formali delle scuole statunitensi. Ciò non gli impedì comunque di laurearsi poco più che ventenne. I suoi studi furono dapprima indirizzati alle scienze pure: suo padre era stato incaricato di seguire il progetto dello *United States Coast Survey*, che mirava tra l'altro alla determinazione della longitudine, e l'influenza paterna lo portò a contatto precipuamente con studi di matematica e astronomia. Nel 1861 entrò ad Harvard, per la precisione nella Lawrence Scientific School, il primo college universitario americano per la formazione scientifica di alto livello, che suo padre aveva contribuito a creare; qui, come lettore, cominciò a dare le sue prime lezioni di Epistemologia e Logica della Scienza. Pur continuando a tener lezioni all'università, e anche dopo essere stato eletto nell'Accademia Americana di Arti e Scienze, Charles continuò sempre il suo lavoro al Coast Survey, al quale era stato introdotto tanti anni prima dal genitore. Del resto, si trattava di un compito attinente ai suoi interessi: aveva l'incarico di misurare sperimentalmente la forza di gravità in vari punti degli USA e all'estero, oltre che di determinare con esattezza la forma della Terra.

Gli interessi che coltivava erano moltissimi: non è facile capire se i contributi principali di Charles Sanders Peirce siano da annoverare tra la logica, la filosofia o la matematica: entrato a far parte del corpo docente della John Hopkins University nel 1879, quando a capo del dipartimento di matematica c'era Sylvester[7], passò un fecondo periodo di ricerca in cui si interesso profondamente di topologia e soprattutto del celebre problema dei Quattro Colori. Ma studiò anche il lavoro del padre sull'algebra commutativa, lavorò sulla teoria degli insiemi e sulla logica matematica. È considerato il fondatore della corrente filosofica del pragmatismo, e stupisce che trovasse il tempo di andare effettivamente di persona in Europa o addirittura nel Mar Artico, per dirigere le missioni del Coast Survey.

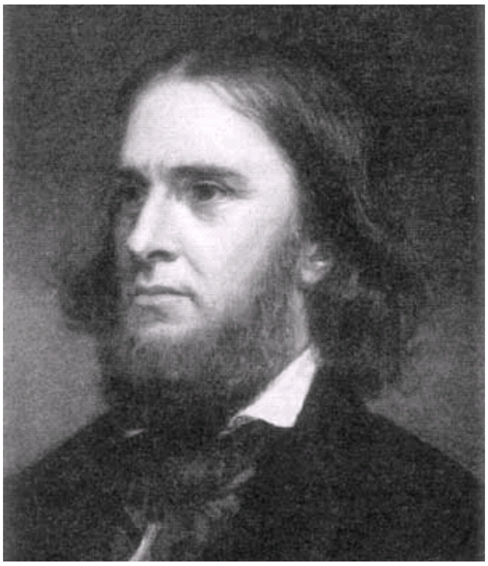
Non fu troppo fortunato, dal punto di vista della vita privata: proprio in Europa si innamorò d'una zingara francese, Juliette, e giunse a divorziare dalla sua prima moglie.

[6] Settembre? O perbacco! Allora non è lui il protagonista di questa storia. Anche se C.S. Peirce è morto in Aprile, i compleanni di RM festeggiano solo le date di nascita, non di morte.

[7] Di lui si parla in RM104, "*La Musica della Ragione*", Settembre 2007.

Erano periodi in cui un professore universitario era tenuto a mantenere una vita privata conforme alla morale dell'epoca, e questo suo convivere con Juliette prima ancora del divorzio gli costò la cattedra. Poco dopo, perse anche il lavoro al Coast Survey, perché si rifiutò di portare modifiche sostanziali ai rapporti che aveva presentato. Juliette nel frattempo era costantemente malata, e in pratica Charles si ritirò con lei nella tenuta ereditata dalla madre, in Pennsylvania.

Il suo frequentare sia la matematica sia la logica lo portò ad una visione integrata di entrambe le scienze: celebre è la sua frase "*la matematica è puramente teorica: l'unica cosa che produce sono proposizioni condizionate*", che ben si accoppia con l'altra sua massima "*il logico studia la scienza che si occupa di inferire conclusioni; il matematico studia la scienza che si occupa di inferire conclusioni necessarie*". A dire il vero, però, questa sua seconda sentenza si inquadra meglio se la si confronta con una asserzione precedente, che suonava: "*la matematico è la scienza che inferisce conclusioni necessarie*". Data questa, l'affermazione di Charles suona come una sorta di completamento, di integrazione della logica nel giudizio iniziale dato sulla matematica: ed è in fondo probabile che le cose stiano proprio così, visto che a pronunciare il precedente lapidario giudizio sulla matematica altri non era stato che il suo più volte citato genitore, Benjamin.


4 *Benjamin Peirce*

Benjamin Peirce nacque il 4 Aprile[8] 1809 a Salem[9], Massachusetts; il Massachusetts significa Boston, Boston significa Harvard e Harvard significa Benjamin Peirce. Per quanto molto antica e di gran lunga precedente all'arrivo di Benjamin, l'università di Harvard, che si vanta di essere la più antica e prestigiosa d'America, era quasi sconosciuta prima che Peirce vi dedicasse tutta la sua vita.

Vi si laureò nel 1829, ci restò come semplice *tutor* nel 1831, e nel 1833 venne nominato professore di Matematica e Filosofia Naturale, e in seguito anche di Astronomia. Benjamin era nato per fare il professore universitario: questo non perché fosse particolarmente dotato per la didattica, anzi: i suoi molti libri di testo erano spesso troppo difficili e concisi, le sue lezioni estremamente dense e poco pazienti verso gli studenti più lenti. Eppure, pur con queste limitazioni riusciva a trasmettere l'entusiasmo per la matematica all'uditorio, e i suoi studenti migliori narravano che seguire le lezioni del professor Peirce era davvero entusiasmante.

Dal punto di vista della ricerca, il suo campo d'applicazione fu molto vasto. Dalla teoria dei numeri (dimostrò che non poteva esistere un numero perfetto dispari con meno di quattro fattori primi), all'astronomia (ebbe una parte importante nella determinazione dell'orbita di Nettuno, entrando perfino in conflitto con le celebri previsioni teoriche sul pianeta fatte da Le Verrier e Adams), dall'algebra alla teoria degli errori. A questo proposito, ci fu uno strano caso in cui i due Peirce, padre e figlio, collaborarono in un ambiente insolito per entrambi: l'aula di un tribunale.

[8] Oh! Adesso si ragiona, con le date di compleanno…

[9] Città ragionevolmente piccola, ma famosa in tutto il mondo per un terrificante processo (per non dire esplicitamente "caccia") alle streghe tenutosi tra il 1691 e il 1692.

Nel 1868 un clamoroso caso giudiziario interessò tutta la nazione: una ricca signora, Sylvia Ann Howland, morì lasciando un patrimonio di due milioni di dollari[10]. Nel testamento li destinava a vari beneficiari, e solo una piccola parte veniva lasciata, tramite un fondo, alla nipote Henrietta Howland Robinson. Henrietta però tirò fuori un altro testamento precedente, dove lei risultava essere erede universale: a questo testamento era attaccato un foglio separato, che asseriva che quel testamento era valido e invalidava qualsiasi altro testamento successivo. L'esecutore testamentario rifiutò di accettare quel foglio come prova, ritenendolo falso, e allora Henrietta Robinson decise di andare per vie legali. Qui entra in gioco Peirce figlio: su incarico della difesa, Charles disse di aver analizzato e comparato 42 firme della defunta Sylvia Ann, constatando che, dei 30 tratti di penna che componevano la firma, mediamente solo 6 coincidevano con piena sovrapposizione tra una firma e l'altra. Però, mettendo a confronto le firme sul primo e il secondo foglio del testamento portato come prova da Henrietta, si notava che tutti e trenta i colpi di penna coincidevano perfettamente. Questo, a parere di Charles Sanders, mostrava che la firma sul secondo foglio era stata copiata in trasparenza sulla prima. Benjamin, chiamato come esperto, si limitò a notare che se mediamente tra una firma e l'altra coincideva solo un tratto su cinque, la probabilità di avere casualmente una coincidenza di tutti e trenta i tratti era pari a uno contro 2,6x10^{21}. A dire il vero, il suo calcolo era un po' inficiato dall'aver erroneamente presupposto una totale indipendenza della variabili (in questo caso dei tratti di penna), ma il senso generale della prova non cambia.

Per spiegare ai giurati quanto remota fosse la probabilità calcolata, Benjamin si espresse con la foga di un retore classico: *"Una improbabilità così grande è di fatto una impossibilità. Ombre di probabilità così evanescenti non possono appartenere alla vita reale. Sono inimmaginabilmente più piccole delle minime cose delle quali la legge si cura… La coincidenza che abbiamo riscontrato qui deve aver origine nell'intenzione di produrla. È assolutamente ripugnante per una sana razionalità attribuire questa coincidenza a qualsiasi causa che non sia la progettazione."*

La causa, comunque, venne persa dalla Robinson perché la corte decise che non poteva essere presa in considerazione una testimonianza prodotta da una parte in causa, per questioni di conflitto di interesse: l'evidenza dei Peirce non venne menzionata nel verdetto finale. Il processo resta comunque celebre nella storia giuridica americana per essere il primo tentativo di introdurre la matematica come prova giudiziaria.

Ma, se quest'articolo è dedicato a Benjamin Peirce e in seconda battuta a suo figlio Charles, non è per il suo lavoro di fondatore di Harvard, per le sue ricerche astronomiche, per le sue spedizioni attorno tutto il globo terracqueo come direttore del progetto di Coast Survey e neppure per le sue performance come perito nei processi per falsificazione. Se in quest'Aprile, mese densissimo di nascite di matematici illustri[11], celebriamo Benjamin Peirce è soprattutto per la sua frase messa in testa a questo pezzo. Peirce la disse dopo aver dimostrato alla lavagna l'immortale formula di Eulero:

$$e^{i\pi}+1=0$$

[10] Considerando l'epoca e il cambio, sono equivalenti più o meno ad una ventina di milioni di euro odierni.

[11] È con un po' di vergogna che notiamo come non sia ancora riusciti, nonostante i molti Aprile già trascorsi da quanto abbiamo cominciato a pubblicare i compleanni, a celebrare il principe dei matematici: Gauss.


5 *Ancora Megan Gale*

In un vecchio articolo di RM[12], celebravamo la magia di cotanta formula provando a paragonarne la bellezza con quella della modella allora più famosa in Italia: quella Megan Gale che, non a caso, abbiamo chiamato in causa all'inizio di questo pezzo.

Non è passato neppure un decennio e, per quel che ci è dato di sapere, Megan è verosimilmente ancora bellissima. Ma non è già più presente sugli schermi come nove anni fa, non è già più la pietra di paragone dei canoni della bellezza femminile. Dovessimo scrivere oggi lo stesso articolo, probabilmente ci troveremmo a scegliere qualche altra fanciulla come simbolo della formula di Eulero.

Formula che invece, dieci anni dopo, due secoli dopo, è ancora priva della più piccola ruga, e ricca di un eleganza assolutamente intatta dal tempo.

[12] È il PM di RM019, quasi un secolo fa: Agosto 2000.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Bellezza Classica, ovvero: vietato ai minori			
Arriva la bella stagione…			

2.1 Bellezza classica, ovvero: vietato ai minori

> Una piccola nota: Rudy valuta questo problema una pipa in quanto trovare *una soluzione* è ragionevolmente semplice; considerando però *la soluzione* che piace a lui, in realtà, ci vorrebbero quattro pipe, visto che non l'ha ancora trovata

Come fortunatamente pochi di voi sanno, Rudy e Doc[13] hanno avuto occasione di spiegare, di fronte a folti pubblici (si dice? È successo svariate volte, e almeno all'inizio ogni volta il pubblico era folto) le delizie della matematica ricreativa.

Un primo punto fermo (leggasi: "tormentone") di questi biloghi (nel senso che parlavano sempre e solo loro due: "dialoghi" e "monologhi" non rendono l'idea) è il concetto di "dematematizzazione", consistente nel prendere un problema astratto, portarlo nel mondo reale utilizzando personaggi più o meno fittizi e presentarlo su Prestigiose Riviste di Matematica Ricreativa.

Un secondo punto fermo (rileggasi: "tormentone") dei medesimi interventi (pare che "biloghi" non si dica) è che anche se la risposta ad un problema è unica, le strade per arrivarci, ossia le soluzioni, sono molte: i Nostri ritengono, tra l'altro, che il riconoscere il fatto che la soluzione di qualcun altro sia esteticamente più valida della propria rappresenti un indubbio segno del *fair play* dei matematici. Siamo convinti che Wiles sarebbe contento, se qualcuno trovasse una dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat riconducibile ad una ventina di pagine tutto compreso.

Dall'estetica della soluzione all'estetica della formula il passo è breve (e infatti parlano sempre anche di questo): come dovreste sapere, entrambi considerano la più bella formula della matematica la "Formula di Eulero"[14] ma a Rudy, di recente, è venuto qualche dubbio.

Infatti, ha trovato una formula di enorme potenza estetica (secondo lui, almeno) con una dimostrazione piuttosto fetente, e si chiede se qualcuno di voi è in grado di fare qualcosa di meglio. Trovate l'intero teorema qui sotto:

L'area del 2^n*-agono regolare di perimetro unitario vale* $2^{-(n+2)} \cdot \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots\sqrt{2}}}}}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\dots\sqrt{2}}}}}$,

in cui ci sono n*–1 "2" sotto ciascuna delle sequenze di radici annidate.*

---

[13] Mentre stendiamo queste note non ne siamo ancora sicuri, ma nutriamo la segreta speranza, in una delle prossime apparizioni, di tirare dentro anche Alice.

[14] Ci fermiamo qui, altrimenti cominciano a litigare: si riferiscono a due *diverse* Formule di Eulero.

Ad alcuni di voi sorgeranno spontanee alcune domande:

"Perché 'bellezza classica'?" Perché è bella e la prima dimostrazione risale a Viète.

"Perché 'vietata ai minori'?" Perché si presuppone abbiate visto abbastanza problemi da saperla apprezzare anche senza dematizzazione.

"Perché non la dematematizzi?" Perché sarebbe come mettere i blue-jeans alla Venere di Milo: lo hanno fatto, ma preferisco l'originale.

"Perché non te la dimostri da solo?" Fatto, ma la dimostrazione fa schifo. Ve l'avevo già detto, non siete stati attenti. E adesso basta domande. Datevi da fare.

2.2 Arriva la bella stagione...

…purtroppo.

Questa ve la spieghiamo. Con giustappunto l'arrivo della bella stagione, alla moglie di Rudy è di nuovo presa la mania delle "gite fuori porta", e sin qui niente di male; il guaio è che quest'anno la Signora d'Alembert ha deciso che i VAdLdRM *assolutamente devono* vedere Milano.

Ora, Rudy[15] ritiene a Milano ci siano due sole cose interessanti: una la conoscete anche voi (*ciao, .mau.!*), l'altra è il cartello "State uscendo da Milano".

Quindi, Rudy passa affannose settimane alla ricerca di posti visitabili nel raggio di 50 chilometri da Torino che possano rappresentare valide alternative al prendere il treno che prende già due volte la settimana. Ormai sta finendo i posti, quindi a breve potreste vederlo dalle parti della *madunina*.

Comunque, l'argomento è un altro; fortunatamente i VAdLdRM hanno raggiunto una ragionevole capacità di autogestione e, a parte decidere l'ordine di selezione delle musiche in automobile (di solito Bach, Iron Maiden e Fabrizio de Andrè: garantita la dissociazione mentale), il problema per loro diventa del come passare il tempo; a questo proposito, riportiamo un interessante dialogo.

"*Pater*, ci presti trenta centesimi?"

"Fred, a quale spericolata speculazione intendi dedicarti, con una somma così ingente?"

"Nessuna speculazione, tant'è che vogliamo trenta monete da un centesimo: volevamo provare una semplificazione o una complicazione del Nim…"

"Il valsente arriva solo se vi spiegate meglio"

"Semplice: hai un mucchio con le trenta monete, quando tocca a te puoi prenderne una, due o tre, ma non puoi prenderne tante quante ne ha prese il giocatore alla mossa precedente…"

"Mi sembra facile. Non vale trenta centesimi"

"Lasciami finire: perde o chi non ha nulla da prendere, *o chi prende l'ultimo centesimo*: questa regola, unitamente alla limitazione del non prenderne lo stesso numero, dovrebbe rendere il gioco interessante…"

"Mi hai convinto. Ecco i trenta centesimi, usateli con parsimonia".

[15] Ci sembra il momento opportuno per inserire un *disclaimer*. Da sempre vi proponiamo tormentoni, come il Doc che è chiacchierone, Alice che odia il calcolo delle probabilità e Rudy che insulta – in modo più o meno scherzoso – Milano ed i milanesi. Vi preghiamo veramente di non prenderci troppo sul serio: non siamo seri nemmeno quando ce la prendiamo con i VAdLdRM che, pur essendo figli di Rudy, sono veramente simpatici. Se in questi dieci anni nessuno ha chiamato il Telefono Azzurro per loro, ci aspettiamo che nessuno si offenda per queste uscite del Capo.

Mentre guidava, Rudy continuava a pensare… Il problema è carino da analizzare con due giocatori, ma cosa succede se anche Rudy vuole giocare? In questo caso, la regola diventerebbe che non puoi prendere un numero di gettoni pari a quella del giocatore immediatamente precedente… Si complica, la cosa?

Ragazzi, muovetevi a risolverlo, che ha intenzione di giocarsi il viaggio a Milano con la moglie… Se vince lui, si va al Museo di Arte Orientale (in Via San Domenico, a TORINO! Lo ha già visto tre volte, ma vale la pena).

3. Bungee Jumpers

La frazione q/p, in cui p è un primo dispari diverso da 5, viene sviluppata come numero decimale periodico. Dimostrate che se il numero di cifre del periodo è pari, allora la media aritmetica di queste cifre vale 9/2, mentre se il numero di cifre del periodo è dispari, la media aritmetica di queste cifre assume un valore diverso.

> *La prima affermazione equivale a dire che la media aritmetica coincide con la media delle cifre 0, 1, 2, …, 9, ossia le cifre "più grandi" appaiono con la medesima frequenza delle "più piccole".*

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Ma vi rendete conto che, con più di duemila abbonati alla rivista e dopo averlo pubblicamente ricordato, solo in due si sono ricordati di fare gli auguri di compleanno al Capo? Ma lo sapete che ci sta ancora tenendo il muso?

Va beh, Aprile, dolce dormire... ci piacerebbe! Invece siamo ancora una volta al lavoro per terminare il numero in extremis e farvi un pesce d'aprile... ebbene sì, vi faremo un scherzo. Fate attenzione.

Comunque bando alle ciance, veniamo agli eventi del mese passato.

6 *Il logo della Festa della Matematica*

Rudy e Piotr sono stati alla Festa della Matematica, e sono tornati a casa senza ortaggi. Alice, che di suo non ama molto la verdura, ne è stata molto contenta e potrebbe decidere di partecipare alle prossime conferenze. Vi consigliamo in ogni caso di controllare gli eventi sul sito apposito (www.festadellamatematica.bussola.it), perché i due scansafatiche non hanno voluto presentare nemmeno un resoconto per la pubblicazione in aprile.

Lo stesso vale per il Festival della Matematica tenutosi a Roma (http://www.festivaldellamatematica.it/): non un lettore che si sia degnato di mandarci un resoconto degli eventi... ma noi aspettiamo fiduciosi, magari con un po' più di tempo arriverà qualche cronaca e noi saremo felicissimi di pubblicarla.

Un'ultima importante notizia: è finalmente pronto il sito sulle *string figures* del grande ***Deepspeed***. Quando il Capo aveva pubblicato i suoi PM in proposito Deepspeed ci aveva già mandato alcune foto dei risultati di famiglia, ricordate[16]? Dato che il Nostro è anche DJ e fa parte di un club di arrampicatori, la base "Rock" è d'obbligo... fate attenzione quindi ad aprire i filmati con l'audio regolato a tutto volume. Il sito è tutto da studiare: http://www.gadan.it/strings/strindex.html.

Ed ora andiamo a vedere le soluzioni del mese.

[16] Se no, la semplice soluzione è uno sguardo a RM107 e RM108.

4.1 [122]

4.1.1 Sono tornati anche i colori!

Il problema delle biglie colorate è stato il preferito del mese, ecco il succo del testo:

> *In un sacchetto ci sono quattro biglie di colori diversi, e sono dati i quattro colori equivalenti. Estraggo una biglia e la tengo fuori, poi ne estraggo un'altra e la dipingo dello stesso colore della prima. Appena il colore è asciutto, rimetto entrambe le palline nel sacchetto. Quante coppie di estrazioni dovrei aspettarmi di fare, prima di avere tutte le palline dello stesso colore?*

Ovviamente a Rudy interessava anche qualsiasi generalizzazione sul numero di colori e di biglie.

Molti i solutori: ***.mau.***, ***Alberto R.***, ***Gino***, ***GaS***, ***Bobbin Threadbare***, ***Cid***, ***Millenium Bug***, ***Trekker***, ***Gnugnu***, ***Rub***. Per cominciare vediamo l'approccio puntomaupuntesco, che ci stupisce sempre per sinteticità:

> Ho provato a fare un po' di conti a mano. Al secondo tentativo mi è venuto fuori questo che posto. Come notazione, E(xyz) significa il valore atteso per arrivare a tutte le biglie dello stesso colore partendo da una situazione in cui ce ne sono x di un colore, y di un secondo colore, z di un terzo colore.
>
> Abbiamo sicuramente
>
> [1] E(1111) = 1+E(211)
>
> visto che al primo passo avremo due biglie dello stesso colore. Poi
>
> E(211) = 1 + 1/2 · 1/3 E(211) + 1/2 · 2/3 E(31) + 1/2 · 1/3 E(22) + 1/2 · 2/3 E(211)
>
> dove i quattro addendi sono rispettivamente "la prima biglia è del colore doppio, la seconda pure"; "la prima biglia è del colore doppio, la seconda no"; "la prima biglia è del colore singolo, la seconda pure"; "la prima biglia è del colore singolo, la seconda del doppio" (in questo ultimo caso abbiamo formalmente E(121), ma a noi non interessa il colore specifico). Raggruppando un po' di termini arriviamo a
>
> [2] E(211) = 2 + 1/3 E(22) + 2/3 E(31)
>
> Proseguendo, E(22) = 1 + 2/3 E(31) + 1/3 E(22), dove nel primo caso si prendono due biglie di colore diverso e nel secondo due dello stesso colore, e si arriva a
>
> [3] E(22) = 3/2 + E(31)
>
> Infine, E(31) = 1 + 3/4 · 1/3 E(4) + 3/4 · 2/3 E(31) + 1/4 E(22) coi casi rispettivamente "la prima biglia è del colore triplo, la seconda dell'altro colore"; "la prima biglia è del colore triplo, la seconda pure"; "la prima biglia è del colore singoletto" da cui
> [4] E(31) = 2 + 1/2 E(4) + 1/2 E(22)
>
> Infine,
>
> [5] E(4) = 0
>
> perché è già finito tutto.
>
> Sostituendo la [5] nella [4] e facendo un sistema con [3] e [4] ricaviamo
>
> [6] E(22) = 7,
>
> [7] E(31) = 11/2
>
> da cui sostituendo nella [2] si ha
>
> [8] E(211) = 8

e finalmente

[9] E(1111) = 9

Interessante che se le biglie fossero 3 avremo E(111) = 4, se fossero 2 E(11) = 1 e se ce ne fosse una sola E(1) = 0. Però non me la sento di affermare che con n biglie il valore atteso sia $(n-1)^2$. Speravo infatti di trovare una dimostrazione sul numero decrescente di colori diversi utilizzati che dicesse "per scendere da n a n–k colori occorrono in media k^2 passi", ma già con quattro biglie mi si cannano i conti, visto che per scendere da 4 a 2 colori il valore atteso è 3.

Ci è piaciuto particolarmente l'approccio stilistico di ***Alberto R.*** nell'utilizzare una catena di Markov (comune a tanti solutori), per cui vi mostriamo la sua versione

Mentre il gioco evolve, il sacchetto contenente le 4 biglie può trovarsi in uno dei seguenti stati:

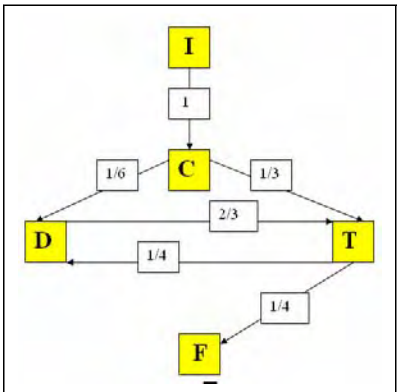
Stato I (I come "Iniziale"): 4 biglie di colore diverso

Stato C (C come "Coppia"): solo 2 biglie hanno lo stesso colore

Stato D (D come "Doppia coppia"): 2 biglie di un colore e 2 biglie di altro colore

Stato T (T come "Tris"): 3 biglie dello stesso colore e la quarta di colore diverso

Stato F (F come "Finale"): tutte le 4 biglie dello stesso colore.



7 *Diagramma di* ***Alberto R.***

Nel diagramma che segue sono indicate, come si verifica facilmente, le probabilità di transizione da uno stato all'altro.

Trasformiamo il problema di statistica in più intuitivo problema idraulico. Supponiamo che le caselle gialle siano serbatoi di acqua, le frecce siano tubature e le probabilità indichino quale frazione dell'acqua presente nel serbatoio di origine fluisce, ogni minuto, verso quello di destinazione.

Inoltre conveniamo che la lettera che indica un serbatoio indichi anche la quantità di acqua in esso presente. Alimentiamo I con la portata di 1 litro al minuto e consideriamo F come uno scarico esterno all'impianto. In condizioni stazionarie i flussi in uscita devono essere uguali a quelli in entrata, quindi

$$I = 1$$

$$(1/3 + 1/6)C = 1$$

$$(2/3)D = (1/6)C + (1/4)T$$

$$(1/4 + 1/4)T = (2/3)D + (1/3)C$$

$$(1/4)T = 1$$

Da cui I = 1 C = 2 D = 2 T = 4

In totale sono presenti nell'impianto 9 litri di acqua, ma siccome il flusso è di un litro al minuto, vuol dire che una molecola di acqua impiega mediamente 9 minuti per raggiungere lo scarico F. Uscendo dalla "metafora" idraulica possiamo affermare che il numero di coppie di biglie da estrarre per raggiungere lo stato monocromatico è una variabile aleatoria avente valor medio (o valore atteso) = 9.

Detta variabile può assumere tutti i valori interi dell'intervallo 3 – ∞: 3 perché esiste il percorso minimo I C T F, ∞ perché lo stato del sacchetto può oscillare illimitatamente tra D e T.

Diamo infine un po' di spazio alla congettura di ***Gnugnu***, che è l'unico ad aver provato ad affrontare il caso generale:

Ad ogni estrazione una biglia 'contagia' con il proprio colore un'altra. Quali siano i colori non ha alcuna importanza, ad ogni contagio il numero di colori ancora presenti non può aumentare e diminuisce, se e solo se, la biglia contagiata era, in quel momento, la sola di quel colore.

Con 4 colori iniziali gli stati possibili sono: 1,1,1,1; 2,1,1; 2,2; 3,1; 4; dove ciascun numero indica quante biglie hanno un certo colore. Il numero degli stati è uguale al numero delle possibili partizioni di 4 in addendi eventualmente ripetuti.

Le probabilità dei passaggi da uno stato ad un altro, sono indipendenti dalla storia precedente, ci troviamo di fronte ad un processo markoviano ed il calcolo del valore di ciascuna probabilità di transizione si riduce ad un mero conteggio che può essere ulteriormente semplificato osservando che il numero di casi possibili è costantemente uguale al numero delle disposizioni di 4 oggetti a 2 a 2, quindi, $4 \cdot 3 = 12$.

		a	b	c	d	e
		1,1,1,1	2,1,1	2,2	3,1	4
a	1,1,1,1	0	12	0	0	0
b	2,1,1	0	6	2	4	0
c	2,2	0	0	4	8	0
d	3,1	0	0	3	6	3
e	4	0	0	0	0	12

8 *Conteggio del numero di transizioni possibili da uno stato ad un altro. Per ottenere le probabilità basta dividere per 12 il valore di ciascuna cella.*

Per determinare quante estrazioni occorre, mediamente, effettuare per transitare da uno stato qualsiasi allo stato finale E, basta osservare che ad ogni estrazione si passa, con le probabilità precedentemente calcolate, da uno stato ad un secondo (eventualmente coincidente con il primo).

I valori attesi, che possiamo indicare con il simbolo $Q(x)$, sono legati fra loro da semplici relazioni lineari deducibili dalla precedente tabella:

$$Q(e) = 0;$$

$$12Q(d) = 3(1 + Q(c)) + 6(1 + Q(d)) + 3(1 + Q(e));$$

$$12Q(c) = 4(1 + Q(c)) + 8(1 + Q(d));$$

$$12Q(b) = 6(1 + Q(b)) + 2(1 + Q(c)) + 4(1 + Q(d));$$

$$12Q(a) = 12(1 + Q(b)).$$

Otteniamo in questo modo un sistema di equazioni lineari con la seguente soluzione:

$$Q(e) = 0;\ Q(d) = 5.5;\ Q(c) = 7;\ Q(b) = 8;\ Q(a) = 9.$$

Il metodo applicato si può estendere ad un numero qualsiasi di biglie-colori iniziale, con l'unico inconveniente della crescita rapidissima del numero di stati possibili. Il sistema ottenuto si può dividere in blocchi, costituiti dalle equazioni corrispondenti a stati con il medesimo numero di colori presenti, ma anche in questo modo, a mano, diventa presto troppo complicato per i miei gusti.

Nella seguente tabella sono riportati i risultati, calcolati fino ad n=6, dedotti (sulla base di congetture) da 7 a 9.

Nella tabella sono riportati, oltre ai valori attesi per la transizione dallo stato iniziale a quello finale (colonna Tot), anche quelli (medie pesate) di permanenza in stati con un numero di colori uguale all'intestazione (colonne successive). Indicando con Q(*n*) i primi e Q(*n*,*m*) gli altri, possiamo osservare che parrebbe essere:

n	Tot	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	1							
3	4	3	1						
4	9	6	2	1					
5	16	10	10/3	5/3	1				
6	25	15	5	5/2	3/2	1			
7	36	21	7	7/2	21/10	7/5	1		
8	49	28	28/3	14/3	14/5	28/15	4/3	1	
9	64	36	12	6	18/5	12/5	12/7	9/7	1

$$Q(n)=(n-1)^2; \quad Q(n,m)=\frac{n+1}{n-1}Q(n-1,m) \quad 1<m<n; \quad Q(n,n)=1.$$

A parte, ovviamente, l'ultima, sono riuscito a dimostrare queste relazioni solo per valori di m molto prossimi ad n; le altre restano mere congetture.

Dalle ultime si può ricavare facilmente $Q(n.m)=\frac{\binom{n}{2}}{\binom{m}{2}} \quad 1<m\le n$, e da queste

$$Q(n)=\sum_{i=2}^{n}Q(n,i)=\sum_{i=2}^{n}\frac{\binom{n}{2}}{\binom{i}{2}}=\binom{n}{2}\sum_{i=2}^{n}\binom{i}{2}^{-1}=(n-1)^2 .$$

Qualcuno ha altre idee?

4.1.2 Aspettando Natale

Per prima cosa, riassumiamo anche qui il problema:

> *Ad una cena sono invitate venti persone, organizzate in dieci coppie; a ognuno verrà richiesto di portare un "pensierino", e i doni saranno distribuiti secondo una specie di lotteria.*
>
> *Si scrivono i nomi delle persone su venti foglietti, e poi ognuno estrae un foglietto, nell'idea di dare a ciascuna persona il "presente" portato dal nome e cognome estratti; se qualcuno estrae il proprio nome o il nome del proprio partner, tutti i biglietti vengono rimessi nel cappello e si procede ad una nuova estrazione.*
>
> *Quante estrazioni "corrette" (ossia che non debbano essere ripetute) sono possibili; inoltre si chiede una stima del numero atteso di estrazioni che si dovranno fare nella serata prima di riuscire ad attribuire i pacchettini.*

Veramente, Rudy, nella sua crudeltà, desiderava che il problema fosse generalizzato a *n* coppie di invitati... ma vediamo come se la sono cavata i pochi solutori. Solo lo "zoccolo duro" si è dato da fare questa volta: ***Cid***, ***Gnugnu***, ***Franco57*** e ***Val316***.

Bobbin Threadbare ci ha mandato solo un accenno di soluzione:

Per il secondo ("Aspettando Natale"), le triple pipe, birre e coniglietti sono pienamente meritati! Comunque mi pare che tutto si riduca a calcolare la probabilità p che una serie di estrazioni sia corretta, dopodiché è facile calcolare quante possibili serie corrette ci sono ($20! \cdot p$) e quante serie ci si attende di dovere fare: $1/p$, per una volta la risposta intuitiva è anche quella giusta. A meno che, quando Rudy scrive "il numero atteso di estrazioni che si dovranno fare nella serata" intenda riferirsi alle estrazioni singole, e non alle serie. Nel qual caso, gli suggerisco di girare il problema a un mio amico che di queste cose ne sa più di me: la sua email è srinivasa.ramanujan@heaven.sky.

Ma basta con le divagazioni, immagino che siate impazienti di chiedermi se questo famigerato valore di p l'ho calcolato o no. Beh, no ovviamente, sennò l'avrei detto subito. Però vi dico (prima che mi linciate) che ho scribacchiato un algoritmo per determinarlo in un tempo accettabile (proporzionale a N^3, dove N è il numero degli invitati). Non ho però scritto il relativo programmino per fare il calcolo per tre motivi:

1) non avrei modo di verificare che la soluzione è corretta;
2) per avere il risultato esatto bisognerebbe che il programma fosse in grado di trattare frazioni con numeratore e denominatore arbitrariamente grandi, invece col mio fido C++ ci si deve accontentare di un risultato con appena 10-15 cifre significative, nulla in confronto all'infinito;
3) ma soprattutto, non so se e quanto gradiate soluzioni fatte al PC invece che con carta e matita come ogni vero matematico dovrebbe fare.

Per questo motivo, almeno per ora passo la mano ad altri coraggiosi. Se però sul prossimo RM non apparissero soluzioni, vorrà dire che mi toccherà davvero calcolarlo da me... vedremo....

Vedremo, infatti. Doppio plauso invece a ***Cid***, che oltre ad essere uno dei due che si è ricordato di fare gli auguri al Capo, ci propone una soluzione approssimata che è corretta:

Il numero di estrazioni "corrette" è (approssimativamente) uguale a: $3{,}12 * 10^{17}$. Il valore atteso del numero di estrazioni è (approssimativamente) uguale a: 7,78. Se il numero di coppie invitate tende ad ∞, il valore atteso del numero di estrazioni tende a: e^2.

<u>Procedimento</u>

Comincio calcolando il valore atteso del numero di estrazioni per un numero N di coppie invitate che tende ad infinito. In tal caso, la probabilità per ogni persona di non estrarre il proprio nome o quello del proprio coniuge è uguale a $\left(1-\frac{2}{N}\right)$. La probabilità che tutti non estraggano il proprio nome o quello del proprio coniuge è quindi pari a: $\left(1-\frac{2}{N}\right)^N$. Calcolando ora: $\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{2}{N}\right)^N = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{(-2)}{N}\right)^N = e^{-2}$.

Quindi essendo la probabilità di realizzare una estrazione "corretta" pari a e^{-2}, il valore atteso è: $\frac{1}{e^{-2}} = e^2$. Successivamente, posso calcolare il valore atteso per un numero di coppie basso.

Con due coppie, il valore atteso è uguale a: 6

Con tre coppie, il valore atteso è uguale a: 9

Con quattro coppie, il valore atteso è uguale a: $\frac{280}{33} = 8,\overline{48}$

Con cinque coppie, il valore atteso è uguale a: $\frac{28350}{3439} = 8,24...$

Con sei coppie, il valore atteso è uguale a: $\frac{136080}{16831} = 8,085...$

Il valore atteso con venti coppie richiede calcoli piuttosto laboriosi, per cui ho preferito cercare una soluzione approssimata. Noto che con una sola coppia il valore atteso del numero di estrazioni è uguale a ∞. Quindi la curva che descrive il valore atteso del numero di estrazioni al variare di N ha due asintoti, uno per N=1 ed è un asintoto verticale e l'altro per un valore atteso pari a e^2 ed è un asintoto orizzontale. Tra questi due asintoti, la curva tende ad assumere una forma iperbolica (con una anomalia in corrispondenza di N=2, che è un punto di minimo assoluto per questa curva).

Chiamo V(n) il valore atteso con N coppie. Parto quindi da N=3 (punto di massimo relativo) e ritengo la curva approssimativamente iperbolica. Traslo la curva e considero come nuovi assi i suoi due asintoti, l'asse X misura la distanza dall'asintoto verticale x = N – 1 = (numero di coppie) – 1; l'asse Y misura la distanza dall'asintoto orizzontale $y = f(x) = V(n-1) - e^2$.

Essendo la curva di tipo iperbolico avremo: $\frac{f(3)}{f(2)} \approx \frac{f(6)}{f(4)}$ e $\frac{f(6)}{f(4)} \approx \frac{f(9)}{f(6)}$.

Dalla prima equazione abbiamo:

$$\frac{V(4)-e^2}{V(3)-e^2} \approx \frac{V(7)-e^2}{V(5)-e^2}$$

$$V(7)-e^2 \approx \frac{\left(V(4)-e^2\right)*\left(V(5)-e^2\right)}{V(3)-e^2} = \frac{\left(\frac{280}{33}-e^2\right)*\left(\frac{28350}{3439}-e^2\right)}{9-e^2} = \frac{\frac{2646000}{37829}-\frac{1898470}{113487}e^2+e^4}{9-e^2}$$

Da cui si ricava: $V(7) \approx 7,97$

Cioè con sette coppie, il valore atteso è circa uguale a: 7,97

Dalla seconda equazione abbiamo:

$$\frac{V(7)-e^2}{V(5)-e^2} \approx \frac{V(10)-e^2}{V(7)-e^2}$$

$$V(10)-e^2 \approx \frac{\left(V(7)-e^2\right)^2}{V(5)-e^2} \approx \frac{0,338}{\left(\frac{28350}{3439}-e^2\right)} = \frac{0,338}{0,8546} = 0,395$$

Da cui si ricava: $V(10) \approx 7,78$

Cioè con dieci coppie, il valore atteso è circa uguale a: 7,78.

Il numero di estrazioni "corrette" è (approssimativamente) uguale a:

$$\frac{20!}{7{,}78}=\frac{2432902008176640000}{7{,}78}=3{,}12*10^{17}.$$

A questo punto, vi presentiamo la soluzione di ***Franco57***:

Se consideriamo di portare a termine tutte le estrazioni senza fermarci quando una coppia estrae il foglietto corrispondente al proprio regalo, le possibili estrazioni sono evidentemente $n!$ poiché ciascuna di esse è semplicemente una diversa permutazione dei foglietti. Nel problema n=10, ma conviene generalizzare fin da subito.

Per calcolare quante sono le estrazioni che non si devono interrompere, cioè le permutazioni P su $I_n=\{1,2,\ldots,n\}$ per cui $\forall i:P(i)\neq i$ ci si può basare sul numero di permutazioni per cui su un sottoinsieme J di I_n non vuoto di cardinalità j si abbia la coincidenza tra il foglietto e chi lo propone cioè $\forall i\in J:P(i)=i$. Chiaramente, rimanendo $n-j$ foglietti da assegnare la cardinalità di questo insieme è $(n-j)!$

posto

$\forall i\in I_n \quad A_i=\{P \text{ permutazione di } I_n : P(i)=i\}$

$\forall J\subset I_n \quad A_J=\{P \text{ permutazione di } I_n : \forall i\in J : P(i)=i\}$

Abbiamo evidentemente $A_J=\bigcap_{i\in J}A_i$

Ora consideriamo la generalizzazione della ben nota formula per calcolare la cardinalità dell'unione tra due insiemi come la somma della cardinalità dei due insiemi meno la cardinalità della loro intersezione, cioè

$\#(A\cup B)=\#A+\#B-\#(A\cap B)$

Presa una famiglia finita di insiemi $(A_i)_{i\in I}$ la generalizzazione della formula è

$$\#\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\sum_{\substack{J\subset I\\ J\neq\phi}}(-1)^{\#J-1}\cdot\#\left(\bigcap_{i\in J}A_i\right) \tag{1}$$

Questa formula può essere dimostrata per induzione sul numero di insiemi, partendo dalla formula per due insiemi ed applicando la proprietà distributiva dell'unione rispetto alla intersezione, ma una dimostrazione più rapida, anche se meno formale, è quella di osservare che ogni elemento dell'unione viene alla fine contato una sola volta nella sommatoria. Se infatti J di cardinalità j è il sotto-insieme degli indici degli insiemi A_i al quale un elemento dell'unione appartiene, esso si conta esattamente:

$$\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k-1}\cdot\binom{j}{k}=-\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k}\cdot\binom{j}{k}=1-\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k}\cdot\binom{j}{k}=1 \text{ volta}$$

Essendo $\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k}\cdot\binom{j}{k}=0$ poiché è lo sviluppo binomiale di $(1-1)^j$

Se poi l'insieme Universo è finito possiamo riscrivere la (1) in quest'altra formulazione più simpatica e più adatta al nostro problema, considerando che l'intersezione di una famiglia vuota di insiemi è l'insieme Universo (l'elemento neutro della intersezione):

$$\#\left(\bigcap_{i\in I}\overline{A_i}\right)=\#\left(\overline{\bigcup_{i\in I}A_i}\right)=\sum_{J\subset I}(-1)^{\#J}\cdot\#\left(\bigcap_{i\in J}A_i\right)$$

dove la barra in alto indica il complementare. Adesso possiamo calcolare quante sono le X_n permutazioni di un insieme di n elementi per cui nessun elemento viene rimappato in sé stesso (qui l'insieme Universo è l'insieme di tutte le permutazioni):

$$X_n=\#\left(\overline{\bigcup_{1\le i\le n}A_i}\right)=\sum_{J\subset I_n}(-1)^{\#J}\cdot\#(A_J)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{\substack{J\subset I_n\\ \#J=j}}(-1)^j\cdot(n-j)!=$$

$$=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\cdot\binom{n}{j}(n-j)!=$$

$$=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\cdot\frac{n!}{j!}=n!\cdot\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}$$

Da questa si può anche ricavare una comoda formula ricorsiva:

$$X_1=0$$

$$X_n=(-1)^n+n\cdot X_{n-1} \text{ per } n>0$$

Facendo i calcoli con questa formula otteniamo i valori in tabella.

Possiamo facilmente calcolare la probabilità P_n che una permutazione su *n* elementi non abbia coincidenze dividendo X_n per il numero *n*! di partizioni:

$$P_n=\frac{X_n}{n!}=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}$$

Si riconosce lo sviluppo parziale in serie di Taylor della funzione esponenziale $e^x=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}$ per il valore $x=-1$ e si ha quindi $P_n\to\frac{1}{e}$.

n	X_n
1	0
2	1
3	2
4	9
5	44
6	265
7	1.854
8	14.833
9	133.496
10	1.334.961

Il numero atteso di estrazioni L per un evento di probabilità *p* in prove ripetute indipendenti è $L=\frac{1}{p}$ poiché deve verificare l'equazione $L=1+p\cdot 0+(1-p)\cdot L$ che traduce il fatto che dopo la prima estrazione, con probabilità p ci si ferma e con probabilità 1–*p* si prosegue.

Quindi il valore atteso sul numero di estrazioni tende alla costante e. Nel nostro caso vale $L_{10}=\frac{P_{10}}{10!}=\frac{1334961}{3628800}\cong 2{,}7182816577$, che è una buona approssimazione di *e*, infatti

$$\left|e-L_{10}\right|<\frac{1}{P_9}-\frac{1}{P_{10}}=\frac{P_{10}-P_9}{P_{10}\cdot P_9}=\frac{1}{10!}\cdot\frac{1}{P_{10}}\cdot\frac{1}{P_9}=\frac{1}{10!}\cdot\frac{10!}{X_{10}}\cdot\frac{9!}{X_9}=\frac{9!}{133496\cdot 1334961}<10^{-5}$$

poiché per costruzione della serie di Taylor $\forall n \quad dispari \quad P_n<\frac{1}{e}<P_{n+1}\Rightarrow L_{n+1}<e<L_n$.

Insomma possiamo rassicurare Rudy: le tornate di estrazione sono in media meno di 3.

Rudy ghigna ancora, il problema era abbastanza difficile. Alice non ha capito niente di tutti questi conti di valori attesi ma ha deciso di passarvi lo stesso anche la soluzione di ***Gnugnu***. Magari la capite voi.

Indicando con aa, bb, …, jj le coppie di partecipanti alla festa, il problema chiede di determinare il numero di permutazioni delle venti lettere che non ne porta alcuna al proprio posto.

Per calcolare questo numero possiamo iniziare considerando una sola coppia: aa. In questo primo caso abbiamo una sola permutazione che lascia le due lettere al proprio posto. Indicando con Q(n,k) il numero di permutazioni di n coppie che lascia k lettere nella loro posizione iniziale, sarà:

Q(1,0) = 0, Q(1,1) = 0 e Q(1,2) = 1.

Il caso di due coppie aabb è ancora facilmente abbordabile abbiamo 6 permutazioni possibili (in ordine alfabetico) aabb, abab, abba, baab, baba, bbaa; di queste 1, la prima, lascia le 4 lettere al loro posto; 4, quelle intermedie, lasciano 2 lettere al loro posto e 1, l'ultima, non lascia alcuna lettera nella posizione iniziale.

Sarà, pertanto: Q(2,0) =1; Q(2,1) = 0, Q(2,2) = 4, Q(2,3) = 0, Q(2,4) = 1.

Come sempre succede nei problemi di combinatoria, il numero dei casi possibili cresce così in fretta da rendere presto impraticabile una disanima puntuale delle diverse possibilità. Nel nostro caso il numero delle permutazioni possibili è P(n) = $(2n)!/2^n$ e già con 3 coppie ci troviamo di fronte a 90 diverse sequenze.

Per aggirare l'ostacolo, possiamo esaminare cosa succede aggiungendo una nuova coppia; supponiamo di conoscere già la distribuzione delle Q(n,k) e cerchiamo di determinare quella delle Q(n+1,k). Ciascuna delle P(n) permutazioni ne genera (n+1)(2n+1), se riusciamo a costruirle in modo da contare le variazioni di k, abbiamo risolto il problema.

Un modo per ottenere questo risultato, consiste nel sistemare la coppia aggiunta in ciascuna delle (n+1)(2n+1) posizioni possibili, spostando le lettere che, eventualmente, occupassero una delle due posizioni in fondo alla stringa. Partiamo da una generica Q(n,k), delle 2n lettere, k sono al posto giusto e 2n–k al posto sbagliato, sia xx la coppia da aggiungere, possiamo distinguere 6 possibilità (a destra l'esempio corrispondente iniziando da abba e aggiungendo cc):

a)	le due x si collocano nelle due posizioni finali: 1 caso, k aumenta di 2;	abba diventa; abbacc
b)	una x si colloca in una delle due posizioni finali e l'altra al posto di una lettera che era in posizione errata: 2(2n–k) casi, k aumenta di 1;	abba diventa: acbabc, acbacb, abbcac oppure abbcca
c)	una x si colloca in una delle due posizioni finali e l'altra al posto di una lettera che era in posizione corretta: 2k casi, k non cambia;	abba diventa: cbbaac, cbbaca, abcabc oppure abcacb

d)	le due x occupano il posto di lettere che si trovavano in posizione errata: $(2n–k)(2n–k–1)/2$ casi, k non cambia	abba diventa: acbcba
e)	le due x si collocano al posto di due lettere, una in posizione errata, l'altra in posizione corretta: $k(2n–k)$ casi, k diminuisce di 1	abba diventa: ccbaab, cbbcaa, accabb, oppure abccba
f)	le due x occupano il posto di lettere che erano in posizione corretta: $k(k–1)/2$ casi, k diminuisce di 2.	abba diventa cbcaab

Nello spostare le lettere il cui posto è stato occupato da una x (c nell'esempio) dobbiamo stabilire, nei casi (d, e, f), in cui le lettere da spostare sono due, di porle in fondo nel medesimo ordine (andrebbe anche bene nell'ordine inverso); questo permette di risalire, in maniera univoca, dalle figlie alla rispettiva madre, basta eliminare le x e occupare gli, eventuali, spazi corrispondenti con le lettere finali nel medesimo ordine.

Per verificare che il procedimento sia corretto basterà perciò controllare che venga generato l'esatto numero di stringhe figlie.

$$1+2(2n-k)+2k+(2n-k)(2n-k-1)/2+k(2n-k)+k(k-1)/2=$$
$$1+4n-2k+2k+2n^2-2nk+k^2/2-n+k/2+2nk-k^2+k^2-k/2=$$
$$1+3n+2n^2=(n+1)(2n+1); \quad e\ nell'esempio: \quad 1+4+4+1+4+1=15.$$

Applicando questo algoritmo è possibile, partendo dal vettore delle Q(n,k) costruire quello delle Q(n+1,k) e, iterando il procedimento, giungere all'agognato valore di Q(10,0). Io, schiavo della mia pigrizia, ho usato una funzione costruita in 'Derive' che ha fornito la seguente tabella (troncata orizzontalmente per adattarla alla pagina):

n	K= 0	1	2	3	4	5	6
1	0	0	1				
2	1	0	4	0	1		
3	10	24	27	16	12	0	1
4	297	672	736	480	246	64	24
5	13756	30480	32365	21760	10300	3568	970
6	925705	2016480	2116836	1418720	677655	243360	67920
7	85394646	183749160	191384599	128058000	61585776	22558928	6506955
8	10351036465	22068387264	22855223392	15277537856	7385462812	2741473280	809754288
9	1596005408152	3378329472672	3483785629881	2327244769920	1129522800456	423397648800	127200583860
10	305104214112561	642128536388160	659951777033380	440670892403520	214552741902525	81030208881216	24656319126720

Avendo già affrontato, tempo addietro, il problema analogo nel caso più semplice (problema dei cappelli o delle magliette, un solo oggetto per ogni persona, da cui evitare la coincidenza) ricordavo l'esistenza fra le q(n,k) di semplici relazioni, facilmente dimostrabili, quali:

$$q(n+1,0)=n(q(n,0)+q(n-1,0)); \quad q(n,0)=nq(n-1,0)+(-1)^n; \quad q(n,k)=\frac{n}{k}q(n-1,k-1).$$

Ho provato ad individuare relazioni analoghe in questo problema e, in effetti, qualcosa del genere sembra esistere, in particolare le Q(n,0) soddisfano la relazione:

$$Q(n,0) = n[(2n-1)Q(n-1,0) + (2n-2)Q(n-2,0)] - (2n-1).$$

Non sono riuscito a dimostrare questa proprietà, mi sono limitato a verificarla fino a n=100, per me è quindi una congettura che permetterebbe di calcolare velocemente grandi valori di Q(n,0).

Per quanto concerne il numero medio di estrazioni da effettuare prima di averne una accettabile è

$$p(10) = \frac{305104214112561}{20!} \cdot 2^{10} = \frac{11300156078243}{87995587680000}; \quad \frac{1}{p(10)} = 7.78711259\ldots .$$

Nel problema semplice, da $q(n,0) = nq(n-1,0) + (-1)^n, \quad q(1,0) = 0$ si ricava

$p^*(n) = \frac{q(n.0)}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$ che coincide con la ridotta n-esima dello sviluppo in serie di exp(x) calcolata in x=–1. Pertanto la probabilità, in quel caso, tenderà a 1/e.

Nel nostro problema, possiamo pensare ad un controllo in due passate: prima si verifica di non aver estratto il proprio biglietto e poi, fra le combinazioni che hanno superato il primo esame si escludono quelle in cui sia stato estratto il regalo del partner. Dovrebbe essere, pertanto, tenendo conto che, nel secondo controllo, il biglietto sicuramente non si trova nelle mani del compagno:

$p(n) \approx \frac{1}{e^2} \cdot \frac{2(n-1)}{2n-1}; \quad \frac{1}{p(n)} \approx e^2 \frac{2n-1}{2(n-1)}$, che fornisce per n=10 il valore 7.799559…

Per n=100 il valore stimato è 7.4263745…, a fronte di un valore 'esatto' 7.4262795…

Alice, esaurita, spera che aprile sia più generoso... Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Bene, visto quello che è successo con le carte e i giochini inventati da Alberto, forse è meglio se ricominciamo dai *basics*.

Prendiamo un mazzo di carte[17] da 40, e "tagliamolo" mettendo la parte sopra sotto; avremo una carta visibile, della quale ci annotiamo il colore.

Adesso "tagliamolo" di nuovo, mettendo la parte sopra sotto; avremo una carta visibile di cui ci annotiamo il colore.

Scommettereste (*pre-facto*) che i due colori sono uguali?

6. Pagina 46

Consideriamo la conversione della frazione data in decimale periodico:

$$\frac{q}{p} = \overline{A, a_1 a_2 \ldots a_k a_1 a_2 \ldots a_k a_1 a_2 \ldots}\,^{18},$$

[17] "…e perché non da 52?" Semplice. Con una scatola di ottimi sigari (che gli dureranno un anno, se non venite a trovarlo) in offerta c'era un mazzo da quaranta di napoletane (non poniamoci domande sul fatto che fossero associate a sigari cubani…). Rudy ha scoperto che occupano (le carte, non i sigari) meno spazio di un mazzo da 52, e che 40 è *molto più divisibile* di 52…

[18] Come sempre, indichiamo con la sopralineatura non il periodo, ma il fatto che stiamo considerando la struttura del numero, e non un prodotto.

in cui *A* rappresenta la parte intera del quoziente ottenuto dalla divisione. Possiamo scrivere:

$$q = Ap + q_1,$$

dove $q_1 < p$. Questo implica che $\overline{Aa_1}$ sia la parte intera della divisione di $10q$ per p, ossia:

$$10q = \overline{Aa_1} \cdot p + q_2,$$

dove $q_2 < p$. Nello stesso modo,

$$10^2 q = \overline{Aa_1a_2} \cdot p + q_3,$$
$$\dots$$
$$10^k q = \overline{Aa_1a_2 \dots a_k} \cdot p + q_{k+1}.$$

La parte periodica ricomincia nel momento in cui la divisione di $10^k q$ restituisce un resto pari al primo ottenuto per la divisione di q per p, ossia $q_{k+1} = q_1$. Quindi, il numero k di cifre che compongono la parte periodica è determinata dalla minima potenza di 10 tale che $10^k q$, una volta diviso per p, dia lo stesso resto che dava q. Per questo valore di k inoltre $10^k q - q = (10^k - 1)q$ deve essere divisibile per p e, essendo p e q primi tra loro, $10^k - 1$ deve essere divisibile per q.

Supponiamo ora *k* sia pari, ossia $k = 2l$. Essendo $10^{2l} - 1 = (10^l - 1)\cdot(10^l + 1)$ divisibile per p, uno dei due termini (o entrambi) deve essere divisibile per p; ma $10^l - 1$ non può esserlo, in quanto se lo fosse darebbe lo stesso resto che dà q in seguito alla divisione per p, e in questo caso il periodo della frazione $\frac{q}{p}$ sarebbe l piuttosto che $k=2l$; quindi, dobbiamo concludere che $10^l + 1$ è divisibile per p.

Da questa conclusione segue che la somma $\frac{10^l q}{p} + \frac{q}{p}$ è un intero; ma sappiamo che:

$$\frac{10^l q}{p} + \frac{q}{p} = \overline{A, a_1a_2 \dots a_l a_{l+1} a_{l+2} \dots a_{2l} \dots} + \overline{A, a_1 a_2 \dots a_l a_{l+1} \dots a_{2l} \dots}$$

Quindi la somma dei due decimali (periodici):

$$\overline{0, a_{l+1}a_{l+2} \dots a_{2l} a_{2l+1} a_{2l+2} \dots} + \overline{0, a_1 a_2 \dots a_l a_{l+1} a_{l+2} \dots}$$

è un intero.

Dovendo questi due numeri avere una somma minore di 1, il valore della somma deve essere $1 = 0{,}999999\dots$, che è possibile solo se:

$$a_1 + a_{l+1} = 9,$$
$$a_2 + a_{l+2} = 9,$$
$$\dots$$
$$a_l + a_{2l} = 9.$$

Da cui segue immediatamente che:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2l}}{2l} = \frac{9}{2},$$

che è l'ipotesi nel caso di k pari.

Se k è dispari, l'equazione:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} = \frac{9}{2}$$

non ammette soluzioni, non essendo k divisibile per 2.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Ministero per la Complicazione di Affari (mica tanto) Semplici

Rudy, da quell'originalone che è, apprezza particolarmente le complicazioni assolutamente fini a sé stesse di cose semplici: questo mese è convinto di averne trovata una decisamente interessante.

In realtà, anche la partenza non è poi così semplice, ma la usiamo da talmente tanto tempo che ormai tutti ci siamo abituati; stiamo parlando del calendario, e, in particolare dei mesi.

Il concetto di "mese", se guardate, nel tempo è diventato un qualcosa di estremamente complicato: all'inizio teneva il conto delle lune, con l'inizio del mese coincidente con la luna nuova; considerato che il "mese lunare" dura 29,5 giorni, con un'alternanza di mesi di 29 e 30 giorni si andava avanti decisamente tranquilli, almeno sin quando non sono arrivati tutta una serie di imperatori romani che, con la scusa di mettere ordine, hanno cominciato ad attribuirsi tutta una serie di mesi, e logicamente c'era sempre chi voleva averlo più lungo (il mese); oggi ci siamo abituati, e a forza di "*trentagiornianovembre, conaprilgiugnoesettembre*" la cosa non ci sembra neanche tanto strana.

Un po' di ragione però ce l'avevano: far quadrare le fasi lunari, che rappresentano un ottimo calendario appiccicato al cielo, con il Sole e le stagioni (che vi servono per decidere quando piantare le zucchine) è un lavoro decisamente duro, soprattutto se richiedete una certa precisione[19].

Qualcuno però ci ha provato, e secondo leggenda sta andando avanti da più di 4500 anni senza grossi problemi.

Stiamo parlando dei Cinesi, di cui vorremmo questa volta "smontare" il calendario.

Cominciamo dalla forma semplice, poi vedremo le complicazioni.

Misurate la longitudine solare, ponendo lo zero all'equinozio d'inverno, e dividete l'intero percorso il 24 *Termini Solari*[20] (prima complicazione: il "primo" è a 330°), o **Jié Qì**; di questi, quelli pari chiamateli **Zhong Qì**, o "maggiori"; li trovate,

Inizio della primavera	4 feb	Inizio dell'autunno	8 ago
Pioggia dell'acqua	**19 feb**	**Termine del calore**	**23 ago**
Risveglio degli insetti	6 mar	Rugiada bianca	8 set
Equinozio di primavera	**21 mar**	**Equinozio d'autunno**	**23 set**
Luce chiara	5 apr	Rugiada fredda	8 ott
Pioggia del grano	**20 apr**	**Discesa della brina**	**24 ott**
Inizio dell'estate	6 mag	Inizio dell'inverno	8 nov
Pienezza del grano	**21 mag**	**Piccola neve**	**22 nov**
Barba del grano	6 giu	Grande neve	7 dic
Solstizio d'estate	**21 giu**	**Solstizio d'inverno**	**21 dic**
Piccolo calore	7 lug	Piccolo freddo	6 gen
Grande calore	**23 lug**	**Grande freddo**	**20 gen**

[19] Se vi basta un calendario "suppergiù", vi consigliamo quello celtico: mesi rigorosamente alternati di 29 e 30 giorni, obbligo per equinozi e solstizi di cadere in un mese ben preciso, quando non ci riuscite inserite (dalle parti della primavera o dell'autunno, dove vi serve) un mese intercalare di 30 giorni. Al massimo sgarrate di più o meno un giorno (Rudy è convinto che sia per questo che le feste principali celtiche erano dette *trinox* e duravano tre notti: in quel modo, la festa "vera" la beccate di sicuro); non solo, ma su cicli di 40 dei "nostri" anni riesce addirittura a ripetersi, grazie al 2000 bisestile…

[20] "Termine", qui, nel senso latino di *terminus*, "pietra di confine"

con i loro nomi poetici, nella tabella di fianco: gli Zhong Qì li abbiamo indicati in grassetto; considerate che la data è approssimativa, più o meno un giorno.

Conoscendo il nostro orientamento ai festeggiamenti, vi diciamo subito che due degli Jié Qì sono feste grosse: verso il 5 aprile ("Luce chiara", termine minore) e verso il 21 dicembre ("Solstizio d'inverno", Zhong Qì, termine maggiore); quest'ultimo, poi, è particolarmente importante in quanto fa partire l'anno. Ma cominciamo con qualche regoletta:

1. I calcoli sono basati sul meridiano 120° Est (*il che significa semplicemente, posto che non l'abbiate capito, che siamo in Cina*)
2. Il giorno comincia a mezzanotte (*più pragmaticamente, i Celti lo facevano cominciare al tramontare del sole*)
3. Il giorno di Luna Nuova è il primo giorno del mese (*questo causa dei guai: la Luna Nuova, teoricamente, sorge con il Sole…*)

Le altre regole ve le diamo dopo; adesso, costruiamo qualche nuovo termine.

È evidente che qui abbiamo due calendari, ciascuno dei quali va per conto proprio: il primo, detto **Suì** o, più familiarmente, "Calendario del Contadino" (quello che pianta gli zucchini), comincia all'undicesimo Zhong Qì (Solstizio d'inverno) e segue gli Jié Qì; il secondo, detto **Nian**, è basato sul calendario lunare; il punto di contatto tra questi due aggeggi è un'ulteriore regola:

4. L'undicesimo Zhong Qì (Solstizio d'inverno) cade nell'undicesimo mese (*…e qui i guai si sprecano*).

Infatti, formalmente il Nian è il periodo tra due Capodanni Cinesi, e può contenere 12 o 13 mesi, ciascuno di 29 o 30 giorni; questo significa che può avere 353, 354 o 355 giorni se è un anno normale, o 383, 384 o 385 giorni se si tratta di un anno "eccedente" o, come si dice con termine tecnico più corretto, *embolismico*. Quindi,

   a. Un Suì è embolismico se ci sono 12 mesi lunari completi tra i due undicesimi mesi contenenti l'undicesimo Zhong Qui.

Insomma, se avete una Luna Nuova nei 12 giorni successivi al Solstizio d'inverno, siete in un Suì embolismico. Adesso, per capire dov'è il mese di troppo, ricordatevi che gli Zhong Qì sono dodici:

5. In un Suì embolismico, il mese che non contiene nessun Zhong Qì è il mese embolismico (Rùn Yuè), che assume lo stesso numero del mese precedente.

Con regole del genere, è facilissimo combinare dei guai, ma di questi tratteremo dopo; adesso, vediamo come contare gli anni.

Anche qui, il fatto di poter costruire qualche complicazione non è sfuggito ai cinesi; infatti, vengono ingranati tra di loro due (anzi, tre) diversi metodi di conteggio: i primi due sono le dieci *Radici Celesti* e i cinque *Elementi*; ogni coppia di Radici Celesti (che, di solito, non hanno traduzione) corrisponde a un elemento, come nella tabella qui sotto:

Jia	Yi	Bing	Ding	Wu	Ji	Geng	Xin	Ren	Gui
Legno		Fuoco		Terra		Metallo		Acqua	

Con la notazione che, quando pare più carino, al "Metallo" si sostituisce l'oro o, se preferite, al metallo associate il color oro, all'acqua il nero, al legno il verde, al fuoco il rosso e alla terra il marrone.

A queste radici (o meglio, a questi elementi) vengono poi associati i dodici *Rami Terrestri*, che sono poi gli animali che conoscono tutti:

Topo	Bue	Tigre	Lepre	Drago	Serpente	Cavallo	Pecora	Scimmia	Gallo	Cane	Maiale

Il che, significa che avete un ciclo di 60 anni, e vi basta trovare il nome[21].

Ora, un "anno cinese" è, per una fetta notevole all'interno di un (lasciatecelo chiamare così) "anno normale"; quindi, se adesso siamo nel 2009, possiamo trovare la Radice Celeste sottraendo tre all'anno e calcolandone il modulo 10; resta 6 (Ji), ossia "Terra" (per la seconda volta: lo era anche l'anno scorso); per quanto riguarda il Ramo Terrestre, invece, dopo aver sottratto tre dall'anno si calcola il modulo 12; qui resta 2, quindi siamo nell'anno del Bue (di Terra).

Come accennavamo prima, questo modo bislacco di contare gli anni comincia piuttosto presto; il primo ciclo sessagenario, infatti, parte dal 2697 AC, e se volete potete cominciare a fare i conti da quella data; quindi, di cicli ce ne sono stati, sinora, settantotto.

Adesso ci sarebbe da passare un attimo dal calendario Azteco, che secondo qualche matto stabilisce la fine del mondo nel 2012; siccome però i suddetti matti semplicemente non sanno contare sino a quaranta, lasciamo perdere e restiamo sul calendario cinese; qui, i guai sono rimandati, ma di poco: infatti, succedono nel 2033.

Prima, però, un'altra nota: per fare i conti avete bisogno di una notevole precisione, visto che la Luna Nuova può essere molto vicina ad un Solstizio, pochi minuti prima o dopo, e questo può tranquillamente spostarvi l'inizio del nuovo anno di un mese; dei calcoli relativi, oltre al Ministero dei Riti, se ne occupava un ente rispondente al bellissimo nome di Osservatorio della Nube Purpurea; qui sorvoliamo, lasciando la storia di Matteo Ricci al nostro storico preferito, il giorno che riuscirà a scoprire in che mese sia nato.

Torniamo al 2033; se guardiamo la distribuzione degli Zhong Qì (ZQ) tra l'agosto 2033 e l'aprile 2034 confrontata con l'inizio del mese cinese (M) sui giorni finali dei mesi "occidentali", vediamo una situazione di questo genere:

	ago	set	ott	nov	dic	gen	feb	mar	apr
18							Z 1		
19							M 1		M 3
20						Z 12 M 12		Z 2 M 2	Z 3
21					Z 11				
22				Z 10 M 11	M11 (i)				
23	Z 7	Z 8 M 9	Z 9 M10						
24									
25	M 8								

Ossia, l'ottavo mese non ha uno Zhong Qì, mentre l'undicesimo ne ha due; questo significa che il 2033 ha solo undici mesi completi, mentre il 2034 ne ha dodici; quindi il 2033 non è un anno embolismico, mentre lo è il 2034; quindi il mese dopo il settimo mese non è un mese intercalare, visto che non ci sarebbe lo spazio, e quindi l'ottavo mese è un "falso" intercalare, ossia non contiene Zhong Qì ma non possiamo contarlo come intercalare. La cosa è già successa nel 1832, 1851, 1870 e 1984[22], ma in questi casi non ha dato grossi guai in quanto il Solstizio d'Inverno cadeva molto presto nell'unidicesimo mese; nel 2033, invece, il Solstizio d'Inverno è il *secondo* Zhong Qì del mese, quindi il

[21] Giusto per complicare le cose, gli animali indicano anche l'ora, ma queste hanno una durata doppia rispetto alle nostre: dalle 23 alle 01 il Topo, dalle 01 alle 03 il Bue, dalle 03 alle 05 la Tigre, dalle 05 alle 07 la Lepre, dalle 07 alle 09 il Drago, dalle 09 alle 11 il Serpente, dalle 11 alle 13 il Cavallo, dalle 13 alle 15 la Pecora, dalle 15 alle 17 la Scimmia, dalle 17 alle 19 il Gallo, dalle 19 alle 21 il Cane, dalle 21 alle 23 il Maiale. Qui, purtroppo, non ci sono ulteriori suddivisioni, ma ci pare di ricordare che anche le *Horae* diurne latine durassero un paio d'ore, mentre le *vigiliae* notturne ne duravano tre… Chiedete a Doc, che ha fatto il classico.

[22] Vorremmo attirare la vostra attenzione sul fatto che questi anni ("occidentali") sono bisestili e i corrispondenti cinesi sono embolismici.

mese successivo a questo va considerato embolismico e quindi il 2034 è un Suì embolismico, e il falso mese embolismico del 2034 è il primo falso mese embolismico in un Suì embolismico sin dal 1645; all'epoca la cosa causò un discreto numero di problemi, e noi restiamo in trepidante attesa di vedere cosa succederà anche perché sarà un buon esercizio in attesa del 2129, quando l'evento si ripeterà.

Posto comunque che vi piacciano i nomi poetici "alla cinese", ci affrettiamo a darvene qualcuno di interessante, unitamente al metodo per capire quando usarli.

Un anno si dice "della Doppia Primavera" se contiene due primi Jei Qì (J1: "Inizio della Primavera", dalle parti del 4 febbraio); considerato che l'inizio dell'anno Cinese può essere al più tardi il 21 febbraio, per avere un anno della Doppia Primavera vi serve sicuramente un anno embolismico. Nel caso il Nián (l'anno "lunare") contenga sia due primi Jei Qì che due primi Zhong Qì (Z1: "Pioggia dell'Acqua"), viene detto "della Doppia Primavera e della Doppia Acqua"; il 1984 lo è stato, e anche l'eccezionale 2033 evidentemente lo sarà.

Alcuni scrittori chiamano un anno senza J1 all'inizio ma con J1 alla fine un "anno Cieco[23]" e, se manca anche il J1 al fondo, un "anno Doppiamente Cieco"; al contrario, un anno con J1 all'inizio ma senza J1 alla fine è detto "anno Lucente", mentre se ha un J1 all'inizio e uno alla fine viene detto "anno Doppiamente Lucente", che è un bellissimo sinonimo di anno embolismico; evidentemente, l'anno dopo un anno Doppiamente Lucente è o un anno Oscuro o un anno Doppiamente Oscuro, mentre l'anno precedente può essere o un anno Lucente o un anno Doppiamente Oscuro; considerando che dopo diciannove anni il Ciclo Metonico ci riporta l'anno solare e l'anno lunare ad una buona coincidenza, ci aspettiamo che ci siano sette anni Doppiamente Lucenti, sette anni Doppiamente Oscuri, due o tre anni Oscuri e tre o due anni Lucenti.

A questo punto, vi chiederete come si fa a calcolare l'inizio dell'anno cinese senza prima fumarsi delle cose che generino Nubi Purpuree… Beh, ci sono delle regole approssimate che funzionano *quasi* sempre:

1. Il Capodanno Cinese cade il giorno della seconda Luna Nuova successiva al Solstizio d'Inverno.

Questa regola va bene sin quando non vi capita un mese embolismico dopo l'undicesimo o dodicesimo mese: giusto per darvi un po' di statistiche, tra il 1645 e il 2644 il primo caso si verifica 5 volte, il secondo mai. In questi casi si aspetta la *terza* luna nuova, che comunque cadrà al più tardi il 21 febbraio, visto che per avere l'anno embolismico dovevamo avere una luna pochissimo dopo il Solstizio d'Inverno. Non fidatevi, quindi, quando il Capodanno ("vero") è in particolare ritardo.

2. Il Capodanno Cinese cade il giorno della Luna Nuova più vicina al primo Jei Qì, "Inizio della Primavera" (circa 4 febbraio).

Di questa fidatevi poco: se il Capodanno può cadere tra il 21 gennaio e il 21 febbraio, possono esserci dei grossi problemi nel determinare la luna più vicina, tant'è che nel solito periodo dal 1645 al 2644 sbaglia la data addirittura trentun volte. Qui l'errore si ha quando il Capodanno calcolato con le regole "giuste" è molto tardi o molto presto.

3. Il Capodanno Cinese cade il giorno della Luna Nuova successiva al dodicesimo Zhong Qì, "Grande Freddo" (circa 20 gennaio).

Questa sbaglia se l'inizio è molto tardi: sempre nel periodo considerato, per ventitré volte dava il risultato sbagliato; l'ultima volta nel 1985, adesso comunque siamo tranquilli fino al 2053.

[23] O "anno Scuro"; abbiamo dei dubbi sulla traduzione. Stiamo lavorando su un testo inglese che sciaguratamente, in questo unico caso, non riporta l'originale cinese (non stiamo scherzando, un paio di Termini avevano delle traduzioni fetenti e li abbiamo cercati in cinese). L'ipotesi "Scuro" è suffragata dal caso immediatamente successivo.

1980	16 feb	1999	16 feb
1981	05 feb	2000	05 feb
1982	25 gen	2001	24 feb
1983	13 feb	2002	12 feb
1984	02 feb	2003	01 feb
1985	20 feb	2004	22 gen
1986	09 feb	2005	09 feb
1987	29 gen	2006	29 gen
1988	17 feb	2007	18 feb
1989	06 feb	2008	07 feb
1990	27 feb	2009	26 gen
1991	15 feb	2010	14 feb
1992	04 feb	2011	03 feb
1993	23 gen	2012	23 gen
1994	10 feb	2013	10 feb
1995	31 feb	2014	31 gen
1996	19 feb	2015	19 feb
1997	07 feb	2016	08 feb
1998	28 gen	2017	28 gen

Poche righe sopra, accennavamo al Ciclo Metonico; questo potrebbe portare a pensare che, sui diciannove anni, ci sia una certa periodicità, e infatti è vero: se confrontate i due periodi nella tabella che segue, vi accorgete che la differenza al massimo è di un giorno, con l'eccezione del 1985; ma, siccome sappiamo che il 1984 era un anno di Doppia Primavera e Doppia Pioggia, in questo caso il guaio era ampiamente atteso. Non solo, ma per i più pigri abbiamo anche scelto uno dei due cicli in modo tale che l'anno attuale sia compreso, così non avete scuse per non festeggiare.

Certo che chiamare i mesi "primo, secondo, eccetera" sarà matematicamente comodo, ma è di sicuro poco romantico. Non preoccupatevi! I mesi seguono i Dodici Rami Terrestri (quelli degli animali).

Adesso che siete tranquilli, cominciate a preoccuparvi: non solo in questo caso si chiamano Colonne, ma l'undicesimo mese è il mese del Topo (primo Ramo Terrestre), il dodicesimo è il mese del Bue (secondo Ramo Terrestre), e il primo è il mese della Tigre (terzo Ramo Terrestre), mentre considerate il mese embolismico come un "prolungamento" del mese precedente. "…E perché si comincia l'undicesimo mese?" Ma perché lì c'è il Solstizio d'Inverno, è evidente!

Esiste un limite alla tolleranza umana e quindi, anche se qualche matto continua a farlo (ad esempio, gli astrologi cinesi), il ciclo sessagesimale *sui giorni* è ormai abbandonato da tutti; ci limitiamo a notare il fatto che ha comunque un sua utilità, perché quando prolungate il nome di un mese sul mese embolismico successivo, vi serve un modo per capire dove cavolo siete finiti.

Complicato? Certo. Ma sicuramente più ragionevole di *trentagiornianovembre*. E se usassimo questo, ogni tanto potreste leggere il tredicesimo RM dell'anno.

> *Iniziato nell'ora del Cane, il diciottesimo giorno del mese della Tigre; terminato nell'ora della Pecora, il ventiseiesimo giorno del mese della Lepre, anno del Bue di Legno.*

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms