Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 119 – Dicembre 2008 – Anno Decimo

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM118 ha diffuso 2214 copie e il 30/11/2008 per Google eravamo in 37'400 pagine.

Questa scultura (fotografata dal noto *Piotr Rezierovic Silverbrahms*) la trovate alla stazione di Zurigo o nelle migliori librerie (nel senso che, se la trovate, la libreria è veramente ottima).

1. Per gioco

Mi sentivo in colpa (…)
perché passavo tutto il tempo a giocare,
quando si supponeva che dovessi fare matematica.
*Poi (…) ho capito che giocare **È** fare matematica*

La matematica non è un gioco.

Non è necessariamente facile, piacevole, divertente. La matematica non è leggera, non è una disciplina riservata solo a spiriti nobili o brillanti, o a quei personaggi necessariamente sbadati, distratti, dipinti sempre a mezza strada tra il genio e l'autismo. Non è un'attività destinata ad esseri umani speciali, fuori dalle regole, esterni al catalogo della normale umanità. Un giorno, quando venne a sapere che un premio Nobel per la Fisica si divertiva a suonare il tamburo, un giornalista trovò la cosa tanto strana e divertente che assillò Richard Feynman per avere una sua foto mentre era impegnato in una travolgente rullata ai bonghi. Feynman, sdegnato, gliela rifiutò, e non certo perché di quelle foto si vergognasse: la si trova infatti ancora in molti dei suoi libri; gliela negò perche trovava *offensivo* che il giornalista ritenesse eclatante il fatto che un fisico teorico potesse divertirsi con una attività che sarebbe stata giudicata del tutto normale per un qualsiasi altro essere umano.

Dopo quasi dieci anni nei quali abbiamo costantemente cercato di mostrare, nel limite delle povere possibilità di questa rivista, il lato divertente e piacevole della matematica, ci sembra opportuno ricordare che c'è una grande differenza tra *essere* e *poter essere*. La matematica non *è* sempre facile e divertente, ma *può* esserlo. La matematica non *è* un gioco, ma *può* diventarlo. Non è riservata solo alle grandi menti, ma spesso le grandi menti la frequentano. E, talvolta, le grandi menti che viaggiano dentro la matematica riescono ad accendere luci particolari e impreviste che mettono sotto una nuova prospettiva alcuni aspetti della matematica, rendendoli *giocosi*. Altre volte, ma ancora più raramente, il viaggio dentro la matematica assume contorni talmente insoliti da realizzare l'esatto contrario, trasformando i giochi in matematica. Eppure, il viaggio è sempre lo stesso: sono solo gli occhi dei viaggiatori, a cambiare.

Non è un viaggio lungo, da casa di Alice alle Cascate del Reno. Poco più di quaranta chilometri nel profondo nord elvetico, per percorrere i quali non serve molto più di mezz'ora. Wallisellen è subito fuori Zurigo, già nella direzione giusta: e da lì basta dirigersi verso settentrione, superare Winterthur, e proseguire fino a Schaffhausen, nome che in italiano è drasticamente semplificato in Sciaffusa. E Sciaffusa è città trans-renana, oltre il gran fiume: anche se il Reno segna per gran parte del suo percorso iniziale il confine tra Svizzera e Germania, questa città vive serena il ruolo di eccezione geografica: pur poggiata sulla riva destra del fiume, rimane pervicacemente svizzera.

Mezz'ora di viaggio è nulla, se la colonna sonora viene affidata ad un logorroico: Piotr aveva cominciato a parlare subito dopo l'invito del Capo.

– Se conosco Conway? Beh, a dire il vero…

– «…a dire il vero non è che ci sia molto da dire, su questo matematico…» – in coro e con la vocina canzonatoria, Rudy e Alice cantilenano la frase rituale di Piotr.

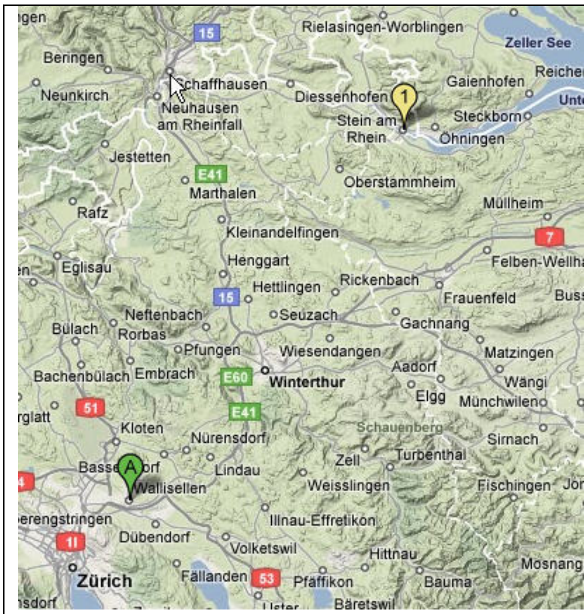
– Ma piantala, Doc! – ribadisce poi Alice – Dici sempre così, all'inizio, e poi vai avanti a parlare per mezza giornata. Guarda che alle Cascate ho intenzione di fare una sana pausa dalla matematica, e quando dico pausa

intendo almeno un'ora di amena conversazione su argomenti diversi, è chiaro?

– E tu guarda che, per una volta, volevo dire che di Conway c'è perfino troppo, da raccontare; questo significa che dovremo tagliare un po' di aneddoti.

– Balle. Sappiamo benissimo che riesci a produrti in fantastiche sintesi, all'occorrenza. In quaranta minuti si può raccontare anche la storia del mondo.

– Sì, comincia, dai. Poi, guarda: siamo ormai ufficialmente in viaggio; o parli tu, o accendo la radio e ti sommergo di radiogiornali in tedesco.



1 *Il viaggio verso le Cascate del Reno.*

A Doc non resta che allungare le gambe, abbassare il finestrino, appoggiare il gomito come ogni turista in viaggio di piacere, e partire con la narrazione.

A pensarci con un minimo d'attenzione, è decisamente curioso che attività profondamente diverse sia nella forma che nelle intenzioni abbiano il medesimo nome. Il gattino che insegue il gomitolo, il quattordicenne che frulla istericamente i pollici sopra il telecomando della console d'un videogioco, i trentenni sovrappeso che rincorrono in un bagno di sudore una palla sui campi di calcetto, il pensionato ultraottantenne che misura con estrema accuratezza la distanza delle bocce dal boccino: tutti vengono rubricati come impegnati in azioni di *gioco*. Sono azioni diversissime, eppure non vi è contraddizione: anche se le definizioni di gioco sono tante quante le discipline che tentano di classificarlo, più o meno tutte concorderebbero nel classificare gli esempi sopra riportati come giochi a tutti gli effetti. Nella sua accezione più generale, un gioco viene solitamente definito come un'attività che definisce un *obiettivo* da raggiungere seguendo determinate e specifiche *regole*. L'accezione generale è senza dubbio esatta, ma ha certo il difetto di essere troppo generale: dilatando in maniera opportuna i significati, in questa definizione possono rientrare anche le guerre, ogni tipo di progetto o di pianificazione industriale, e forse perfino i matrimoni. Qualche ulteriore restrittivo dettaglio potrebbe tornare utile, ed è a questo punto che le definizioni variano in funzione delle discipline che acconsentono a considerare la *natura* dei giochi. Il gattino col gomitolo si adatta bene all'idea di Sigmund Freud, che vede nel gioco essenzialmente un'imitazione degli adulti, e di conseguenza una pratica educativa. Il micetto imita, non si sa quanto consapevolmente, mamma e papà; mentre il gomitolo, del tutto inconsapevolmente, imita il topo; il gioco diventa quindi al tempo stesso una preparazione alla vita adulta e un'imitazione della stessa. Però quest'interpretazione non rende ragione del *piacere* del gioco: le attività di formazione non sono sempre e necessariamente piacevoli, come legioni di studenti sono pronti a testimoniare; mentre il gattino – e con lui il ragazzino ai videogiochi, i giocatori di calcetto e gli iscritti alla bocciofila – sembra divertirsi un sacco.

Filosofi importanti, da Aristotele a Kant, da Huizinga a Bateson, hanno indagato su aspetti particolari del gioco: Kant proprio sulla sua piacevolezza, Huizinga sul ruolo centrale che la rappresentazione giocosa ha nella formazione del vero e proprio tessuto culturale e dei suoi riti; ma in genere la filosofia sembra avere interesse solo per aspetti molto particolari e limitati di un concetto che invero sembra assai sfaccettato.

L'approccio della sociologia è invece molto più articolato: animato da un sano spirito analitico, Roger Caillois riteneva che un gioco, per essere pienamente definito tale, dovesse avere le caratteristiche di Libertà, Esitazione, Regolamento, Improduttività, Separazione e Artificiosità[1].

Per *Libertà* si intende la necessità di avere la spontanea decisione di mettersi a giocare da parte dei partecipanti: nel momento stesso in cui un giocatore è costretto a farlo contro la sua volontà, la costrizione snatura tutto l'insieme e non si può più parlare propriamente di gioco. L'*Esitazione*, o meglio ancora l'*incertezza*, chiarisce che il gioco non deve avere l'esito definito a priori: in qualche modo questo è particolarmente vero in matematica, perché la matematica (specie la nostra amata matematica ricreativa) si caratterizza spesso come assassina di giochi: persegue febbrilmente la tentazione di analizzarli completamente, definendo pienamente tutte le loro pieghe tattiche e strategiche; solo che, al pari del bambino che analizza pienamente il meccanismo della macchina sventrandola, quando ci riesce lascia sul campo un gioco defunto e ovviamente non più giocabile.

Per *Regolamento* si intende la necessità di avere delle regole specifiche del gioco, ma non solo: automaticamente, l'accettazione delle regole specifiche del gioco produce anche la sospensione di alcune delle regole normali di convivenza. A differenza di due pugili, due individui in coda alla posta non possono normalmente prendersi a pugni e, se è un giocatore onesto, anche l'amministratore delegato della multinazionale deve dichiararsi sconfitto se il fattorino gli da scacco matto, possibilmente evitando di licenziarlo in tronco subito dopo per vendicarsi dell'umiliazione subita. Quest'aspetto, in realtà, è specificato anche meglio nel principio di *Separazione*, che richiede che l'attività ludica sia ben collocata all'interno di limiti definiti di spazio e di tempo. Al pari della tragedia greca, il gioco deve iniziare, finire e, soprattutto, non tracimare fuori dal palcoscenico dove viene rappresentato. Appena finita la partita a scacchi in sala mensa, il fattorino deve tornare a fare il suo mestiere senza pensare di meritarsi il posto migliore al tavolo del Consiglio di Amministrazione.

Il concetto di *Improduttività*, ovvero la richiesta che il gioco non generi né beni né ricchezze, potrebbe sembrare improprio, se non altro perché esiste l'intera categoria dei giochi d'azzardo che invece si basano proprio sullo scambio veloce e ripetuto di denaro. È però vero che l'azzardo cambia radicalmente la natura ludica del gioco: tutti gli altri aspetti vengono offuscati dal desiderio della vincita, tanto è vero che i giochi d'azzardo hanno in genere tanta maggiore diffusione quanto più sono semplici, veloci e basati quasi esclusivamente sulla fortuna. Questa loro capacità di snaturare gli altri aspetti ludici dovrebbe essere sufficiente a poterli rubricare come *non-giochi*, almeno secondo la definizione di Caillois. Infine, il gioco deve avere la caratteristica dell'*Artificiosità*: in altri termini, deve mantenersi separato e distante dal reale, altrimenti perde la sua natura. Cosa che sanno bene gli adolescenti che dicono, mentendo, di provare a fidanzarsi *per gioco*: in realtà non c'è nessun gioco da giocare, ma una serissima e cauta esplorazione di sentimenti reali, per vedere se possono in qualche modo consolidarsi nella realtà.

Quale che possa essere la reale e definitiva natura del gioco, resta indubitabilmente certo che i giochi è di gran lunga meglio giocarli che classificarli. È assodato che giocare stimola l'intelligenza e la creatività dei bambini, e questo giornalino che state leggendo è la prova provata che si può parlare di giochi e di matematica anche molto a lungo, almeno per un decennio.

[1] In realtà, la classificazione di Caillois usa alcuni termini diversi da quelli riportati (ad esempio, anziché *Esitazione* riporta un più chiarificante *Incertezza*) e l'ordine di esposizione delle caratteristiche è solitamente diverso. Ma ci pareva importante avere un acronimo giocoso che ricordasse l'esito del gioco, visto che di giochi si sta parlando: e, messe in questo modo, le iniziali delle caratteristiche formano la frase *LE RISA*, che ci pare una buona sintesi dell'obiettivo finale di gran parte dei giochi.

Il miglior sponsale contemporaneo tra il regno dei giochi e quello della matematica è indubbiamente John Horton Conway. Non ci capita molto spesso di celebrare matematici ancora in vita, ma quando succede[2] è una buona scusa per fare dei veri e propri auguri di buon compleanno; e questo mese siamo molto contenti di poter metter settantuno candeline virtuali sulla torta di John. Conway è infatti nato il 26 Dicembre 1937, a Liverpool, Regno Unito.

2 *John Horton Conway.*

– Tanto per cominciare, questa biografia sarà incompleta, per fortuna. Voglio dire che la biografia definitiva di John Horton Conway non può ancora essere scritta, visto che è ancora vivo. È nato il giorno di Santo Stefano del 1937, nella città dei Beatles. E tutto sommato poteva tranquillamente far parte dei Fab Four*, a giudicare dall'età: Lennon era del 1940, come Ringo Starr; McCartney del 1942 e George Harrison del 1943: lui più vecchio, ma di poco: poteva finirci benissimo in mezzo, dal punto di vista delle coordinate spaziali e temporali.*

– Sì, solo che a lui piacevano le corde dei cerchi, non quelle delle chitarre. Doc, stai già andando fuori tema.

– Dici, Treccia? Forse; ma mica tanto… anche se Conway ha ormai superato i settanta, è inevitabile pensare a lui come un giovane irrequieto e tutt'altro che convenzionale: se non beatle*, almeno* beatnik, hippie*. E questo a prescindere dalla sua età. Se Rudy ti ha anticipato che avremmo parlato di lui, significa che sai già che è stato lui ad inventare i Numeri Surreali; quello che forse non sai è li ha creati e sviluppati per puro diletto, e in un periodo in cui doveva fare ben altro. A questo proposito, racconta spesso che «...Si arriva ai surreali giocando giochi. Mi sentivo in colpa, a Cambridge, perché passavo tutto il giorno giocando, mentre si supponeva che dovessi fare matematica. Poi, quando ho scoperto i numeri surreali, ho capito che giocare questi giochi è matematica…».*

– Doc, non c'è un'altra frase simile, da parte di un altro matematico inglese?

– Non mi pare, GC… a meno che tu non intenda la celebre citazione di Littlewood sulle barzellette: «Una barzelletta matematica è meglio, e migliore matematica, di una dozzina di articoli mediocri».

– Sì, è vero, ho confuso giochi e storielle: pensavo proprio a quella.

– Beh, le barzellette e i giochi, specialmente i giochi di Conway, hanno questo in comune: sono divertenti. Credo che la maggior caratteristica di John Horton sia proprio quella di divertirsi, mentre fa matematica, e questa è davvero una cosa meritoria, a mio parere. Se ritornate un po' alla storia della Teoria dei Giochi, ricorderete che non nasce affatto con l'intenzione di essere divertente, anzi. Anche se il senso comune associa alla parola gioco il concetto di divertimento, questa è solo una delle associazione possibili, e infatti all'inizio la TdG non aveva proprio niente di divertente. Ricordate? Il termine gioco serviva a spiegare che l'oggetto dell'analisi era una competizione in cui

[2] Se la memoria non ci inganna, dovrebbe essere successo in precedenza solo per Alexander Grothendieck (RM086, Marzo 2006).

uno o più soggetti cercano di sopraffare gli altri, proprio come accade in molti giochi da scacchiera; ma il reale campo di applicazione era la guerra, che è la cosa meno divertente del mondo. Così, per molto tempo, si è convissuti con questo strano e ambiguo paradosso, in cui i giovani che odiavano la matematica rimanevano esterrefatti nello scoprire che proprio la matematica aveva al suo interno una Teoria dei Giochi: incuriositi e increduli cercavano timidamente di capirne qualcosa, e quando ci riuscivano scappavano via a gambe levate, convinti una volta per tutte che la materia fosse talmente corruttrice da rendere indigeribili anche cose piacevoli come i giochi. Poi, per fortuna, è comparso Conway…

A voler trovare ragioni in ogni evento, si potrebbe provare a considerare cosa significa avere una settimana di vita in una industriale città inglese quando un anno terribile come il 1938 fa il suo ingresso nella storia. Significa passare la primissima infanzia con il terrore continuo dei bombardamenti, significa arrivare a sette-otto anni, nel 1945, e sentirsi raccontare che la guerra è finita senza sapere esattamente come possa essere la vita in tempo di pace. Significa essere ragazzino in periodo di dopoguerra povero e duro; ma forse, proprio perché non si hanno termini di paragone di pace e di ricchezza, l'età potrebbe essere quella che meglio si adatta per correre sulle macerie, e trovare la cosa divertente. Così, a cercar ragioni, si finisce facilmente a pensare che la gran voglia di giocare di Conway potrebbe essere un residuo dei giochi rubatigli a suo tempo dalla sua infanzia guerresca e povera. Ma forse sono solo ipotesi troppo romanzate[3].

… che è riuscito a fare il percorso esattamente inverso: ha fatto matematica partendo dai giochi, rendendola divertente. E dico una matematica tutt'altro che banale.
– Tutto per mezzo dei Surreali?
– Oh, no. Non solo, almeno: non bisogna neanche cadere nell'errore opposto, pensando che i Surreali siano solo una famigliola di numeri che servono per analizzare qualche gioco da tavolo. La loro costruzione è ardita e rigorosa, e in molti sensi possono essere considerati la naturale estensione dei numeri Complessi, così come i Complessi sono stati l'evoluzione dei Reali. Ma comunque no, questi non sono certo la sua unica creazione. Ad esempio… beh, Treccia, è impossibile che tu non abbia visto da qualche parte il gioco Life*: lo si incontra spesso, da quando i personal computer sono diventati una realtà.*
– Dici quella specie di screen-saver, con lucine che si accendono e si spengono?
– Sì, solo che detto in questo modo sembra solo un wallpaper animato, e neanche dei migliori. Invece è davvero molto di più; è proprio vero che la terminologia e la pompa con cui questa viene usata conta molto, e anche in matematica, non solo in politica. Ricordi quando parlavamo degli automi cellulari che cercava di costruire von Neumann?
– Certo! Mi ricordo di aver pensato che fosse pura fantascienza! Robot intelligenti che si riproducono, roba da far impallidire anche Asimov…
– Vedi? In realtà le intenzioni di von Neumann non arrivavano a voler costruire lucide macchine androidi, ma una terminologia magniloquente finisce sempre per scatenare l'immaginario. Poi, in pratica, il dottor Stranamore non riuscì a fare granché in merito, ma Life di Conway è probabilmente la cosa che più si avvicina alle intenzioni di Von Neumann, che aveva ricondotto il modello matematico del suo automa ad una dinamica di griglie rettangolari di celle; ma aveva inserito molte regole

[3] O forse neanche troppo, a sentire quel che dissero gli stessi Fab Four: "*Liverpool può essere molto triste il sabato pomeriggio. E oggi è soltanto mercoledì*" [The Yellow Submarine, c.a.m.d.G.C. (che starebbe a significare: "citato a memoria dal Gran Capo")].

comportamentali assai complicate. Conway, sempre orientato all'aspetto ludico delle cose, operò invece delle radicali semplificazioni delle regole, e così Life prese letteralmente vita nel 1970. Fu reso celebre da un articolo di Martin Gardner sulla sua celeberrima rubrica Giochi Matematici *di* Scientific American*, e da lì scatenò una quantità di reazioni non solo ludiche, e non solo matematiche. Non trovate che questo processo sia estremamente significativo, nella storia della scienza del Novecento?*
– Beh, mi sembra divertente e memorabile, ma dall'enfasi che si stai mettendo ho l'impressione che tu ci legga qualcosa di più, in questa storia, – dice scettica la voce che arriva dai sedili posteriori.

Il punto è che, molto spesso, il gioco è un lusso; e invece non dovrebbe mai esserlo. Se giocare significa formarsi, bisognerebbe tener sempre ben presente che una buona formazione crea delle persone migliori, e che pertanto alle persone è bene insegnare a giocare dei buoni giochi. Se giocare significa divertirsi, è bene ricordare che il divertimento dovrebbe essere innalzato quasi a diritto, non appena le condizioni economiche lo consentono. È certo molto più importante che ogni bambino del pianeta abbia di che sfamarsi e dissetarsi, prima di avere giochi e giocattoli a disposizione. Ma sono proprio giochi e giocattoli i migliori generatori di sorrisi, e bisognerebbe ricordarsi che un bimbo sorridente è solo di un epsilon meno importante di un bimbo sfamato.

Su scale decisamente meno importanti e impegnative, la considerazione in cui si tengono i giochi è in genere un buon termometro sulla maturità di una cultura. È sempre un po' triste vedere nazioni che rivendicano disperatamente la necessità di avere "persone serie" nei posti di comando e controllo, come se la competenza professionale e il rigore etico implicassero automaticamente un certo grado di repulsione verso gli aspetti ludici della vita. Forse è un caso, ma i militari sono sempre raffigurati con volti estremamente seri e determinati.

Anche la scienza è talvolta affetta da una sorta di "complesso di serietà", come se metterne in evidenza qualche aspetto giocoso potesse sminuire il valore globale dell'oggetto scientifico, anziché impreziosirlo. Così, non deve essere stato semplice, almeno all'inizio, destinare una rubrica d'una rivista di divulgazione scientifica (e quindi, per definizione, serissima) a dei giochi matematici. Ma se la cultura scientifica è abbastanza forte, innestata nel tessuto sociale e in una consapevolezza matura dei professionisti della scienza, allora accetterà di buonissimo grado l'idea di divertirsi e di divertire, perché ha superato la paura iniziale di non essere presa sufficientemente sul serio. A differenza dei bambini, che prima giocano e poi diventano adulti, sembra che la scienza debba prima diventare adulta, e soltanto poi riconoscersi la libertà di giocare.

– Già. Forse io esagero un po' l'importanza della cosa, ma non ti sembra rivoluzionario che un concetto essenzialmente matematico nasca da giochi, si trasformi in gioco, venga trattato in una rubrica di giochi e riesca, forse proprio per questo, a suscitare una pletora di reazioni da parte di tutto il mondo culturale contemporaneo, raggiungendo l'attenzione anche dei non-matematici? Credo che l'immagine che il grande pubblico ha oggi del matematico sia diversa da quella che si aveva mezzo secolo fa, e questo anche per merito (o per colpa, se siete dei tradizionalisti) di John Horton Conway e del suo amico Martin Gardner. Forse non avete ben presente cosa accadde: si ebbero moltissimi commenti entusiasti e sorpresi dopo la comparsa di Life, soprattutto da biologi e filosofi. Visto che il tema del nostro viaggio è la Teoria dei Giochi, forse è meglio fare una breve introduzione con un po' di termini tecnici: Life è un cosiddetto zero-player game, cioè un gioco senza giocatori. Questi giochi non erano molti diffusi, prima dell'avvento dei PC, ma adesso sono un tipo relativamente comune: si tratta di giochi che procedono da soli una volta stabilita una configurazione iniziale e delle regole di processo. Nel

caso di Life, si tratta semplicemente di avere delle celle (che possono essere rappresentate benissimo dalle caselle d'una scacchiera, dai quadratini d'un foglio di carta, o dai pixel d'uno schermo), che possono essere vive o morte, e che possono nascere o morire a seconda di alcune semplice regole comportamentali.

– Forse dipenderà dal fatto che il traffico mi distrae, ma confesso che non mi è davvero chiaro cosa tu intenda con regole comportamentali, specie se applicate a caselle d'una scacchiera o pixel d'un computer.

– È più semplice di quel che probabilmente credi. Una cella viva è una casella con una pedina o, se preferisci, un pixel acceso sullo schermo. Una cella morta è una casella vuota, o un pixel spento. Due celle adiacenti vive si dicono vicine. Le regole saranno del tipo «Una cella che abbia meno di due vicine, muore (diciamo di solitudine)»; oppure «una cella che abbia più di tre vicine, muore (per sovrappopolazione, magari)». Ma anche: «una cella con due o tre vicine rimane stabile»; e, soprattutto: «una cella morta con tre vicine vive, nasce».

– Credo di capire: si comincia disegnando una configurazione iniziale, magari anche casuale, poi si vede come cambia la situazione applicando tutte le regole. E così via, riapplicandole di volta in volta…

– Esattamente così, Alice.

– Adesso capisco. Sembra carino: quando lo vedevo sugli schermi non capivo che fosse frutto di regole precise, credevo fossero solo disegni casuali, anche se si notava una certa regolarità… E ce ne sono tante, di regole così?

– Niente affatto. A dire il vero, ho barato un po': non ti ho fatto degli esempi di regole, ma ti ho puntualmente elencato le regole di Conway: nella sua forma base, Life ha esattamente le quattro regole che ti appena elencato.

– Capisco il successo che deve aver avuto, specialmente in un'epoca relativamente pioneristica per la programmazione. Però mi sembra un po' eccessivo il gran parlare che se ne è fatto. Capisco gli amanti dei giochi e gli informatici, ma i biologi che c'entrano? E i filosofi, poi?

– Te l'ho detto, non devi sottovalutarlo: anche se non sembra, il meccanismo di Life già basta a renderlo omologo ad una perfetta Macchina di Turing*, il che significa che è potenzialmente in grado di calcolare qualsiasi cosa sia calcolabile per via algoritmica. Poi, quelle che tu interpretavi come filmati da screen-saver, erano configurazioni di Life stabili, regolari e ripetibili: e talvolta talmente complesse e articolate da essere appunto belle, e meritevoli di essere osservate anche solo la loro bellezza. E il fatto che una configurazione dinamica possa diventare stabile e regolare, prendendo vita semplicemente da un codice fatto da pochissime regole elementari, era abbastanza rivoluzionario, all'epoca. Era interessante per i fisici, che cercano sempre grandi leggi universali basate su principi semplici; per gli economisti, che sperano sempre di trovare tracce di regolarità nella imprevedibile confusione dei mercati; e naturalmente per i biologi, che non potevano evitare di essere tentati di riconoscere in questo automatico ciclo di vita virtuale una qualche parentela con il ciclo di vita reale. I filosofi, poi, incantati dalla regolarità e dal respiro delle configurazioni del gioco, prodotte quasi per magia da pochi e semplici comandamenti, arrivavano a leggerci una regolarità implicita nell'universo, e addirittura a mettere in dubbio il concetto di libero arbitrio… Siamo già a Winterthur?*

John Conway ha percorso tutte le tappe che si richiedono ad un grande matematico anglosassone. Dopo la laurea prende il dottorato a Cambridge nel 1964, e resta nella più celebre delle università scientifiche d'Inghilterra fino al 1986. Nei ventidue anni che separano le due date svolge una quantità incredibile di ricerche, pubblica un buon numero di articoli, e comunque sembra sempre non riuscire a distinguere bene tra matematica seria e matematica divertente. Il sospetto, del resto inevitabile, è che per lui la distinzione fosse del tutto fittizia. J.H. Conway non sembra voler rispettare tutte le regole definite da Caillois: il suo giocare non è separato dalla realtà, non è diversamente regolamentato, non è artificioso. Anzi, sembra proprio essere il suo testardo convincimento che la vita è gioco e il gioco è vita[4], a far sì che anche a Princeton, dove si è seduto alla cattedra che fu di Von Neumann, continui ad alternare lezioni accademiche e partecipazioni ai campi di matematica con studenti delle medie e del liceo.

Rudy, di dietro, non trattiene una risata sarcastica.
– Winterthur, Doc? Sapevo già che quando parli perdi il senso del tempo, ma non credevo che perdessi anche quello dello spazio… l'abbiamo superata da un pezzo. Siamo ad una decina scarsa di chilometri dalle Cascate, ormai. Guarda quel cartello: Neuhausen am Rheinfall, 9 km.
– Beh, questa storia meritava d'essere raccontata, – interviene Alice – sono contenta d'aver capito come funziona Life. E insomma, Conway non ha inventato solo i Surreali, ma anche questo gioco. Capisco che sia famoso…
– Ma il guaio è che ha fatto un sacco di altre cose ancora! Come diavolo faccio a parlarvene in cinque minuti, adesso?
– È facile: parli per cinque minuti e poi smetti. Tutto qui.
– Sempre spiritoso, vero, GC? Vediamo cosa riesco a dire di corsa, come una voce d'enciclopedia letta da un telegrafista: bimbo prodigio, la madre racconta che a quattro anni si divertisse un mondo a recitare le potenze di due. Non sa ancora bene cosa voglia dire la parola matematica, ma sa già che da grande vuole fare il «matematico a Cambridge». Si laurea nel 1959 e comincia ad occuparsi di Teoria dei Numeri; risolve un problema relativo alla scrittura dei numeri come quinte potenze, ma, lo sapete già, passa il tempo soprattutto giocando nella sala comune: backgammon, principalmente. Nel '64 prende il dottorato, si dedica alla logica matematica, ma con scarso successo; al punto di rischiare addirittura di cadere in depressione. L'anno seguente, John Leech stava cercando qualcuno che lo aiutasse a risolvere un problema di impacchettamento di sfere: gli serviva un esperto di Teoria dei Gruppi, e lui non lo era affatto. Neanche Conway lo era, al tempo, ma lo diventò in fretta; si buttò sul problema e, quando ne emerse, era un matematico diverso.
– Vuoi dire che è diventato un esperto di Teoria di Gruppi?
*– Voglio dire che, con ogni probabilità, è diventato il massimo esperto di Teoria dei Gruppi: affrontando il problema di Leech scoprì un nuovo gruppo finito semplice di ordine 8.315.553.613.086.720.000, e se il numero dell'ordine vi spaventa, dovreste leggere il libro di Marcus du Sautoy, «*Finding Moonshine*», dove si racconta appunto la caccia al Moonshine, un gruppo di ordine ancora maggiore, e davvero mostruoso. E guardate che il chiaro di luna c'entra poco: il Moonshine si chiama così per colpa di giochi di parole inglesi, che stanno a cavallo tra la pazzia e la distillazione illegale di whisky.*
– Uh, mi sto perdendo anche senza formule… per fortuna che le Cascate sono ormai davvero vicine…
– Il libro di du Sautoy lo trovi anche in italiano, Treccia, col titolo Il disordine perfetto*; e riesce a dare una buona idea di come dev'essere lavorare con Conway. Ti basti sapere che l'autore stava per entrare nel gruppo di lavoro, e che Conway come prima cosa ragionò sul suo cognome: nel gruppo tutti i partecipanti avevano il cognome di sei lettere e un doppio nome di battesimo, e per accettare il nuovo arrivato gli chiesero se fosse disposto a rinunciare al «du» e a procurarsi un secondo nome oltre a Marcus. Non scherzavano: il grande risultato del team di Conway è stato* l'Atlante dei Gruppi Finiti*, e gli*

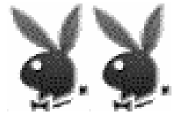
[4] E forse è un caso, forse no, che il suo *gioco* più famoso si chiami proprio *Life*.

autori sono J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker e R.A. Wilson. L'Atlante in italiano non esiste e, soprattutto, nessuno è preso la briga di tradurre mai il libro più famoso di Conway, quel Winning Ways for your Mathematical Plays *che è un autentico testo sacro per i giochi matematici, e…*
– Ci siamo!
– Come? Dove?... No! Non ancora, non parcheggiare, aspetta! Ve l'ho detto che, magia delle coincidenze, nel 1986 è finito sulla cattedra che fu proprio di von Neumann, a Princeton? Che Knuth (sì, proprio quello che ha inventato la notazione per i numeri grandi, come il numero di Graham) ha scritto un racconto per spiegare i Surreali? Anzi, a dire il vero è stato proprio Knuth a chiamarli surreali *per primo, in quel racconto… E poi, tutto quello che Conway ha fatto per la Teoria dei Nodi? E per le forme quadratiche? E per le tassellature? E… oh per la miseria! Tutta la teoria del Doomsday; e quanto ha scritto sui poliedri; e sulle variabili nascoste in Meccanica Quantistica; e…*
– … e basta, adesso! Mi dispiace per J.H., ma ormai siamo davvero arrivati. Guardati intorno, una buona volta; e nota che il motore è spento già da un po'.
– Dannazione, Treccia. Non si può fare così. Non si può parlare di Conway nel breve respiro d'asfalto che va da Wallisellen a Neuhausen am Rheinfall.
– Su, su… ti rifarai la volta prossima, Doc.
– Puoi giurarci, GC. L'anno prossimo: altro che gitarelle di mezz'ora, o viaggetti da Torino a Zurigo. Ci trasferiremo in Portogallo e da lì partiremo per un placido Lisbona-Vladivostok. Tenetevi pronti.
– Come no! – rispondono i due in coro.

Con una punta di sarcasmo, forse.[5]

[5] Le parti in corsivo di quest'articolo, prese consecutivamente, costituiscono l'intero capitolo 24 (dedicato a John Horton Conway) del libro *Rudi Ludi* di R.Clerico, P.Fabbri e F.Ortenzio, CS_Libri, Torino, 2008.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Ragnatela condominiale			
Qual è la chiave?			

2.1 Ragnatela Condominiale

Una cosa che lascia perennemente perplessi i nostri amici è che Doc, vivendo in un luogo sperduto nelle campagne del Canavese, sia dotato di una meravigliosa linea ADSL mentre Rudy, residente a duecento metri dalla ex sede di un'azienda di telefonia, continua a passeggiare sulle autostrade dell'informazione grazie ad una connessione mobile a bassissima velocità.

La situazione di lumaca connettiva di Rudy minaccia, però, di cambiare sul breve periodo: infatti, in sede di riunione condominiale, è nata l'idea di mettere in piedi una connessione Wi-Fi utilizzabile dagli otto residenti; il guaio è che la si vorrebbe tenere "chiusa", e Rudy (non essendo d'accordo) non ha la minima intenzione di fare l'amministratore di rete. E quindi ha lasciato discutere il condominio, divertendosi da matti a vedere cosa riuscivano a tirare fuori e inserendosi, ogni tanto, con il preciso intento di complicare la situazione. Il problema principale, a quanto pare, era riuscire a gestire l'accesso di amministratore garantendo l'accesso anche in assenza dell'unico che ci capisce sul serio. Tanto per cominciare, è stata effettuata una valutazione *INGOT*[6] dei condomini: Rudy ha barato ed è rientrato tra i "Silver", e al momento abbiamo un "Gold", un "Silver" e quattro "Bronze" (gli altri condomini sono MQM[7]); le regole per avere l'accesso di admin sono le seguenti:

0. La password ha *N* caratteri, completamente casuali.
1. Il "Gold" può accedere da solo (conosce tutti i caratteri)
2. Il "Silver" può accedere in assenza del "Gold" purché abbia con sé almeno un "Bronze" (insomma, il "Silver" più un qualsiasi "Bronze" possono ricostruire la password e accedere come admin)
3. Tre "Bronze" qualsiasi possono accedere come admin in assenza del "Gold" e del "Silver" (ossia possono ricostruire l'intera password).

[6] Non stiamo a spiegarvela: accendete un cero a San Google e trovate tutto. Comunque, ci sono tre livelli in ordine decrescente: "Gold", "Silver" e "Bronze".

[7] Vuol dire che non contano niente; e siccome nessuno ha chiesto cosa voleva dire "MSV", non vi spieghiamo neanche questo acronimo.

Se c'è un campo sul quale Rudy non riesce a barare, però, è la matematica; quando gli hanno chiesto quale fosse il minimo valore di N per cui era possibile applicare queste regole, non ha resistito e ha risposto giusto. E adesso lo calcolate anche voi.

Logicamente qualcuno è riuscito a craccare la Reticella. E quindi il branco di condomini si è riunito di nuovo per stabilire nuove regole; e logicamente, hanno persistito nello stesso metodo[8]; solo che, rifatto il test *INGOT*, sono risultati un "Gold" (sempre lo stesso), due "Silver" (uno è Rudy, che continua a barare) e cinque "Bronze" (quindi non ci sono più MQM); le regole, inoltre, sono state leggermente variate: parliamo sempre di accesso come SysAd.

2. (La "zero" e la "uno" sono sempre le stesse) Due "Silver" possono accedere senza il "Gold" (nel senso che ricostruiscono l'intera password).
3. Un "Silver" può accedere se accompagnato da qualsiasi "Bronze".
4. Tre "Bronze" qualsiasi possono accedere anche in assenza dei "Silver" e del "Gold".

E, a questo punto, è partita la domanda classica: "Ruudyyy… quanto vale N?"

Logicamente, in entrambi i casi dovreste anche spiegarci come suddividere la password…

Secondo me, la craccano anche stavolta. Io continuo a fare l'infolumaca, che si arrangino.

2.2 Qual è la chiave?

Oggetto di polemica tra Rudy e sua moglie è la questione delle chiavi.

Infatti, Paola suddivide le varie chiavi in mazzi diversi (casa in città, Luogo da cui, Paesello del Divano Quantistico, ufficio, …) mentre Rudy ha un unico mazzo con tutte le chiavi che lo fa sembrare un carceriere. A questo punto, il motivo di polemica dovrebbe essere immediato; la scena classica, infatti, è:

1. Rudy e Paola stanno arrivando in un luogo x.
2. Paola enuncia di aver lasciato a casa il mazzo del luogo x (e Rudy sbuffa)
3. Rudy estrae il suo pachidermico mazzo di chiavi ed inizia la ricerca della chiave opportuna: siccome le chiavi sono tutte dello stesso tipo, ci vuole un mucchio di tempo (e Paola sbuffa).

"...invece di sbuffare, non potresti ricordarti le chiavi?"

"…invece di sbuffare, non potresti usare una serie di mazzi?"

"…se io avessi più mazzi, ne dimenticherei di sicuro qualcuno. Così sono sicuro di averli sempre tutti dietro"

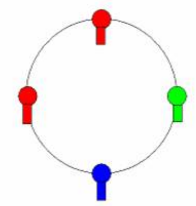
"…se io avessi un mazzo unico, ogni volta che devo aprire una porta dovrei provare con tutto il mazzo. Così sono sicura che apro in tempo ragionevole"

Aduso a convivere con un'azzeccagarbugli, Rudy a questo punto rinuncia a far notare che "tempo ragionevole", se non hai le chiavi, è frase di scarso significato, ma adesso crede di aver trovato la soluzione: chiavi colorate!

Piccolo guaio: i colori disponibili non sono tantissimi, quindi andrebbe minimizzato il numero; non solo, ma sia Paola sia Rudy portano le chiavi su "anelli" che non hanno un inizio o una fine distinguibili.

[8] In questi casi, Rudy ha la scelta tra due diverse colorite espressioni delle sue turpiloquianti nonne: "*laveje la testa a l'asô*" (lavare la testa all'asino) o "*driseje le piote al can*" (raddrizzare le zampe al cane). Fate voi.

"Aspetta, credo di aver avuto un'idea. Ad esempio, per quattro chiavi, ti bastano tre colori, se usi un po' di metodo… Guarda qui" …e Rudy esibisce il disegno che trovate qui di fianco.



3 *Il mazzo piccolo di Rudy*

"…e come faccio a distinguere le due rosse?"

"Beh, una è 'dalla parte di quella blu', mentre l'altra è 'dalla parte di quella verde', e…"

"Allora siamo a posto. Per evitare la sindrome del carceriere, io continuerò a tenere i miei mazzi separati. Il mazzo più grosso e quello del 'Luogo da Cui', con cinque chiavi, e con il tuo metodo non mi sembra molto difficile. Voglio vedere come farai tu, a risolvere il problema dei colori con un mazzo unico"

"Io i problemi non li risolvo, li pongo. Comunque, al momento il mio mazzo è composto da cinque chiavi del 'Luogo da Cui', tre del 'Paesello del Divano Quantistico', cinque della 'Casa di Civile Abitazione' ("civile…" si fa per dire, vista la presenza dei Validi Assistenti), due dell'ufficio e tre delle varie cassettiere. Totale diciassette. Considera però che io sono molto veloce a contare, e…"

E adesso tocca a voi. Evidentemente, vogliamo una risposta *generica*. Qual è il minimo numero di colori che dovete attribuire alle chiavi per distinguere tra di loro n chiavi su un anello? Coloratele come vi pare, tanto continuerà a dimenticarle a casa…

3. Bungee Jumpers

Siano $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ numeri naturali ciascuno minore di 1000 ma per cui minimo comune multiplo di una qualsiasi coppia è maggiore di 1000.

Provate che la somma dei reciproci di questi numeri è minore di 2.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

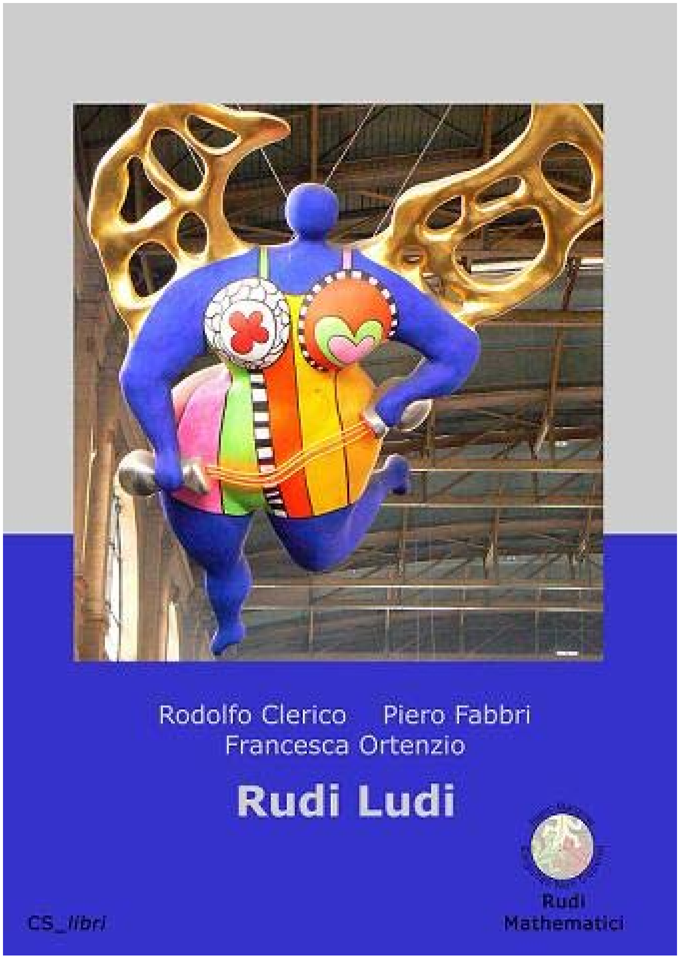
Avevamo annunciato nel numero precedente che anche a Dicembre avremmo ospitato questa rubrica saltuaria e imprevedibile. Avevamo anche dichiarato (ma questo molto tempo fa, proprio in occasione della nascita di "*Era una notte buia e tempestosa*") che i contenuti di questo contenitore non hanno l'intenzione di essere critiche asettiche e imparziali, ma sono invece l'occasione per manifestare un entusiasmo partigiano verso quei libri che hanno qualcosa a che vedere con il vasto popolo dei lettori di RM. Anche il titolo che stiamo per commentare sarà trattato quindi con l'affetto dei tifosi, e non con l'occhio severo degli esaminatori: ma il guaio è che, stavolta, anche avessimo voluto fare gli imparziali, non avremmo davvero potuto riuscirci. Non solo: per quanto autorizzati dalla natura stessa della rubrica a essere allegramente entusiasti, questa volta il crinale che separa la giocosa recensione dalla più spudorata autocelebrazione (nonché volgare propaganda) è davvero sottilissimo, quasi (anzi *del tutto*) inesistente. Speriamo vogliate perdonarci: promettiamo di non farlo più.

O, perlomeno, di rifarlo solo molto, molto raramente.

4.1 Rudi Ludi

Mentre discutono di demoniaci bombardamenti contro angeli caduti dal cielo, sul binario arriva il treno che riporterà due di loro in Italia. Una breve vacanza è solo una breve vacanza, non vale mostrare troppa malinconia: ma le stazioni piene di treni in partenza sono sempre un po' tristi, almeno tanto quanto sono allegre le stazioni piene di treni in arrivo. Un altro gioco a somma zero, in un certo senso.

Il primo è arrivato quindici mesi fa, e aveva davvero molte caratteristiche insolite, per essere un libro. Una, in particolare, era così strana che è davvero lecito pensare che solo pochissime pubblicazioni possano rivendicare: l'essere venuto alla luce all'insaputa degli autori. Tutti i libri postumi hanno questa proprietà, come pure tutti i libri *falsi*, illecitamente copiati e diffusi; ma in nessuno di questi casi estremi capita poi che gli autori ricevano in regalo, debitamente infiocchettate e impacchettate, copie fresche di stampa della loro fatica. Questo è esattamente quello che è successo a due di noi, ad opera della terza componente della redazione, poco più di un anno fa. Alice era riuscita a sobillare una piccola casa editrice di Torino, la *CS_Libri*, e aveva il sorriso di chi era riuscita a fare uno degli scherzi migliori della sua vita, quando ci consegnò le prime due copie di *Rudi Simmetrie*.



È una storia che abbiamo già raccontato, e forse da qualche parte nel nostro sito è ancora presente una cronaca di quella, per noi davvero memorabile, giornata. Ma anche il seguito non è stato meno memorabile: queste righe vengono scritte solo pochi giorni dopo aver ricevuto dalla mani del Presidente dell'*Associazione Subalpina Mathesis*, in una celebrazione pubblica e ufficiale, una targa che certifica che il libro che gli autori non sapevano d'aver scritto ha vinto la speciale *Segnalazione della Giuria* nell'ambito del *Premio Peano 2007*.

In quella stessa serata di gala, la redazione di RM è riuscita a celebrare un'altra piccola vittoria: il secondo libro di Rudi Mathematici ha visto la luce esattamente il 20 novembre 2008, ovvero proprio lo stesso giorno in cui il suo fratello maggiore veniva festeggiato e premiato in pompa magna. La coincidenza non è stata del tutto casuale: anzi, ci è voluta una discreta accelerazione, una sorta di rush finale per far coincidere i due eventi nella medesima casella di calendario.

Ma ci tenevamo molto a che fosse proprio quello della premiazione di *Rudi Simmetrie* il giorno di nascita di ***Rudi Ludi***.

Le somiglianze tra *Rudi Ludi* (***RL*** per gli amici) e *Rudi Simmetrie* (***RS*** per gli stessi amici di cui sopra) sono certo molte, non fosse altro a causa del loro essere libri scritti dai medesimi autori, editi dalla stessa casa editrice, e con lo stesso nume tutelare di fondo: la matematica. Ma sono molte anche le differenze: anzi, è molto probabile che le differenze siano, in ultima analisi, assai più significative delle somiglianze.

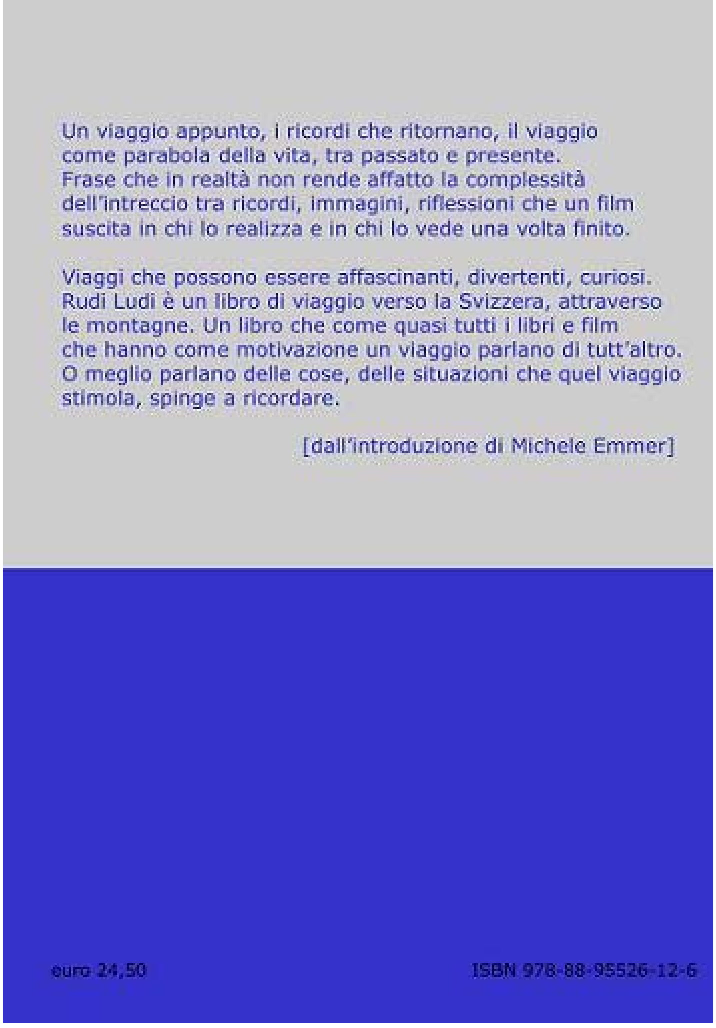
Ci sono gradi diversi anche nelle diversità, se ci è concesso il bisticcio di parole; ad esempio, alcune sono solo *apparenti.* Tra gli autori di ***RL*** figura anche il nome di Francesca Ortenzio (le generalità che si ritrovano scritte sulla carta di identità di Alice), ma questa differenza rispetto a ***RS*** è invero del tutto apparente, inesistente, fallace, perché Alice è in realtà coautrice anche del nostro primo libro, non solo di questo secondo. L'unica ragione per la quale il suo nome non compare anche sulla copertina arancione di ***RS*** è presto svelata: come è facilmente deducibile dall'aneddoto prima riportato, che cosa scrivere su quella copertina lo ha deciso proprio Alice, e a suo tempo si è indebitamente fatta prendere da un attacco di timidezza editoriale, lasciando la scena libera ai due maschietti di RM e censurando il suo nome.

Altre differenze, invece, sono del tutto *veniali*: ad esempio (e si vede bene dalla copertina che riproduciamo qui in dimensioni prive di modestia) il colore dominante della cover non è più il già citato arancione, ma un azzurro intenso che Marco, il nostro grafico, ha sapientemente estratto dall'Angelo che troneggia tanto sopra i passeggeri della stazione di Zurigo quanto sopra il titolo e i nomi degli autori del libro.

Ci sono anche delle differenze del tutto *inevitabili*: alla fin fine, si tratta di due oggetti diversi, con pagine, peso, contenuti diversi. E, parlando di contenuto, arriviamo forse alla prima differenza davvero significativa. Se ***RS*** parlava di *Simmetrie* e di *Teoria dei Gruppi*, ***Rudi Ludi*** parla invece di un tema del tutto diverso. Non dovrebbe essere troppo difficile capire quale: un altro aneddoto che raccontiamo spesso è quello che ripercorre la genesi del nome "*Rudi Mathematici*", e ci perdiamo sempre nel citare che all'inizio il "*Rudi*" era in realtà un "*Rudy*", perché nel suo nome il giornale intendeva celebrare il suo padre fondatore; narriamo sempre, poi, che l'arrivo di altri coautori in redazione ha modificato il *Rudy* (nome proprio singolare), in *Rudi* (aggettivo qualificativo plurale); ma il gioco di parole più importante, l'accenno ai famosi ***Ludi Mathematici*** di *Leon Battista Alberti* continuava imperterrito a funzionare, sia con la "y" che con la "i". L'equilibrio, ai limiti dell'equivoco, sul quale abbiamo sempre giocato tra *Rudi* e *Ludi* si sublima definitivamente in questo testo, perché ***Rudi Ludi*** parla di *giochi*: anzi, di *Teoria dei Giochi*. Ed era proprio impossibile scegliere un titolo diverso.

Occorre subito sgombrare il campo da un possibile fraintendimento: Rudi Mathematici è rivista di matematica ricreativa, i redattori di Rudi Mathematici amano giocare, ***Rudi Ludi*** parla di *Teoria dei Giochi*; messe le frasi in questa sequenza apparentemente logicissima, si potrebbe lecitamente pensare che ***RL*** sia una sorta di antologia di giochi matematici, sul calco dei celebri testi di Martin Gardner o di Sam Loyd. Beh, non è così. La *Teoria dei Giochi* propriamente detta affonda le sue radici nell'economia, se non addirittura nella strategia militare, ed è proprio di questo che il libro si occupa nella sua prima parte. Poi, con un equilibrismo che riesce solo agli autori di prestigiose riviste di matematica ricreativa, da quella *Teoria dei Giochi* (che potremmo chiamare di von Neumann-Nash) si passa a quella di J.H.Conway, che più che una Teoria dei Giochi è una *Teoria del Giocare*.

E però, nonostante la grande diversità dei temi portanti, la differenza maggiore tra ***RS*** e ***RL*** non è l'argomento matematico trattato. Come ricorderanno i lettori più fedeli, *Rudi Simmetrie* è sostanzialmente composto da una collezione di articoli già precedentemente pubblicati sulle pagine della nostra e-zine; al punto che, in una specie di tentativo di suicidio commerciale, nella pagina del sito dove viene pubblicizzato diamo anche dettagliate istruzioni per poter leggere integralmente il contenuto del libro senza comprarlo; indirizziamo infatti coloro che volessero risparmiare il prezzo di copertina ai numeri della rivista che contengono gli articoli pubblicati nel libro. Ebbene, per ***Rudi Ludi*** non possiamo fare la stessa cosa, perché il contenuto è del tutto inedito.



Davvero *del tutto* inedito? La risposta più onesta che possiamo dare è "sì". Anche in ***RL***, come già in ***RS***, si trova una sorta di alternanza tra capitoli di natura storica e capitoli più teorici; e una piccola percentuale di quei temi, sia storici sia tecnici, ha fatto a suo tempo la comparsa in articoli della rivista. Ma persino queste parti (che, ripetiamo, sono davvero poche, in percentuale) non sono quasi più riconoscibili, perché sono state tutte riscritte integral-mente. Questo perché ***RL*** non è una collezione di articoli, ma è stato pensato e scritto come un'unica storia, un'avventura di viaggio.

Rudi Ludi ha insomma molti obiettivi da perseguire e un buon numero di ambizioni: forse troppe per poterle soddisfare tutte pienamente; ma quantomeno gioca su più fronti, nella speranza di ben riuscire almeno in qualcuno. Ha intenzione di raccontare le vite dei matematici che hanno fondato la Teoria dei Giochi e di spiegare le basi essenziali di quella teoria; vorrebbe mostrare le similitudini e le differenze tra due diverse teorie; gli piacerebbe far ricordare l'atmosfera dei dialoghi che da Platone a Galileo sono l'artificio narrativo della scienza; inoltre – e questo non è certo l'obiettivo meno sentito – vorrebbe essere un libro divertente, che racconta un viaggio, un'avventura, le chiacchiere, le manie e le sciocchezze dei protagonisti i quali – sia detto per inciso – assomigliano molto agli autori.

Dovrebbe essere evidente, a questo punto, che le teorie dei giochi presenti nel libro non sono solo due, ma almeno tre: il gioco più evidente, per quanto mai esplicitato, è proprio quello di romanzare un'avventura matematica, mescolando i discorsi sulle *Tabelle dei Payoff* e sul *Paradosso del Prigioniero* con le citazioni sui Beatles o osservazioni sulla Legge Miranda; cosa che sarà certo strana e poco ortodossa, dal punto di vista dei canoni della letteratura, ma che a noi capita davvero con impressionante regolarità.

Non è per falsa modestia che sospendiamo il giudizio, rimettendoci a quello di chi il libro vorrà leggerlo. E non è neppure bassa strategia di marketing il non voler dettagliare troppo i contenuti dei singoli capitoli: gli ingredienti che hanno finito per entrare nella composizione della storia sono tanti e diversi; e proprio perché le mani degli autori sono esse stesse tante ed diverse, è difficile sintetizzare in una serie di giudizi (fossero anche del tutto parziali) le idee guida di ***Rudi Ludi***. Con la scusa di scrivere un improprio compleanno di John Horton Conway, nato a Dicembre, abbiamo contrabbandato nelle prime pagine di questo numero di *Rudi Mathematici* l'intero capitolo 24 di ***RL***. Non è certo il capitolo migliore, o il più rappresentativo, o quello più divertente: la sola caratteristica decisiva che ha è quella di poter essere impunemente spacciato per un pezzo di RM119. E non sappiamo se leggere le righe in corsivo che lo compongono vi abbia fatto venire voglia di leggere tutto il libro, o se vi hanno invece convinto definitivamente che sia meglio starne lontano. Però, nel bene e nel male, servono almeno a noi per poter dire che almeno un po' vi avevamo avvertito, preavvisato, su quale fosse il contenuto e lo spirito di ***Rudi Ludi***.

Ci sono ancora un paio di cose che è indispensabile annotare: ***RL*** contiene una prefazione di ***Silvia Treves***, nostro *editor* ed *editore* (no, non sono la stessa cosa: lo abbiamo scoperto di recente); prefazione che, anche se è molto piacevole da leggere, non rivela il mistero più grosso, cioè dove lei sia riuscita a trovare il coraggio di pubblicarci. Subito dopo, prima dell'inizio dell'avventura, c'è l'introduzione scritta da ***Michele Emmer***. Non è davvero facile raccontare con quanta sorpresa e orgogliosa soddisfazione abbiamo preso la notizia che Michele aveva letto ***Rudi Ludi*** come gli avevamo timidamente chiesto, ed era disposto a scrivere un'introduzione al nostro libro. Chi lo conosce, come uomo e come matematico, può capire facilmente la nostra incredula soddisfazione. Di questo lo ringraziamo già nelle pagine stampate, ma è difficile non rinnovare i ringraziamenti ogni volta che se ne presenta l'occasione.

Infine, le note spiacevoli, perché non ci si accusi di fare come i telegiornali, che mettono prima tutte le notizie terribili e in coda le cosucce allegre per far dimenticare tutte le disgrazie appena raccontate. Il prezzo di ***RL***, che non arriva alle 250 pagine, è indubbiamente un prezzo alto: 24,50 euro. Altrettanto indubbiamente, questo dipende dal fatto che la tiratura è molto bassa, visto che non si può certo sperare di vendere migliaia di copie di un libro che, alla fin fine, è pur sempre un libro di matematica. E se le copie stampate sono poche (sappiate che ogni domenica scendono in campo, negli stadi di Serie A, un numero di giocatori di calcio superiore alle copie stampate di ***RL***) i costi di stampa ripartiti sul prezzo di copertina sono ovviamente più alti dei romanzi ad alta tiratura.

E no, non sappiamo proprio se il gioco vale la candela, se il libro vale il prezzo.

E sì, certo: ci piacerebbe molto scoprirlo da voi.

Titolo	Rudi Ludi
Autori	Rodolfo Clerico, Piero Fabbri, Francesca Ortenzio *alias* Rudy d'Alembert, Piotr R. Silverbrahms, Alice Riddle
Editore	CS_libri
Curatori	Silvia Treves, Francesca Ortenzio
Prefazioni	Michele Emmer, Silvia Treves
Data Pubblicazione	Novembre 2008
Prezzo	24.,50 Euro
ISBN	978-88-95526-12-6
Pagine	VIII+228

5. Soluzioni e Note

Questo 2008 è stato uno degli anni più memorabili per la Redazione di RM. Molti dei nostri sogni si sono avverati: il nostro primo libro è stato premiato in modo inatteso, la prestigiosa (e per una volta l'aggettivo non è scherzoso) rivista *Le Scienze* ha inspiegabilmente deciso non solo di pubblicare i nostri problemi, ma perfino di darci un blog dove riportare le nostre farneticazioni. Forse avremmo dovuto fermarci a questi due incredibili miracoli.

4 *Gli autori e la curatrice con il Premio Peano.*

Invece no. Come avrete ormai ben compreso dalla copertina, dal compleanno e dall'EuNBeT di questo numero, abbiamo anche voluto chiudere l'anno pubblicando un nostro nuovo libro, ***Rudi Ludi***. Durante la cerimonia di consegna del premio Peano (che ci ha montato la testa al punto di non vergognarci di mostrare in pubblico una foto presa nell'occasione), l'ultima fatica dei Redattori faceva bella mostra di sé sul banco d'onore, insieme al fratello maggiore *Rudi Simmetrie* e alla *Congettura di Poincaré* di Donal O'Shea, il libro vincitore del Premio Peano propriamente detto. Quei coraggiosi che ne hanno acquistato una copia (lungimiranti procacciatori di preziose rarità libresche) probabilmente non sanno che le copie erano davvero fresche di stampa, con inchiostro forse non del tutto asciutto, uscite in fretta e furia dalla stamperia. Gli stessi autori erano riuscite a vederle non più di un quarto d'ora prima, e la faccia incredula che mostrano nella foto dipende in gran misura proprio da quella visione, incerta fino agli ultimi momenti.

Certo è che, premi e libri a parte, i redattori di RM stanno davvero diventando sfacciati. Non è solo per la spudoratezza (del tutto inimmaginabile fino a non troppo tempo fa) con la quale lasciano vedere le loro truci fattezze, ma anche per la sfacciataggine con la quale acconsentono a tenere conferenze. Una di queste, dal titolo "*La ricreazione matematica per la creazione matematica*" è stata infatti da loro tenuta lo scorso giovedì 6 Novembre, nelle augustissime aule di ***Palazzo Campana***, sede della *Associazione Subalpina Mathesis* e, soprattutto, della Facoltà di Matematica dell'Università di Torino. Per quanto la conferenza fosse il giusto contrappasso da pagare in cambio della *Segnalazione della Giuria* del Premio Peano con la quale è stato premiato *Rudi Simmetrie*, e pertanto il nostro spirito ricreativo e giocoso fosse ben noto all'uditorio, la sensazione provata nel calcare di nuovo quegli antichi parquet è quasi impossibile da raccontare. Solo chi ha provato le farfalle nello stomaco per il terrore di affrontare una prova scritta di Analisi I in quelle medesime stanze può capire l'ubriacante sentimento che si prova ad avere le lavagne dietro le spalle anzichè davanti agli occhi.

Certo è che ripetere l'esibizione, questa volta davanti al *Circolo S.O.M.S. De Amicis* nella giornata del 24 (e senza l'obbligo contrattuale), per quanto con l'alibi della presentazione del nuovo libro, è stata davvero un abuso di faccia tosta. Eppure, sia nell'augusto Palazzo Campana, sia nel circolo centenario, gli ascoltatori hanno benignamente evitato il lancio di ortaggi. Questi torinesi stanno diventando sempre più di bocca buona.

Queste *Note* stanno parlando solo dei Redattori di RM, cosa disdicevole e noiosa, soprattutto per chi non è redattore di RM. È quindi necessario passare in fretta alle *Soluzioni*, perché quelle le fanno i lettori, che noiosi non sono. Partiamo senza altri indugi, se non per ribadire che, a causa degli innumerevoli (più di uno, e per chi non sa contare sono innumerevoli) apprezzamenti per aver introdotto il riassunto del problema all'inizio, continueremo a farlo.

5.1 [117]

5.1.1 Senza rischio

Val316 ci scrive ancora perplesso su questo problema... lo ricordiamo brevemente:

> *Trovandosi a disposizione un certo gruzzolo, Rudy lo ha investito ad un interesse fisso che lui ritiene estremamente soddisfacente: infatti gli permette, il k-esimo anno di deposito, di ritirare esattamente k^2 euro; lui ritira (esattamente) quella somma, e lascia la parte restante degli interessi a incrementare il capitale; la cosa interessante è che ha depositato la somma minima per fare questo gioco sino, come diceva Asimov, alla fine dell'eternità. Quanto ha depositato Rudy e qual è il tasso di interesse che è riuscito a farsi applicare?*
>
> *Rudy ha calcolato quando gli interessi (tutti, non solo quelli che preleva) saranno esattamente uguali a 2008: dovrà aspettare il ventesimo anno di deposito. Ora, Rudy è estremamente felice di aver depositato quella cifra, anche perché evidentemente se avesse depositato un euro in meno dopo un certo numero di anni non ce l'avrebbe fatta, a ritirare il quadrato degli anni di deposito… Bene, quanto vale quel "certo numero di anni"?*

Al solito, i problemi di Rudy sono sibillini (l'abbiamo già detto?) comunque ecco la "*riflessione malinconica*" (così da lui titolata) di ***Val316***:

> Le soluzioni pubblicate in RM118 mi hanno lasciato un po' perplesso e mi hanno spinto a fare un po' di conti seguendo un'altra linea di pensiero. Prima di tutto di che tipo d'investimento stiamo parlando?
>
> Delle due una. O
>
> 1. Rudy ha stipulato un contratto con la banca circa un titolo a cedola unica per cui a fronte di un versamento iniziale di una certa quota di denaro essa s'impegna a pagare in qualsiasi momento il quadrato degli anni passati dalla stipula.
>
> oppure
>
> 2. Il titolo è a cedola multipla e la banca s'impegna a pagare ogni anno una somma in denaro pari al quadrato degli anni a venire.
>
> Nel testo però si cita "… *quando gli interessi (tutti, non solo quelli che preleva)* …" ed inoltre si fa intendere che l'investimento produca interessi per un futuro indeterminato ("…*alla fine dell'eternità*…"). Quindi mi sembra di poter dire che Rudy abbia stipulato un contratto di tipo 2.
>
> Su questa ipotesi ho pensato di modellizzare la capitalizzazione per un titolo siffatto nella maniera seguente.
>
> Indichiamo con C_0 l'investimento iniziale, con i il tasso d'interesse riconosciuto. Sia inoltre $C_-(k)$ la capitalizzazione totale allo scadere del k-esimo anno poco prima della riscossione di k^2 euro e $C_+(k)$ la somma lasciata a maturare dopo il pagamento della cedola.
>
> In formule
>
> $$\begin{cases} C_+(0) = C_0 \\ C_-(k) = C_+(k-1)(1+i) \quad k>0 \\ C_+(k) = C_-(k) - k^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_+(0) = C_0 \\ C_+(k) = C_+(k-1)(1+i) - k^2 \quad (*) \\ C_-(k) = C_+(k) + k^2 \qquad k>0 \end{cases}$$
>
> Come si può vedere dalla (*) non ho assunto come ipotesi che l'interesse venisse di nuovo reinvestito: che senso avrebbe? Fino alla fine dell'eternità in tasca non

vedrei mai un euro di interessi per non parlare della cifra iniziale: autolesionismo puro!

In questi termini possiamo scrivere che l'interesse totale in corrispondenza dell'anno k-esimo è

$$I(k) = 1^2 + 2^2 + ... + (k-1)^2 + (C_-(k) - C_0),$$

cioè le cedole incassate dal 1° al (*k*-1)-esimo anno più il differenziale tra quello che ho maturato alla fine del k-esimo anno e l'investimento iniziale.

Possiamo altresì scrivere

$$I(k) = 1^2 + 2^2 + ... + (k-1)^2 + k^2 + (C_+(k) - C_0) = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (C_+(k) - C_0)$$

Ora ci si dice che $I(20) = 2008$, cioè

$$\frac{1}{6}20(21)(41) + (C_+(20) - C_0) = 2008$$

$$C_+(20) - C_0 = -862 \ .$$

Per cui le coppie ammissibili di (C_0,i) che ci permettono di continuare il gioco all'infinito sono quelle per cui:

$$\begin{cases} \forall k \ C_+(k) > 0 & (1) \\ C_+(20) = C_0 - 862 & (2) \end{cases}$$

La condizione (1) deriva dal fatto che se per un certo anno $C_+(k)$ divenisse negativo, il gioco muterebbe la sua natura e l'investimento diverrebbe di colpo un mutuo (un derivato!).

La (*) è un'equazione alle differenze nella variabile $C_+(k)$ per la quale possiamo adottare il metodo delle funzioni generatrici e serie formali esposto nei Paraphernalia di RM111. (Dove tra l'altro Rudy si chiedeva dove applicarlo con profitto. Ecco questo mi sembra il caso…)

Sottacendo quella cinquantina di "carriage return" sui fogli che contengono i necessari passaggi algebrici, tanto per non appesantire l'esposizione e comunque il calcolo più laborioso è rappresentata dalla somma

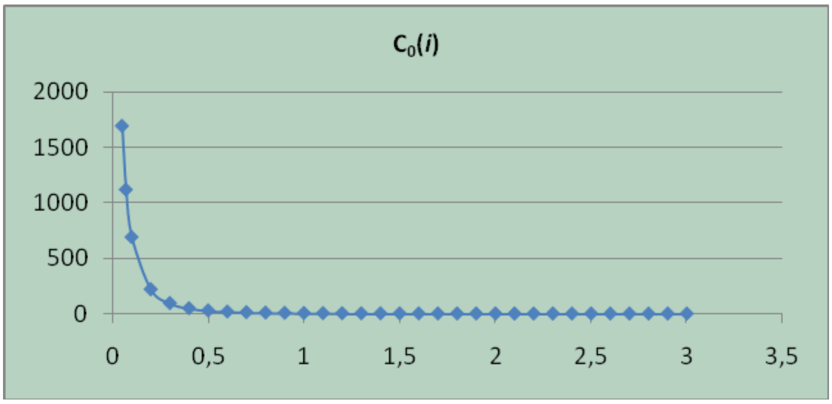
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = x\left(\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{2}{(1-x)^3}\right)$$, in forma esplicita possiamo scrivere

$$C_+(k) = \left(C_0 - \frac{(1+i)(2+i)}{i^3}\right)(1+i)^k + \frac{(k+1)^2 i^2 + (2k+3)i + 2}{i^3} \qquad (3)$$

Questa è la formula che ci dà all'inizio di ogni anno, appena dopo la riscossione degli interessi, la cifra in denaro lasciata in deposito. Imponendo la (2) nella (3) otteniamo una funzione di C_0 rispetto a i:

$$C_0 = \frac{1}{(1+i)^{20} - 1}\left(\frac{(1+i)^{21}(2+i)}{i^3} - \frac{441i^2 + 43i + 2}{i^3} - 862\right)$$

Qui sotto ne presento il grafico



E in formato tabellare i valori salienti:

i	0,05	0,07	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
C_0(i)	1698, 3	1122	692,8 9	221,2 1	96,07 2	49,85 3	29,42 8	19,11 8	13,34 3	9,832 2	7,554 6	5,998 7

A questo punto si tratta di discriminare tra le coppie (C_0,i) ammissibili (che formano il grafico precedente) quelle per le quali vale la condizione di positività (1) e tra queste quelle con C_0 minimo. Il fatto è che non ne ho trovate alcuna. Per ogni coppia prima o poi $C_+(k)$ diveniva negativa. Francamente non mi sorprende molto, perché la condizione $C_+(20) = C_0 - 862$ è troppo stringente. Da un lato non permette che il tasso d'interesse sia alto (perché altrimenti $C_+(20)$ con un andamento quasi esponenziale sarebbe facilmente superiore a C_0), dall'altro, con un tasso basso, non riusciamo a compensare le cedole "annoquadratiche" dal primo al 20-esimo anno. Rilassando il vincolo (2) esistono infinite coppie che consentono alla capitalizzazione di sostenere lo specifico prelievo annuale.

Diciamo che rimango ancora perplesso!

Il Capo non ha voluto esprimersi, al riguardo, anche se è andato in brodo di giuggiole per le citazioni dei suoi PM.

5.1.2 Enne binomiale kappa; ma solo il numeratore

Come previsto, commenti inferociti non ne sono arrivati. Alice, nel preparare le S&N, si era chiesta se sarebbe riuscita a confondere le carte in tavola proponendo due soluzioni brevi di cui una giusta (ma poco giustificata) ed una sbagliata (ma ricca di un CVD lapidario ed una dimostrazione elegante), ma – come ci aspettavamo – non ha convinto nessuno. I commenti erano solo chiarificatori, su un problema ragionevolmente facile, che riportiamo qui:

> *Preso un intero di partenza e moltiplicato per i nove (lui incluso fanno dieci) numeri successivi, si ottengono sempre almeno due zeri al fondo. Qual è il primo numero per cui dopo aver applicato quest'operazione ed eliminato tutti gli zeri al fondo, l'ultima cifra è un dispari?*

Come si diceva, invece di commenti arrabbiati, sono arrivate altre soluzioni. Una in particolare, quella di ***Br1***, troppo lunga per essere contenuta qui, l'abbiamo messa sul sito: http://www.rudimathematici.com/Bookshelf/EnneBinomialeKappaDiBr1.pdf. La delusione di Alice non è solo perché nessuno si è arrabbiato, ma anche perché quasi nessuno ha provato ad indovinare i nomi (o gli allonimi) dei due solutori... comunque non esageriamo a giustificarvi il risultato, bastava fare una conta dei fattori di 5 necessari a "eliminare" i fattori di due. Lasciamo un po' di spazio agli altri problemi.

5.2 [118]

5.2.1 Amebe teoriche

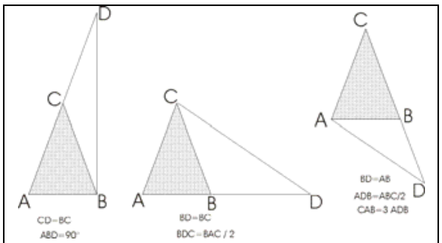
Il problema era il seguente:

> *Si definiscono "amebe" dei triangoli isosceli che, divisi in due parti da una linea retta, generano due triangoli anch'essi isosceli, anche se non necessariamente simili all'originale. Quali triangoli isosceli sono amebe?*
>
> *Togliendo la restrizione che il triangolo originale sia isoscele, ma mantenendo la richiesta che, una volta diviso da una retta, dia origine a due triangoli isosceli, quali devono essere le caratteristiche dei triangoli-amebe? E se si consentisse anche la divisione da parte di più rette (purché sempre passanti per un angolo), generando un certo numero di triangoli isosceli, quanti sarebbero?*

Tra i due problemi proposti il mese scorso è stato quello meno gettonato, e lo stesso dovremo fare i salti mortali a scegliere delle soluzioni da pubblicare tra quelle di ***.mau.***, ***Tartaruga***, ***Millenium bug***, ***Zar***, ***Alberto***, ***Socram***, ***Trekker***, ***Cid***, ***Caronte***, ***Alberto R***, ***Andrea B,*** e dopo, quasi a voler seguire l'ordine alfabetico, ***Andrea C.***. I lettori abituali sanno bene che il criterio di scelta non ha niente a che vedere con l'abilità matematica, ma solo con il senso estetico di Alice che impagina questa parte e con la voglia che ha di riscrivere e sistemare nel formato RM i pezzi prodotti; ma è opportuno ripeterlo prima di andare avanti.

Per cominciare, vediamo la versione di ***Millenium bug***:

> Consideriamo il problema inverso.
>
> Data un'ameba figlia (un generico triangolo isoscele), cerchiamo la madre e la sorella (o sono forse padre e fratello ?)
>
> Prendiamo quindi un triangolo isoscele ABC (AC=BC) e vediamo da dove può essere nato. Esaminando il DNA (Definizione Nostra Ameba) dell'organismo deduco che ogni ameba ha due vertici e un lato in comune con il genitore; inoltre il terzo vertice appartiene a uno dei lati del genitore.



5 *La figura di **Millenium bug***.

> Ne consegue che trovo tutte i possibili genitori prolungando uno dei lati e fissando sul prolungamento un punto D in modo che l'essere che risulta collegando D all'altro vertice, sia ancora un'ameba. Il tutto si riduce ai 3 casi della figura o, volendo, anche i 3 simmetrici. Una rapida analisi geometrica porta a queste conclusioni:
>
> 1. Tutti i triangoli rettangoli possono generare amebe, prendendo l'angolo retto come vertice di scissione.
>
> 2. Tutti i triangoli isosceli con gli angoli uguali <45° possono generare amebe
>
> 3. Se due degli angoli stanno in rapporto 2, il triangolo genera amebe prendendo il
>
> terzo angolo come vertice di scissione.
>
> 4. Se due degli angoli stanno in rapporto 3, il triangolo genera amebe prendendo l'angolo triplo come vertice di scissione.
>
> o, in alternativa:
>
> 4a. Se due angoli a e b sono tali che, b = 180°-4a, il triangolo genera amebe prendendo il terzo angolo come vertice di scissione.

L'estensione a n rette uscenti dallo stesso vertice è abbastanza semplice. Come prima procediamo a ritroso, partendo dai figli. Partiamo da un generico triangolo che genera 2 amebe. Prolunghiamo il lato opposto al vertice da dove parte la scissione, da un parte o dall'altra, fino a generare nuove amebe.

Mi pare di capire che le regole generali siano le seguenti: detti a e b gli angoli opposti al vertice di scissione, il triangolo si può scindere mediante r rette in r+1 amebe se...

1. $a = b \cdot 2^{(n-m)}$, con m e n due interi non negativi tali che $n+m=r$
2. $a = g/2^n$, $b = (180°-2g)/2^m$, con g :]0,90°[e m e n due interi non negativi tali che $n+m=r$

Questi due casi si riducono ai precedenti per le coppie semplici di amebe, dove r=1 (cioè m=0, n=1 oppure m=1, n=0).

Prima di passare ad altre analisi, ci pare opportuno inserire l'intermezzo artistico di uno storico soluzione di RM, ***Caronte***, che per l'occasione ha deciso di usare rime e metrica anziché formule e grafici per dire la sua su questo problema:

Le due parti che tu vuoi
con due lati proprio ugual
ottenere tu le puoi
se il trigono original
di due goni disporrà
l'un dell'altro la metà.

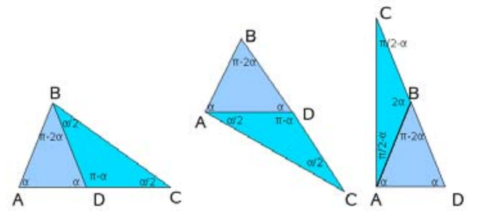
Lo schema è ABABCC, meno frequente dell'alternato ABABAB (che in qualche modo richiama gli *equilateri*) e del baciato AABBCC (che ricorda nella metrica triangolare, gli *scaleni*); insomma, uno schema poetico indubbiamente *isoscele*. Infine i versi sono settenari, ovviamente prescelti per celebrare i 72° (**π/5**) che giocano un ruolo importante nel problema.

Vediamo ora che cosa si è inventato ***Trekker***:

Discutiamo prima i casi "patologici", ovvero potendo considerare

- un semplice segmento come un triangolo isoscele con angoli alla base nulli e con vertice nel punto medio del segmento stesso, allora qualunque retta passante per il vertice-punto-medio divide il triangolo-isoscele-segmento in due triangoli-isosceli-segmenti;
- una semistriscia rettangolare di altezza infinita come un triangolo isoscele con angoli alla base retti e con un vertice improprio all'infinito, allora qualunque retta parallela ai lati "obliqui" (e quindi passante per il punto improprio) divide il triangolo-isoscele-striscia in due triangoli-isosceli-striscia.

Questi due casi "patologici" mostrano che esistono amebe "fertili" (cioè che si riproducono generando figli che essi stessi sono amebe). Ma esistono altre amebe "fertili"?



6 *La 1a figura di* ***Trekker***.

Proviamo ora ad affrontare il problema partendo dal caso più generale. Consideriamo cioè quali triangoli ABC (in generali scaleni) sono in grado di generare per singola scissione, partendo dal "polo" B, due triangoli isosceli. Supponiamo che ABD sia un triangolo isoscele con angoli alla base pari ad α, con 0<α<π/2, e di base AD generato per scissione dal polo "B". Il triangolo scaleno genitore si trova prolungando, oltre D, il lato AD fino al punto C tale che DC=DB, oppure prolungando, oltre D, il lato BD fino al punto C tale che DC=DA oppure prolungando, oltre B, il lato DB fino al punto C tale che BA=BC (nota: altri triangoli scaleni genitori si ottengono, data la simmetria del triangolo isoscele, dai tre precedenti per ribaltamento).

Il triangolo scaleno genitore ABC ha quindi, come è facile verificare, **una delle seguenti terne di angoli**:

1. **$(\alpha, \pi-3\alpha/2, \alpha/2)$**
2. **$(3\alpha/2, \pi-2\alpha, \alpha/2)$**
3. **$(\pi/2, \pi/2-\alpha, \alpha)$.**

Per trovare i triangoli isosceli amebe dobbiamo imporre che i triangoli genitori di cui sopra abbiano coppie di angoli uguali (ovvero siano essi stessi triangoli isosceli). Dobbiamo quindi risolvere le seguenti equazioni:

1. $(\alpha, \pi-3\alpha/2, \alpha/2)$
   a. $\alpha = \pi-3\alpha/2$, cioè **$\alpha = 2\pi/5$**;
   b. $\alpha = \alpha/2$, cioè **$\alpha=0$ (patologico)**;
   c. $\pi-3\alpha/2 = \alpha/2$, cioè **$\alpha = \pi/2$ (patologico)**;

I triangoli amebe genitori hanno quindi angoli (**$2\pi/5$**, **$2\pi/5$,$\pi/5$**) ed i figli ABD e BDC hanno angoli rispettivamente (**$2\pi/5$**, **$2\pi/5$,$\pi/5$**) e (**$\pi/5$**, **$\pi/5$**,3**$\pi/5$**). Si noti che i triangoli amebe genitori generano triangoli isosceli amebe "fertili" simili e triangoli isosceli "sterili" (o, almeno, per quanto scoperto fino ad ora, non amebe "fertili" simili ai genitori).

2. $(3\alpha/2, \pi-2\alpha, \alpha/2)$
   a. $3\alpha/2 = \pi-2\alpha$, cioè **$\alpha = 2\pi/7$**;
   b. $3\alpha/2 = \alpha/2$, cioè **$\alpha=0$ (patologico)**;
   c. $\pi-2\alpha = \alpha/2$, cioè **$\alpha = 2\pi/5$, già trovato prima**;

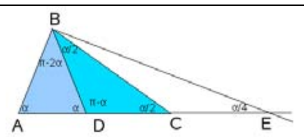
I (nuovi) triangoli amebe genitori hanno quindi angoli (3**$\pi/7$**, 3**$\pi/7$,$\pi/7$**) ed i figli ABD e BDC hanno angoli rispettivamente (**$2\pi/7$**, **$2\pi/7$**,3**$\pi/7$**) e (**$\pi/7$**, **$\pi/7$**,5**$\pi/7$**). Si noti che i triangoli amebe genitori generano triangoli isosceli "sterili" (o, almeno, per quanto scoperto fino ad ora, non amebe "fertili" simili ai genitori).

3. $(\pi/2, \pi/2-\alpha, \alpha)$
   a. $\pi/2 = \pi/2-\alpha$, cioè **$\alpha=0$ (patologico)**;
   b. $\pi/2 = \alpha$, cioè **$\alpha= \pi/2$ (patologico)**;
   c. $\pi/2-\alpha = \alpha$, cioè **$\alpha = \pi/4$, cioè un "mezzo" quadrato**;

I (nuovi) triangoli amebe genitori hanno quindi angoli (**$\pi/4$**, **$\pi/4$,$\pi/2$**) ed i figli ABD e BDC hanno angoli rispettivamente (**$\pi/4$**, **$\pi/4$,$\pi/2$**) e (**$\pi/4$**, **$\pi/4$,$\pi/2$**). Si noti che i triangoli amebe genitori (mezzi quadrati) generano triangoli isosceli amebe "fertili" simili (mezzi quadrati).

Adesso che abbiamo esplorato tutte le combinazioni possiamo dire che i triangoli isosceli "sterili" lo sono proprio del tutto, ovvero non sono nemmeno amebe non simili ai genitori.

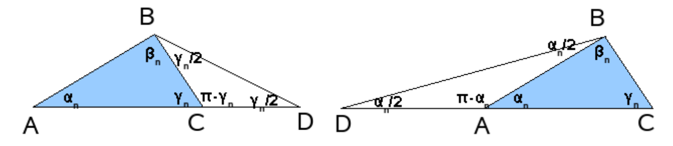
Per risolvere il caso di scissioni multiple partendo dal medesimo "polo" basta estenere il ragionamento fatto prima. Ad esempio, prendendo il primo caso esposto sopra, prolungando ancora verso destra, oltre C, come



7 *La 2a figura di* ***Trekker***.

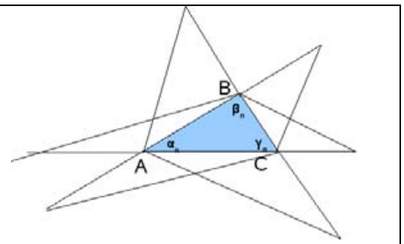
nella figura, con un segmento CE=CB, l'ultimo "angolino" a destra diventa $\alpha/4$ e quindi un (non l'unico) triangolo scaleno ABE che genera per doppia scissione dal "polo" B tre triangoli isosceli ha angoli **$(\alpha,\alpha/4,\pi-5\alpha/4)$**.

Si intuisce che se dal "polo" B partissero N segmenti, con la medesima costruzione, l'angolino di destra diventerebbe **$\alpha/2^n$**. Naturalmente, inoltre, avremmo potuto prolungare a sinistra, oltre A, oppure sia a sinistra che a destra ottenendo formule un poco più complesse da scrivere ma sostanzialmente analoghe. Lo stesso ragionamento si può rifare per gli altri due casi analizzati.



8 *La 3a figura di **Trekker**.*

Un altro modo per trovare i triangoli amebe a scissione multipla è via induzione. Supponiamo di avere già trovato un triangolo n-ameba (dal "polo" B) con angoli $(\alpha_n,\beta_n,\gamma_n)$. I triangoli (n+1)-amebe (dal "polo" B) successivi hanno angoli $(\alpha_n,\beta_n+\gamma_n/2,\gamma_n/2)$ e $(\alpha_n/2,\beta_n+\alpha_n/2,\gamma_n)$ come illustrato nelle figure (3).



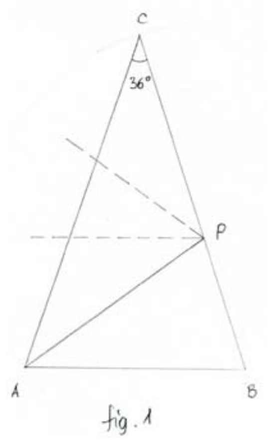
9 *La 4a figura di **Trekker**.*

Analogamente si possono trovare i **triangoli-tangram**, cioè quelli decomponibili in triangoli isosceli accostati in qualunque modo. Trovato il primo (ad esempio un semplice triangolo isoscele), per induzione, si trovano gli altri (si noti che da ciascuno se ne possono generare, in generale, altri 6), come illustrato nella figura (4).

Per finire in bellezza, riportiamo la placida soluzione di ***Alberto***:

1ª parte: Una retta divide un triangolo isoscele in altri due (fig. 1).

Soluzione: Costruito il triangolo iniziale si punti il compasso in A con apertura AB fino ad intersecare BC in P. Da qui, con la stessa apertura, si faccia $AP = CP$.



10 *La 1a figura di **Alberto**.*

Osservazioni: La base AB del triangolo isoscele di partenza è il lato del decagono regolare poiché risulta $\hat{C} = 36°$. Il rapporto tra il lato e la base è la sezione aurea φ. Il triangolo ABP è simile al triangolo ABC. Si può dividere il triangolo ACP in due triangoli isosceli per mezzo della parallela ad AB passante per P, oppure lo si può dividere in tre triangoli isosceli trisecando l'angolo $A\hat{P}C$.

Chiamiamo triangoli del 1° tipo quelli simili al triangolo iniziale e triangoli del 2° tipo gli altri. Dette x_n e y_n le popolazioni di "amebe" dei due tipi, risulta $x_n = y_n \quad \forall n$ se si usa un solo taglio per i triangoli del 2° tipo. Usando invece due tagli risulta, al limite di infinite suddivisioni, $\frac{y_n}{x_n} = \varphi$. Indicando con $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_n, F_{n+1}, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, \ldots$ i numeri di Fibonacci della successione

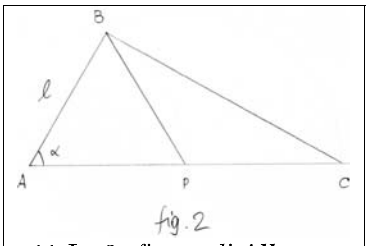
1,1,2,3,5,8,13,... vediamo la dimostrazione di questo fatto notevole, mostrando dapprima la tabella di accrescimento delle amebe.

taglio nr.	amebe 1° tipo	amebe 2° tipo
0	$x_0 = x$	$y_0 = y$
1	$x_1 = x + y$	$y_1 = x + 2y$
2	$x_2 = 2x + 3y$	$y_2 = 3x + 5y$
3	$x_3 = 5x + 8y$	$y_3 = 8x + 13y$
...	...	...
$n+1$	$x_{n+1} = F_{2n}x + F_{2n+1}y$	$y_{n+1} = F_{2n+1}x + F_{2n+2}y$

Posto $r_0 = \frac{y_0}{x_0}$ il rapporto iniziale fra le due popolazioni, calcoliamone il limite ricordando che $\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e che $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.

$$r = \lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{F_{2n+1}x + F_{2n+2}y}{F_{2n}x + F_{2n+1}y} = \lim_{n\to\infty}\frac{F_{2n+1}\left(x + y + \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}y\right)}{F_{2n+1}\left(\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}x + y\right)} = \frac{x + y + \frac{y}{\varphi}}{\frac{x}{\varphi} + y} = \frac{y\left(r_0 + 1 + \frac{1}{\varphi}\right)}{y\left(\frac{r_0}{\varphi} + 1\right)} = \frac{r_0 + \varphi}{\frac{r_0 + \varphi}{\varphi}} = \varphi$$

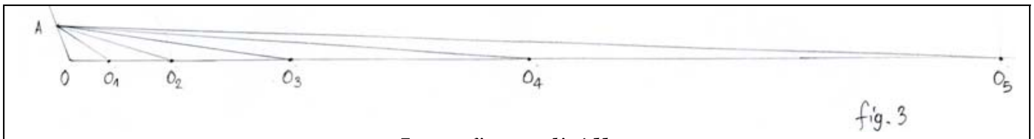
2ª parte: Una retta divide un triangolo scaleno in due triangoli isosceli (fig. 2).



11 *La 2a figura di* ***Alberto***.

Soluzione: Dato l'angolo $\hat{A} = \alpha$ e il lato $AB = l$ si punti il compasso in A con apertura AB fino a incontrare la semiretta AC in P. Da qui, con apertura BP, si intersechi la stessa in C. Il triangolo ABC sarà il triangolo iniziale (generalmente scaleno) mentre ABP e BCP saranno i due triangoli isosceli ottenuti dal taglio della retta BP.

Osservazioni: Risulta $AP = AB = l$, $BP = CP = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$, $BC = 2\sqrt{2}l\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{4} + \cos\frac{\alpha}{4}\right)$.



12 *La 3a figura di* ***Alberto***.

3ª parte: Più rette dividono un triangolo scaleno in più triangoli isosceli (fig. 3).

Soluzione: Sia dato un punto O nel piano e due semirette uscenti da esso. Su una di esse si prenda un punto A. Puntato il compasso in O con apertura OA si intersechi l'altra semiretta in O_1. Da qui, con apertura AO_1, si determini O_2 e similmente $O_3, O_4, O_5, \ldots$ finché si voglia. Il triangolo iniziale OAO_n risulta diviso da $n-1$ rette in n triangoli isosceli.

Prima di abbandonare del tutto il problema, vorremo dare una menzione speciale ad ***Andrea B.***, giovane lettore e solutore, che mostra una capacità non comune di porsi domande interessanti nell'affrontare i nostri problemi.

Grazie anche a tutti gli altri, soprattutto per i disegni fantasiosi, e lo sforzo artistico.

5.2.2 Problemi di Infinit(i/esimi)

Ed ecco il problema dei triangoli colorati:

> *Ogni punto del piano è colorato o di giallo o di rosso. Bisogna dimostrare che, da qualche parte, esiste un triangolo equilatero con i vertici dello stesso colore.*

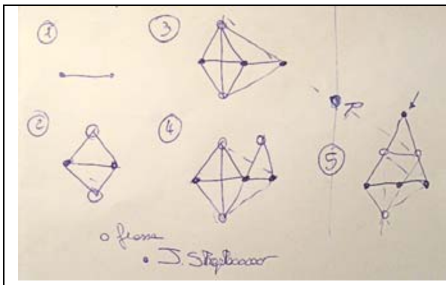
Il primo scoglio da superare, nell'affrontare questo problema, è probabilmente psicologico. I punti in un piano sono *densi*, mentre per visualizzare il problema è opportuno immaginare una sorta di griglia (e la quasi totalità dei solutori lo ha fatto, immaginandola a struttura appunto triangolare) sulla quale i punti-vertice possono trovare spazio. Una griglia del genere è indubbiamente un sottoinsieme del piano, e dimostrare che è impossibile non avere tre punti di ugual colore ai vertici d'un triangolo equilatero su un tale oggetto implica, a fortiori, dimostrarlo per tutto il piano.

Non sappiamo dirvi la valanga di soluzioni che sono arrivate, così tante che abbiamo paura di dimenticarci qualcuno: ***Andrea***, ***.mau.***, ***Frassa&Strepto***, ***Tartaruga***, ***Cid***, ***Sallustiobis***, ***Br1***, ***Millenium bug***, ***Alberto***, ***Mirtillo***, ***Zar***, ***Alberto R***, ***Emanuele***, ***Agapetòs***, ***Fabrizio***, ***GaS***, ***Val316***. Sono tutte diverse nella forma, tutte identiche nello spirito. Alcune sono arrivate addirittura sotto forma di animazioni, come gif animate o programmi in Flash.

Non potremmo dare troppo spazio, siamo già molto avanti con le pagine, in questo numero. Ma qualcuna dovremmo farvene leggere, per esempio quella di ***Frassa&Strepto***:

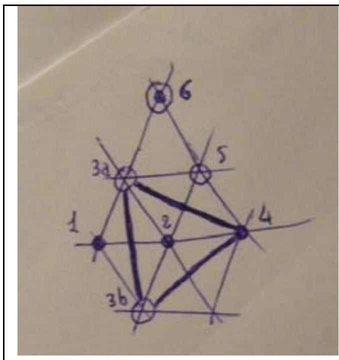
> Carissimi, devo raccontarlo anche a voi: questa sera ho visto frassa seduto al bar dell'ISU che stava mangiando il trancio di pizza e leggendo come suo solito l'Inizio e la Fine di RM.
>
> Beh... dopo il trancio ha iniziato a bere il tè e accortosi che non era finito (il tè, ma necessariamente anche RM)... Ha letto pure il resto! E ha scoperto due bellissime cose: la prima è che l'elegante Hofstadter ha dato seguito all'Eterna Ghirlanda Brillante, che lo ha fatto sognare ben 10 anni or sono, nella più tenera età! E la seconda che un Augusto Genitore ha scritto male i suoi appunti...
>
> Dato che frassa non ha mai nulla da fare (intendiamoci, frassa, non io − capirete il perché) ha stuzzicato l'intraprendenza dell'interlocutore davanti a lui e per ben 10 minuti hanno iniziato a parlare di come triangoli blu e rossi si potessero disegnare in un piano! Dopo essersi accorti che il blu è un colore che non esiste, non amando il giallo, hanno deciso di inventare i loro punti personali, come potete vedere dal disegno che anch'io ho preso a loro! E non pensate che siano i loro nomi, di frassa e del suo interlocutore J. Streptococco (che inoltre frassa ha convinto a iscriversi, quindi potete aggiungere il suo indirizzo e-mail al gruppo!).

Dicevo: non appena arrivati i frassa e gli strepto, i nostri due interlocutori hanno però deciso di capire quali triangoli NON si potessero disegnare... E così hanno disegnato cose strane... E penso pure che quella grossa R sia di quando parlavano di punti rossi e blu... lasciatela perdere! Il fatto è questo: se senza perdere generalità i frassa sono finiti, allora dove ci sono tanti strepto ci sarà pure un triangolino strep(i)toso! Se invece i frassa e gli strepto si infastidiscono vicendevolmente infinitesimamente, allora succede quest'altro fatto: accade un paradosso!



13 ***Frassa&Strepto***.

Per amore di chiarezza ho cercato di riscrivere i loro appunti ma erroneamente ho mischiato tutto assieme e per cercare di rimediare al disordine ho numerato tutto quanto. L'unica cosa paradossale mi sembra il numero 6! Insomma... Com'è possibile che in 6 ci sia solo un frassa o uno strepto, se il triangolo equilatero 146 con vertici uguali per non esistere vuole in 6 un frassa, e il 3a56 vuole invece uno strepto?



14 ***Frassa&Strepto***.

Boh. Per lo meno mi è chiaro che uno dei due triangoli esistere deve proprio! Anzi... Mi sa che ce ne sono nascosti pure tanti altri, nel piano! Tra l'altro... Occorre anche dire (quei due partono sempre all'impazzata) che almeno il segmento 12 lo si trova subito no?! Se gli strepto sono infiniti...

Non biasimatemi se vi do solo gli appunti... frassa e J. Streptococco sono sempre persi a discorrere, ma io tra un giorno ho un esame!

Ma non sappiamo se si è capito niente, ci siamo solo divertiti molto a leggere la storia. Così come il disegno di ***Sallustiobis***, che dovreste vedere qui di fianco.

15 ***Sallustiobis***.

Dopotutto, è tutta una questione di interpretazione: ***Emanuele*** propone la seguente:

"...ogni punto del piano..." suppongo a coordinate intere. Ma poi che sia colorato di giallo o di rosso non capisco bene cosa voglia dire. Comunque l'area del triangolo equilatero è

A = L^2/4(sqrt(3))

e poiché L è un segmento con estremi sui punti interi la sua lunghezza è la radice quadrata di un intero, e dunque L^2 è un intero e quindi A è un numero irrazionale per via della radice di 3.

Ma il teorema di Pick dà una formula semplice per le aree dei poligoni con coordinate intere

A = i + P/2 - 1 con i = numero dei punti interi interni al poligono e p numero dei punti interi sul perimetro. ovvero A è razionale. Assurdo.

Dunque un triangolo equiangolo non può avere né vertici rossi né gialli né dorati.

Che, a partire dalle sue premesse, è completamente corretto.

E con questo è tutto. E visto che siamo a dicembre, che per tradizione è mese di auguri, ne facciamo tanti, a tutti voi e alle vostre famiglie, da tutta la Redazione.

6. Quick & Dirty

Gli americani scrivono la data della loro festa nazionale (il 4 luglio) come 7/4; buona parte del resto del mondo scrive questa data come 4/7. In queste due notazioni, quante date nell'anno sono ambigue?

7. Pagina 46

Prima soluzione

Se un numero a è nell'intervallo

$$\frac{1000}{m} \geq a > \frac{1000}{m+1},$$

Ci sono ovviamente m multipli interi di a della forma $a, 2a, 3a, \ldots, ma$ che sono minori di 1000. Ora, se indichiamo con k_1 il numero degli interi dati che si trovano nell'intervallo $\left(1000, \frac{1000}{2}\right)$, con k_2 quelli nell'intervallo $\left(\frac{1000}{2}, \frac{1000}{3}\right)$ e genericamente con k_i quelli nell'intervallo $\left(\frac{1000}{i}, \frac{1000}{i+1}\right)$ abbiamo in totale $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots$ numeri che non superano 1000 e che sono multipli di almeno uno dei numeri dati; ma dalle condizioni del problema sappiamo che tutti questi multipli devono essere diversi e quindi deve essere:

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots < 1000.$$

Resta da dimostrare che la somma dei reciproci di tutti gli interi dati è minore di:

$$k_1 \frac{1}{\frac{1000}{2}} + k_2 \frac{1}{\frac{1000}{3}} + k_3 \frac{1}{\frac{1000}{4}} + \ldots = \frac{2k_1 + 3k_2 + 4k_3 + \ldots}{1000},$$

in cui abbiamo sostituito k_i con $\frac{1000}{i+1}$ (che è sicuramente maggiore di k_i). Ora, abbiamo che:

$$\begin{aligned}
&2k_1 + 3k_2 + 4k_3 + \ldots = \\
&= (k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots) + k_1 + k_2 + k_3 + \ldots = \\
&= (k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots) + n < 1000 + n < 2000;
\end{aligned}$$

di conseguenza, la somma dei reciproci dei numeri è minore di 2.

Seconda soluzione

Introduciamo una variazione nel ragionamento fatto qui sopra. Il numero dei termini nella sequenza $1, 2, \ldots, 1000$ che sono divisibili per l'intero a_k è pari a[9] $\left[\frac{1000}{a_k}\right]$. Dovendo per le condizioni date il minimo comune multiplo tra due interi qualsiasi della sequenza

[9] Le parentesi di Gauss indicano la parte intera della divisione al loro interno.

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ essere maggiore di 1000, allora nessuno dei numeri $1, 2, \ldots, 1000$ può essere divisibile per due interi della sequenza $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Quindi, il numero dei termini della sequenza $1, 2, \ldots, 1000$ divisibili per almeno uno degli interi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ è pari alla somma:

$$\left[\frac{1000}{a_1}\right] + \left[\frac{1000}{a_2}\right] + \left[\frac{1000}{a_3}\right] + \ldots + \left[\frac{1000}{a_n}\right].$$

Essendoci 1000 numeri nella sequenza $1, 2, 3, \ldots, 1000$, è evidente che:

$$\left[\frac{1000}{a_1}\right] + \left[\frac{1000}{a_2}\right] + \left[\frac{1000}{a_3}\right] + \ldots + \left[\frac{1000}{a_n}\right] \leq 1000.$$

Ma la parte intera di una frazione differisce dalla frazione medesima per meno di 1, e quindi:

$$\left[\frac{1000}{a_1}\right] > \frac{1000}{a_1} - 1, \quad \left[\frac{1000}{a_2}\right] > \frac{1000}{a_2} - 1, \quad \ldots, \quad \left[\frac{1000}{a_n}\right] > \frac{1000}{a_n} - 1.$$

Di conseguenza,

$$\left(\frac{1000}{a_1} - 1\right) + \left(\frac{1000}{a_2} - 1\right) + \ldots + \left(\frac{1000}{a_n} - 1\right) < 1000,$$

e quindi

$$\frac{1000}{a_1} + \frac{1000}{a_2} + \frac{1000}{a_3} + \ldots + \frac{1000}{a_n} < 1000 + n < 2000,$$

da cui

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} < 2,$$

che è la tesi.

Nota (a margine)

La stima di questo limite superiore può essere resa molto precisa: consideriamo infatti tutti i multipli dei numeri dati che non superano 500. Possiamo dire che k_1 degli interi dati saranno maggiori di 500; $k_2 + k_3$ degli interi saranno minori di 500 ma maggiori di $\frac{500}{2}$; $k_4 + k_5$ di loro saranno minori di $\frac{500}{2}$ ma maggiori di $\frac{500}{3}$ e avanti così. Come nella prima soluzione segue dunque che il numero totale di interi minori di 500 e che sono multipli di almeno uno degli *n* numeri dati vale:

$$(k_2 + k_3) + 2(k_4 + k_5) + 3(k_6 + k_7) + \ldots .$$

Quindi è:

$$(k_2 + k_3) + 2(k_4 + k_5) + 3(k_6 + k_7) + \ldots < 500.$$

Notiamo ora che la differenza

$$500-[(k_2+k_3)+2(k_4+k_5)+3(k_6+k_7)+\ldots]$$

Esprime il numero di interi minori di 500 che *non* sono multipli di uno qualsiasi degli interi dati; e la differenza

$$1000-(k_1+2k_2+3k_3+\ldots)$$

Rappresenta il numero degli interi minori di 1000 che non sono di uno qualsiasi dei numeri dati. Di conseguenza,

$$500-[(k_2+k_3)+2(k_4+k_5)+3(k_6+k_7)+\ldots]<1000-(k_1+2k_2+3k_3+\ldots),$$

da cui otteniamo:

$$(k_1+k_2)+2(k_3+k_4)+3(k_5+k_6)+\ldots<500.$$

Resta da notare che:

$$\begin{aligned}&2k_1+3k_2+4k_3+5k_4+6k_5+7k_6+\ldots\\&\quad<(k_1+2k_2+3k_3+4k_4+5k_5+6k_6+\ldots)+[(k_1+k_2)+2(k_3+k_4)+3(k_5+k_6)]\\&\quad<100+500=1500.\end{aligned}$$

Quindi la somma dei reciproci di tutti i numeri è minore di:

$$\frac{2k_1+3k_2+4k_3+\ldots}{1000},$$

ossia è minore di $\left(1+\frac{1}{2}\right)$.

Analogamente, se consideriamo i multipli degli interi dati non eccedenti 333, possiamo provare che la somma dei reciproci dei numeri dati è minore di $\left(1+\frac{1}{3}\right)$.

Si noti che il valore 1000 in questo problema può essere sostituito da qualsiasi intero.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 ...se passi da quelle parti...

Non aspettatevi grossa obiettività da parte di Rudy nel trattare questo argomento; per prenderla alla lontana, cominciamo da una sua vecchia automobile (quella che aveva prima di "Tojo", per i futuri biografi).

Già il nome non era gran cosa: "Chamade", in francese, dovrebbe essere la musica militare che si suonava per proporre al nemico di arrendersi. La Renault probabilmente intendeva dire che aveva fatto una macchina talmente bella che le case concorrenti era meglio se cambiavano mestiere, ma questa, almeno nel caso di Rudy, si è rivelata una vanteria bella e buona; la macchina aveva tutta una serie di problemini (sia costruttivi che progettuali) che riportavano Rudy al *secondo* significato del termine; "chamade" infatti, nell'*argot* parigino significa "cosa raffazzonata, messa insieme alla bell'e meglio", e Rudy si è sempre chiesto se il dare quel nome alla macchina non sia stato un sussulto di onestà di un progettista[10].

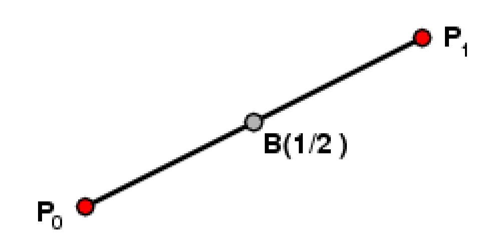
"Adesso vogliamo vedere come arrivi dalla tua vecchia Renault alla matematica".

Semplice: alla Renault lavorava un certo ***Charles Bézier***, e le sue curve sono esattamente quello di cui intendiamo parlare; data l'antipatia di Rudy per la Renault, ci affrettiamo a segnalare che queste curve sono state studiate anche da ***Paul de Casteljau***, che lavorava alla Citroen, e su questo secondo marchio non abbiamo nulla da eccepire in quanto, come i più attenti storiografi di questo gruppo sanno, la macchina di Alice è giustappunto una Citroen. Probabilmente, chiamarle "Curve di de Casteljau" veniva troppo complicato.

Bene, come al solito cominciamo dalla più semplice. Ossia, da una retta.

La curva, in questo caso, è la retta (o meglio, il segmento) passante per i due punti di inizio e fine, come indicato in figura; giusto per complicarci un po' la vita, utilizziamo una notazione ***vettoriale*** del segmento:

$$\begin{aligned}\vec{B}(t) &= \vec{P_0} + t\left(\vec{P_1} - \vec{P_0}\right)\\ &= (1-t)\vec{P_0} - t\vec{P_1}.\end{aligned}$$



La più semplice

Con calma, che questa notazione non è particolarmente simpatica.

Per prima cosa, "vi ripassiamo" il concetto di differenza di vettori; partendo dall'origine, tracciate i vettori sino ai punti dati; se scegliete un caso ragionevole, la somma dei due è la diagonale maggiore, la differenza la diagonale minore; ossia, nel disegno, in altra notazione avete che $\overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{OP_0} - \overrightarrow{OP_1}$.

Come dicevamo la notazione non è simpatica, ma ha un grossissimo pregio; al variare di *t*, descrive quel segmento ben preciso (e in un senso ben determinato); in particolare, si vede facilmente che per $t = 0$ si annulla il coefficiente di $\vec{P_1}$, mentre per $t = 1$ resta solo

[10] Non pensate che il problema di dare ad una macchina un nome imbarazzante sia limitato a questo caso: la Fiat *Dedra* vendette malissimo nei paesi di lingua inglese, in quanto ben poca gente aveva intenzione di mettersi alla guida di un "topo morto" (*dead rat*). In Giappone, la "u" è muta quindi figuratevi come se l'è cavata la *Temp(u)ra*. Sorvoliamo inoltre sul fatto che (sempre in Gran Bretagna) la *Ritmo* si ritrovava ad avere lo stesso nome di un prodotto merceologico in lattice di gomma raramente presente nel *nécessaire* di un'educanda.

il termine significativo $\overrightarrow{P_0}$; insomma, $\vec{B}(0)=\overrightarrow{P_0}$ e $\vec{B}(1)=\overrightarrow{P_1}$ e otteniamo una *descrizione parametrica* del segmento; in particolare, abbiamo che:

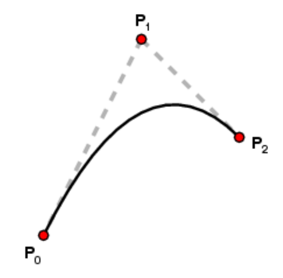
$$\vec{B}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\overrightarrow{P_0}+\overrightarrow{P_1}}{2},$$

ossia otteniamo il punto a metà strada tra $\overrightarrow{P_0}$ e $\overrightarrow{P_1}$.

Adesso, proviamo a complicare la cosa; non due, ma *tre* punti, definendo una curva di Bézier *quadratica*. In questo caso, abbiamo tre punti di controllo $\left(\overrightarrow{P_0},\overrightarrow{P_1},\overrightarrow{P_2}\right)$, con equazione:

$$\vec{B}(t)=(1-t)^2\overrightarrow{P_0}+2t(1-t)\overrightarrow{P_1}+t^2\overrightarrow{P_2}\ .$$

Anche qui, potete verificare facilmente che $\vec{B}(0)=\overrightarrow{P_0}$ e che $\vec{B}(1)=\overrightarrow{P_2}$; la cosa strana, succede quando andate a cercare il punto[11] $\overrightarrow{P_1}$; infatti, non è sulla curva, ma serve a "farla girare" da quella parte; la figura, probabilmente, rende tutto più chiaro.



Tre punti, uno guida.

Ci serve ancora uno strumento, per capirci qualcosa, il resto è (quasi) tutta discesa.

Se anziché considerare t semplicemente un parametro lo consideriamo come un *tempo* (di tracciamento della curva da parte di un punto, ad esempio), possiamo derivare rispetto a t l'equazione della curva che è, a tutti gli effetti, un'equazione oraria e otteniamo la velocità del punto che traccia la curva. Per la curva quadratica (quella con tre punti) si ricava l'espressione:

$$\begin{aligned}\vec{B}'(t)&=-2(1-t)\overrightarrow{P_0}+2(1-t)\overrightarrow{P_1}-2t\overrightarrow{P_1}\\&=2\left[(1-t)\left(\overrightarrow{P_1}-\overrightarrow{P_0}\right)+t\left(\overrightarrow{P_2}-\overrightarrow{P_1}\right)\right]\end{aligned}$$

Ossia $\vec{B}'(0)=2\left(\overrightarrow{P_1}-\overrightarrow{P_0}\right)$ e $\vec{B}'(1)=2\left(\overrightarrow{P_2}-\overrightarrow{P_1}\right)$, il che significa che il vettore velocità nei due punti di inizio e fine curva "punta" verso il terzo punto.

Essendo il vettore velocità tangente alla curva, si scopre finalmente perché il tutto sia stato inventato in Citroen (e Renault...): se dovete raccordare due curve di una carrozzeria, descrivendole con gli opportuni punti intermedi siete tranquilli che l'unione sarà senza spigoli; basta che i due punti intermedi si trovino sulla stessa retta, e il gioco è fatto[12].

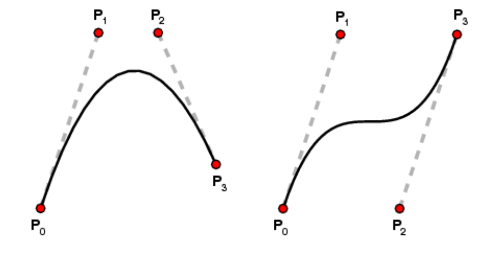
La cosa funziona, evidentemente, anche per le curve *cubiche*, governate dalla posizione di quattro punti e aventi equazione parametrica:

$$\vec{B}(t)=(1-t)^3\overrightarrow{P_0}+3t(1-t)^2\overrightarrow{P_1}+3t^2(1-t)\overrightarrow{P_2}+t^2\overrightarrow{P_3}\ .$$

[11] Continuiamo a chiamarlo "punto", in realtà continua ad essere l'estremo del vettore dall'origine al punto dato.

[12] Prima che pensiate che diventare designer con questo aggeggio sia questione di cinque minuti: un vecchio amico di Rudy, che faceva questo lavoro, lavorava normalmente raccordando curve con più di *sessanta* punti di controllo.

Per mostrarvi la potenza del concetto di "punto di controllo", vi diamo due diverse curve: notate che l'unica differenza tra l'una e l'altra è che sono stati "girati" (il senso di questa parola risulta chiaro dalla figura) i punti $\overrightarrow{P_2}$ e $\overrightarrow{P_3}$; non solo ma (per tornare all'amico di Rudy), se nella prima figura vi sbagliate e inserite le coordinate del punto $\overrightarrow{P_2}$ al posto di quelle di $\overrightarrow{P_1}$ e viceversa, vi ritrovate una strana "asola" graziosa e ben raccordata, ma possiamo garantirvi che come profilo del cofano non è un gran che.



Se giro i punti…

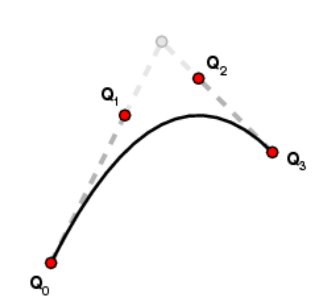
Anche in questo caso, logicamente, vale la regola della facilità nel raccordare le curve, se i punti di controllo sono allineati.

"E a cosa servono, a parte a disegnare cofani che *non* ti piacciono?". Ottima domanda, che vi permetterà anche di giocarci; tanto per cominciare, se qualcuno di voi si diletta con TEX, sappia che **Donald Knuth** ha disegnato i font utilizzando le curve di Bézier; il tutto è descritto nel libro *MetaFont: the program* che, se qualcuno ci dice dove trovarne una copia gratuita (e legale) in PDF, potremmo anche ringraziare sentitamente. Non solo, ma se a qualcuno di voi è capitato di usare *Impress* dalla suite *OpenOffice* (è quello "al posto di PowerPoint"), almeno nelle versioni 1.x era possibile tracciare delle curve di Bézier e poi spostare i punti di controllo, facendo saltar fuori un mucchio di asole (Rudy non ha cercato molto, ma nella versione 3 di OOo il comando sembra sparito, o almeno lo hanno nascosto bene: qualcuno ha notizie in merito?).

Bene, torniamo seri. O, almeno, teorici.

A qualcuno potrebbe venire il dubbio che esistano un mucchio di descrittori per una data curva; soprattutto se diciamo che una data curva di Bézier può sempre essere rappresentata da una curva (di Bézier) di grado superiore: ad esempio, nella figura qui a fianco abbiamo trasformato una curva controllata dai tre punti $\left(\overrightarrow{P_0},\overrightarrow{P_1},\overrightarrow{P_2}\right)$ nella medesima curva con punti di controllo:

$$\begin{cases} \overrightarrow{Q_0} = \overrightarrow{P_0} \\ \overrightarrow{Q_1} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{P_0} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{P_1} \\ \overrightarrow{Q_2} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{P_1} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{P_2} \\ \overrightarrow{Q_3} = \overrightarrow{P_2} \end{cases}$$



Complicarsi la vita…

…e ottenete la medesima curva; in realtà, esiste un'unica curva (di grado minimo, aggiungiamo noi) che soddisfi le condizioni date.

Si vede facilmente che quello che facciamo (almeno nel caso della cubica) non è altro che imporre determinate condizioni alla posizione e alla velocità nei punti iniziale e finale; queste condizioni saranno funzione dei punti intermedi, ma il succo è dato da queste condizioni al contorno: determinate quelle, abbiamo l'intera curva definita in modo univoco.

Questo è un caso particolare di un risultato più generale ottenuto da ***Hermite***, secondo il quale esiste un unico polinomio di grado n-1 in grado di soddisfare n condizioni iniziali sulle derivate di basso ordine in punti diversi; la dimostrazione classica procede per assurdo, supponendo una differenza (polinomiale) tra i due polinomi, calcolando i valori della funzione e delle derivate nei punti dati e dimostrando che per le condizioni iniziali tutti i coefficienti del polinomio devono valere zero.

Questa unicità si rivela decisamente comoda se dovete calcolare ad esempio il valore approssimato di un integrale; anziché la classica serie di rettangoli, che generano al posto della curva originale una rozza spezzata, approssimate ogni intervallo attraverso le opportune curve di Bézier (o di Hermite, se preferite) e integrate nel solito modo la marea di polinomi risultanti: risultato più preciso e decisamente più elegante. Altro caso (inverso del precedente) quando vi interessa ottenere la traiettoria di un sistema descritto da una pletora di equazioni differenziali: dividete tutto in piccoli intervalli, procedete per approssimazione numerica, *et voilà*.

In realtà in Renault non hanno inventato niente.

Infatti, questi polinomi sono un caso particolare del mostro che segue:

$$\overrightarrow{B_{n,\vec{x}}}(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(1-t)^{n-k}t^k x_k$$

(si vede, che la *"x"* a pedice all'inizio è vettoriale? Di componenti x_k).

Questi aggeggi, che non abbiamo la minima intenzione di usare, sono noti come **Polinomi di Bernstein**, e hanno alcune interessanti caratteristiche; qui non le staremo ad esaminare, vi basti sapere che quella più importante è la generalizzazione dell'algoritmo di de Casteljau: *le restrizioni di* $\overrightarrow{B_{n,x}}(t)$ *agli intervalli* $[0,\frac{1}{2}]$ *e* $[\frac{1}{2},1]$ *sono anch'essi polinomi di Bernstein esprimibili come* $\overrightarrow{B_{n,y}}(t)$ *per un qualche vettore y che è* semplice *da calcolare*.

L'enfasi che abbiamo messo sulla parola "*semplice*" significa che si può fare, non che sia conveniente; infatti, il motivo per il quale si utilizzano i polinomi di Bézier è che sono decisamente più facili da calcolare.

…e se volete l'ultima notizia, presto Rudy avrà modo di verificare quanto valgono le applicazioni pratiche di questi polinomi: tra l'inizio e la fine di questo pezzo "Geo" (la sua macchina attuale) è finita dal carrozziere. Tamponata da un "topo morto".

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms