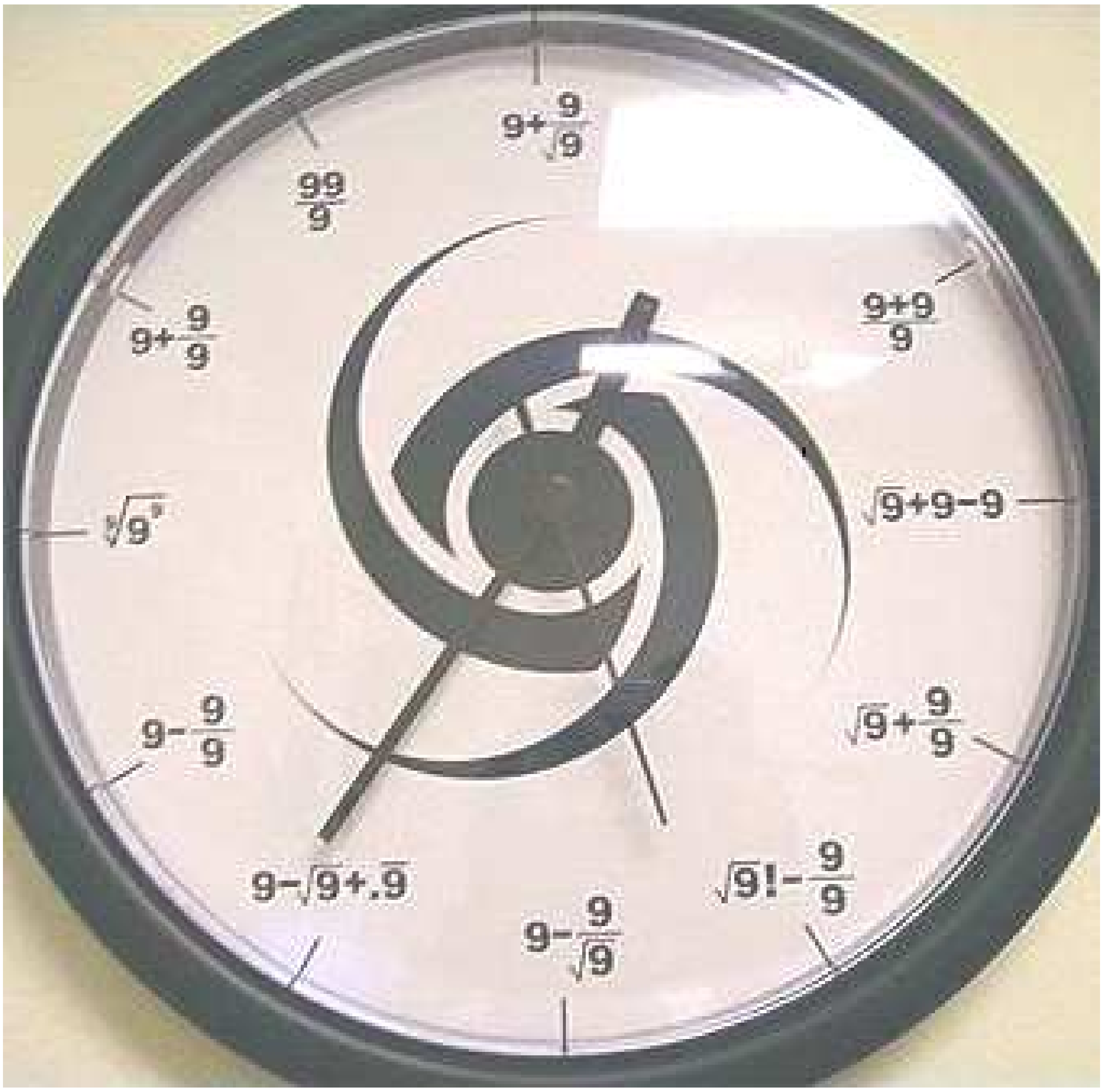
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 118 – Novembre 2008 - Anno Decimo



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 117 ha diffuso 2'171 copie e il 30/10/2008 per Google eravamo in 14'200 pagine.

SVEGLIA, che sono le *nove*!

Abbiamo purtroppo perso l'inventore di questo oggetto. Ci dispiace anche perché la tabellina del nove è la prima che ci è stata simpatica, da piccoli… forse perché era l'ultima. Comunque, il nostro orologio è molto più ottimista di quello del *Bulletin of Atomic Scientists*.

1. Gettare l'anima oltre l'ostacolo

Sempre caro mi fu quest'ermo colle,
e questa siepe, che da tanta parte
dell'ultimo orizzonte il guardo esclude.
Ma sedendo e mirando, interminati
spazi di là da quella, e sovrumani
silenzi, e profondissima quiete
io nel pensier mi fingo; ove per poco
il cor non si spaura. E come il vento
Odo stormir tra queste piante, io quello
infinito silenzio a questa voce
vo comparando: e mi sovvien l'eterno,
e le morte stagioni, e la presente
e viva, e il suon di lei. Così tra questa
immensità s'annega il pensier mio:
e il naufragar m'è dolce in questo mare.
(Giacomo Leopardi, *L'Infinito*)

Il titolo di questo articolo è ormai una delle frasi più usate nel gergo sportivo dalla retorica giornalistica italiana (anche se si usa prevalentemente la forma *gettare il cuore oltre l'ostacolo*), ma era originariamente una frase molto patriottica. Frase che richiama, naturalmente, eroismi militari, ma che forse anche i nati nel dopoguerra potrebbero riconoscere grazie a qualche ausilio mediatico. Chi può aver gettato l'anima oltre l'ostacolo? Cosa può veramente significare una frase del genere? Dato che noi siamo notoriamente più propensi alle facezie che alle cose serie, forniremo come primo esempio di questa immagine la scena di uno dei film con Don Camillo e Peppone. Una scena relativamente seria, a dire il vero, non una delle celebri gag della coppia. Vi si vede Peppone mentre fa un discorso per esortare i compagni a non seguire il governo verso la guerra, ma l'astuto Don Camillo, con un semplice intervento psicologico, lo confonde al punto da fargli concludere il discorso con una esaltata verve patriottica e in piena contraddizione, al punto di inneggiare nello stesso tempo al Re e alla Repubblica. Il discorso riusciamo a riportarlo praticamente per intero[1]:

> Cittadini lavoratori! *(applausi)*
>
> Prima di presentarvi il compagno indipendente avvocato Cerratini *(applausi)* voglio dire due parole alla reazione clericale, atlantica e guerrafondaia che tutti ben conosciamo *(applausi)*, a quegli sporchi corvi neri che parlano di patria, di sacri confini minacciati e di altre balle nazionaliste che la Patria siamo noi, la Patria è il Popolo!
>
> E questo popolo non combatterà mai contro il glorioso Paese del socialismo che porterà al nostro proletariato oppresso la libertà e la giustizia! *(applausi)*
>
> E voi giovani che andate nelle barbare caserme, direte a coloro che tentano di armarvi e di usarvi per i loro sporchi interessi, direte a coloro che diffamavano i lavoratori…

1 *Don Camillo e Peppone*

[1] Naturalmente, in rete si può trovare anche la sequenza video completa.

(Dal campanile di Don Camillo si levano le note della Canzone del Piave)

…direte ai calunniatori del Popolo, direte che i vostri padri…

(Gli occhi di Peppone iniziano a farsi lucidi)

…hanno difeso la Patria dal barbaro invasore che minacciava i sacri confini e che noi del '99 che abbiamo combattuto sul Monte Grappa, sulle pietraie del Carso e sul Piave saremo sempre quelli di allora e che quando tuona il cannone è la voce della Patria che chiama e noi risponderemo "Presente!".

(Don Camillo dalla torre campanaria si mette sull'attenti e sussurra "Presente!")

Noi vecchi che abbiamo sul petto le medaglie al valore conquistate sul campo di battaglia ci troveremo come allora a fianco dei giovani e combatteremo sempre ed ovunque, getteremo l'anima oltre l'ostacolo e difenderemo i sacri confini d'Italia contro qualsiasi nemico, dell'Occidente e dell'Oriente, per la difesa del Paese e al solo scopo del bene indissolubile del Re e della Patria!

Viva la Repubblica, viva l'Esercito! *(applausi)*

La rapida conversione di Peppone è come sempre un artificio di Guareschi, che non nascondeva le sue evidenti simpatie per Don Camillo: ciò non di meno è vero che una sapiente retorica coniugata nel momento e nel luogo opportuno riesce spesso dove la razionalità fallisce. In questo contesto, la frase "gettare l'anima oltre l'ostacolo" che come si è visto, viene fatta pronunciare con occhi lucidi anche a Peppone, è un bell'esempio di arte oratoria. Richiama il proiettare le aspirazioni ed i desideri dall'altra parte di ciò che impedisce il passaggio, che esso sia un confine, una barricata nemica o (in tempi più calmi e molto moderni) la difesa della squadra avversaria.

2 *Un Martin Baltimore del 132° Gruppo ICAF*

Il motto degli aerosiluranti ICAF (Regia Aeronautica Cobelligerante – Italian Co-Belligerant Air Force) alla fine della Seconda Guerra Mondiale era proprio *"Getta l'anima oltre l'ostacolo, e vai a riprenderla*", e si legge su molti dei monumenti che celebrano gli eroi del periodo. Si trattava di soldati che volavano su aerei che talvolta cadevano anche senza bisogno del contributo del nemico, la cui missione spesso consisteva nel morire in mare bombardando navi. È possibile che l'attuale esortazione sportiva derivi proprio dal motto di questa forza aerea, anche se sembra aver perso la parte significativa che spiega che ciò che si getta prima deve anche essere recuperato poi. È una perdita grave, dal punto di vista del significato evocativo, perché non basta gettare l'anima, il cuore, il desiderio dall'altra parte, per risolvere i problemi: occorre poi che tutto il resto segua, perché sono sempre il corpo, la carne e il sangue che realmente risolvono la difficoltà. Altrimenti si rimane con nient'altro che un'intenzione. Ironicamente, la parte più eroica del motto si è perduta, come lasciata in esclusiva a quegli aviatori che ad andare a riprendere il cuore o l'anima ci provavano davvero, sbattendo contro l'ostacolo e morendo nel tentativo.

Ostacolo viene dal latino *ob+stàculum*, cioè "che sta dinanzi": può essere interessante notare che non c'è mai accezione esplicitamente negativa: né nell'etimologia di *ostacolo*, né nella terribile particella *anti*, che anch'essa significa solo "di fronte a", e neppure nell'origine del verbo *opporre* , che significa solo *porre di fronte.* Ciò non di meno, il significato corrente delle espressioni una connotazione negativa ce l'ha eccome, perché ogni ostacolo deve essere superato e tutto ciò che ci si *oppone* è nostro nemico, in qualche forma[2].

In matematica è tutto più semplice perché non c'è connotazione morale nelle forme e nelle configurazioni geometriche: un *lato BC opposto al vertice A* si trova semplicemente di fronte al vertice in questione, *l'opposizione* è una semplice *posizione*, che non danneggia in alcun modo né il signor *A* né il distinto signor *BC*. Nel mondo reale, invece, le posizioni tendono ad avere multipli significati a causa delle interpretazioni umane: sedersi ai lati opposti di un tavolo di trattative potrebbe indicare diversi interessi, mentre in una tavolata di amici a cena essere di fronte potrebbe facilitare una piacevole conversazione e scambio di occhiate complici.

Le barriere, oltre a rendere il percorso più arduo, tendono a coprire quello che si trova dall'altra parte: e potrebbero nascondere una meta, una destinazione, ma anche difficoltà, forse altri impedimenti. Come ricorda Leopardi, potrebbe persino essere un vantaggio il non sapere cosa si trova al di là della siepe: potrebbe permettere a desideri e aspirazioni di superare la paura e immaginare e creare mondi migliori e finali più adatti, per rafforzare il desiderio e la motivazione ad affrontare l'ostacolo, e superarlo. Forse è proprio in questo senso che l'anima (o il cuore) deve essere gettata, lanciata, senza alcuna remora, senza timore – in un salto di immaginazione che proietta il resto dell'essere in avanti verso la meta, liberandolo dei vincoli che l'ignoto ed invisibile porrebbe.

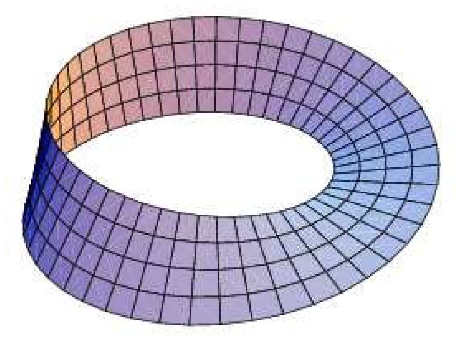
Ma cosa succede se dall'altra parte non c'è nulla di ciò che ci si aspetterebbe o, peggio, c'è proprio l'opposto di quello che ci si aspetterebbe? Gli eroi aerosiluranti, si trovarono davanti un ostacolo ancora peggiore durante l'autunno del '43: l'armistizio trasformava il vecchio nemico in un alleato, il vecchio alleato in nemico, e ognuno di loro dovette decidere cosa fare del proprio cuore e della propria anima. Dove gettarli, in quel caso?

E se l'ostacolo è esso stesso una proiezione, una creazione umana per spingersi ad andare avanti verso altro? Potrebbe non esserci affatto un *oltre*, un'altra parte, ma una infinità di nuove sfide da affrontare, come in una corsa ad ostacoli, dove occorre continuare a contare i passi, studiare la strategia migliore per ottimizzare gli intervalli tra le barriere, gli occhi fissi verso un ostacolo che è solo uno dei tanti, solo per questa volta, per questo scatto.

3 *Un'immagine dei 100m ad ostacoli alle Olimpiadi cinesi.*

È ben noto l'aspetto psicologico in qualsiasi lotta, per cui tutti gli atleti professionisti sono sottoposti a training della loro immaginazione e imparano presto a proiettarsi avanti, immaginare loro stessi che attraversano il traguardo vittoriosi, *gettare l'anima* in avanti nel tempo, al momento in cui avranno vinto la competizione, e poi andarla a prendere, la vittoria, sul serio. L'immagine non è campata in aria, insomma, pur senza i moderni studi psicologici. Ma il problema resta: cosa succede se la realtà è inferiore alle aspettative? Se riprendendo l'anima si scopre che non è cambiato nulla, che il prossimo passo consiste semplicemente in un altro lancio?

[2] Ebbene sì, stiamo per fare la scontatissima battuta alla Perry Mason "Mi oppongo, vostro Onore!", ma magari in nota a piè pagina non si nota molto...



4 *Il nastro con una faccia sola*

Soprattutto, cosa succederebbe se l'altro lato non esistesse affatto? Se ci si ritrovasse sempre e comunque al punto di partenza? Se *l'opposto* non fosse veramente dall'altra parte, ma nella nostra (e unica)?

Le superfici ordinarie, quelle che siamo abituati a considerare tutti i giorni, hanno sempre due facce, per cui è sempre possibile percorrere idealmente uno dei due lati senza mai raggiungere il secondo, salvo attraversando una possibile linea di demarcazione costituita da uno spigolo (chiamata "bordo"): si pensi ad esempio ad un foglio di carta, o anche alle superfici di una sfera o di un cilindro. Per queste superfici è possibile stabilire convenzionalmente un lato *superiore* o *inferiore* (come nel caso del foglio), oppure *interno* o *esterno* (come nel caso della sfera). Nel caso del nastro in figura, invece, tale principio viene a mancare: esiste un solo lato e un solo bordo. Dopo aver percorso quello che istintivamente continuiamo a chiamare *un giro*, ci si trova dalla parte opposta a quella di partenza. Solo dopo averne percorsi due ci ritroviamo nel medesimo punto dal quale siamo partiti. Nel nostro percorso passiamo in tutti i punti della superficie a quella senza dover attraversare alcun bordo, semplicemente continuando a percorrere il nastro. Stavolta, l'ostacolo lo si affronta e supera senza neppure incontrarlo.

Qui sì che sarebbe un problema, lanciare l'anima dall'altra parte.

5 *Johann Benedict Listing*

La superficie che ha già preso mezza pagina di questo articolo fu studiata e analizzata nei dettagli da un matematico tedesco di origini ceche: Johan Benedict Listing[3], vissuto tra il 1808 e il 1882. A lui si deve un grande passo avanti della topologia, e persino il nome della stessa branca sembra sia stato per la prima volta usato proprio in una sua lettera.

Johan viaggiò molto, raccolse innumerevoli dati per un suo professore eccezionale, un tale Gauss, che servirono a sviluppare la teoria dell'elettromagnetismo.

Ma il suo vero interesse fu sempre la topologia e le implicazioni nella fisica: tra i contributi di cui può andare fiero c'è senz'altro l'aver fecondato la mente di un altro matematico leggendario, Riemann[4].

Ora è vero che la formalizzazione dello studio della superficie del nastro con una faccia sola[5] è stata fatta da Listing, ma il nome con cui è diventata famosa è stato rubato ad un altro matematico ottocentesco, anche lui un gigante della topologia, che aveva allo stesso tempo lavorato su superfici topologiche originali.

[3] È nato il 25 luglio, per cui non è lui il protagonista di questo compleanno…

[4] Ne parliamo in RM068, "Pellegrinaggio a Thule".

[5] Del nastro abbiamo trovato esempi notevoli sul sito ufficiale delle opere di Escher (http://www.mcescher.com/) e su http://www.matematita.it/materiale/catalogo.php?parent=325. Non ne riportiamo alcuno per evitare problemi di copyright, ma vi invitiamo a visitarli, così come la pagina di immagini matematiche di Wikipedia che ha numerose animazioni divertenti.

6 *August Ferdinand Möbius*

August Ferdinand Möbius era nato il 17 Novembre 1790 a Schulpforta, un paese vicino Leipzig, Lipsia, in Sassonia. Il padre, un insegnante di danza, morì quando lui aveva solo tre anni, e così fu cresciuto dalla madre, che a quanto pare era una discendente di Martin Lutero: tutto qui quello che si conosce delle origini di questo gigante della topologia moderna, che fin da piccolo sembra aver amato la matematica, l'astronomia e la fisica.

Frequentò l'università di Lipsia, inizialmente studiando legge: era la volontà della famiglia. Già a metà del primo anno però cambiò indirizzo, virando decisamente sulle materie di suo interesse. L'insegnante di astronomia di August era Karl Mollweide, noto anche per i suoi risultati sulle relazioni trigonometriche e le proiezioni di mappe che permettono di preservare le aree: la topologia era già nell'aria.

Nel 1813 lasciava Lipsia per Göttingen, dove studiò astronomia con Gauss[6], ed in seguito si trasferì ad Halle, ad imparare matematica da Pfaff, che era stato a sua volta l'insegnante di Gauss. La sua tesi di dottorato era sull'*occultazione delle stelle fisse*, quella di abilitazione sulle *Equazioni trigonometriche*: mentre vi lavorava ci fu un tentativo di arruolarlo nell'esercito prussiano, ipotesi per lui inaccettabile e che non fu mai attuata, per fortuna. Il 1816 vide una serie di circostanze fortunate, visto che Mollweide riuscì ad ottenere la cattedra di matematica, e Möbius a prendere il posto del suo professore come "professore straordinario" di astronomia e meccanica superiore. Malgrado l'inizio fortunato, Möbius non era un insegnante molto amato e le sue lezioni non attraevano molti studenti, e per molti anni non riuscì ad ottenere una cattedra ordinaria, anche perché si ostinava a restare a Lipsia per orgoglio nazionale, ed anche quando nel 1825 Mollweide morì, non gli riuscì di seguire i passi del maestro ed ottenere la cattedra di matematica.

Nel frattempo si era sposato e aveva iniziato una brillante serie di pubblicazioni[7] che gli valsero i primi riconoscimenti. Se come insegnante non aveva molto successo, come ricercatore sia in ambito matematico sia astronomico la sua fama cominciava ad essere internazionale: quando nel 1844 ricevette un'ottima offerta dall'università di Jena, a quel punto l'Università di Lipsia si decise ad assegnargli la cattedra ordinaria in astronomia che aveva occupato per anni come sostituto.

Quasi tutti i risultati matematici di Möbius apparvero sul *Giornale di Crelle*[8]; *Der barycentrische Calcul*, pubblicato nel 1827, fu riconosciuto come un classico: include risultati di geometria proiettiva e affine, introduce coordinate omogenee e discute trasformazioni geometriche e in particolare proiettive; introduce una configurazione ora chiamata *rete di Möbius*, che giocherà un ruolo importante nella definizione della geometria proiettiva.

[6] Sarebbe interessante scoprire quanti studenti di Gauss si interessarono di topologia: ne abbiamo già trovati due senza nemmeno cercarli.

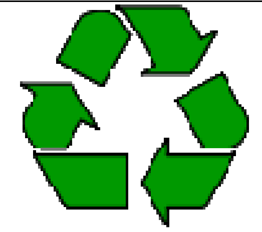
[7] Ormai molte delle sue opere si trovano in rete nella loro versione originale, per esempio qui: http://portail.mathdoc.fr/OEUVRES/.

[8] Di cui si parla in RM055, ma anche in RM057, RM078 e probabilmente in altri compleanni ancora: Crelle sembra aver avuto un gran talento nello scegliere gli articoli da pubblicare.

Il suo biografo scriveva:

> L'ispirazione per la sua ricerca la trovava soprattutto nel ricco pozzo della sua mente originale. La sua intuizione, i problemi che si poneva e le soluzioni che trovava, tutto dimostra un ingegno eccezionale, qualcosa di originale in modo non forzato. Lavorava senza fretta, tranquillamente da solo. Il suo lavoro restava nascosto finché tutto non era stato messo al proprio posto. Senza fretta, senza pompa né arroganza, aspettava finché i frutti della sua mente non fossero maturi. Solo dopo una tale attesa pubblicava i suoi lavori perfezionati…

Ci fa veramente pensare ad un personaggio paziente e dedicato, anche considerando le opere astronomiche (*De Computandis Occultationibus Fixarum per Planetas* – 1815 – *Die Hauptsätze der Astronomie* – 1836 – *Die Elemente der Mechanik des Himmels* –1843) e le tante opere che furono ritrovate solo dopo la sua morte e pubblicate in seguito.



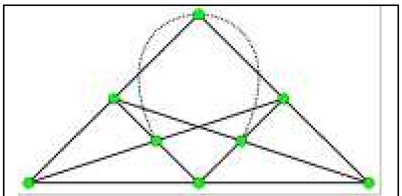
7 *Il simbolo del riciclaggio è un nastro di Möbius.*

Ed è in una di queste memorie, presentata all'*Académie des Sciences* e scoperta dopo, che compare la superficie mono-lato: Möbius stava lavorando ad una questione sulla teoria geometrica dei poliedri per l'*Académie*, e definì le proprietà del nastro oggi chiamato con il suo nome.

Ma sono tanti gli oggetti a cui Möbius ha donato il suo nome.

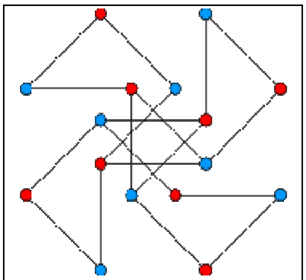
La *trasformazione di Möbius*, per esempio, è definita sulla sfera di Riemann ed è utilizzata nella geometria proiettiva e nell'analisi complessa. Si tratta di una trasformazione che preserva le circonferenze e gli angoli, ed ha numerosi utilizzi pratici[9].

La *trasformata di Möbius*, da non confondere con la *trasformazione*, è invece parte della teoria dei numeri, insieme alla *funzione di Möbius* $\mu(n)$, che è un'importante funzione moltiplicativa che identifica proprietà combinatorie dei numeri: ha infatti valore 0 se n ha nei suoi fattori dei quadrati, –1 se n ha un numero dispari di fattori primi distinti, o 1 se il numero dei fattori è pari. Le proprietà interessanti di questa funzione determinano anche l'utile *formula di inversione di Möbius*.



8 *Configurazione di Möbius-Kantor*[10].

Ancora non è finita: in teoria dei grafi c'è il *grafo di Möbius-Kantor*, e la *configurazione di Möbius-Kantor*. Questi ultimi nascono proprio dalla curiosità del nostro protagonista, che si era chiesto se potessero esistere determinate configurazioni, domande a cui Kantor[11] ha risposto utilizzando il piano proiettivo immaginario.



9 *Grafo di Möbius-Kantor.*

August si poneva dei problemi, che in qualche modo ebbero conseguenze non banali in molte discipline. Eccone un altro buon esempio:

> *C'era una volta un re con cinque figli. Nel suo testamento decise che alla sua morte il suo regno fosse diviso dai figli in cinque regioni in modo che ognuna avesse un confine con le altre quattro. È possibile soddisfare queste condizioni?*

---

[9] No, non siamo abbastanza bravi da raccontarli in modo poco professionale in queste righe. Su Wikipedia, però, soprattutto nella versione inglese, ci sono delle figure che danno proprio l'idea.

[10] Per quelli che seguono i nostri consigli e hanno letto *Flatterlandia* di Ian Stewart, questa figura non è completamente nuova…

[11] S. Kantor, a quanto pare, non Georg Cantor di cui parliamo in RM062, anche se entrambi si sono occupati di teoria dei gruppi.

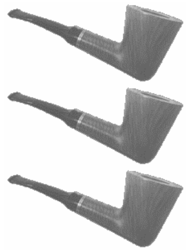
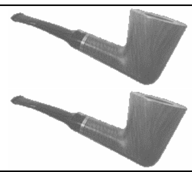
La risposta è no, ed è anche facile da provare, ma il problema è uno dei precursori dell'annosa questione della colorazione delle mappe con quattro colori[12], un altro caso in cui provò con l'immaginazione a fare cose che fino a quel momento erano ritenute impossibili.

Il problema risolto dalla configurazione di Möbius-Kantor è il seguente: *è possibile trovare una configurazione di otto punti su otto file di tre punti, tale che ogni punto appartenga ad esattamente tre file?* La risposta va trovata guardando oltre il mondo euclideo a cui siamo abituati, ed è certo un buon esempio di *gettare l'anima* oltre in confini dell'attuale geometria, oltre i confini delle convenzioni che non permettono di vedere la completezza di un mondo molto più vasto.

Forse non è un caso che tutte le biografie di August Möbius che abbiamo trovato in rete dimenticano di ricordarne la morte, nel 1868 a Lipsia nella sua Sassonia. Forse in merito mancano informazioni, documenti: o magari è riuscito a curvare lo spazio in maniera opportuna, partendo per un'altra dimensione, cercando di recuperare la sua anima.

[12] Anche di questo si è già parlato in RM078 nel compleanno di Green.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Amebe teoriche			
Problema di infinit(i/esimi)			

2.1 Amebe teoriche

Abbiamo dei problemi con la scuola. Problemi seri, mica da ridere: e, anche se siamo solo una rivista di matematica ricreativa, rimaniamo esterrefatti quando guardiamo i TG e vediamo che lo sanno tutti, che noi abbiamo problemi con la scuola. Incredibile, come corrano in fretta le notizie. Questa volta, il problema è di Biologia.

Sapete già che, per motivi che avevamo promesso di non nominare più,[13] Alberto ha cambiato scuola; così in alcune materie si è ritrovato a rifare programmi che aveva già svolto ma, siccome il valor medio deve essere zero, in altre materie si è trovato a correre come un matto perché avevano svolto molto più programma di quanto avesse fatto lui.

Per non rivoltare il coltello nella piaga, ci limiteremo alla prima classe di materie: tra queste, giustappunto, Biologia. Si parlava di riproduzioni per scissione, e qui esiste un esempio classico: le amebe. In realtà, visto che rifuggiamo le complicazioni, abbiamo cercato di semplificarci la vita; anzi, di semplificare proprio gli esseri viventi. Così, all'inizio consideravamo non organismi unicellulari, ma dei triangoli isosceli piuttosto particolari: triangoli che, divisi in due parti da una linea retta, generavano due triangoli anch'essi isosceli, anche se non necessariamente simili all'originale. Visto il ripasso di biologia in corso, il definirli "*amebe*" è stato immediato.

La prima domanda che Alberto e Rudy si sono posti, a mezza strada tra biologia e geometria euclidea, è stata: "Quali triangoli isosceli sono amebe?". Hanno passato l'intera cena a discutere di riproduzione (per scissione, vi ricordiamo) delle amebe, pardon dei triangoli, e la cosa non è stata affatto apprezzata dagli altri partecipanti al desco familiare. La scissione (teorica) delle amebe triangolari è degenerata presto in una scissione (pratica) dei commensali.

[13] Trasloco. Ecco, lo abbiamo nominato di nuovo.

Così, adesso sono alle prese con un problema decisamente più complicato, anche se su una tavola decisamente più sgombra. Togliendo la restrizione che il triangolo originale sia isoscele, ma mantenendo la richiesta che, una volta diviso da una retta, dia origine a due triangoli isosceli, quali devono essere le caratteristiche dei triangoli-amebe? E se Rudy e Alberto consentissero anche la divisione da parte di più rette (purché sempre passanti per un angolo), generando un certo numero di triangoli isosceli, quanti sarebbero?

2.2 Problemi di infinit(i/esimi)

Abbiamo dei problemi con la scuola. Lo abbiamo già detto, vero? Lezioni all'aperto, scuole occupate, manifestazioni, cortei, striscioni. E tutto questo solo perché non riusciamo ancora a capire se ad Alberto piaccia o meno Filosofia. Al momento sembra apprezzare, ma forse è solo perché ha fatto bella figura in classe mostrando di conoscere (forse per osmosi) il Paradosso di Zenone; ci aspettiamo, da un momento all'altro, un drammatico risveglio e conseguente repentina disillusione non appena si faranno vivi i Sofisti.

Comunque, forte della sua padronanza del Paradosso, il Nostro sta esplorando con l'abituale approssimazione i concetti di infinito e di infinitesimo. Rubando con destrezza alcuni appunti sparsi dell'Augusto Genitore, ha scoperto un vecchio problema che sta studiando al solo scopo di rifilarlo proditoriamente a qualche prof (al momento, sono in ballottaggio quello di Matematica e quella di Filosofia) sperando di metterli in difficoltà e di farsi bello con tutta la classe (segnatamente, con tutta la popolazione *femminile* della classe). Il guaio è solo che, prima di presentarlo ai prof, deve capirlo lui. E qui casca l'asino, direbbero i vecchi saggi.

Il nocciolo del problema presuppone che ogni punto del piano sia colorato o di giallo o di rosso. Bisogna dimostrare che, da qualche parte, esiste un triangolo equilatero con i vertici dello stesso colore.

Capito perché si resta indecisi tra matematica e filosofia? Sembra una domanda quasi mistica, non proprio canonica nei compiti in classe. L'Augusto Genitore sostiene ci sia una soluzione molto carina che sembra una fregatura e, se non disegnasse peggio delle amebe del problema precedente, basterebbe un attimo a dimostrarlo. Alberto è convinto che Rudy stia ciurlando nel manico: ma questo non l'aiuta mica, a trovare la soluzione.

Già. Un sacco di problemi con la scuola, di questi tempi. Così tanti, che si fa fatica a scherzarci su. Sarebbe davvero una gran cosa, perdinci, se i problemi della scuola fossero solo quelli di queste pagine, eh?

3. Bungee Jumpers

Trovare tutti i quadrati perfetti di quattro cifre composti unicamente di cifre pari.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

C'era da aspettarselo. Per quanto preparati all'idea di una naturale asincronia di questa rubrica, confessiamo che ce la saremmo attesa un pochino meno nevrastenica. Appena nata è uscita per tre mesi di seguito (RM111, RM112 e RM113); poi ha avuto quattro mesi di pausa; adesso esce con questo *scoop* di tutto rispetto e, a meno d'incidenti editoriali dell'ultima ora, uscirà anche il mese prossimo con un altro colpo assai *prestigioso*. Un'altalena di emozioni, perdinci.

4.1 Anelli nell'Io

Sarebbe la condizione in cui era la Terra prima che la vita evolvesse – milioni di albe e tramonti, venti che soffiano di qua e di là, nubi che si formano e si disperdono, temporali che si abbattono sulle valli, massi che crollano dalle montagne e scavano voragini, acqua che scorre negli alvei e scolpisce burroni, onde che si spezzano su spiagge sabbiose, maree che fluiscono e rifluiscono, vulcani che vomitano mari di lava rovente, alture che erompono all'improvviso dalle pianure, continenti che vanno alla deriva e si dividono, e così via.

Fino a non molto tempo fa un brutto spot pubblicitario veniva regolarmente passato in televisione: vi si vedeva un pescatore che, seduto ad una tavola apparecchiata, si rivolgeva ad un tonno anch'esso presente sulla scena, pur se a disagio come un pesce fuor d'acqua[14]. Masticando con gusto e un po' d'arroganza, l'uomo mostrava al tonno il boccone infilato sui rebbi della forchetta e gli diceva: "È tua suocera". Il povero genero pinnato e branchiato, nuovamente predestinato dalla crudeltà dei proverbi, non poteva far altro che rimanersene muto come un pesce[15].

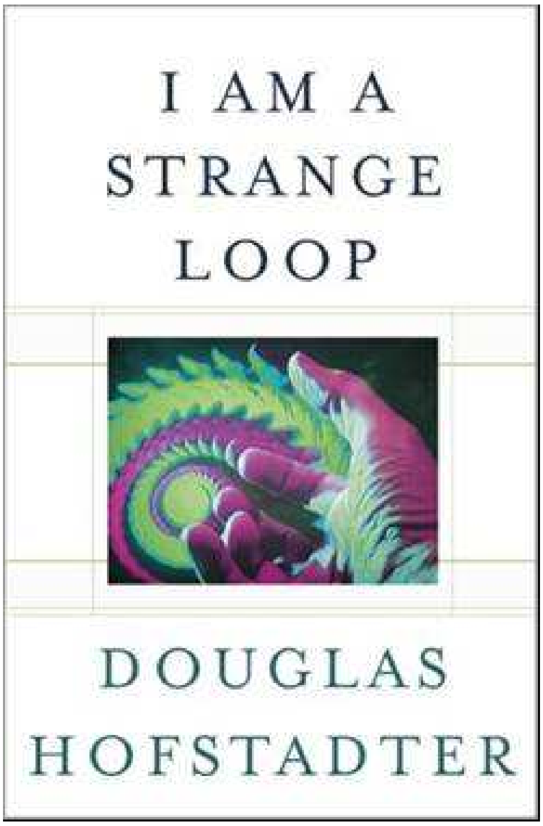
Di solito, evitiamo di sbilanciarci in giudizi estetici: tutta la nostra spudoratezza la spendiamo nel continuare a parlare di matematica senza averne alcun titolo, cosa che facciamo oramai da un decennio. Per questo, riteniamo che metterci a concionare anche sull'estetica e sull'etica dei prodotti dell'advertising sia decisamente troppo anche per degli sfacciati come noi. Se ci siamo permessi di definire *brutto* quello spot non è solo perché tale ci pare da molti punti di vista, ma anche e soprattutto perché, dopo aver letto la sua ultima fatica, siamo abbastanza certi che anche ***Douglas R. Hofstadter*** la penserebbe come noi, se vedesse il videoclip. A prescindere da ogni criterio narrativo o velleità comica, quel che fa il pescatore non è altro che uno sberleffo crudele; una cattiveria gratuita, e proprio per questo brutta. Si potrebbe certo obiettare che, nel mondo reale, i pescatori uccidono davvero i pesci; e per farlo hanno bisogno di ridurre al minimo la solidarietà con le loro prede. Questo è ben comprensibile: non si può pretendere una sorta di vegetariana *pietas* da parte chi, facendo un rispettabile e onesto lavoro, deve in qualche modo rendere ritualmente meccanica e normale l'uccisione di esseri viventi. Ma,

[14] L'osservazione è tanto vergognosamente scema quanto inevitabile, ne converrete.

[15] Vedi nota precedente.

pur concedendo questa legittima difesa ai *veri* pescatori, resta il fatto che la dinamica dello spot amplifica la crudeltà del gesto del pescatore *virtuale*. Lo spot rappresenta il tonno come un essere in grado di intendere le parole e di cogliere il loro significato, gioca sul presumibile sconforto del tonno nel venire a sapere d'essere parente della pietanza dell'uomo, in una parola, attribuisce al pesce una coscienza presumibilmente molto maggiore di quella che realmente ha. Ma un grado maggiore di coscienza significa una maggiore capacità di soffrire; e maggiore sofferenza implica maggiore crudeltà. Questo è ciò che rende lo spot brutto, a prescindere dall'empatia che si possa avere o meno col tonno o con sua suocera[16].

I diversi possibili livelli di coscienza sono uno dei primi argomenti che DRH affronta in "*Anelli nell'io*". Questo è il titolo italiano (con tanto di bella struttura ricorsiva grazie alla ripetizione del gruppo "*nelli*"), del suo "*I am a strange loop*", uscito un anno fa in lingua originale. Partendo dai ricordi della sua capacità di identificarsi coi personaggi dei racconti di Roald Dahl, e giungendo fino alla definizione di una metrica del grado di coscienza (unità di misura proposta: l'*huneker*), Hofstadter mette subito in evidenza quale sia l'obiettivo del libro: l'analisi del concetto di coscienza. Ciò che più colpisce chi ha conosciuto Hofstadter attraverso il suo libro più famoso, *Gödel Escher Bach – un'Eterna Ghirlanda Brillante*, è lo scoprire dalla prefazione del suo nuovo lavoro che, a parere dell'Autore, quella celebre opera è stata sostanzialmente fraintesa.

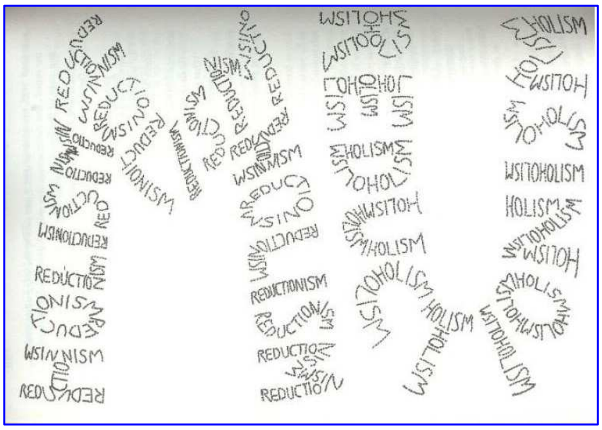


Nonostante il premio Pulitzer ottenuto e la subitanea elezione, da parte di migliaia di lettori e fan, a cult-book indiscutibile, il senso vero di *GEB* sembrerebbe non essere stato colto, a parere dello stesso Hofstadter. In effetti il libro, pubblicato nel 1979, fu preso a modello da tutta una generazione di giovani affascinati dall'intelligenza artificiale, dalla tecnologia; anche le opere di personalità eminentemente artistiche come M.C. Escher e J.S. Bach incantavano perché lette tramite una chiave di interpretazione, in ultima analisi, sostanzialmente *scientifica*. Invece l'Autore, più che dagli aspetti tecnologici e strutturali, è sempre stato affascinato dai misteriosi meccanismi della cognizione. Era in quest'ottica che dovevano essere letti gli incanti di quelli che lui chiama *strani anelli*: cioè quelle strutture che riescono a ripiegarsi su loro stesse autosostenendosi, che sono ben riconoscibili in molte opere grafiche di Escher, nelle composizioni a più voci di Bach e, soprattutto, nei teoremi di Gödel. E in questo senso la *stranularità* era già il core del suo libro del 1979; ma invece è stata in genere letta solo come una curiosa coincidenza che legava i tre protagonisti del titolo, e non come l'elemento centrale e portante di tutta la filosofia hofstadteriana.

[16] Forse è bene chiarire che, a differenza di Hofstadter, chi scrive queste righe non è vegetariano e fa un uso normale, se non addirittura superiore alla media nazionale, di scatole di tonno in scatola. Ciò non di meno, la crudeltà nell'ideazione dello spot si evidenzia anche dal fatto che il grado di parentela scelto per la battuta finale sia quello che si usa di solito per rappresentare i *fastidi*, e non gli *affetti* familiari. Neanche il più spudorato dei creativi dell'agenzia di pubblicità avrebbe potuto proporre la battuta: "È tua madre".

Quindi, in un certo senso, *Anelli nell'Io* è un sequel: Hofstadter ricomincia da capo a sviluppare il tema non colto, quasi trent'anni dopo il successo di precedente. E comincia raccontando di come fosse affascinato, fin da piccolo, dai meccanismi che usavano principi di *feedback* (lo sciacquone, che apre un rubinetto per riempire la sua vaschetta d'acqua, ma è lo stesso livello dell'acqua a fermare l'erogazione della stessa; il termostato[17], che funziona in modo del tutto analogo, e così via) o da situazioni in qualche modo autoreferenti e ricorsive, come ripiegare i quattro lembi d'una scatola di cartone in modo che ognuno di essi sia sostenuto e ne sostenga un altro, formando così una sorta di circolo sorretto da sé stesso.

Più esplicitamente di *Gödel Escher Bach, Anelli nell'Io* cerca di mostrare fin dalle prime pagine che, laddove riesce a formarsi, lo strano anello cambia radicalmente la natura degli elementi che lo compongono, cambiando di conseguenza anche sé stesso. Questo processo sembra talmente correlato al principio di causa ed effetto che Hofstadter mette presto in guardia il lettore, per evitare che sia tentato di cadere nell'interpretazione teleologica: non è mai una causa, un progetto, una volontà esterna a creare gli anelli. Pur preavvertiti, è inevitabile subire la sensazione che uno strano anello equivalga quantomeno ad un passaggio al livello superiore di evoluzione; o al livello superiore di *coscienza*, almeno quando di coscienza è legittimo parlare.



Per giungere alla dimostrazione di tutto ciò, Doug predispone un viaggio lungo cinquecento pagine, che inizia dalla descrizione di quegli strani oggetti che sono gli *epifenomeni*, cioè quei fenomeni solo *virtuali* (come il muro dei 30 Km per un maratoneta, ad esempio; o la sensazione che si avverte della presenza di una pallina quando si tengono in mano un centinaio di buste da lettera, etc.) che però stupiscono proprio per la persistente sensazione di realtà che danno nonostante la loro evidente inesistenza. Divaga poi alla ricerca dei concetti *multilivello*, come aveva già fatto ampiamente in *GEB*, sia nel testo che nelle figure[18]; e non dimentica la voglia di giocare: in una nota a piè di pagina del capitolo X infila un annidamento di ben cinque livelli di parentesi. Ritorna poi nuovamente all'autoreferenza, raccontando come la guida del matematico sia la ricerca di *pattern*, di trame, (ma esiste davvero la trama, o è solo un epifenomeno?); svicola nei ricordi d'infanzia e d'adolescenza, lanciandosi in paragoni arditi per la maggior parte degli studenti liceali, quando dichiara che la dimostrazione dell'infinità dei numeri primi di Euclide rimane nei suoi ricordi come un piacere maiuscolo e ineffabile, al pari del gusto della cioccolata e della musica. L'accenno all'adolescenza non è casuale: perché è nelle letture adolescenziali che si ritrova il primo motore di tutta la passione di Hofstadter, di tutto il suo rincorrere, attraverso

[17] Stupisce che non venga citato il campanello elettrico: forse non è un esempio eclatante e puro di *feedback*, ma l'idea di base è quasi uno strano anello essa stessa. Premendo l'interruttore si chiude un circuito; così facendo si attiva un'elettrocalamita che attrae un batocchio e lo fa sbattere contro la campana, producendo il primo *ding* dello squillo. Solo che il batocchio è esso stesso un pezzo di circuito, e quando sbatte contro la campana interrompe il flusso di corrente; così l'elettrocalamita smette di funzionare, rilascia il batocchio che ritorna in posizione iniziale grazie ad una molla. Ma quest'azione richiude di nuovo il circuito, e quindi attiva di nuovo l'elettrocalamita, e il ciclo ricomincia…

[18] Una delle figure più belle di GEB è la scritta a piena pagina MU, con le due grosse lettere composte dalle parole "*olismo*" e "*riduzionismo*"; parole che a loro volta sono composte da lettere formate dalle più piccole parole "*riduzionismo*" e "*olismo*", ovviamente in modo incrociato e reciproco. Colpiti dai tre livelli di letture, spesso si tralascia di scoprire il quarto, ancora più nascosto, visto che anche le lettere di terzo livello sono a loro volta composte da piccolissime, vermiformi e ripetute parole "MU". Sì, la figura è quella riprodotta in questa pagina; però no, non si riesce a vedere il quarto livello in una figura così rimpicciolita.

Gödel Escher Bach prima e *Anelli nell'Io* poi, l'essenza della coscienza. La sua attrazione verso il feedback, gli anelli e le situazioni autoreferenziali divampa quando scopre il *paradosso di Russell* che mina tutto l'edificio che Frege stava costruendo per fondare la matematica su basi logiche. Non è il paradosso in sé stesso a disturbare Hofstadter: al contrario, è proprio il non aver completato l'azione di demolizione che il paradosso prometteva. Dopo aver messo a nudo la debolezza del sistema, Russell e Whitehead, anziché portare alle logiche definitive conseguenze le implicazioni del paradosso, cominciano a costruire tutto l'edificio dei *Principia Mathematica*[19] limitandosi a stare bene attenti ad evitare di caderci dentro. Per il giovane Doug, questo è probabilmente il massimo crimine contro la conoscenza mai perpetrato: se si scoprono delle fondamenta pericolanti, occorre puntare il dito e urlare forte, e se nessuno è disposto ad ascoltare, picconare il guasto fino a far crollare l'edificio, in modo che poi ne possa sorgere uno più stabile. È proprio quello che fece Kurt Gödel ai fondamenti della matematica; è quello che il giovane Douglas voleva fosse fatto. Così, quando incontra un libro leggero e sconvolgente come quello di Nagel e Newman[20] che gli mostra la logica della dirompente azione gödeliana, il destino di Hofstadter è segnato per la vita.

È per questo che *Anelli nell'Io*, in rigoroso stile hofstadteriano, si prende ripetutamente gioco della coppia Russell & Whitehead, rei di non aver avuto il necessario coraggio distruttore; è per questo che, al tempo stesso, edifica altari d'adorazione verso il grande logico di Brno. La cosa che più esalta DRH, comunque, sembra[21] essere non tanto il rivoluzionario *contenuto* del Teorema di Gödel, quanto il *modo* in cui questo teorema giunga ad essere formulato e dimostrato. I teoremi d'Incompletezza sono dirompenti: una delle loro conseguenze è che non esistono solo enunciati *veri* e enunciati *falsi*, ma anche tutta una classe di enunciati *indecidibili*, ovvero tali da non poter essere dimostrati né veri né falsi. Questa conclusione non sconvolge[22] più di tanto il giovane Hofstadter che legge il libro di Nagel e Newman: quello che lo sconvolge è che siano le stesse proposizioni oggetto della logica formale a essere usate, in maniera opportunamente autoreferenziale, per disinnescare tutta la teoria che proprio quelle proposizioni voleva regolamentare una volta per tutte. Nel teorema le proposizioni si avvolgono su sé stesse, formano uno strano anello e diventano non più *oggetto* della dimostrazione, ma *agenti* della dimostrazione. La cosa è talmente sorprendente che resterà la chiave di volta di tutta la vita scientifica di Hofstadter, che non cesserà più di ricercare bellezza, conoscenza e verità in questa sorta di ineffabile magia data dalla *stranularità*. È infatti evidente, e per lui quasi inevitabile, il passaggio logico successivo: così come le stringhe di Gödel cambiano natura trasformandosi da oggetti a soggetti, così la coscienza altro non è che uno strano anello che si forma nel momento magico in cui una mente riesce a considerare se stessa, chiudendo il cerchio – anzi lo strano anello – dell'autocoscienza.

Il guaio di questo ritratto di *Anelli nell'Io* non è tanto che potrebbe essere sbagliato[23], quanto che potrebbe dare l'impressione che il libro sia serioso e fin troppo filosofico. Se

[19] *Principia Mathematica* che per tutto il libro vengono abbreviati con la sigla PM, causando strane interferenze nella testa di chi è ormai abituato da anni all'equivalenza *PM=Paraphernalia Mathematica*.

[20] Ernst Nagel e James R. Newman, *La prova di Gödel*, Universale Scientifica Boringhieri.

[21] Il "sembra", in questo caso, va letto come "sembra al relatore di queste note", e non certo come un "sembra" autorevole e impersonale. Del resto, chi ci legge abitualmente sa bene che le opinioni di RM e dei suoi redattori sono ben poco autorevoli, specie nel giudicare gli scienziati cognitivi.

[22] Non sconvolgerà l'Hofstadter adolescente, ma continua a sconvolgere noi che non abbiamo più neppure l'alibi della giovane età. Pur rendendoci conto che potrebbe esserci un vizio di forma nella formulazione della domanda, non riusciamo ancora a fare a meno di chiederci: "*Ma se tutto ciò che non è falso non è necessariamente vero, che fine fanno tutte le splendide dimostrazioni per assurdo degli antichi Greci, e non solo le loro?*". Se Hofstadter farà un salto in Italia, dovremo ricordarci di mandare qualche coraggioso a chiederglielo al posto nostro.

[23] Cosa certo possibilissima, anzi probabile, ma che non ci spaventa granché: le possibilità che Doug legga questa recensione (e che si irriti per gli errori di interpretazione) sono infinitesime, e noi abbiamo sempre avuto fiducia negli infinitesimi e nelle loro capacità di nascondersi dentro la pancia del calcolo delle probabilità.

così fosse, avremmo reso un cattivo servizio a Doug Hofstadter e alla sua ultima opera, e ci dispiacerebbe. Anche se in *GEB* riusciva certamente a mantenere costantemente un tono più giocoso, lo stile narrativo hofstadteriano non è cambiato. Ci sono meno dialoghi, forse anche meno giochi e rompicapi nascosti nel testo, ma né gli uni né gli altri sono del tutto assenti. Soprattutto, continua a sorprendere la capacità (non sappiamo se propria di DRH o della letteratura scientifica d'oltreoceano) di parlare di filosofia sulla propria pelle. Se dovessimo leggere un libro di un moderno filosofo europeo che si accinge a spiegare la sua visione del mondo, ci aspetteremmo di affrontare un testo molto tecnico, denso di riferimenti, traboccante citazioni e, soprattutto, rigorosamente e attentamente impersonale: forse siamo colpevoli di vecchi pregiudizi, ma la sensazione sarebbe questa. Douglas Hofstadter invece ha un approccio diretto, quasi galileianamente sperimentale, nel portare avanti le sue tesi. Se deve parlare di emozioni, che sono certo un elemento importante dell'autocoscienza, non esita a raccontare le sue, analizzandole. Potrebbe a prima vista sembrare indice di egocentrismo, ma è facile rendersi conto che al massimo è solo indice di scientismo. Quali altre emozioni ci è dato conoscere, se non le sole nostre? Come poter parlare con cognizione sperimentale di causa delle emozioni altrui? Solo che così il lettore può cadere in tentazione. Leggere *Anelli nell'Io* diventa inevitabilmente un leggere di lui, e questo accende curiosità anche importune[24], come spesso accade nei confronti del protagonista di un romanzo. Ci si ritrova a leggere un libro difficile: sostiene che la coscienza è un formidabile prodotto dell'evoluzione che ha moltiplicato in maniera sconvolgente le nostre chance di sopravvivenza, ed è dunque terreno complesso per l'indagine, perché è quasi impossibile immaginarla separata da noi stessi; conduce a considerare l'oceano di simboli (e di simboli di simboli), di allucinazioni (e di allucinazioni di allucinazioni) che costruiamo quotidianamente; giunge ad ipotizzare una sorta di comunità umana retta da un "Io" dislocato su più cervelli, superando e amplificando forse la stessa idea di "meme" di Richard Dawkins. Ciò nonostante, la sensazione finale non è di aver imparato qualcosa sulla scienza della cognizione, ma di aver fatto una lunga chiacchierata con l'*Autore*.

Resta però il fatto che questa recensione ha almeno due diversi livelli di fallacia menzognera. Il primo è che non si dovrebbe scrivere una recensione senza avere letto *tutto* il testo e chi scrive *non* ha letto tutto *Anelli nell'Io*. La giustificazione del resto è ottima: il libro non è ancora in vendita, uscirà a metà novembre. Tanto è vero che non riusciamo neppure a mostrarvene la vera copertina (che comunque dovrebbe essere simile a quella della versione originale, riportata poco sopra). Il secondo, ancora più grave, e che è regola ferrea che i libri recensiti in questa apologetica rubrica abbiano a che fare con degli RMers: e non avendo noi finora nominato altri che Douglas Hofstadter, chi legge potrebbe essere indotto a pensare che l'autore di *Gödel Escher Bach* sia un affezionato lettore di RM. Beh, non è così[25]. In compenso, è un vero RMer della prima ora colui che ci ha consentito di poter scrivere queste note, lasciandoci sbirciare da sopra le sue spalle alcuni stralci della sua traduzione del libro. ***Maurizio Codogno***, alias *.mau.*, alias *PuntoMauPunto*, è uno dei tre eroici traduttori che hanno trasformato "*I Am A Strange Loop*" in "*Anelli nell'Io*": i suoi due compagni d'avventura sono Francesco Bianchini e

[24] Importune nel vero senso della parola, forse anche perché è Hofstadter stesso a insegnare la curiosità nelle piccole cose e a sollecitare ovunque la ricerca del senso nascosto. Diventa così inevitabile, scoprendo che la sua adorata moglie si chiamava Carol Ann Brush, chiedersi se Doug si sia rallegrato nello scoprire che, sposandola, avrebbe completato le di lei iniziali fino a poterle assemblare nel nome di BACH. O se, dedicando il suo primo libro a "M. and D." (*Mom and Dad*, immaginiamo), sapesse già che avrebbe potuto un giorno ripetere la dedica agli ascendenti verso i discendenti, senza minimamente cambiarla (i suoi due figli si chiamano *Monica* e *Danny*). O se sia un caso che un suo libro, edito in Italia prima che altrove, sia stato distribuito dalla casa editrice che più assomiglia al suo nome (HOpeFul MonSTER), e così via. Ci si ferma solo accorgendosi che si stanno per superare i limiti della privacy, cosa terribile anche avendo le intenzioni più innocenti e giocose.

[25] Non è così, e sarebbe da spudorati sostenere il contrario. Però, insomma… in realtà, Hofstadter ha sentito nominare e perfino visto qualche numero di *Rudi Mathematici* (non si sa con quanta buona voglia) fin da quando RM era davvero piccina e contava forse un cinquantesimo dei suoi lettori attuali. Chi si fosse persa la cronaca di un leggendario compleanno bolognese di DRH (tra l'altro ricordato anche nella prefazione italiana di *Anelli nell'Io*), in cui era riuscito ad intrufolarsi uno di noi, può andare a recuperarlo in RM38, Marzo 2002.

Paola Turina. L'aggettivo "eroici" non è scappato dalla penna: è rigorosamente soppesato e valutato. Fin dai tempi lontani di "Temi Metamagici", la rubrica che prese il posto di "Giochi Matematici[26]" su *Scientific American* e su *Le Scienze*, il compito dei primi traduttori di Doug si rivelò improbo. Oltre alle normali difficoltà nel tradurre una prosa complessa, Hofstadter tendeva di tanto in tanto dei tranelli ai suoi traduttori, ad esempio per vedere come un suo testo scritto senza alcun riferimento al sesso dei personaggi (cosa possibile in inglese) precipitasse in italiano, ma anche nelle traduzioni francese e tedesca, nell'attribuire sesso ben definito a questo o a quel protagonista del racconto. Più in generale, è fatica erculea tradurre un testo, talvolta anche un po' tecnico, di uno scienziato che parla un italiano quasi perfetto (oltre ad un'altra decina di lingue). Hofstadter stesso racconta nella sua prefazione all'edizione italiana (che in sostanza altro non è che un meritatissimo e prolungato ringraziamento ai suoi collaboratori italiani) che proprio perché conosce abbastanza bene l'italiano sa di non conoscerlo abbastanza da poter impunemente rinunciare alla sua squadra di traduttori. E la sua squadra (che, forte dell'equazione traduttore = traditore, il perfido Doug non esita a chiamare col collettivo e singolare nome di *Traditrio*) ha fatto faville.

Sbirciare da sopra le spalle di un traduttore comporta lo svantaggio di poter leggere solo di corsa, scomodamente, a spizzichi e bocconi e soprattutto, come si è detto, soltanto una parte del libro. Del resto, un inedito è un oggetto prezioso e come tale va protetto e tenuto in una cassaforte quantomeno virtuale; e in fondo, riuscire ad avere un'anticipazione è già di per sé un privilegio. Senza contare che lo svantaggio viene superbamente compensato dalla possibilità di vedere (sempre solo sbirciando, naturalmente) la marea di lavoro e di dettaglio maniacale che richiede una traduzione come questa. Non si tratta soltanto di trovare "il giusto vocabolo", cosa che sarebbe di per sé tutt'altro che facile: piuttosto, è una questione di trovare "la parola che meglio riesca a rendere il senso X, ma lasci aperta la porta al sottosignificato Y, e possibilmente salvi anche la laterale allusione alla citazione Z". Stupisce (e in parte rinnova la fiducia e la gratitudine nei teorici dell'indoeuropeo) che spesso, con certosina fatica, si riesca davvero a trovare un termine italiano in grado di dare la stessa atmosfera, a più livelli, dell'originale. Qualcosa inevitabilmente si perde; ma qualcos'altro – e questo era tutt'altro che inevitabile, anzi! – ci si guadagna. Solo dei traduttori abili e appassionati riescono ad accorgersi di situazioni in cui la versione tradotta possa conservare e perfino migliorare lo spirito di alcuni passaggi. Quando Hofstadter parla del *Dimondo* (un posto immaginario in cui le nascite sono quasi senza eccezione gemellari e per "persona singolare" si intende la coppia di gemelli, non i singoli componenti della coppia), si sofferma a raccontare della triste situazione dei rari nati senza gemello; in italiano, questi bimbi un po' discoli e un po' sfortunati diventano i "*monelli*". Un colpo di fortuna linguistico, certo, ma anche una splendida capacità di entrare nel contesto. Altrove, Doug gioca sull'assonanza tra "*sky*" (cielo) e "*guy*" (tipo, individuo), per mettere in relazione il *cielo* con l'*Io*. Il *Traditrio* tira fuori dal cilindro un anagramma a frase (CIELO=C'È L'IO) in grado di far piangere di felicità Bartezzaghi e di disperazione gli anglofoni.

Ma non basta la conoscenza dell'inglese, e neppure la completa padronanza dell'italiano: ci vuole anche molta intelligenza, e ancor più senso dell'humor. Se è certo propria di Douglas R. Hofstadter l'idea di giocare ancora una volta coi riferimenti falsi in bibliografia (ad esempio: *Enrustle, Y. Ted, Prince Hyppia: Math Dramatica*, 3 voll. – mettete alla prova la vostra pronuncia inglese, se volete cogliere il senso comico del riferimento), è certo il *Traditrio* che, in un caso analogo, si permette di introdurre in riferimento una ipotetica "traduzione italiana" edita in *Classe* (provincia di Ravenna). Quando si coglie il gioco di parole tra la cittadina ravennate e le *classi* di insiemi, non si può non essere grati alla fatica di *.mau.* e dei suoi compagni.

[26] Come i fan non più giovanissimi ricorderanno, DRH propose il nome "Metamagical Thames" per la sua rubrica anche per celebrare anagrammaticamente la storica "Mathematical Games" di Martin Gardner. In italiano, l'anagramma non potè essere conservato, e questo chiarisce subito l'entità del compito.

Gratitudine che aumenta ancora, adesso, perché grazie a lui abbiamo potuto inserire questo *Anelli nell'Io* nel reparto dei libri in qualche modo imparentati con RM; come quasi sempre, noi non ne abbiamo alcun merito diretto, ma siamo sempre bravissimi a farci belli con le fatiche degli altri.

Titolo	Anelli nell'Io
Sottotitolo	Che Cosa C'è al Cuore della Coscienza
Autore	Douglas R. Hofstadter
Titolo Originale	I Am A Strange Loop
Traduzione	Maurizio Codogno (.mau.,PuntoMauPunto), Francesco Bianchini, Paola Turina
Editore	Mondadori
Data di Pubblicazione	2008
Prezzo	22 Euro
ISBN	978-88-04-58309-7
Pagine	XI+508

5. Soluzioni e Note

Ci sono mestieri abbastanza strani, a pensarci bene. La maggior parte dei lavori si basa sulla costanza, sulla ripetizione certosina di una serie precisa di azioni; altri sono meno ritualmente ripetitivi, ma comunque sempre simili a sé stessi. Altri ancora, invece, e sono quello a cui ci riferivamo all'inizio, sono lavori in cui si sta prevalentemente in addestramento, in preparazione, in costante attesa dell'emergenza. Quando arriva davvero, l'emergenza, non lascia tempo per reagire con calma, e bisogna fare tutto di corsa, e bene. Pensate agli operatori delle ambulanze, ai vigili del fuoco, alla protezione civile. Tutta gente il cui mestiere si basa proprio sulla capacità di far fronte alle emergenze, ai carichi improvvisi di lavoro.

Ecco, noi siamo molto diversi. Ci aspettiamo di poter pianificare tutto con calma, di muoverci attraverso i giorni, le settimane e i mesi con la forza placida e sicura dei conoscitori del mondo, e veniamo regolarmente maltrattati dal mondo che invece è molto più imprevedibile (nonché placido e sicuro) di noi. Questo mese appena passato, ad esempio, è stato così denso di cose degne di nota che certamente non faremo in tempo a ricordarle tutte qui. Quel che è peggio, il mese che è appena iniziato sarà verosimilmente ancora peggio, e rischiamo addirittura di non riuscire neppure ad annunciarvi tutte le cose che meriterebbero di essere annunciate. Visto un tale disastro di strategia comunicazionale, ci limitiamo a cominciare a dare notizie secondo il celebre e brevettato metodo "*va come viene*", nella speranza che il risultato finale non risulti pasticciato quanto le nostre agende (per non parlare delle nostre teste). Nella speranza che vi aiuti un po' ad orientarvi nelle notizie, introduciamo una specie di categorizzazione iniziale.

Per la categoria *Capita Solo Una Volta Nella Vita (Se Va Bene)* vi rammentiamo che il gran giorno sta per arrivare. Giovedì 20 Novembre, nell'ambito degli incontri promossi dalla ***A.S. Mathesis*** e da Torino Scienza, presso il Teatro Colosseo di Torino si terrà la cerimonia di consegna del ***Premio Peano 2007***. Sarà presente ***Donal O'Shea,*** autore del libro vincitore di questa edizione, ***La Congettura di Poincarè***, che terrà una conferenza a beneficio di tutti i convenuti. Saranno presenti alcuni dei nomi più noti e famosi della matematica italiana, e anche altri che noti e famosi non sono, ma che sono comunque riusciti ad intrufolarsi nel mucchio. Insomma, l'abbiamo detto e ripetuto tante di quelle volte che quasi ci vergogniamo a ripeterlo: il premio della giuria riservato a *giovani autori (?) e piccole case editrici(!)* lo ha vinto il nostro ***Rudi Simmetrie***, e i due autori (che non sapevano neppure di essere autori) dovranno presumibilmente salire sul palco con la curatrice (che è invece quella che di fatto ha creato RS), e sorridere velocemente alla platea (http://www.subalpinamathesis.unito.it/attivita/ppeano2007_vincitore.php). Già vedere la redazione di RM al completo riunita in un solo posto è evento epocale: vederla su un palco ritirando un premio è evento certamente irripetibile. Se preferite non venire, siete giustificati; se proprio volete venire, invece, lasciate a casa i pomodori marci, per favore.

Per la categoria *Conigli Introversi allo Scoperto*, confermiamo che la preannunciata conferenza del 16 Ottobre a Brescia tenuta da parte di RM è davvero avvenuta. A dire il vero, uno dei due relatori (Piotr) è stato impossibilitato a mantenere gli impegni, così nella città di Tartaglia si è presentato solo il GC. Questo sarà occasione di lunghe e ripetute ossessioni, qui in Redazione, perché la gentilezza degli organizzatori bresciani e la benevolenza dei convenuti (che non hanno linciato Rudy, come gli altri due redattori caldamente speravano) gli ha dato la scusa per vantarsi e pavoneggiarsi senza sosta. Senza contare che nei suoi racconti la presidentessa della Mathesis bresciana, ***Annalisa Santini***, viene definita *un filino più graziosa della Bellucci*, cosa che manda Piotr nella più totale disperazione per non averla potuta vedere.

Per la sequel-categoria *Conigli Introversi allo Scoperto 2 – La Vendetta*, siamo davvero contenti di annunciare al mondo intero (ma soprattutto a Torino e al suo hinterland) che lo rifaremo. ***L'Associazione Subalpina Mathesis*** (sì, proprio quella che ha istituito il Premio Peano, di cui abbiamo parlato poco sopra) organizza ogni anno una serie di conferenze, tutte aperte al pubblico e assolutamente gratuite. La gran parte di queste si tengono a Palazzo Campana, sede della facoltà di Matematica, in via Carlo Alberto, nel centro di Torino. Come si può facilmente vedere dal programma disponibile in rete (http://www.subalpinamathesis.unito.it/attivita/cal08_09.php), *quasi* tutte sono interessantissime e tenute da vere autorità della nostra amata scienza. Il *quasi* è dovuto alla conferenza del sei novembre, ma basta saperlo per tempo (e non per niente vi stiamo avvertendo) ed evitare di passare da quelle parti in quel fatidico giovedì, e tutto filerà liscio.

Per la categoria *Annunci & Bacchettate*, siamo lieti di segnalarvi che ritorna anche quest'anno la bella mostra "***Simmetria Gioco di Specchi***" (http://specchi.mat.unimi.it/), organizzata dal Dipartimento di Matematica dell'Università Statale di Milano, sotto la direzione scientifica della professoressa ***Maria Dedò***. La mostra merita indubbiamente una visita, tant'è vero che ne parlammo con entusiasmo anche in occasione delle sue precedenti edizioni. Tutto questo rientra però solo nella semicategoria "Annunci", e per spiegare bene la seconda metà della categorizzazione ("Bacchettate"), dobbiamo tornare un po' indietro nel tempo. Nel lontano febbraio 2005, nel numero RM73, segnalavamo ai lettori che la mostra era presente a Modena, e che, allora come oggi, valeva la pena di una visita. Con una acrobatica capacità di fraintendimento, paragonabile solo a quella di consumati politici, riuscimmo però a capire che la mostra suddetta fosse *originaria* di Modena e in odore di *essere trasferita* a Milano. Ne approfittammo subito per alzare alti lai di disperazione nei confronti della capitale lombarda, che accusammo di essere rapace accentratrice di iniziative altrui; attività questa in cui i torinesi sono notoriamente abilissimi. Oddio, la nostra intenzione era, come al solito, scherzosa, e visto che nessuno degli RMers lombardi (che tra l'altro sono i più numerosi, su scala assoluta regionale) si adirò, pensavamo che la cosa fosse chiara, almeno ai lettori abituali. Però è vero che se uno lettore abituale non è lo scherzo poteva essere non colto. Specialmente se il lettore non abituale in questione è imperlappunto il giustamente orgoglioso direttore scientifico della mostra. La professoressa Dedò (curatrice, tra l'altro, di http://www.matematita.it/) ci ha quindi scritto richiamandoci all'ordine e alla verità storica (e nel farlo ha usato gentilezza; un po' severa, ma sempre gentilezza), e noi siamo pronti a riconoscere l'errore. La mostra suddetta è sempre stata milanese, e Milano può ben esserne orgogliosa; da Milano parte talvolta per girare l'Italia, ma questo non intacca certo la sua natura meneghina, anzi). Non staremo invece a scusarci sulla presa in giro alla città, perché quello era così evidentemente uno scherzo che non crediamo possibile un vero malinteso. A Milano noi vogliamo bene.

Per la categoria *Ancora? Ma Allora lo Fate Apposta*, vi annunciamo, ma in maniera solo ufficiosa, che potrebbe esserci una ulteriore presenza di pezzi della Redazione di RM presso il ***Circolo De Amicis di Torino*** il 25 di questo denso mese di Novembre 2008. Vorremmo essere più precisi, ma non ci riusciamo, al momento…

Per la categoria *Cose Da Non Perdere – Meglio Partire Per Tempo* vi segnaliamo che è ora di affrettarsi: le iscrizioni al XIII Convegno ***Matematica e Cultura 2009*** sono aperte. Il convegno (http://www.mat.uniroma1.it/venezia2009) si terrà tra il 27 e il 29 Marzo 2009, ma le iscrizioni vanno fatte per tempo. Le dodici edizioni precedenti sono state tutte molto belle; accettiamo scommesse che anche la prossima lo sarà. Vi ricorderemo la cosa a Marzo, ma non venite poi a lamentarvi dicendoci che non via abbiamo avvisato in tempo.

Per la categoria *Neanche Qui Ci Sono Redattori di RM (Per Fortuna)*, vi avvertiamo che ***Adam Atkinson*** (che però è un RMer, quindi non privo di peccato originale) sarà al salone dello studente del Palazzo dei Congressi Pisa dal 13 al 20 Novembre, nello stand di informatica, con la sua abituale dotazione di go, shogi, xianggi, awari e altro. Se lo incontrate, ditegli che lo salutiamo e che anche a noi piacciono i vombati.

Per la categoria *Tutti Gli RMers Sono Grafomani (I)*, vi consigliamo di fare un giro sul blog di ***Zar*** (http://proooof.blogspot.com/ sì, ormai si è palesato: la rete ormai sa che Proooof e Zar sono la stessa persona) e vedere i suoi molti post sull'Infinito. Ci è arrivato *(Con Calma*, come dice lui), e il risultato è in pratica un bel libello.

Per la categoria *Tutti Gli RMers Sono Grafomani (II)*, vi consigliamo anche di andare a vedere cosa è riuscito a scrivere ***Rosario Turco*** e i suoi compagni per celebrare Riemann: lo ospitiamo nel nostro sito, qui: http://www.rudimathematici.com/Bookshelf/RT01.pdf .

Per la categoria *No, Non Ce La Facciamo Proprio a Parlare di Tutto* siamo costretti a confessare che dovremmo ancora parlarvi del *Misterioso Uccello Mangia*sassi di ***Cid***, che nominammo in quel d'Aprile ma che non abbiamo mai finito di raccontare; né delle note segrete che ci ha mandato il grande ***Giorgio Dendi*** (sapete che gli dobbiamo tre gelati?) in merito ai metodi di allenamento di campioni di Giochi Matematici come ***BraMo logicar*** e il Dendi stesso; e neppure che in queste ***S&N*** abbiamo deciso di riportare in breve il testo dei problemi prima delle relative soluzioni, come suggerito da ***Nicola*** (a noi sembra una buona idea, ma aspettiamo commenti). Soprattutto, non riusciamo neppure ad assicurarci che il nostro *nuovo sistema di distribuzione della rivista* funzioni, e che sia di vostro gradimento. Quest'ultimo argomento, in realtà, meriterebbe da solo un paio di pagine di indagine, e invece finisce che non ne parliamo neanche. Facciamo così: se avete sentore che qualcosa non funzioni fatecelo sapere a stretto giro di posta. E guardate che stavolta lo diciamo sul serio, non per scherzo, come facciamo sempre nella *signature* delle mail inviate dalla Redazione…

5.1 [116]

5.1.1 Keplero era uno sprecone / In qualunque dimensione

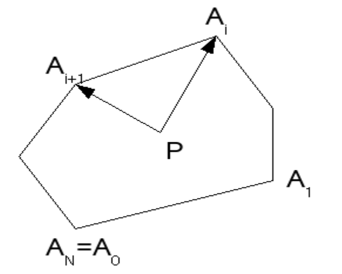
Il problema era il seguente:

> *Prendete un cerchio, per comodità di raggio unitario. Disegnateci dentro (al cerchio) il triangolo equilatero più grande possibile. Disegnateci dentro (al triangolo) il quadrato più grande possibile. Disegnateci dentro (al quadrato) il pentagono (regolare) più grande possibile. Poi tocca all'esagono, e poi ci fermiamo perché prima o poi bisogna. Bene, Quanto è grande l'esagono?*

Se invece si facesse in questo modo: prendere il cerchio, piazzarci un esagono, con dentro un pentagono con dentro un quadrato con dentro un triangolo, in questo caso, quanto sarebbe grande il triangolo?

Il mese scorso ***Michele*** ci aveva mandato una soluzione molto interessante, che ha stimolato l'ulteriore lavoro di ***Trekker*** in proposito.

Riprendendo la giusta osservazione di ***Michele***, ovvero "*in che senso posso dire di aver risolto il problema?*" provo a fare qualche semplice osservazione (=niente di innovativo) sui poligoni di area massima inscritti in altri poligoni proponendo un problema "pratico".



10 *La 1a figura di* ***Trekker***.

Un certo comune mette a disposizione una certa area a forma di trapezio scaleno al circo in grado di costruire il tendone di area massima (eh sì, maggiore è l'area, maggiori sono le tasse di "plateatico"). In tour, nella zona, ci sono il circo Orfui, che può costruire tendoni a base esagonale irregolare di area qualsiasi, e il circo Medruno, che può costruire tendoni a base pentagonale irregolare di area qualsiasi. Per massimizzare gli introiti comunali di "plateatico" a quale circo va assegnata l'area?

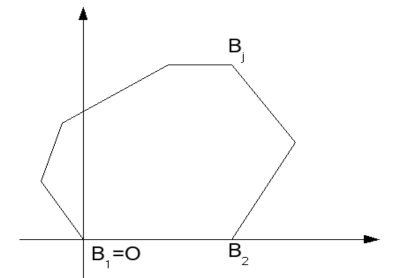
Ipotizziamo che il poligono convesso "contenitore" abbia N vertici e sia irregolare. Indichiamo con $A_i(x_i, y_i),\quad i = 0,1,2,...,N$ rispettivamente i suoi vertici, organizzati in senso antiorario, e le corrispondenti coordinate cartesiane, e sia $A_0(x_0, y_0) = A_N(x_N, y_N)$ (cioè l'N-esimo punto coincida con quello di posto 0).

Un punto $P(u,v)$ è interno al poligono convesso "contenitore" se e solo se i vettori $\overrightarrow{PA_i}$ devono ruotare in senso antiorario per "sovrapporsi" ai vettori $\overrightarrow{PA_{i+1}}$ con i=0,1,2,3,...,N–1. Se $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ è una terna di versori per gli assi x,y,z allora bisogna che il prodotto vettore $\overrightarrow{PA_i} \wedge \overrightarrow{PA_{i+1}}$ abbia componente lungo z positiva, cioè:

$$\overrightarrow{PA_i} \wedge \overrightarrow{PA_{i+1}} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i - u & y_i - v & 0 \\ x_{i+1} - u & y_{i+1} - v & 0 \end{bmatrix} = [(x_i - u)(y_{i+1} - v) - (y_i - v)(x_{i+1} - u)]\vec{k}$$

con $[(x_i - u)(y_{i+1} - v) - (y_i - v)(x_{i+1} - u)] > 0$.

Prendiamo ora un poligono "contenuto", cioè il tendone "campione", con M vertici $B_j(u_j, v_j),\ j = 1,2,...M$ con $B_1(u_1, v_1) = (0,0)$ e, per semplicità di disegno, il punto $B_2(u_2, v_2) = (u_2, 0)$ sia sull'asse x.



11 *La 2a figura di* ***Trekker***.

Tutti i poligoni simili ruotati di α, con rapporto di similitudine K>0 e traslati di a lungo l'asse x e di b lungo l'asse y hanno i vertici nei punti le cui coordinate si ottengono dal seguente prodotto:

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_j \\ \tilde{v}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix}$$

Possiamo ora impostare (e nel senso di Michele posso dire di aver risolto?) il seguente problema di programmazione non lineare:

$$\max K$$
$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_j \\ \tilde{v}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix}$$
$$[(x_i - u)(y_{i+1} - v) - (y_i - v)(x_{i+1} - u)] > 0$$
$$K > 0$$
$$0 \le \alpha < 2\pi$$
$$i = 0,1,2,\ldots, N-1$$
$$j = 0,1,2,\ldots M$$

dove la prima riga indica la "massimizzazione" del poligono "contenuto", la seconda con la terza dice che i vertici del poligono "contenuto" dopo il "trattamento" di rotazione, dilatazione e traslazione, devono comunque essere interni al poligono convesso "contenitore". Per risolvere questo problema di programmazione non lineare, come già menzionato in RM103, si può scrivere la funzione Lagrangiana "generalizzata", "attingere" alle condizioni di Karush-Kuhn-Tucker (vedere http://en.wikipedia.org/wiki/Karush-Kuhn-Tucker) e... dotarsi di pazienza per calcolare tutti i gradienti e gli "ammennicoli" del caso.

Non male l'idea di proporre altri possibili problemi ispirati a quello dato.

5.1.2 Numeri Simpatici

Ed ecco il problema dei numeri simpatici:

Limitandosi ai numeri naturali, Rudy pensava di definire numeri simpatici quelli per cui sia possibile trovare un insieme di numeri razionali tali che la somma e il prodotto di questi numeri siano pari al numero dato; quelli per i quali il suddetto insieme non esiste, sono antipatici.

Quali sono i numeri simpatici? E quali quelli antipatici?

Il mese scorso le soluzioni ci hanno lasciati un po' perplessi, ma per fortuna durante ill mese di ottobre ne sono arrivate tante altre che affrontavano il problema da molti punti di vista diversi. Ringraziamo tutti quelli che hanno scritto ancora: ***Alberto***, ***Tartaruga***, ***Marco***, ***Nicola*** (più che altro per dirci quanto in famiglia si ami il numero sette) ***Riccardo***.

Andiamo a pubblicare la soluzione di ***Tartaruga*** che le raccoglie più o meno tutte.

Va premesso che in RM116 il problema era posto parlando genericamente di numeri razionali, quindi sia positivi che negativi; quindi la soluzione di ***Cid***, cioè l'insieme $(-1,-1,1,1,N)$, qualunque sia N, è valida sulla base del testo. Poniamo però la condizione più forte che i numeri razionali in questione siano positivi.

Per iniziare, vediamo per quale numeri interi N si possono trovare 2 numeri razionali a e b tali per cui:

$$a+b = N$$
$$ab = N$$

Si tratta di risolvere l'equazione di secondo grado $t^2 - Nt + N = 0$, con la nota soluzione:

$t_1 = (N + \mathrm{sqrt}(N^2 - 4N))/2$

$t_2 = (\mathrm{N} - \mathrm{sqrt}(N^2 - 4N))/2$

perché la soluzione sia razionale deve essere $N^2 - 4N = x^2$, dove x è intero. Abbiamo peraltro anche che: $N^2 - 4N + 4 = (N-2)^2 = y^2$, dove y è intero e vale $N-2$.

Per cui possiamo cercare per quali interi x e y vale $y^2 - x^2 = 4$

Per un noto prodotto notevole si ha $(y - x)(y + x) = 4$, che può essere decomposto in 6 modi diversi:

1) $y-x = 1$, $y+x = 4$ da cui $y = 5/2$, $x = 3/2$

2) $y-x = 2$, $y+x = 2$ da cui $y = 2$, $x = 0$

3) $y-x = 4$, $y+x = 1$ da cui $y = 5/2$, $x = -3/2$

4) $y-x = -1$, $y+x = -4$ da cui $y = -5/2$, $x = -3/2$

5) $y-x = -2$, $y+x = -2$ da cui $y = -2$, $x = 0$

6) $y-x = -4$, $y+x = -1$ da cui $y = -5/2$, $x = 3/2$

La 1,3,4,6 non sono accettabili in quanto x e y devono essere interi; la 2 ci porta a N=4 e a=b=2, la 5 ci porta a N=0 e a=b=0. Infatti

$2+2 = 2 \cdot 2 = 4$

$0+0 = 0 \cdot 0 = 0$

Di norma lo 0 non è considerato un numero naturale, per cui $N = 4$ è la sola soluzione. Siccome 4 è l'unico numero naturale che gode di questa proprietà, potremmo definirlo **simpaticissimo**.

Passiamo ora al caso generale. Valgono le seguenti:

1) Ogni numero composto è simpatico

Sia N il nostro numero composto. Si può scrivere $N=a \cdot b$ con a e b interi positivi, $a \geq 2$, $b \geq 2$. Supponiamo per semplicità $a \geq b$. Voglio dimostrare che: $a+b \leq a \cdot b$, infatti dividendo per a ottengo $1+(b/a) \leq b$. Essendo $a \geq b$ il primo membro è minore o uguale a 2, il secondo è maggiore o uguale a 2 e quindi la disuguaglianza è valida.

Aggiungendo un numero sufficiente di 1 si otterrà alla fine $a+b+1+\ldots = N$ e anche $a \cdot b \cdot 1 \cdot \ldots = N$, quindi l'insieme $(a,b,1,\ldots)$ soddisfa la condizione.

Per esempio $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3+2+1$, $8 = 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4+2+1+1$.

Dato che il risultato si ottiene facendo ricorso esclusivamente ad interi, potremmo definire i numeri composti **interamente simpatici**.

2) Ogni numero primo maggiore di 7 è simpatico

Sia P il nostro numero primo. Si può scrivere $\mathrm{P}=(\mathrm{P}/2) \cdot (1/2) \cdot 4$. Se consideriamo la somma: $\mathrm{P}/2 + 1/2 + 4 = (\mathrm{P}+9)/2$.

Innanzitutto tale somma è intera in quanto P è dispari, inoltre essendo P maggiore di 7 deve essere almeno 11 e quindi $(\mathrm{P}+9)/2$ è minore di P. Anche in questo caso, aggiungendo un numero sufficiente di 1, si ottiene un insieme che soddisfa la condizione.

Per esempio, $11 = (11/2) \cdot (1/2) \cdot 4 \cdot 1 = (11/2)+(1/2)+4+1$.

3) Rimangono i numeri 1, 2, 3, 5, 7

A questo punto conviene introdurre un piccolo teorema ausiliario: *Di tutti gli insiemi di M numeri positivi che hanno somma S, quello di prodotto maggiore è quello in cui tutti i numeri sono uguali.*

Dimostrazione

Procedo per induzione su M. Quando $M = 2$, se x è uno dei numeri , l'altro è $y=(S–x)$. Voglio massimizzare il loro prodotto, che vale: $x\cdot(S–x) = S\cdot x – x^2$

Derivando e ponendo la derivata a 0: $S –2\cdot x = 0$ da cui $x = S/2$ e $y = S/2$.

La derivata seconda è –2, quindi so che si tratta di un massimo.

Quindi la base dell'induzione è valida. Supponiamo ora che il teorema valga per $2,\ldots,M–1$. Dimostro che vale per M. Se ciò non fosse, avrei nell'insieme di prodotto maggiore almeno due numeri diversi; ma allora potrei, per quanto visto prima, aumentare il prodotto uguagliando quei due numeri, contro l'ipotesi. CVD

Adesso posso procedere con i casi relativi ai numeri 1, 2, 3, 5, 7.

Il caso N=1 è il più facile da risolvere, infatti qualunque somma di numeri positivi che valga 1 deve essere composta da numeri minori di 1, il cui prodotto non potrà mai valere 1. Quindi **1 non è un numero simpatico**.

I casi N=2 e N=3 sono altrettanto facili, in quanto da quanto visto nella prima pagina so che il risultato non lo posso ottenere con 2 numeri ma ne devo utilizzare almeno 3; con 3 numeri a somma N il massimo prodotto che posso ottenere è $(N/3)^3$ che per N=2 è minore di 1 e per N=3 è esattamente 1; aumentando il quantitativo dei numeri in cui scompongo le cose possono solo peggiorare. Quindi **2 e 3 non sono numeri simpatici**.

Passando al caso N=5, non posso ottenerlo con una somma di 3 numeri perché il prodotto sarebbe al massimo $(5/3)^3$, cioè 125/27 che è minore di 5, e aumentando il quantitativo di numeri della somma le cose peggiorano ancora. Inoltre per quanto già visto non lo posso ottenere con una somma di due numeri. Quindi **5 non è un numero simpatico**.

A questo punto il nostro eroe ha avuto qualche problema con il 7 (proprio quello più caro al Capo!), ma dopo pochi giorni ci ha inviato una mail esultante:

Anche 7 è simpatico! Un insieme di numeri razionali validi è (7/6, 4/3, 9/2).

Ecco, siamo contenti che ci sia riuscito. Ora la classificazione è completa.

5.2 [117]

Eccoci finalmente ai problemi proposti il mese scorso.

5.2.1 Senza rischio

Questo problema ha avuto poco successo. Proprio in tempi di crisi economica Rudy che riesce a fare soldi senza rischiare niente dà un bel fastidio. Rivediamo il problema:

Trovandosi a disposizione un certo gruzzolo, Rudy lo ha investito ad un interesse fisso che lui ritiene estremamente soddisfacente: infatti gli permette, il k-esimo anno di deposito, di ritirare esattamente k^2 euro; lui ritira (esattamente) quella somma, e lascia la parte restante degli interessi a incrementare il capitale; la cosa interessante è che ha depositato la somma minima per fare questo gioco sino, come diceva Asimov, alla fine dell'eternità. Quanto ha depositato Rudy e qual è il tasso di interesse che è riuscito a farsi applicare?

Rudy ha calcolato quando gli interessi (tutti, non solo quelli che preleva) saranno esattamente uguali a 2008: dovrà aspettare il ventesimo anno di deposito. Ora, Rudy è estremamente felice di aver depositato quella cifra, anche perché evidentemente se avesse depositato un euro in meno dopo un certo numero di anni

> *non ce l'avrebbe fatta, a ritirare il quadrato degli anni di deposito… Bene, quanto vale quel "certo numero di anni"?*

Al solito, i problemi di Rudy sono sibillini e posti in modo che uno debba impazzire a capire quale sia il problema. Noi sospettiamo che lo faccia apposta per generare confusione e ottenere più soluzioni. In questo caso è andata piuttosto male, perché ne sono arrivate soltanto due, dai nostri più accaniti e affidabili solutori, ***Cid*** e ***Trekker***. Per prima vediamo la versione di ***Cid***:

> Questo problema ammette un numero infinito di soluzioni.
>
> Una delle soluzioni possibili è la seguente:
>
> Rudy deposita 1 euro al tasso di interesse del 100,186438%, ed ogni anno ritira un euro di interessi. Di seguito mostro che questa è una soluzione valida.
>
> 1) Rispetta la condizione 1 che afferma che Rudy ha investito un certo gruzzolo ad un interesse fisso che lui ritiene estremamente soddisfacente. (Ritengo che un tasso di interesse superiore al 100% si possa considerare estremamente soddisfacente)
> 2) Rispetta la condizione 2 che afferma che ogni k anni sia possibile ritirare almeno k^2 euro di interessi (Infatti investendo 1 euro ad un tasso di interesse superiore al 100% risulta possibile ogni anno ritirare almeno $1=1^2$ € di interessi)
> 3) Rispetta la condizione 3 che afferma che al 20° anno di deposito (prelevando 1 euro all'anno) avrà accumulato 2008 euro di interessi (Infatti nei primi 19 anni ha ritirato 19 euro di interessi e la parte di interessi lasciati sul conto fanno crescere il saldo fino al valore di 1990 euro al 20° anno; quindi 1989 euro di interessi composti + 19 euro di interessi semplici = 2008 euro di interessi in 20 anni)
> 4) Rispetta la condizione 4 che afferma che è la somma minima per fare questo gioco, in quanto se avesse depositato 1 euro in meno dopo un certo numero di anni non ce l'avrebbe fatta. (Chiaramente se depositava un euro in meno depositava 0 euro, ma anche se nel testo si intendesse un centesimo di euro; si può verificare che se avesse depositato 99 centesimi a quel tasso di interesse dopo 7 anni non gli risulterebbe più possibile ritirare 1 euro di interessi in quanto si troverebbe con un saldo di 95 centesimi).
>
> Dubbio (di interpretazione del testo): nel caso in cui il testo non intendesse dire che ogni k anni si ritirano k^2 euro, ma che al k-esimo anno Rudy ritira k^2 euro (cioè prima 1 poi 4, poi 9, poi 16, ecc..), Rudy dovrebbe allora investire 1 euro al tasso di interesse del 251,154716721021%... ed al 20° anno avrebbe un saldo di (1+2008) euro.
>
> Se investisse un centesimo in meno, dopo 7 anni non riuscirebbe a ritirare 49 euro (avrebbe infatti un saldo al 7° anno di appena 11 euro).
>
> P.S. Resta il dubbio sul perché Rudy si debba limitare ad investire solo 1 euro. A questa domanda non sono in grado di rispondere in quanto non so quale sia il limite massimo ai depositi fissato dalla sua banca e neppure quali siano le disponibilità finanziarie del Gran Capo. Faccio solo notare che è comunque un buon investimento considerato che investendo solo 1 euro permette di ricevere 2008 euro di interessi in 20 anni.

Vediamo ora da che parte l'ha preso ***Trekker***:

Indichiamo con S il gruzzolo, con I il tasso di interesse**.** Investendo S al tasso I dopo un anno[27] avremo un montante di $S(1+I)$, dopo due anni avremo un montante di $S(1+I)^2$, etc., dopo k anni avremo un montante di $S(1+I)^k$.

Siccome Rudy dopo k anni ritira k^2 euro, affinché si possa prelevare k^2 euro ogni k anni per sempre, bisogna che il nuovo saldo sia almeno S. Ovvero:

$$S \cdot (1+I)^k - k^2 = S$$

Sappiamo inoltre che tutti gli interessi, nell'ipotesi che vengano continuamente reinvestiti (almeno questa è la mia interpretazione del testo), saranno 2008 al ventesimo anno. Per trovare questi interessi basta trovare il montante al ventesimo anno e togliere il gruzzolo di partenza, cioè:

$$S \cdot (1+I)^{20} - S = 2008$$

Posto $P=(1+I)>1$, combinando le due equazioni, si trova la "risolvente", cioè:

$$k^2 \cdot P^{20} - 2008 \cdot P^k + 2008 - k^2 = 0$$

Ponendo successivamente k=1, k=2, etc. e utilizzando qualche metodo di risoluzione numerica si trova:

K (anni)	P=1+I	I (tasso di interesse %)	S (gruzzolo)	Montante (dopo K anni al tasso I)	Prelievo (k^2)	Saldo dopo prelievo al K-esimo anno (Montante – Prelievo)
1	1.39664305108884	39.6643051088842	**2.52115850070953**	3.52115850070953	1	**2.52115850070953**
2	1.35203864183938	35.2038641839383	**4.83086834616996**	8.83086834616994	4	**4.83086834616994**
3	1.33084978827414	33.0849788274138	**6.63154671546190**	15.63154671546190	9	**6.63154671546188**
4	1.31948768565957	31.9487685659566	**7.87693363692465**	23.87693363692460	16	**7.87693363692464**
5	1.31393946548177	31.3939465481768	**8.57248415431066**	33.57248415431060	25	**8.57248415431056**
6	1.31260184219419	31.2601842194189	**8.74967267406494**	44.74967267406480	36	**8.74967267406480**
7	1.31481324587314	31.4813245873138	**8.45878402320550**	57.45878402320550	49	**8.45878402320550**
8	1.32041268181485	32.0412681814847	**7.76687952228889**	71.76687952228870	64	**7.76687952228872**
9	1.32960200660029	32.9602006600293	**6.75755447741573**	87.75755447741560	81	**6.75755447741558**
10	1.34294379536492	34.2943795364924	**5.53097345132739**	105.53097345132700	100	**5.53097345132706**
11	1.36146472651528	36.1464726515277	**4.20284991544761**	125.20284991544700	121	**4.20284991544723**
12	1.38690244841210	38.6902448412102	**2.90049608879767**	146.90049608879800	144	**2.90049608879755**
13	1.42222318984473	42.2223189844727	**1.75302284942795**	170.75302284942800	169	**1.75302284942794**
14	1.47274696560016	47.2746965600160	**0.87174502660204**	196.87174502660200	196	**0.87174502660196**
15	1.54884248666297	54.8842486662969	**0.31819067999246**	225.31819067999200	225	**0.31819067999217**
16	1.67342357626685	67.3423576266851	**0.06771122746020**	256.06771122746000	256	**0.06771122746028**
17	1.90818225656896	90.8182256568957	**0.00490193676652**	289.00490193676600	289	**0.00490193676637**
18	2.48948397843226	148.9483978432260	**0.00002402022112**	324.00002402022100	324	**0.00002402022102**
19	5.56232686980606	456.2326869806060	**0.00000000000250**	361.00000000000300	361	**0.00000000000250**

Ad esempio, osservando la seconda riga, avendo un gruzzolo S=4.83... al tasso I=35.20...% dopo k=2 anni si ha un montante di 8.83... . Prelevando $k^2 = 2^2 = 4$ euro il saldo ridiventa 8.83...-4= 4.83 ... e siamo pronti a ripetere il ciclo.

Affinché il capitale comunque aumenti basta investire un gruzzolo superiore di un "gnentesimo" al valore S calcolato.

Vediamo se arrivano altre soluzioni? Al solito, noi non ci sbilanciamo troppo, c'è sempre da imparare dai nostri solutori.

[27] La mia banca, ahimé, non usa calcolare l'interesse risolvendo una equazione differenziale come illustrato in RM116, 8 Paraphernalia Mathematica, 8.1 Make Money Fast! [01] – Basics, pag.23.

5.2.2 Enne binomiale kappa; ma solo il numeratore

La maggior parte dell'interesse di questo mese è stata attirata dal problema del binomiale, che era questo:

> *Preso un intero di partenza e moltiplicato per i nove (lui incluso fanno dieci) numeri successivi, si ottengono sempre almeno due zeri al fondo. Qual è il primo numero per cui dopo aver applicato quest'operazione ed eliminato tutti gli zeri al fondo, l'ultima cifra è un dispari?*

Ora, il testo era posto piuttosto male, ma i risultati sono arrivati a fiotti, e per la maggior parte corretti. Sperando di non sbagliare i nomi, ecco un certo numero (forse tutti) di partecipanti al concorso: ***Francesca***, ***Francesco***, ***Panurgo***, ***.mau.***, ***Zar***, ***Alberto***, ***Trekker***, ***μ/6***, ***GaS***, ***Michele***, ***Agapetòs***, ***Cid***, ***Val316***, ***Emanuele***.

Siccome noi siamo piuttosto sadici, vi diamo due soluzioni solamente, entrambe piuttosto brevi. E non vi diciamo niente, nemmeno da chi sono arrivate. Prima versione:

> Dimostreremo che $\forall k \in N = \{1,2,3,...\}$, posto $F = (k+1)(k+2)\cdot...\cdot(k+10)$, l'ultima cifra non nulla di F non è dispari.
>
> Presi dieci numeri naturali consecutivi, è abbastanza ovvio constatare che fra di essi si troveranno sempre: a) cinque numeri pari, b) almeno tre multipli di 3, c) due multipli di 5. Da ciò segue che F è multiplo almeno di 25·33·52 = 21600.
>
> L'ultima cifra non nulla dei multipli di 21600 è pari secondo l'ordine circolare 6-2-8-4-0. Quindi l'ultima cifra non nulla di F non sarà mai dispari (C.V.D.).

Seconda versione:

> Vogliamo che la prima cifra diversa da 0 a destra sia dispari; dividiamo il produttorio dei dieci numeri per 10 fino ad arrivare alla cifra diversa da 0 cosicché abbiamo eliminato un egual numero di fattori 2 e 5: il numero che otteniamo è dispari solo se non vi sono altri fattori 2 ergo condizione necessaria e sufficiente è che l'esponente del 5 nella fattorizzazione sia non inferiore a quello del 2.
>
> Il produttorio di dieci numeri consecutivi contiene sempre due multipli di 5 e, in generale, l'esponente del 5 nella fattorizzazione è 2; è altresì evidente che l'esponente del 2 sarà sempre non inferiore a 5 perché dieci numeri consecutivi contengono sempre cinque numeri pari.
>
> Perché la condizione esponente(5) > esponente(2) sia verificata occorre che i dieci numeri contengano una potenza di 5 non inferiore alla quarta cioè occorre cercare tra i numeri
>
> $$5^k - 9 \le n \le 5^k + 9 \qquad k \ge 4$$
>
> Il primo numero che soddisfa alla condizione è $n = 78117 = 5^7 - 8$ e abbiamo:
>
> $$\prod_{k=0}^{9}(78117+k) = 846653547263560975862358653322269397422190000000\,0$$

Ci aspettiamo un sacco di commenti inferociti, ma non vi pensate che noi ci si sbilanci minimamente.

E con questo è tutto. Vi auguriamo un ottimo novembre.

6. Quick & Dirty

Rudy ha preso un certo numero *n* di monetine molto oneste, e le ha divise in due parti; siccome erano dispari, a Doc ne è capitata una in più. Tutti e due tirano tutte le proprie monetine, e poi contano ciascuno le proprie "teste", e vince chi ne ha di più. Quali sono le probabilità che Doc vinca?

> *I casi sono due: o Doc tira più teste di Rudy o Doc tira più croci di Rudy: visto che ha una sola moneta in più, non possono verificarsi entrambe le possibilità. Per simmetria, queste due eventualità mutuamente esclusive hanno la stessa probabilità di verificarsi, quindi le probabilità di Doc di vincere sono esattamente ½. Insomma, "n" era assolutamente inutile.*

7. Pagina 46

Dovendo contenere unicamente cifre pari, i numeri cercati possono iniziare solo per 2, 4, 6 o 8; quindi dobbiamo esaminare solo quei numeri strettamente compresi negli intervalli: $\{]1999;3000[,]3999;5000[,]5999;7000[;]7999;9000[\}$. Di conseguenza le loro radici quadrate saranno comprese negli intervalli $\{]45;55[,]63;71[,]77;84[,]89;95[\}$.

Inoltre, essendo $(10x+y)^2 = 100x^2 + 20xy + y^2$, segue che per $0 \le y \le 9$ la cifra delle decine di $(10x+y)^2$ è pari o dispari concordemente alla cifra delle decine di y^2, visto che il termine $20xy$ contribuisce con una cifra pari in questa posizione, mentre il termine $100x^2$ contribuisce con uno zero; quindi le radici quadrate dei numeri cercati non possono terminare con le cifre 4 o 6.

Poiché le radici quadrate dei numeri cercati devono essere anch'esse pari, restano le quattro possibilità:

$$68^2 = 4624; \quad 80^2 = 6400;$$
$$78^2 = 6084; \quad 92^2 = 8464.$$

E solo questi interi soddisfano le condizioni del problema.

Si noti che, con un ragionamento perfettamente analogo, si dimostra che non esiste un quadrato perfetto di quattro cifre composto unicamente di cifre dispari.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Make Money Fast! [002] – Teoria

Rudy comincia a preoccuparsi: ogni volta che trova un argomento un po' fuori dal comune per questa rubrica, succedono dei guai. Aveva appena cominciato a parlare di speculazioni in borsa e avete visto tutti il patatrac che è successo; lui è convinto ci sia stata la stessa coincidenza altre due volte ma, siccome non vuole sembrare un megalomane, non vi dice quali sono[28].

Comunque, intitoliamo questo pezzo "Teoria" per il fatto che, a giudicare da quello che si è sentito, è stata bloccata la possibilità di "andare corto", ossia di vendere allo scoperto; qui continueremo a considerarla possibile, riportando il discorso giustappunto all'originale ambito.

Per semplificarci la vita (come vedrete, viene complicata già così), consideriamo solo due *asset*: il nostro mercato finanziario ha a disposizione un conto in banca B e un pacchetto azionario S. Se supponiamo che il nostro *portfolio* sia composto da entrambi gli asset nella proporzione di x_0 soldi in banca e un valore x_1 in azioni, possiamo descriverne l'evoluzione temporale nello spazio $\vec{S} = (B, S)$ come un *vettore dei prezzi* rappresentato da $\overrightarrow{x(t)} = (x_0(t), x_1(t))$; si noti che, in questa notazione, $x_i < 0$ significa che state "andando corti", nel senso che vi fate prestare qualcosa (soldi o azioni: dipende dall'indice) dal mercato. Il valore monetario del nostro portfolio, sottintendendo la dipendenza dal tempo dei vari termini, diventa:

$$V_{\vec{x}} = \vec{x} \cdot \vec{S} = x_0 B + x_1 S\ .$$

Un portfolio da cui non si fanno prelievi e in cui non si mettono soldi è detto *auto-finanziato*; in pratica, qui le variazioni dipendono solo dalla variazioni degli asset: volendo essere più precisi, un portfolio è auto-finanziato se la sua dinamica per qualsiasi $t \geq 0$ è descritta da:

$$dV_{\vec{x}}(t) = \vec{x}(t) \cdot d\vec{S}(t)$$

Che deriva dal considerare un tempo continuo piuttosto che discreto: in sostanza, supponiamo ci sia una continua compravendita (a guadagno zero) del nostro pacchetto azionario per poterne trasformare il valore in soldi; inoltre se nel processo, come in tutti i processi, vi limitate a tenere conto dei valori attuali e futuri e ignorate i valori pregressi, siete autorizzati a chiamarlo *markoviano*.

Cerchiamo di capire cosa significhi, in questo modello, l'arbitraggio. Ci facciamo prestare dal mercato qualche azione sicuri che quantomeno manterrà il suo valore e sperando che in qualche momento aumenti: formalmente, abbiamo:

$$\begin{cases} V(0) = 0; \\ \forall t > 0, \quad P(V(t) \geq 0) = 1; \\ \exists T > 0 : P(V(t) > 0) > 0. \end{cases}$$

Ossia, in parole "povere": (1): partite senza una lira. (2): o con il deposito in banca o attraverso l'arbitraggio, nella peggiore delle ipotesi vi restano gli stessi soldi. (3): se

[28] Aggiornamento dell'ultima ora: *tre* casi. Più il crollo delle borse, fanno quattro. Per fortuna, parlando della *Doomsday Equation*, non è successo niente.

azzeccate il momento giusto (il *tempo di arbitraggio*[29]) ci sono buone probabilità di guadagnarci.

Raggiunta la tranquillità economica, possiamo occuparci di teoria; cambiamo completamente discorso. Lavoreremo molto per definizioni, ai conti non ci pensiamo neanche.

Per restare sulle generali, partiamo da una "semplice" equazione differenziale in grado di descrivere un processo stocastico:

$$dX = a(X,t)dt + b(X,t)dW\ ;$$

Questo obbrobrio non è altro che la generalizzazione della $dv = -\gamma v dt + \sigma dW$, parente stretta dell'*equazione di Langevin*. Per tornare un attimo con i piedi per terra, l'equazione di Langevin descrive il moto browniano di una particella in un fluido avente viscosità γ; σ, qui, rappresenta l'*ampiezza* della forza (stocastica) agente sulla particella. L'equazionaccia scritta sopra è solo una generalizzazione di questo aggeggio, semplicemente alcune costanti sono diventate delle funzioni del tempo. Come vi dicevamo, non vi chiediamo di risolverla: la cosa è comunque possibile, sotto condizioni per le funzioni a e b che un matematico considererebbe molto restrittive ma che il resto del mondo (dai fisici in avanti, per intenderci) giudica sostanzialmente compatibili con la realtà fattuale.

Esiste gente che si è posta il problema inverso: ossia, se abbiamo un dato processo $X(t)$ che genera un processo stocastico $Z(t) = F(X(t),t)$, quale sarà l'equazione che riesce a descriverlo? Sarete felici di sapere che **Itô** ci è arrivato: l'equazione è, evidentemente, la **formula di Itô**:

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + a(X,t)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2(X,t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]dt + b(X,t)\frac{\partial F}{\partial x}dW.$$

Tranquilli, non morde. La parte dentro parentesi quadre nasce dallo sviluppo in serie di Taylor di F, quindi ha l'aria complicata, ma non lo è (troppo).

Rinfrancati da queste equazioncelle, torniamo a giocare in Borsa. Il processo che intendiamo analizzare deve sottostare a due condizioni fondamentali e ad alcune secondarie: attenti che la prima è complicata.

1. Ci sono due *asset*, il conto in banca B e le azioni S, governate dalle equazioni:

   $$\begin{cases} dB = rBdt; \\ dS = \mu S dt + \sigma S dW. \end{cases}$$

   Dove r è l'interesse bancario, μ è il valore medio delle nostre azioni, σ è la *volatilità* e $W(t)$ è un processo casuale di *moto browniano* (o *processo di Wiener*).

2. Il mercato non ammette arbitraggio.
3. C'è sempre qualcuno disposto a comprare le azioni
4. Non ci sono costi di transazione
5. È permesso "andare corti" per importi illimitati e per periodi illimitati di tempo.
6. L'interesse bancario non varia e le azioni non pagano dividendi.

[29] Prima che vi vengano strane idee: il tempo di arbitraggio varia tra qualche secondo e pochi minuti.

Lasciamo perdere le [2-6], che sono ragionevolmente logiche: la grande idea, nella prima condizione, è di associare un *random walk* di tipo browniano alla variazione casuale delle azioni: e oggetti di questo genere sappiamo trattarli, se Itô è così gentile da darci una mano.

Supponiamo di avere una *call option* $C(S,t)$ comprata ad uno strike price K su un'azione S; possiamo azzardare l'ipotesi che il suo valore segua allora la formula di Itô e descrivere le sue variazioni come:

$$dC = \left[\frac{\partial C}{\partial t} + \mu S\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right]dt + \sigma S\frac{\partial C}{\partial S}dW\ ,$$

in cui, rispetto a prima, abbiamo posto $a = \mu S$ e $b = \sigma S$.

Quante volte abbiamo già detto "Adesso arriva la parte complicata"? Bene, scherzavamo. In realtà è qui sotto.

Riprendiamo il portfolio dell'altra volta, composto da una posizione lunga sull'opzione e da uno *short* su un numero Δ di azioni; il valore del portfolio è allora:

$$\Pi(t) = C(S,t) - \Delta S\ .$$

Ricordiamoci che il nostro portfolio deve auto-finanziarsi (siamo partiti senza soldi), e quindi deve avere una dinamica del tipo

$$d\Pi = dC - \Delta dS\ .$$

Usando lo schiacciasassi (la formula di Itô), abbiamo:

$$d\Pi = \left[\frac{\partial C}{\partial t} + \mu S\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - \mu\Delta S\right]dt + \sigma S\left(\frac{\partial C}{\partial S} - \Delta\right)dW$$

Che cerchiamo di *semplificare*.

Per prima cosa, ricordiamoci che non vogliamo correre rischi: questo significa che devono sparire tutti i termini che contengono il parametro dW, ossia dobbiamo avere:

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}\ .$$

Essendo ora il nostro portfolio senza rischi, deve avere un rendimento pari a quello del conto in banca, ossia deve essere $d\Pi = r\Pi dt$. Inserendo queste due condizioni nella formula di Itô, otteniamo l'**equazione di Black-Scholes**:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0\ .$$

Siccome non vogliamo perdere soldi (anzi, con la fatica che abbiamo fatto sin qui il nostro obiettivo di minima è ormai di diventare schifosamente ricchi), questo aggeggio va risolto con la condizione al contorno $C(S,T) = \max(S-K,0)$.

La grande idea di Black e Scholes è stata di effettuare un cambiamento di variabili piuttosto complesso che trasforma il tutto in un'equazione semplicissima:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Che sappiamo risolvere, visto che non è altro che l'*equazione di propagazione del calore*.

Siccome non starete più nella pelle dal sapere come va a finire, vi diamo il risultato finale: se N è la funzione di distribuzione cumulativa di una variabile gaussiana normalizzata, ossia se

$$N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{s^2}{2}}ds\,,$$

e se indichiamo con

$$d_{1,2}=\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r\pm\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\,,$$

abbiamo (finito!):

$$C(S,t)=SN(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)\,.$$

Siamo sicuri che vi renderete conto che una formula del genere può portare molto lontano (in un qualsiasi punto tra San Vittore e le Seychelles, estremi inclusi); nel caso del secondo estremo, ricordatevi di noi e mandateci una cartolina.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms