Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 117 – Ottobre 2008 – Anno Decimo

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com
www.rudimathematici.com
RM116 ha diffuso 2069 copie e il 01/10/2008 per Google eravamo in 9'510 pagine.

Nonostante il *TicTacToe* o *Filetto* sia completamente analizzato, l'idea di giocarlo "allo specchio" dà una strana sensazione, pur non aumentandone la complessità. Se ne volete uno, chiedete a ***Shahar PELEG.***

Sempre per restare in tema, ogni pezzo degli scacchi "Alice attraverso lo specchio" di ***Yasmin SETHI*** diventa visibile solo quando lo posate sulla scacchiera. Secondo i "si dice", la scacchiera è illuminata dal basso da LED di ben precise frequenze, alle quali il materiale degli scacchi è trasparente (gli scacchi no, evidentemente). Qui, l'unico problema è quando dovete riordinare i pezzi.

1. Placidi Orsi

Boemia. Plaga desolata presso al mare

ANTIGONO:
(…) Oh, ecco l'animale a cui dàn la caccia! Sono finito per sempre!
(Esce, inseguito da un orso)

(William Shakespeare,
Racconto d'Inverno,
Atto III Scena III)

Bernardo, almeno in Italia, è nome che si immagina addosso a persone calme, bonarie, gentili e persino un po' sovrappeso. È probabile che questa sensazione discenda direttamente da Bernardo di Chiaravalle, il santo fondatore dell'abbazia di Clairvaux e di tutto il movimento dei cistercensi, perché si è soliti pensare ai monaci come persone appunto calme, rubiconde e sovrappeso. E naturalmente si rischia di sbagliare di grosso: per quel che ci ha tramandato l'iconografia, san Bernardo era tutt'altro che in carne, probabilmente poco gioviale, avendo passato molto tempo a fustigare i cugini cluniacensi, e forse anche animato da serissime intenzioni belligeranti, se è vero che fu lui ad ispirare la regola del più famoso ordine religioso cavalleresco, quello dei Templari.

Ma se non al fondatore di un pezzo fondamentale del monachesimo occidentale, a chi possiamo rivolgerci per avere un valido rappresentante del nome Bernardo? Al muto e fedele servitore di don Diego de la Vega, meglio noto come Zorro? Anche in questo caso, ci ritroveremmo fra le mani un'icona mite e bonaria, con caratteristiche essenzialmente positive, ma apparentemente inoffensive. E invece *Bernardo* contiene il coraggio e la forza dell'orso. Il nome è di origine tedesca, e la radice *ber* viene direttamente da *Bär*, che in tedesco significa appunto orso. Il nome completo, che in tedesco suona solitamente *Bernhard* (ma talvolta perde l'acca e si riduce a *Bernard*), pare che significhi proprio "coraggioso come un orso".

Quanto contano i nomi, nella formazione e nello sviluppo del carattere d'una persona? E quanto contano, invece, nella formazione e nello sviluppo d'una città? Non molto tempo fa due grandi città europee organizzarono una strana forma di gemellaggio artistico: una mobilitò i suoi scultori (e quelli della sua nazione) a creare delle artistiche e colorate statue di *leone*; l'altra fece la stessa cosa ma avendo per soggetto il *toro*. Le creazioni furono prima esposte per le vie e le piazze delle rispettive città, e in seguito il gemellaggio artistico prese davvero forma perché i tori finirono esposti nella città dei leoni e i leoni in quella dei tori.

Anche se l'abitudine ai nomi può ormai aver creato uno schermo di assuefazione che impedisce di risalire all'evidente significato originale, basta soffermarsi per meno di un secondo sulla grafia per riconoscere in Torino una città che prende il nome dal *toro* e in Lione, Lyon, quella che è onomasticamente figlia dei *leoni*. Ma per le città italiane e francesi siamo facilitati, le lingue che regolano i loro nomi sono neolatine, e di solito basta solo metterci un minimo di attenzione: per le città di lingua anglosassone il discorso è diverso. Ad esempio, non è stupefacente scoprire che almeno tre capitali europee hanno come simbolo l'orso? Due di queste hanno l'animale ben inciso anche nel nome: la terza no, ma quasi.

Uno dei luoghi più famosi e frequentati di Madrid è la piazza della Puerta del Sol. È la zona dove si trova la maggior parte dei ristoranti e i locali della *movida* madrilena, quella che prende vita molto tardi[1] la sera. Tra i milioni di turisti che invadono ogni anno quella piazza, non sono certo pochi quelli che si soffermano a guardare la statua del simbolo della città, anche perché è abbastanza inattesa: l'animale che i turisti associano alla Spagna, e per estensione alla sua capitale, è di solito il toro, proprio a causa delle corride e delle *Plazas de Toros* che si trovano in tutte le città. Invece, l'animale di Madrid è un orso: anzi, a dar retta ai dettagli della tradizione, è un'orsa.

1 *L'oso y el madroño*

Ritta sulle zampe posteriori, l'orsa di Madrid è del tutto incurante dei passanti e della piazza: è concentra nell'assalto al corbezzolo, l'albero che la accompagna sempre nell'iconografia ufficiale della città. Probabilmente, è proprio la forza d'attrazione della pianta che distrae dal mammifero: in genere, del corbezzolo si parla solo al plurale e solo quando si vuole esternare un'esclamazione beneducata; e quando succede, la maggior parte degli esclamanti neanche sa di star citando una pianta e un frutto[2]. Anche per gli spagnoli deve essere più significativo il vegetale: infatti, con buona pace della tradizione, l'orsa viene spesso chiamata al maschile, perché il gruppo statuario è familiarmente detto "*L'oso y el madroño*". Ma non solo: una leggenda vuole che sia proprio a causa del corbezzolo, del *madroño*, se Madrid si chiama come si chiama; la radice dei nomi è infatti assai simile.


2 *Lo stemma di Berlino*

Se l'origine del nome di Madrid è solo indirettamente (e neanche sicuramente) legata ad un plantigrado, le altre due capitali hanno invece legami certi e indissolubili; e proprio la radice del nome dell'orso (in lingua tedesca, proprio quella di Bernhard) si ritrova chiaramente in entrambe. La capitale tedesca, la città di Federico il Grande, premia con gli "*Orsi d'oro*" i film che vengono giudicati migliori nel suo prestigioso festival del cinema. Ed è un aggressivo orso bruno brandeburghese quello che si ritrova nello stemma della città. In questo caso l'orso è protagonista assoluto dello stemma, se si esclude la corona d'oro che lo sovrasta: ma Berlino, capitale di Prussia prima e di Germania poi (senza parlare di un certo numero di *Reich* nel mezzo), non poteva certo farsi mancare un simbolo regale nel simbolo della città.

Non è troppo diverso il ruolo dell'orso di Berna, anzi, una curiosa – ma probabilmente non casuale – coincidenza si nota nei due stemmi: la rossa sottolineatura degli artigli dell'animale, forse per rimarcare che bernesi e berlinesi non hanno la minima intenzione di lasciar confondere i loro orsi con gli orsacchiotti che rassicurano i bambini.

[1] Del resto, le abitudini e i ritmi circadiani degli spagnoli sono tutti sfasati di un paio d'ore rispetto agli altri paesi mediterranei, e di quattro abbondanti rispetto ai paesi nordici: a Francoforte si cena alle sei, da noi (media nazionale, con grosse differenze regionali) verso le otto; a Madrid d'estate i ristoranti non aprono neppure, prima delle dieci di sera.

[2] Nelle remote lande centro-italiche da cui proviene uno di noi, il frutto del corbezzolo è noto come "cerasa di mare": cosa notevole, specie considerando che le lande suddette distano più di cento chilometri dal mare più vicino.


3 *L'orso di Berna*

Sono gli artigli rossi di sangue e non la calda e morbida pelliccia a caratterizzare l'egida della città. La capitale svizzera, comunque, non si limita ad ospitare gli orsi nel suo simbolo: da molto tempo[3], sulle rive dell'Aar si trova una fossa in cui i simboli viventi di Berna sono presenti in carne, ossa e pelliccia.

Però dovrebbe essere ben palese la strana ambivalenza, anche simbolica, di questo carnivoro. Oltre alle tre capitali europee (e potrebbero essere anche più di tre, per quel che ne sappiamo), molte altre città, anche italiane hanno eletto l'orso come simbolo, e questo probabilmente perché si presta bene a rappresentare anche virtù e caratteristiche ben diverse fra loro. Lo scudo di Pistoia ne riporta addirittura due, ma sono oggettivamente difficili da riconoscere come orsi: occhi inesperti potrebbero facilmente confonderli con dei cani. Lo stemma di Biella[4] è per molti versi curioso: il suo orso non è nero, ma di un rassicurante marrone chiaro; però, colore a parte, il suo aspetto sembra voler quasi essere un riassunto dei simboli delle tre capitali. L'orso biellese è accompagnato da un albero, come nello stemma di Madrid; è sormontato da una corona, come l'orso di Berlino, rinuncia ad essere rampante e procede a quattro zampe verso sinistra, come quello di Berna.


4 *Lo stemma di Biella*

Certo è che quello di Biella[5] è orso tutt'altro che minaccioso: e anche se non arriva ad ispirare tenerezza come i *teddy-bear* dei negozi di giocattoli, ribadisce ulteriormente che, a differenza di tori e leoni, la simbologia veicolata dagli orsi è ambigua. La più famosa delle nazioni simboleggiata da un orso è la Russia: quella zarista prima, l'Unione Sovietica poi, e adesso l'attuale, ancora priva di un aggettivo caratterizzante. La colossale nazione euroasiatica è stata sempre rappresentata da un orso: forse già ai tempi di Ivan il Terribile, ma di certo almeno dalla Battaglia di Tsushima alla Seconda Guerra Mondiale, fino e oltre la Guerra Fredda. L'esercito del grande orso russo è stato di volta in volta visto come minaccia terrorizzante o come possibile salvatore, ma di certo mai come inoffensivo. Eppure, il terribile orso sovietico ha avuto buon gioco, nel 1980, in occasione delle Olimpiadi di Mosca, nel produrre la mascotte olimpica probabilmente meglio riuscita di tutte: *Misha*, un

[3] Fossa che assomiglia molto alle classiche aree per orsi che si vedono nei giardini zoologici. Sembra che l'amministrazione di Berna, preoccupata della ristrettezza dell'ambiente, abbia finalmente deciso di estendere di molto il recinto destinato agli animali; il nuovo progetto prevede sulla sponda dell'Aar una zona *ursina* assai più estesa e variegata, con tanto di possibilità per gli orsi di pescare direttamente dalle acque del fiume.

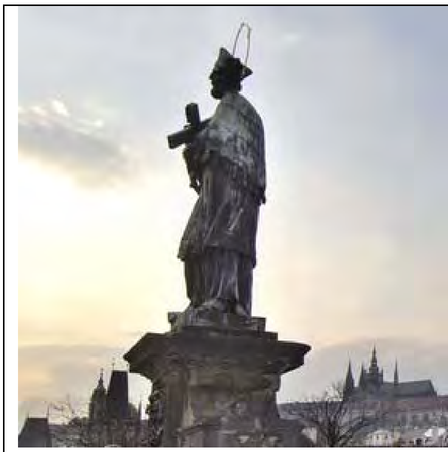
[4] Città che non è capitale europea e che, nonostante l'iniziale, non prende il nome dagli orsi. Il nome attuale proviene da *Bugella*, il cui significato esatto non è certo: potrebbe venire dal nome di un'antica dimora romana, o più probabilmente da *betulla*, che ha un suono simile al nome della città nel dialetto del luogo. A noi però piace di più l'ipotesi che il nome derivi da *Bhag,* che in indoeuropeo significa *faggio*. L'albero nello stemma è proprio un faggio, e se avesse davvero preso il nome non dall'orso ma dall'albero che lo accompagna, Biella farebbe coppia con Madrid, che prende il nome dal corbezzolo scalato dall'orsa.

[5] *È usuale nel Biellese il modo di dire* "Frôst me le bale d'ors" *(Consunto come le palle dell'orso) per indicare qualcosa di vecchio e da buttare via: il che indica: (1) L'orso è maschio (2) Essendo vecchio, probabilmente è piuttosto calmo (Moglie di Rudy, comunicazione personale).*

sorridente orsetto, appunto. Così, lo stesso animale può simboleggiare cose diversissime[6]; non c'è da stupirsi se un nome proprio derivato da esso sia parimenti difficile da classificare.

Placido è insomma un aggettivo che solo con molta cautela può essere associato agli orsi; si addice loro benissimo, ma solo finché non appare improvvisamente del tutto inadeguato. Non era placido Bernardo di Chiaravalle, non sono placidi gli orsi battaglieri con venti artigli rossi nei simboli di Berna e Berlino, non è certamente placido un orso, bianco, bruno o di qualsivoglia colore, lanciato in carica verso una preda. Ma possono essere placidi gli orsacchiotti di peluche, e forse, con un po' di fantasia, anche le due grandi Orse fatte di stelle, la cui forma completa è però difficile da riconoscere[7], nei cieli del nord. Ma del resto, lo stesso termine placido è ormai fuori moda, destinato a rapida estinzione, se non fosse per i cognomi degli attori e i nomi dei tenori. Sopravvive solo grazie a queste personificazioni, o in frasi fatte o titoli di romanzi, come *Il placido Don* di Michail A. Šolochov: romanzo russo, anch'esso proveniente dalla patria degli orsi. Del resto i fiumi sono quasi sempre simili agli uomini: irruenti, schiumanti e imprevedibili nella giovinezza degli anni e delle montagne vicino alla sorgente, e poi lenti, rassicuranti – e appunto *placidi* – nelle piatte pianure della maturità.

Giovanni Nepomuceno queste cose le sa: è decisamente ben informato sui fiumi. Non è un caso se statue a lui dedicate si trovano quasi sempre spesso sui ponti: se a ciò si aggiunge che *Jan Nepomuk* (questo il suo nome originale, prima della inevitabile latinizzazione, alla quale non può certo sfuggire un santo cattolico) è il patrono nazionale della Boemia, è del tutto naturale attendersi sue rappresentazioni sui ponti della sua nazione. Il più famoso e certamente più bel ponte della Repubblica Ceca è il *Ponte Carlo* di Praga, ed infatti su di esso campeggia la statua più celebre del *santo dalle cinque stelle.*



5 *Johann Nepomuk sul Ponte Carlo (foto rubata a Getty Images– AFP)*

La cosa non è stupefacente: anche se sue statue si trovano anche sul ponte omonimo di Livorno e, (probabilmente assediato da lucchetti di mocciana memoria), sul Ponte Milvio a Roma[8], è proprio dal Ponte Carlo che Jan fu gettato nelle acque della Moldava, dove annegò. Re Venceslao IV si ritrovò ad avere qualcosa a che ridire con il religioso, e i re, di solito, quando hanno qualcosa da ridire a volte lo dicono, ma più spesso lo mandano a dire dal boia. E così il Ponte Carlo ospita ora non solo la statua, ma anche una antica targa con una croce che segna il punto esatto dove Johann (Giovanni, Jan, Johann… ha molti nomi, ma è sempre lo stesso) fu precipitato[9] in acqua e fatto annegare. Il suo nome, apparentemente strano nella forma latinizzata, non significa altro che "originario di Pomuk", cittadina boema. A causa della natura della sua morte è stato nominato protettore delle persone che rischiano di annegare; a causa del periodo in

[6] Tanto per aggiungere legna al fuoco della molteplicità evocativa: l'animale usato per simboleggiare l'URSS comunista trova comodo spazio anche nell'insegna di Benedetto XVI.

[7] A scanso fraintendimenti: il Gran Carro, lungi dall'essere difficile, è quasi certamente l'insieme di stelle più facilmente riconoscibile in tutto il firmamento. Però è bene ricordare che il Gran Carro (le sette stelle brillanti che i latini chiamavano *septem triones*, sette buoi, dai quali prende vita la nostra parola *settentrione*) è solo una parte – relativamente piccola – dell'Orsa Maggiore, che è invece costellazione molto più estesa..

[8] Sono solo due esempi, non se abbiano a male Milano, Bassano del Grappa, Morbegno, Bedizzole e tutte le altre località che ospitano statue del Nepomuk.

[9] Le questioni religiose a Praga sembrano avere una strana affinità con la sperimentazione umana della gravità. In RM085, Febbraio 2006, ci capitò di parlare della "*defenestrazione di Praga*", e scoprimmo che non era neanche unica. E adesso questo volo dal Ponte Carlo alla Moldava… inquietanti, i disaccordi boemi sulla fede.

cui visse e delle tempeste scatenate in Europa centrale dalla Riforma e dalla successiva Controriforma, sembra che il culto del santo cattolico boemo fosse fortemente favorito dal pontefice anche per contrastare il movimento protestante locale promosso da Jan Hus. In ogni caso, la venerazione fu tanta, in terra ceca, che il nome e cognome del santo sono fusi in una sola entità: "Johann Nepomuk" è diventato un nome di battesimo per molti bambini boemi. Del resto, è cosa che succede più frequentemente di quanto ci si aspetta: come già detto in precedenza, l'abitudine ottunde la curiosità, ma il celebre leader nero Martin Luther King, a ben vedere, ha come nome di battesimo "Martin Lutero".

Bolzano, se si parla di fiumi, gioca in casa. Sia che venga italicamente chiamata Bolzano, sia che venga teutonicamente nomata *Bozen*, per essere una città certo non paragonabile alle più popolose[10] d'Italia, ha la sua abbondanza idrica assicurata da ben tre corsi d'acqua di tutto rispetto. L'Adige, innanzitutto, secondo fiume italiano per lunghezza; ma anche l'Isarco e il Talvera; posta nel punto d'incrocio di tre valli, ingloba nel suo territorio cittadino la linfa vitale di tutte. In un'ipotetica classifica della *densità di ponti per abitante*, è verosimile che il capoluogo altoatesino si piazzi assai bene.

Dai ponti ai fiumi, dai fiumi agli orsi, con Bolzano il cerchio può felicemente chiudersi, perché, nel bene e nel male, Bolzano è entrata sovente nelle cronache a causa dei plantigradi. È relativamente recente la lunga polemica sull'abbattimento dell'orso Bruno (di nome, oltre che di caratteristica) che, nel 2006, dal Tirolo sconfinò in Austria e Baviera dove fu poi abbattuto. E proprio nel capoluogo del Tirolo ha abitato per tutta la vita Pippo, un orso in cattività un po' come gli orsi di Berna.

Però, in verità, il percorso narrativo non è concluso; anzi, a dire il vero, il percorso narrativo non è neanche tale. È solo una scusa, un volgare artificio per giungere a parlare del tema istituzionale di questi articoli: i matematici. Ma costruire un'introduzione al protagonista del mese ci è risultato particolarmente ostico, e pertanto abbiamo optato per una banale enumerazione. Enumerazione non di cifre, ma di parole, anzi di nomi: giunti a questo punto non rimane che mettere in fila i nomi che, ad inizio paragrafo, sono scritti in carattere grassetto e corsivo per ottenere *Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano*, e poter finalmente cominciare a parlare del matematico praghese.

6 *Bernard Bolzano*

Bernard nacque a Praga il 5 Ottobre 1781, da Maria Cecilia Maurer e da Bernard Pompeius Bolzano. Quel che più colpisce gli studenti italiani che incontrano il suo nome nei libri di testo è la sorpresa nel riconoscere un nome italiano seguita da una specie di delusione quando si rivela che invece Bolzano italiano non era. A discolpa degli studenti, va riconosciuto che le piccole indagini sul casato del matematico sono fonte di sorprese altalenanti. Il mistero sembra risolversi rapidamente quando si scopre che suo padre, il già citato Bernard Pompeius, era originario dell'Italia del nord. Basta allora ipotizzare che la generica "Italia del Nord" sia appunto l'amena regione bolzanina, e la ragione del cognome "Bolzano" nel cuore della Boemia può sembrare chiarita. Ma questa rischia di essere una ricerca assai frettolosa: nel diciottesimo secolo, quando il padre migrante di Bernard giunge a Praga, Bolzano è terra asburgica. Questo, se in parte mette in nuova

[10] Neanche tra meno popolate, sia ben chiaro: dagli ultimi dati, Bolzano risulta avere poco più di centomila abitanti.

luce lo spostamento dal Tirolo a Praga riducendolo a poco più che migrazione interna, dall'altra non risolve il problema del nome. Bolzano era terra tedesca fin dal 1300, ed è probabile che la forma italiana del nome della città, a quei tempi, fosse pochissimo usata. Di certo Bernard, quali che potessero essere le sue lontane radici italiche, scrisse di molti e svariati argomenti, ma sempre e soltanto in lingua tedesca.

La famiglia di Bolzano era numerosa, ma non ricca. Di dodici fratelli, raggiunsero l'età adulta solo Bernard e il fratello Johann. Nel 1796, mentre Napoleone cominciava la sua sfolgorante carriera con la Campagna d'Italia, Bernard entrò all'Università di Praga, facoltà di Filosofia, per studiare matematica, fisica e filosofia. In parte per il modo in cui era organizzato l'insegnamento delle materie nell'università boema, in parte per la sua natura contemplativa e meditativa, Bernard fu subito a suo agio nelle considerazioni relative ai fondamenti della matematica e della filosofia. Le pure speculazioni lo interessavano molto, e nel 1800 cominciò a dedicarsi, anche contro i desideri del padre, agli studi teologici. Si dedicò alla matematica prima del 1800 e alla teologia per i tre anni successivi; al momento della laurea, nel presentare la sua tesi di dottorato, rivelò uno dei suoi concetti rimasti famosi: "*Non sarei soddisfatto di una rigorosa dimostrazione matematica che non provenisse da concetti già presenti nella tesi da dimostrare*". È in fondo una confessione di non cieca fiducia nella razionalità deduttiva, il riconoscimento dell'esistenza di una sorta di spirito critico superiore alla pura razionalità di derivazione logica.

Figlio di un'educazione profondamente religiosa e cattolica, Bernard Bolzano sentì evidentemente la necessità di dedicare la sua vita alla contemplazione del divino. Nel 1806, due soli anni dopo la laurea, prese i voti e diventò sacerdote cattolico, e come sempre è importante ben collocare le scelte private e pubbliche dei personaggi della storia nell'opportuno contesto storico. I primi anni del XIX secolo sono anche i primi anni che seguono allo sconvolgimento della Rivoluzione Francese: tutte le case regnanti del continente si sentono mobilitate su due fronti mortali; quello militare, dove un generale figlio della rivoluzione era diventato con una seri di trionfi militari l'"Imperatore dei Francesi", e quello ideologico, dove i principi libertari, ugualitari, anticlericali e razionalistici della rivoluzione infiammavano i popoli. Gli Asburgo, cattolicissimi e con uno sterminato impero multietnico da governare, indirizzarono anche le direttive dell'insegnamento universitario lungo linee opposte a quelle rivoluzionarie: la cattedra di Filosofia venne estesa e mutata in quella chiamata *Filosofia e Religione*, e un giovane sacerdote intellettuale, che ha perfino nel nome incastonato il santo più famoso della Boemia cattolica, è il candidato perfetto a ricoprirla. Non è precisazione gratuita o dietrologica: quando Bernard partecipò al concorso per vincere un posto d'insegnante all'Università Carlo di Praga, le cattedre a disposizione erano due: quella appunto in *Filosofia e Religione*, e quella di *Matematica*. Bolzano partecipò a tutti e due i concorsi, e li vinse entrambi; spettò all'università decidere quale delle due cattedre assegnargli, e la scelta fu guidata certo più da motivi ideologici che puramente formativi.

L'idea era quella di avere una personalità forte e intellettualmente preparata che propagandasse la religione di stato, contribuendo a cementare e a diffondere l'ideologia politica e religiosa ufficiale. Da parte sua, Bolzano capì presto che se c'era una cosa al mondo che lo interessava più della religione, era la possibilità di insegnare, quindi fu ben lieto di diventare titolare di cattedra. Però l'intento politico fu disatteso: per quanto devotamente cattolico e certamente ben integrato nei principi della sua chiesa, Bernard destinò molte più risorse a denunciare e a criticare i settarismi e le esaltazioni militaresche. Profondamente pacifista, difese dalla sua cattedra principi come l'uguaglianza tra i popoli e gli uomini, basati su principi di filosofia sociale, tutti principi che non erano ben visti dalle autorità, al punto che Bolzano cadde in disgrazia presso gli Asburgo. Infine, nel 1819, gli fu revocata la docenza, e si giunse al paradosso che lo vide addirittura possibile imputato dell'accusa di eresia; era uno degli intellettuali più influenti del suo paese, e si ritrovò di colpo ai margini della società intellettuale, almeno per quanto riguardava i suoi interessi teologici e filosofici.

Per fortuna, gli restava la matematica. E la logica. E la scienza.

Nel 1810 il suo interesse ai fondamenti della matematica lo portò a pubblicare la prima parte di "*Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik",* e nel 1817 l'ancora più famoso "*Rein analytischer Beweis"* relativo al concetto di "Pura dimostrazione" in matematica.

7 *Targa sulla casa di Bolzano a Praga*

Se il suo interesse in matematica fu principalmente dedicato ai fondamenti, questo non significa che si limitò solo a speculazioni lontane dalle considerazioni più immediate e dirette. Da una parte esplorò le propaggini dell'infinito, e alcune sue affermazioni aprirono la strada (che restò comunque pericolosa e difficilissima) a Cantor e a suoi molti e diversi infiniti. Quando ancora si discuteva addirittura se fosse lecito o meno considerare insiemi infiniti, Bernard Bolzano scrisse: "*Perfino nel regno delle cose che non reclamano esistenza e neppure possibilità, esistono senza dubbio degli insiemi che sono infiniti."*

Gli studenti lo incontrano per i suoi teoremi sulla continuità e sugli zeri. Quando rafforzato dal cognome di un altro grande di lingua tedesca, il suo nome altoatesino genera l'accoppiata *Bolzano-Weierstrass* che terrorizza più di uno studente dei corsi di Analisi.

Ma a proposito di teoremi, solo ora ci accorgiamo che il suo più famoso mostra che se una funzione continua reale cambia segno, allora deve esistere almeno una radice di essa: ne esiste una rapida e rigorosissima dimostrazione, ma uscendo fuori dal rigore matematico e rubando licenza di metafora, notiamo che il celebre teorema significa solo che per andare da una parte all'altra di un *fiume*, in assenza di *ponti*, devi bagnarti almeno un po'. Perfino se sei un *orso*.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Senza Rischio			
Enne binomiale kappa: ma solo il numeratore			

2.1 Senza rischio

Come potrete notare se due volte tanto[11] vi degnate di lanciare uno sguardo al PM, non abbiamo continuato l'argomento dell'altra volta; infatti a Rudy il rischio nel giocare in borsa piace quanto ad Alice la teoria della probabilità (e per gli stessi motivi, ci tiene a chiarire); trovandosi a disposizione un certo gruzzolo, lo ha investito ad un interesse fisso che lui ritiene estremamente soddisfacente: infatti gli permette, il k-esimo anno di deposito, di ritirare esattamente k^2 euro; lui ritira (esattamente) quella somma, e lascia la parte restante degli interessi a incrementare il capitale; la cosa interessante è che ha depositato la somma *minima* per fare questo gioco sino, come diceva Asimov, alla fine dell'eternità.

È evidente che vogliamo sapere quanto ha depositato Rudy e il tasso di interesse che è riuscito a farsi applicare; giusto per darvi una mano e come anticipo dei problemi di fine anno[12], vi diciamo che Rudy ha calcolato quando gli interessi (tutti, non solo quelli che preleva) saranno esattamente uguali a 2008: dovrà aspettare il ventesimo anno di deposito.

Ora, Rudy è estremamente felice di aver depositato quella cifra, anche perché evidentemente se avesse depositato un euro in meno dopo un certo numero di anni non ce l'avrebbe fatta, a ritirare il quadrato degli anni di deposito… Bene, quanto vale quel "certo numero di anni"?

2.2 Enne binomiale kappa; ma solo il numeratore

Tranquilla, Alice, non parliamo di probabilità, anche perché il calcolo del binomiale non c'entra assolutamente niente e serve solo per cominciare a parlare dell'argomento.

L'avrete di sicuro calcolato, un binomiale: se guardate a numeratore, avete un $n!$ e a denominatore un $k!$, con $k < n$; il che significa che potete tranquillamente semplificare un

[11] Se si dice "una volta tanto", si potrà dire "due volte tanto", nel senso che dovete farlo per due volte e pure di seguito: il mese passato e questo.

[12] Quelli da fare per passare la serata di San Silvestro: quest'anno, avranno tutti un "2008" da qualche parte.

pezzo e, per quanto riguarda il numeratore, calcolarvi solo $(k+1)(k+2)\ldots n$ e andare avanti[13].

Bene, Rudy e i VAdLdRM stanno facendo un po' di esperimenti con numeri di questo tipo; per intenderci, se prendete 11 e lo moltiplicate per i nove (undici incluso fanno dieci) interi successivi, ottenete 670.442.572.800; è abbastanza evidente che i due zeri alla fine nascono dalla moltiplicazione per 20 e dalla moltiplicazione per 12 e 15, che generano uno zero a testa; se ignorate questi due, al fondo vi resta un 8, che è un numero pari.

Se provate con un intero di partenza (al posto dell'undici) un po' più grande e lo moltiplicate per i nove (lui incluso fanno dieci) numeri successivi, ottenete la solita coppia di zeri e un pari al fondo. Bene, contato che dalla coppia di zeri non si scappa, per quale numero, dopo aver applicato quest'operazione ed eliminato tutti gli zeri al fondo, l'ultima cifra è un dispari?

3. Bungee Jumpers

Sia α un qualsiasi numero irrazionale; per un qualsiasi valore di *n*, all'interno della sequenza $\left\{\frac{0}{n},\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots\right\}$ è sempre possibile trovare un elemento che differisca da α per meno di $\frac{1}{n}$. Mostrate che esiste un *n* per cui la frazione più vicina ad α ne differisce per non più di $0{,}001\left(\frac{1}{n}\right)$.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Carissimi lettori affezionati, ce l'abbiamo fatta ancora una volta a farvi arrivare queste note, che tradizionalmente precedono le soluzioni mensili. Il mese di settembre, che ci doveva traghettare tranquillamente e senza grossi scossoni verso l'autunno, ci ha invece ricoperti di lavoro imprevisto e costretti a fare straordinari enormi. La popolarità di RM ci fa un gran piacere (e ce ne vantiamo ad ogni piè sospinto), ma dopo aver raggiunto e superato la soglia dei duemila iscritti, le iscrizioni hanno preso un ritmo settimanale da capogiro, tanto che il nostro Postino Ufficiale ha minacciato di mettersi in sciopero. Come potete ben immaginare, non c'è modo di sopravvivere senza un Postino Ufficiale, addetto anche alla Sezione Piagnistei e Proteste, soprattutto se gli altri membri redazionali hanno i compiti ben più complessi di Gran Capo e Responsabile Traduzioni (qualcuno ha visto le traduzioni prodotte? No, nemmeno noi.).

Insomma, per concludere questo piagnisteo degno solo di noi, vi anticipiamo che durante il prossimo mese modificheremo le modalità di distribuzione di RM, rendendola molto più automatica. Si perderà, ebbene sì, la parte che ci piaceva di più: ricevere le vostre iscrizioni con i vostri commenti e rispondere a tutte ad una ad una. In più coloro che erano abituati a ricevere il file intero si ritroveranno un link per scaricare il file, ma tutto questo è necessario affinché noi si sia in grado di continuare a fare tutto il resto.

Per tutti gli abbonati, assicuriamo il mantenimento dell'anonimato: tutti gli indirizzi saranno maneggiati solo dalla Triade Redazionale, ed inseriti in un google group creato appositamente, già a partire dal mese prossimo. Ci raccomandiamo però con tutti di

[13] Rudy non è mai sicuro quando parla di formule del genere, per il notorio problema del Jfa(F)O_E. E siccome nessuno l'altra volta ha chiesto cosa fossero gli MSV, non vi dice cosa sono questi. Tanto non servono, per risolvere il problema. Esattamente come gi MSV.

continuare a mandarci mail e richieste, domande e commenti, che siano di matematica o no, perché ci fanno un enorme piacere e non ce li perderemmo per niente al mondo.

Aggiorneremo con la solita nostra calma anche il sito, e soprattutto il bookshelf: abbiamo ricevuto parecchi contributi interessanti ed è proprio ora di dar loro spazio… abbiate solo pazienza, che stiamo lavorando anche ad altro…

Vi passiamo qui anche il resoconto di un nostro lettore storico, ***Marco Broglia***, che è stato a Parigi alle finali europee dei Giochi Matematici. Ne abbiamo ridotto delle parti, ma speriamo comunque che la storia vi risulti gradevole…

> (…) * prima giornata
>
> (…) Gli esercizi, per entrambe le sessioni, sono 10. Le ore 3, ottimo per non dover correre come a Milano. C'è la solita complicazione di dover indicare, per tutti gli esercizi eccetto i primi 3, anche il numero di soluzioni. E per tali esercizi sono sempre previsti due spazi dove scrivere la/le risposte, anche se è unica o se ce ne sono più di 2. Se si sbaglia ad indicare il numero di soluzioni l'esercizio NON viene dato (i punti sì), anche se le soluzioni (una o due) sono corrette. Il meccanismo su cui si basa il punteggio è un po' contorto e non sto a spiegarlo qui.
>
> Facili i primi due (non dico niente di più anche per gli altri, se qualcuno avesse voglia di farli...), carino il terzo. Sorprendente il quarto: non è difficile ma non sono per nulla sicuro del risultato. Nulla da dire sul quinto. Interessante il sesto: hanno preso spunto dalla battaglia navale del Wpc (e l'influenza del Wpc è fortissima quest'anno). E ora le cose si complicano.
>
> Il settimo è un problema di ricerca operativa, di quelli tipo "auto con serbatoio fino a tot litri che può portare una tanica di tot litri, lasciarla nel deserto, ecc". Molti (anche molti boss) l'hanno saltato a piè pari. Io ci provo e arrivo ad un risultato che non mi lascia per nulla tranquillo... e infatti è sbagliato.
>
> Bello l'ottavo, più facile del settimo. Il nono è una chicca: un problema logico. Di quelli tipo "cappelli colorati". In genere qui l'errore è dietro l'angolo. Trovo una soluzione e credo sia unica: ce n'erano sei. Per fortuna però qui i risultati parziali contano: non ho il punto dell'esercizio svolto ma ho metà coefficiente (ho dato una risposta, ne bastano due). È molto carino e vi consiglio di provarlo: la risposta è abbastanza strana. L'ultimo è tosto, ma forse non troppo rispetto ad altri anni: si tratta di contare configurazioni che però possono essere simmetriche e non vanno contate. Insomma uno di quei casini in cui devo continuare a ruotare per cercare simmetrie.
>
> Consegno a tre minuti dalla fine, consumando 2h 57m, per la solita strategia che consiglia di consegnare qualche minuto prima in almeno una delle due sessioni così da vincere per il tempo un eventuale ex-aequo con altri che hanno fatto gli stessi esercizi (beh, io sono a Parigi per questo motivo). (…)
>
> * Il secondo giorno (…)
>
> * i primi 5 problemi
>
> I primi problemi, come sempre, sono facilini e sono più veloce di ieri: al quinto problema svolto, cioè a metà (ovviamente non ha senso qui parlare di metà) il cronometro segna 29:22 contro 50:54 del giorno prima, e in più ho molti meno dubbi sui risultati. Si va a gonfie vele.
>
> * il fetido sesto problema
>
> Al sesto (il n 12) il macello. Se volete ve lo passo, ma credo di aver capito che è successo. Come da sesto esercizio mi aspetto un problema medio. È uno di quelli in cui occorre inserire un numero in ogni cerchiolino in modo che la somma... Ne avevo appena risolto uno ieri in modo elegante ma ora non vedo nulla. Il tempo

passa: nulla. Inizio allora il metodo forza bruta: dove può andare il numero 1? Acc, in 7 posti. Il 2? Cavolo, un casino. Provo con il 9 e altro. Arrivo ad avere 7 schemi possibili in cui ho solo sistemato 2 numeri. Prendo quello che sembra più semplice e mi blocco anche lì. Mi rifermo per cercare un metodo: deve esserci! Non lo trovo e, sigh, dopo 42 minuti abbondanti lo lascio lì e decido di proseguire, altrimenti passo 3 ore così. Il morale cambia completamente: io non riesco a lavorare con qualcosa a metà che resta indietro da fare, ci penso in continuazione. Spero di sbrigarmi e riprenderlo alla fine.

* settimo

Il settimo è anche lui bruttino. Trovo un metodo ma è lungo. Lo risolvo con un mix tra metodo sistematico e prove. Metto il risultato ma sinceramente le probabilità che sia corretto sono del 50%. Ci sarà una sorpresona per questo. È passata però un'altra mezzora. Ora mi resta solo un'ora e un quarto per gli ultimi tre: si profila una brutta prova.

* ottimo

Mia figlia di 6 anni dice "quarto quinto sesto settimo ottimo". Spero che porti bene. Ehi, ecco un bel Wpc: uno schema quadrato da suddividere in 5 parti contenenti ognuna due dei dieci numeri inseriti, uno fornisce l'area e l'altro il perimetro. Non dovrebbe essere complicato. E invece anche qui mi perdo, passando molto vicino alla soluzione più volte ma provando configurazioni assurde che fanno perdere un sacco di tempo. Ormai ero sconsolato: stavo lasciando anche questo. Un colpo di reni finale mi fa trovare una soluzione. Dubito ce ne sia un'altra e dunque metto in cascina e proseguo. Il problema è che se ne sono andati altri 40 minuti, me ne restano 36.

* nono

Facile, per essere un nono. È un problema combinatorio ricorsivo, di quelli che mi piacciono parecchio. Quanti modi possibili... Vado più veloce che posso e ho tempo anche di ricontrollare. Vado sul sicuro.

È l'unico che ho sbagliato!!!

* decimo

Altro Wpc! Sono le due moltiplicazioni con fattori parziali e risultato scritte con i led una sopra l'altra. Occorre trovare i due fattori della prima e i due della seconda.

In genere non mi riescono velocemente. Perdo un po' di tempo di preparazione, ma intravedo qualcosa. Non c'è tempo però. C'è un bivio: mi butto su una strada e mollo l'altra, si sa mai. La strada sembra buona, ma iniziano a chiamare per consegnare. Non so se ce la faccio.

Mentre molti iniziano ad alzarsi continuo a provare numeri diversi e a far conti. Eccolo! Trovata una. Vediamo l'altra. Corro più che posso: per fortuna riesco a mantenere la concentrazione e, sul filo di lana, trovo anche un'idea della seconda. È solo un'idea perché non faccio nemmeno in tempo a fare il prodotto. La scrivo, spero che ce ne sia una sola e mi alzo per consegnare quando...

* il maledetto sesto

...mi viene in mente di prendere una matita e buttare giù qualche numero nelle palline, altro che metodo sistematico. Una sequenza mi piace e la scrivo, non va. Una simile però ci sta bene. Sono in piedi e sto scrivendo in matita direttamente sul foglio risposte! Non c'è tempo per null'altro, e tra l'altro non so se accettano soluzioni in matita.

Ormai quasi tutti hanno consegnato, ma... pazzesco davvero, mi accorgo che è la sequenza giusta e gli altri numeri vanno dentro (quasi) in modo forzato. Corro verso l'arbitro e consegno tra gli ultimi. Volevo sdraiarmi per terra

* la verifica

Sono piuttosto felice perché almeno sono riuscito a rispondere a tutto, come ieri, ma le incognite sono troppissime. Prima di uscire per la verifica confronto un paio di problemi e mi casca il mondo: il nono (quello su cui ero sicuro) è sbagliato. Penso "figuriamoci gli altri". Inoltre mi accorgo da solo (dalla brutta) che la sequenza del decimo non ha senso. Sono demoralizzato.

* il fattore C

All'uscita succede l'incredibile. Nando (il coach) ha i risultati e li confrontiamo: i primi passano lisci (ci mancherebbe), ma sia la moltiplicazione (che ho trovato all'ultimo minuto) che quello delle palline (che ho scritto in matita oltre il termine) sono giusti!!! E per entrambi la soluzione è unica, dunque punto pieno. Non sto più nella pelle: ho sfiorato l'en-plein (il nono l'ho sbagliato per un soffio).

La chicca, e da qui il fattore C, è che la sequenza del decimo era sbagliata, ma il problema chiedeva solo la sua lunghezza, e la lunghezza di quella giusta era esattamente la stessa. Mi viene da nascondermi, ma sono contentissimo.

* i risultati

(…) Bene, sono arrivato secondo. Posizione assolutamente insperata, davvero.

E noi siamo contenti e per niente sorpresi da ***BraMo logicar***. ***Nicola*** ci segnala:

Spero di essere arrivato "uno" nel segnalarvi che in edicola ho trovato questa iniziativa: http://www.rbaitalia.it/sfide/piano.html La prima uscita è decisamente conveniente, a 5 euro, le successive sono a 10 euro. Da quanto ho capito sono riedizioni (ben curate, copertina rigida, rilegatura) di classici. Ma si sa, la matematica non invecchia…

Verissimo. Ancora un momento prima di passare alle soluzioni per segnalarvi ancora una volta il sito di Polymath (www2.polito.it/didattica/polymath), che in settembre ha parlato di noi, ma non è per questo che li citiamo, è solo che sono bravissimi e parlano veramente di matematica meglio di noi.

4.1 [115]

4.1.1 Come (non) decidere le ferie

Quando stavamo per disperare di aver solleticato il vostro interesse sperimentale a tirare frecciatine su un mappamondo, si è fatto vivo ***Agapetòs*** con la sua proposta:

Faccio due premesse:

1) Tralascio le situazioni in cui tre o più punti giacciono sullo stesso cerchio massimo, in quanto queste eventualità hanno probabilità zero, ovvero, per dirla á-la-Lebesgue, non avvengono "quasi mai", come è facile vedere (certo che in questo caso il quasi Lebesguiano è ben un eufemismo!); per lo stesso motivo tralascio anche il caso in cui tra i punti sulla sfera ve ne siano due antipodali.

2) Se la divisione in due emisferi fa sì che due punti facciano parte del cerchio massimo di confine, li considererò facenti parti in senso stretto di uno dei due emisferi, in quanto posso sempre spostare di un "cicinino" il cerchio massimo e farli rientrare in senso stretto senza perdere gli altri (a parte casi quasi-impossibili, vedi punto 1).

Dunque, supponiamo di avere tre punti su una sfera. Questi, com'è ovvio, identificano un triangolo sferico. È facile convincersi che se aggiungiamo un quarto punto sarà possibile trovare un emisfero che li comprenda tutti e quattro se e solo se il quarto punto non giace nel triangolo che ha per vertici i punti antipodali dei tre punti di partenza (lo chiamo "antitriangolo"). Infatti i tre lati del triangolo individuano tre cerchi massimi e tre emisferi (quelli comprendenti i tre punti di partenza, vedi nota 2) la cui unione lascia scoperto solo l'antitriangolo.

Qual è la probabilità che il quarto punto non stia nell'antitriangolo? È una delle poche probabilità che sono (forse) riuscito a calcolare. Visto che la distribuzione dei punti è proporzionale all'area, la probabilità è

1 – (area media dell'antitriangolo)/(area della sfera).

Com'è noto, in un triangolo sferico l'area è data da r^2 per l'eccesso sferico:

$$S=(\alpha+\beta+\gamma-\pi)\cdot r^2.$$

Già, ma quanto vale mediamente la somma degli angoli? Prendiamo il sistema di riferimento della sfera in modo che il primo punto A sia al polo nord ed il secondo punto B lungo il meridiano di Greenwich. La misura dell'angolo BAC è ovviamente il modulo della longitudine di C, e poiché le longitudini devono essere distribuite uniformemente (se lo sono le aree), la misura di BAC è mediamente 90° cioè $\pi/2$. Poiché i tre angoli hanno la stessa distribuzione la media di α, β e γ è $\pi/2$ e quindi la media di S è $1/2\ \pi\ r^2$, quindi la probabilità che esista un emisfero comprendente i quattro punti è 7/8 (a meno che non ci sia una falla nel mio ragionamento).

Se abbiamo cinque punti, non sono riuscito a calcolare la probabilità che stiano in uno stesso emisfero, però posso calcolare quella per cui quattro punti vi stiano, ed è il 100%. Infatti: disponiamo i primi tre punti; supponiamo che gli altri due stiano nell'antitriangolo (altrimenti avremmo già quattro punti in uno stesso emisfero); uniamo questi due punti e prolunghiamo il cerchio massimo fino ad tagliare in due il triangolo che ha come vertici i primi tre punti. A parte casi quasi-impossibili, come detto, avremo che questo cerchio massimo divide la sfera in due emisferi uno dei quali comprende uno e l'altro due dei primi tre punti; gli emisferi comprendono quindi rispettivamente tre e quattro punti. Esiste quindi sempre un emisfero che comprende quattro su cinque punti dati.

Per estensione del ragionamento è facile dimostrare che dati sette punti ve ne sono almeno cinque in uno stesso emisfero, dati nove almeno sei, ed in generale dati n punti su una sfera, almeno 1+Soffitto(n/2) stanno su uno stesso emisfero. Ad esempio con sette punti, ne abbiamo senz'altro quattro nello stesso emisfero e supponiamo che gli altri tre siano stavolta nell'antiquadrilatero. Consideriamo i cerchi massimi passanti per due dei tre punti e tra gli emisferi da essi determinati consideriamo quelli comprendenti i tre punti nell'antiquadrilatero. Di questi emisferi almeno uno comprenderà due punti del quadrilatero (l'unione dei tre emisferi comprende i primi quattro punti), ed abbiamo quindi cinque punti nello stesso emisfero. Se i primi quattro punti sono disposti in modo che uno è interno al triangolo formato dagli altri tre, allora è possibile prendere il punto interno, due dei punti esterni ed uno degli altri tre in modo che la figura convessa individuata sia un quadrilatero. Per convincersene bisogna fare un po' di disegni.

Se abbiamo nove punti, avremo cinque punti "sicuri" ed un antipentagono (o antiquadrilatero o antitriangolo, come detto il ragionamento rimane valido) in cui stanno gli altri quattro. Avremo sicuramente un emisfero che comprende questi quattro punti e due del pentagono. Anche qui sarà possibile che la figura convessa delimitata dai primi cinque punti non sia un pentagono, ma penso che anche in questo caso si possano opportunamente scegliere cinque punti che formano un pentagono complesso.

Le domande erano così semplici, ma non altrettanto la soluzione...

Il Capo lo conoscete ormai, quasi tutti i suoi quesiti sono così. Noi siamo pazienti, e ci aspettiamo ancora contributi su questo problema.

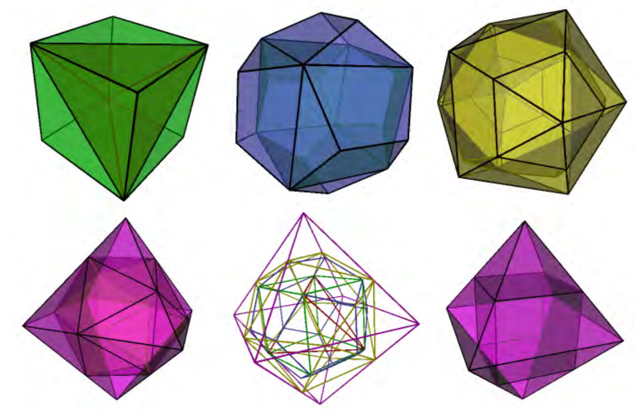
4.2 [116]

4.2.1 Keplero era uno sprecone / In qualunque dimensione

Diciamocelo: il problema era sì difficile, ma soprattutto ha stimolato nei lettori i ragionamenti più vari, più che rispondere alla domanda posta. Il migliore di tutti in questo campo è stato ***Br1***, che ci inviato cinquanta pagine fitte di disegni e spiegazioni che, sfortunatamente, non possiamo pubblicare qui per ragioni di spazio. Ci siamo però assicurati il permesso di sistemare il suo articolo in bella vista nel nostro Bookshelf (in bella vista sarà presto, per adesso è un po' nascosto), vi invitiamo a scaricarvi il documento e leggervelo con calma: www.rudimathematici.com/Bookshelf/Inscrizioni.pdf.

Poi ci ha scritto ***Claudio Rockini***, anche lui interessato ad un altro problema...

> Lo so che questo non era il problema, ma i poliedri mi piacciono molto.
>
> Supponendo che la regola del gioco fosse il raggio della sfera circoscritta, ho messo il tetraedro dentro il cubo, che è dentro il dodecaedro, che è dentro l'icosaedro, che è dentro l'ottaedro. Facendo così ho ottenuto un raggio del tetra che è poco più di 0.62 volte quello dell'otta. Il tetra, il cubo e il dode hanno lo stesso raggio e vertici in comune; due facce pentagonali opposte del dode sono poggiate ciascuna sui 5 spigoli che escono da due vertici opposti dell'icosa; mentre alcune coppie di facce parallele di quest'ultimo coincidono con coppie di facce parallele dell'otta (attenzione: negli ultimi due casi i vertici del poliedro interno NON sono a metà dello spigolo di quello esterno).



8 *La figura di **Claudio**.*

> Nella figura ci sono i singoli passaggi e gli spigoli della posizione globale.
>
> Non so dimostrare che sia l'ottimo, ma penso che nessuno mi batterà facilmente. Curiosamente, se andate in ordine di numero di facce (icosa, dodeca, otta, cubo, tetra), non otterrete un tetraedro più grande di 0.573: quello che vi frega è il cubo dentro l'otta (figura a destra in basso), che al massimo è sqrt(2)/2.
>
> La peggiore sequenza possibile comincia sempre con il nostro otta, con dentro il cubo, con dentro l'icosa, con dentro il tetra, con dentro il dodeca: con questa sequenza non otterete un dodeca più grande di 0.15 volte l'otta.

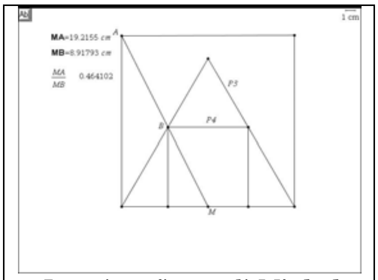
A parte le sigle, veramente interessante.

Michele, solutore ormai di lunga data, ha invece preso proprio in mano il problema:

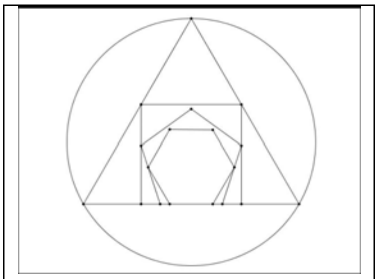
> Chiamo P_{n+1} il poligono regolare di n+1 lati di area massima contenuto nel poligono regolare P_n di n. Butto lì una congettura, che saprei dimostrare solo per $n=3$: un lato di P_{n+1} è sempre centrato su un lato di P_n (cioè hanno lo stesso punto medio M).

Allora non è difficile costruire P_4, P_5, P_6 a partire da P_3. Per esempio per costruire P_4 è sufficiente costruire un quadrato qualsiasi, per esempio con lato pari al lato di P_3, e poi eseguire l'omotetia di centro M e rapporto MB/MA (vedi figura 9).

Si ottiene come rapporto delle aree: $\frac{A_3}{A_4}=1+\frac{7}{12}\sqrt{3}\approx$ 2.01.



9 *La prima figura di* ***Michele****.*



10 *La 2a figura di* ***Michele****.*

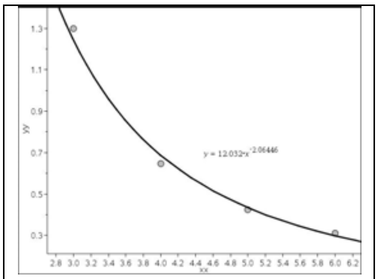
In modo analogo si ottengono P_5 e P_6 (figura 10).

n	An
∞	3.14159
3	1.29904
4	0.646171
5	0.42464
6	0.310439

Approssimiamo ora le aree A_n dei poligoni regolari di n lati così ottenuti, avendo posto uguale a 1 il raggio della circonferenza P_∞.

I punti (n, A_n) sembrano ragionevolmente disposti su una funzione potenza $f(x)=\frac{a}{x^k}$.

Se calcoliamo la funzione potenza di regressione tra n e $A(n)$ otteniamo $f(x)\approx\frac{12.032}{x^{2.06446}}$ (figura 11).



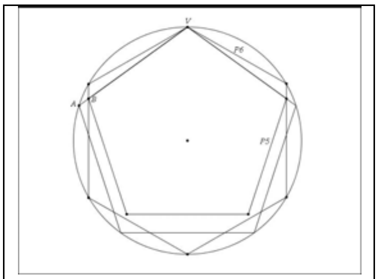
11 *La 3a figura di* ***Michele****.*

Per rispondere all'esplicito quesito, e prendendo come unità di misura il raggio della circonferenza: *l'esagono misura circa 0.31.*

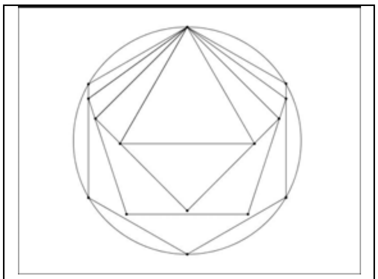
Con buona approssimazione A_n decresce come $\frac{1}{n^2}$.

Non ho calcolato i valori simbolici, ma tutto sommato non mi interessano. Ecco un bel problema metodologico che varrebbe la pena porre nell'insegnamento della matematica: in che senso posso dire di aver risolto il problema?

Per il cammino inverso invece pare che il poligono regolare P_{n-1} di area massima contenuto in P_n abbia in comune con P_n un vertice V.



12 *La 4a figura di* ***Michele****.*



13 *La 5a figura di* ***Michele****.*

Analogamente a quanto abbiamo già fatto: dato P_6, si costruisce un pentagono regolare qualsiasi (per esempio quello che ha lo stesso centro) che abbia in comune un vertice con P_6, e si esegue su questo l'omotetia di centro V e rapporto VA/VB (figura 12), ottenendo così P_5.

Analogamente si costruisce P_4 e P_3 *[figura 13 qui di lato – ci scusiamo con* ***Michele*** *per l'impaginazione un po' arzigogolata, che è tutta colpa nostra, ma facciamo un po' quello che possiamo... (AR)].*

n	An
∞	3.14159
3	0.605913
4	1.30556
5	1.97149
6	2.59808

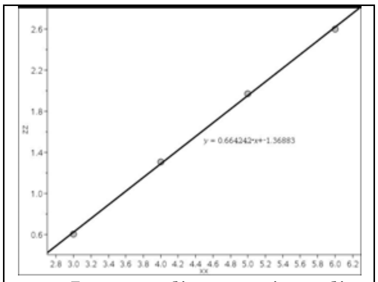
La tabella delle aree ora è qui di fianco.

I punti (n, A_n) sembrano disporsi linearmente.

La retta di regressione è

$g(x) = 0.664242\ x - 1.36883$.

Il triangolo misura circa 0.606.



14 *La retta di regressione di* ***Michele***.

Come sempre, la parte più interessante della soluzione di un problema è proprio il metodo e tutte le possibili conseguenze della sua applicazione, per cui ci complimentiamo per questo risultato.

Ci resta ancora da citare ***Andrea***, che è alla sua prima soluzione e pubblichiamo volentieri i suoi ragionamenti:

> Si parte dal triangolo. L’altezza del triangolo è ¾ del diametro, quindi con la formula inversa di h=l/2 √3 si ha l=3/2√3. Poi il quadrato mi ha dato qualche problema. Supponiamo che il quadrato più grande possibile abbia un lato facente parte di un lato del triangolo come in figura. Il lato del quadrato non può essere uguale a meta del lato del triangolo, perché se così fosse si potrebbe dimostrare che il lato del quadrato dev’essere contemporaneamente uguale a metà del lato e a metà dell’altezza, e siccome un triangolo equilatero non ha l’altezza ed il lato congruenti allora il lato del quadrato non può essere ½ del lato del triangolo. Ho provato a fare questo ragionamento: all’angolo in C corrisponde il segmento CX come all’angolo GZH corrisponde il segmento ZX (C:CX=GZH:ZX). Siccome l’angolo in C è di 60° e l’angolo GZH è di 45° anche i relativi segmenti avranno lo stesso rapporto, quindi si può impostare l’equazione x+x+1/4x=3/4, ne segue che x=1/3. Facendo ¾-1/3 si ha che il lato del quadrato è uguale a 5/12 dell’altezza. Non mi piace molto questo ragionamento anche se alla fine il lato del quadrato viene poco più della metà dell’altezza, ma intanto è quello che mi è venuto in testa…poi c’è il pentagono. Secondo me il pentagono ha un’area maggiore quando OY fa parte di una delle diagonali del quadrato. Per trovare quanto vale il lato del pentagono ho usato un ragionamento simile a quello di prima, vale a dire che la somma degli angoli (NIH;JIE;IJE;JLF—LJF)*2 (che vale 432°):5/3=45:x. Risolvendo la proporzione si ha x=25/144 (tra parentesi, il “—LJF” è dato dal fatto che opposto a quest’angolo c’è il segmento LF che bisogna eliminare insieme al segmento FK per avere come valore il perimetro del quadrato). Tornando al problema, NI sarà uguale a √1250/20736, più o meno ¼ (0,24552…). Anche l’esagono non era proprio facile da immaginare, e quindi sono riuscito a calcolare il lato solo ammettendo VP⊥NI o comunque ammettendo che uno dei lati dei triangoli interni all’esagono con vertice in V sia perpendicolare a uno dei lati del pentagono. In questo caso si viene a formare il triangolo NWP (con il P della figura facente parte del lato del pentagono) che è la metà di un triangolo equilatero, quindi il lato dell’esagono è uguale a NI/2*√3. Ammettendo per semplicità NI=1/4 ne segue che VP=√3/8. Con la solita formula h=l/2√3 si calcola l’apotema, che quindi è uguale a 3/16. L’area dell’esagono è uguale a 3*√3/8*3/16, quindi a 9√3/128 tenendo conto dell’approssimazione a ¼ del lato del pentagono.

Ci piace soprattutto lo spirito battagliero e speriamo che continui così.

4.2.2 Numeri Simpatici

Questo problema ha *incontrato le simpatie* di molti. ***Alexphys***, per esempio, non aveva tempo di trovarne una soluzione, così ci ha scritto poche righe:

Il punto è il seguente: TUTTI i numeri naturali sono simpatici! Perché preso un intero a piacere esiste sempre una sua decomposizione in numeri primi, quindi essendo i numeri primi dei razionali, qualsiasi numero intero può essere espresso sotto forma di prodotto di razionali e quindi è un numero simpatico!

Chiaramente si tratta di una soluzione banale!!! Sicuramente ciò che è interessante è mostrare che l'insieme necessario di razionali attraverso cui rappresentare un intero non sia appunto quello banale dei primi.

Lo ringraziamo comunque (ha dimenticato la parte della somma, ma andava di corsa) e gli facciamo gli auguri per il suo lavoro con la tesi. ***Cid***, questo mese avversato da problemi di ferraglia (HW e SW) ha mandato una soluzione veloce sulla stessa linea:

Dato un qualsiasi numero razionale N, abbiamo che il seguente insieme di numeri razionali: $(-1, -1, 1, 1, N)$ è tale che la somma di questi cinque numeri è uguale a N, ed il prodotto di questi cinque numeri è uguale a N.

Di conseguenza, (ritengo sia giusto dedurne che) tutti i numeri siano simpatici.

Una soluzione più ragionata ci giunge dal ***Dr Croccodillus***, a cui diamo il benvenuto:

Limitandosi ai numeri naturali, Rudy pensava di definire numeri simpatici quelli per cui sia possibile trovare un insieme di numeri razionali tali che la somma e il prodotto di questi numeri siano pari al numero dato.

Quindi, stabilito un numero a, occorre trovare due numeri razionali la cui somma e il cui prodotto siano esattamente a.

Si tratta perciò della risoluzione di un sistema simmetrico:

$$X+Y=a$$

$$XY=a$$

il quale può essere risolto applicando la formula:

$$t^2 - at + a = 0$$

$$t_1 = [a + \mathrm{sqrt}(a^2 - 4a)]/2$$

$$t_2 = [a - \mathrm{sqrt}(a^2 - 4a)]/2$$

Affinché esistano soluzioni in R, il discriminante (delta) deve necessariamente essere maggiore o uguale a 0, quindi $a^2 - 4a \geq 0$, da cui si ottiene $a \leq 0$ u $a \geq 4$, quindi l'insieme di valori accettabili è: $(-\infty, 0]$ U $[4, +\infty)$.

Sostituendo uno degli infiniti valori appartenenti all'intervallo si ottengono le radici t_1 e t_2 le quali sono soluzioni del sistema simmetrico.

Per esempio, due valori per cui è facile verificare il sistema sono 0 e 2, ma giusto per sfizio si può provare con un paio di valori meno felici:

- con $a= -1$ si ottengono le radici $t_1= (-1-\mathrm{sqrt}(5))/2$ e $t_2=(-1+\mathrm{sqrt}(5))/2$, le quali sono i valori da assegnare ad X e Y del sistema affinché sia verificato. (sol. –1)
- con $a= 5$ si ottengono le radici $t_1= (5-\mathrm{sqrt}(5))/2$ e $t_2=(5+\mathrm{sqrt}(5))/2$, le quali sono i valori da assegnare ad X e Y del sistema affinché sia verificato. (sol. 5).

A Rudy questi ultimi esempi non sono andati giù, forse perché vedere una radice in un numero *razionale* non fa piacere nemmeno ai non pitagorici. Avrebbe preferito una bella classificazione dei numeri, ma questo è tutto quello che ci è arrivato...

Per il momento ci aggiorniamo, buon ottobre!

5. Quick & Dirty

Rudy ha preso un certo numero n di monetine molto oneste, e le ha divise in due parti; siccome erano dispari, a Doc ne è capitata una in più. Tutti e due tirano tutte le proprie monetine, e poi contano ciascuno le proprie "teste", e vince chi ne ha di più. Quali sono le probabilità che Doc vinca?

6. Pagina 46

Consideriamo la parte decimale dei 1001 numeri

$$0\alpha, 1\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots, 1000\alpha.$$

In questa sequenza abbiamo 1001 numeri positivi in forma decimale, tutti minori di 1.

Se suddividiamo l'intervallo [0,1[dei numeri reali in 1000 intervalli (chiusi a sinistra, aperti a destra), possiamo analizzare come i punti della sequenza indicata siano distribuiti all'interno di questi intervalli.

Essendoci 1000 intervalli e 1001 punti, almeno uno degli intervalli conterrà due (o più) punti, ossia, esisteranno due distinti numeri p e q entrambi minori di 1000 tali che $|p\alpha - q\alpha| < \frac{1}{1000}$.

Supponiamo $p > q$ e consideriamo il numero $(p-q)\alpha = p\alpha - q\alpha$.

Possiamo definire $p\alpha = P + d_1$ e $q\alpha = Q + d_2$, dove P e Q sono due interi e d_1 e d_2 sono le parti decimali di $p\alpha$ e $q\alpha$. Allora, segue che $(p-q)\alpha = (P-Q) + d_2 - d_1$ differisce dall'intero $P-Q$ per meno di $1/1000$; ossia, la frazione $\frac{P-Q}{p-q}$ differisce da α per meno di $0{,}001\left(\frac{1}{p-q}\right)$.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Roba che cola

Siamo d'accordo con voi: il titolo è abbastanza disgustoso, ma "*percolazione*" ci sembrava ancora peggio. Anche considerato che Rudy è un grande estimatore del caffé americano (fatto con il metodo detto *percolation*), il termine è decisamente brutto; comunque, vogliamo parlare proprio di quello.

Bene, cerchiamo di rendere la cosa meno disgustosa possibile: supponiamo di prendere un materiale ragionevolmente poroso (insomma, "poroso ma non troppo", maggior precisione in seguito) e di immergerlo nell'acqua; quali sono le probabilità che l'acqua riesca a filtrare (giustappunto, *percolare*) sino al centro?

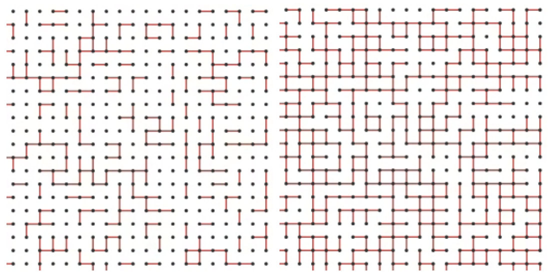
Prima che cominciate ad immaginarvi dei labirinti tridimensionali degni di *Dungeons & Dragons*, prendiamola più bassa: iniziamo da due dimensioni, ovvero da un *reticolo quadrato* di dimensione "ragionevole", dove la ragionevolezza qui serve solo ad evitare l'infinito; è evidente che, se piazzate un pietrone poroso di taglia infinita in acqua, ben difficilmente questa raggiungerà mai il centro; in realtà questa non è una condizione molto restrittiva; se supponiamo che i pori siano di dimensioni infinitesime rispetto al pietrone (e quindi, nel nostro reticolo, la griglia dei punti sia molto densa), otteniamo una simulazione più che soddisfacente.

A questo punto, se siete pigri come Rudy (o se vi piacciono talmente le stesse cose da averci basato sopra la tesi di laurea), la prima frase che vi viene in mente è: "…evvai di MonteCarlo!". L'idea in effetti è buona, può generare graziosissimi *screen saver*[14], ma i meno rudi matematici la considerano decisamente insoddisfacente.

Comunque, anche qui si possono avere delle idee graziose: tanto per cominciare, partire da tutti i punti del bordo del pietrone bidimensionale è scomodissimo; molto più semplice partire dal centro e vedete se riuscite a cavarci qualcosa, ossia ad uscire da quello che, a tutti gli effetti, ormai è un labirinto. Se decidete di fare delle simulazioni, quindi, tutto viene molto più grazioso se prendete un reticolo di lato dispari; in questo modo, partire dal centro diventa molto più facile.

Sul metodo costruttivo non ci pronunciamo molto, anche perché è semplice: dovete stabilire una probabilità p che il punto del reticolo che state considerando sia connesso ad un punto adiacente (attenzione che i "punti adiacenti" sono quelli ortogonali, vietate le diagonali, quindi un punto ha quattro punti adiacenti) e generare il connessione_sì/connessione_no con *ognuno* dei quattro punti secondo la probabilità che avete definito prima; quindi, dovete fare quattro calcoli, uno per punto.

Giusto per farvi un esempio, abbiamo generato due reticoli: uno con p=0.3, l'altro con p=0.6; non siamo stati a cercare i percorsi, ma se partiamo dal centro e vogliamo uscirne fuori, così a occhio preferiamo il secondo.



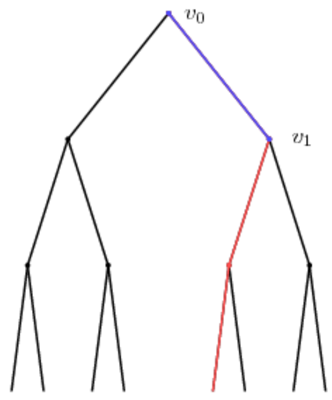
15 *Dal secondo si scappa*

Anche per i più refrattari al calcolo delle probabilità (*Ciao, Alice!*) dovrebbe comunque essere evidente che con p=0 non ne uscirete mai, mentre con p=1 dovreste farcela senza problemi.

[14] Questo non ve lo chiediamo neanche: sarebbe l'*ottavo*, e non ne avete fatto nessuno. Ma cosa fate, in ufficio? Lavorerete mica, per caso? [*Non ci crederete, ma per ogni disegno che gli piace il Capo richiede uno screen saver personalizzato: il primo l'ha proposto con i cani che si rincorrevano la coda nello storico RM001. Meno male che i lettori non sono così condiscendenti, o ci troveremmo la Redazione virtuale invasa (AR)*]

Una volta che si siano stabiliti gli estremi, in matematica il passo successivo consiste nel trovare la linea di demarcazione; ossia, *qual è il valore che (non) mi fa uscire?* La cosa non è semplice, quindi meglio se la prendiamo con calma. E con meno probabilità possibile.

Per semplificarci la vita, prendiamo un esempio "meno-che-bidimensionale": nella fattispecie, pensiamo di essere nella radice di un albero binario suppergiù infinito e di volerne uscire, noto il fatto che ad ogni incrocio esista una certa probabilità che le strade siano accessibili; il problema continua ad essere l'inverso di quello originale: non ci chiediamo se riusciamo a "bagnare il centro", ma se si riesca ad uscire dal centro.



16 *L'albero della fuga*

Trovate il disegno nella figura a fianco; per adesso, limitatevi a considerare l'albero. Il resto ci servirà dopo.

Se p è la probabilità che ogni ramo sia aperto, quello che vogliamo trovare è la probabilità $\vartheta(p)$ che esista un cammino (infinito) libero sin fuori dal pietrone; tanto per cominciare, definiamo P_n come la probabilità che ci sia un cammino percorribile dal punto v_0 sino al vertice n.

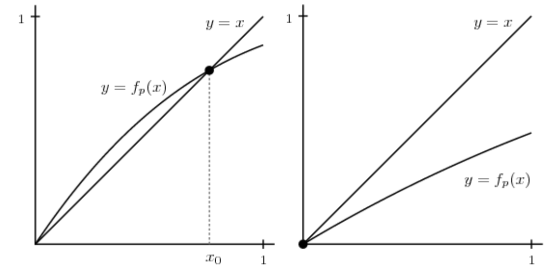
Se passiamo da un dato vertice v_1 (forse) legato a v_0 in modo diretto, possiamo definire la probabilità che esista un cammino da v_0 sino ad un vertice n livelli più in basso come pari a pP_{n-1}, in cui abbiamo esplicitato la probabilità che il vertice iniziale sia direttamente legato al vertice successivo del cammino; si vede quindi facilmente che l'*assenza* di cammino ha una probabilità $1-pP_{n-1}$.

È abbastanza evidente che qualunque cammino da v_0 ad un qualsiasi v_n deve passare attraverso i nodi che sono figli diretti di v_0; quindi, la probabilità che *non* ci sia un cammino aperto tra v_0 e un vertice n risulta essere $(1-pP_{n-1})^2$. Possiamo allora ricavare

$$P_n = 1-(1-pP_{n-1})^2, \qquad \textbf{[1]}$$

che ci permette di calcolare la probabilità di uscire dal pietrone.

Cerchiamo adesso di rendere la cosa interessante anche per Alice, ossia di togliere dai piedi qualche "p". Definiamo la funzione $f_p(x) = 1-(1-px)^2$, della quale dovrebbe esservi immediata la relazione con la **[1]**, e tracciamone un paio di esempi; per sceglierci gli esempi (e questa è la *buona idea* che ci serve), ci basiamo sul fatto che la *derivata prima* $f'_p(0) = 2p$ sia maggiore o minore di uno.



17 *Un paio di casi*

Si vede facilmente che oltre a $x = 0$ nel primo caso, che rappresenta la situazione $2p > 1$, abbiamo un altro *punto fisso*, legato al valore:

$$x_0 = \frac{2}{p^2}\left(p - \frac{1}{2}\right),$$

che deve essere maggiore di zero.

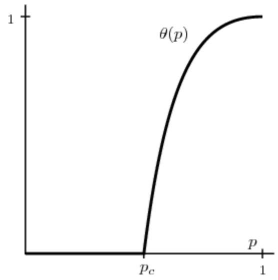
Dal primo grafico si vede anche che in questo caso oltre il punto fisso la funzione assume valori minori del valore di *x* corrispondente, ossia $x_0 < f_p(x) < x$; noto che $P_0 = 1$ (ossia, più pragmaticamente, che se l'acqua parte da un dato punto quel punto è sicuramente bagnato), abbiamo le equazioni:

$$\begin{aligned} &x_0 < P_1 = f_p(P_0) < P_0 = 1; \\ &x_1 < P_2 = f_p(P_1) < P_1; \\ &\ldots \end{aligned}$$

Da cui segue che, se $p > 1/2$, la probabilità di esistenza del cammino che ci porta fuori dal pietrone risulta:

$$\vartheta(p) = \lim_{n\to\infty} P_n = x_0 = \frac{2}{p^2}\left(p - \frac{1}{2}\right),$$

Che mostra essere espressione piuttosto balorda; infatti se tracciamo il grafico, vediamo che esiste un valore *critico* p_c al di sotto del quale non si esce dal pietrone, mentre al di sopra abbiamo qualche speranza; il grafico lo trovate nella figura a fianco.



18 *Probabilità critica*

Ora, a qualcuno di voi potrebbe venire il dubbio che, più che uscire da un labirinto, qui si stia cercando di salire in cima all'albero; in effetti, i calcoli sull'albero binario fatti sinora sono semplici, mentre quelli che utilizzano anche solo un semplice reticolo quadrato sono più complessi.

Se provate per diversi livelli di probabilità di connessione *p* a generare qualche reticolo dal quale scappare, dovrebbe essere piuttosto evidente che tendono a formarsi dei "blocchi" (*cluster*, se preferite), che non sono altro che un insieme di punti collegati tra loro. All'aumentare della probabilità di connessione aumenteranno le dimensioni dei cluster (per il semplice motivo che è più probabile legare due punti); il bello è che *Meshnikov* ha trovato un interessante risultato.

Indichiamo con $S_{x,n}$ l'evento che a partire da un dato punto *x* sia possibile raggiungere un dato punto distante *n* da *x*; qui si parla di "evento" in quanto intendiamo calcolare la probabilità che questo cammino ci sia. Nella sua formulazione più brutale, il Teorema di *Meshnikov* stabilisce che *per un dato* $p < p_c$*, esiste una costante* a *per cui si ha:*

$$P(S_{x,n}) \le e^{-an};$$

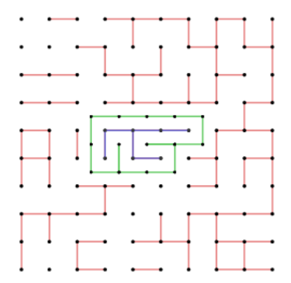
Ossia (ancora più brutalmente), la probabilità di avere un cammino aperto di lunghezza *n* decresce esponenzialmente all'aumentare di *n*.

Se ci limitiamo ai reticoli quadrati, alcune certezze si riescono a raggiungere, come hanno dimostrato per esempio *Harris* e *Kesten*. La dimostrazione originale si svolge in una ricerca tra *annuli* (sarebbe, se ci passate il termine, un cerchio quadrato fatto con otto quadrati uguali) e tassellature semiregolari formate da ottagoni, esagoni e quadrati[15]; la linea principale della dimostrazione, comunque, si snoda tra concetti abbastanza semplici, e proviamo a schematizzarla.

Tanto per cominciare, prima di fare i percorsi tra un punto e l'altro secondo la probabilità decisa, definite il *duale* del reticolo; si tratta semplicemente di spostare il reticolo dato di "mezzo quadretto" in orizzontale e altrettanto in verticale; in pratica, ottenete un punto del reticolo duale al centro di ogni quadratino definito dal reticolo originale e che continua ad essere un reticolo quadrato; in questo senso, si dice che il reticolo quadrato è *autoduale*.

Ora tracciate i lati del reticolo (sarebbero le linee che uniscono due punti e definiscono dove può passare l'acqua) in modo tale che abbia una certa probabilità p di uscire; non solo ma, ove possibile, tracciate *tutti* i lati del reticolo duale tali che non intersechino i lati del reticolo originale.

A questo punto, i Nostri fanno una discreta fatica nel dimostrare un bellissimo teorema: *qualsiasi cluster isolato del reticolo originale è all'interno di un percorso chiuso disegnato nel reticolo duale*; a noi questo punto è piaciuto molto, tant'è che vi diamo un disegno; il cluster isolato è in blu, il percorso chiuso sul duale è in verde e il resto dei percorsi disponibili sul reticolo originale sono in rosso.



19 *…non si scappa!*

Bene, dopo aver fatto arrabbiare Alice con le probabilità, il nostro prossimo compito è semplice: se i due reticoli sono autoduali e uno dei due ha "probabilità di fuga" (ce lo siamo appena inventato) p, il reticolo duale avrà probabilità $1-p$; siccome uno dei due (probabilisticamente parlando) deve *portarmi fuori*, per "evidenti" ragioni di simmetria il valore critico deve essere a metà tra p e $1-p$, e quindi deve valere ½. Abbiamo virgolettato le "evidenti" in quanto questa volta ha ragione Doc: le ragioni sono tutt'altro che evidenti, tant'è che su reticoli diversi ci sta ancora lavorando un mucchio di gente. Il sunnominato *Kestel*, ad esempio, è riuscito a dimostrare che se prendiamo un reticolo *esagonale* cominciano i guai, infatti in questo caso potete considerare *due* tipi di percolazione. Tanto per cominciare, pensate ad una tassellatura di esagoni; ciascuno "tocca" altri sei esagoni e definiamo la *permeabilità* (ossia il fatto che passi o no l'acqua) come il fatto che un lato dell'esagono originale sia o no permeabile all'acqua; se l'acqua passa, riempie anche l'esagono avente il lato in comune (che avrà qualche lato permeabile, eccetera eccetera eccetera…). Buone notizie, in questo caso: la probabilità critica (Kestel) vale sempre ½.

Le cattive notizie cominciano quando considerate *l'altro* reticolo, sullo stesso disegno: invece di annegare gli esagoni, partite dall'idea che l'acqua possa muoversi solo sui *lati* degli esagoni; in pratica, sono i vertici degli esagoni (dove si incontrano tre lati di tre esagoni diversi) che diventano i punti nei quali decido se uno dei lati uscenti è permeabile o no; in questo caso, la probabilità critica diventa più complessa, avendo il valore $p_c = 2\sin 18^\circ \approx 0.347$; l'espressione esatta ve la diamo nel caso decidiate di provarci.

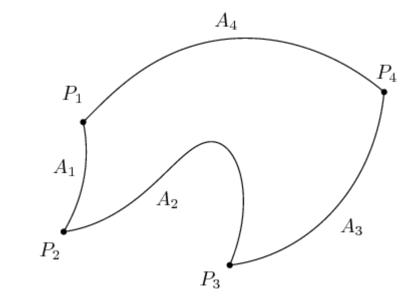
Dicevamo poco sopra che i matematici hanno fatto svariati tentativi basandosi sui diversi reticoli: è intuitivo che la probabilità critica dipenda dalle caratteristiche geometriche del grafico che stiamo considerando, quindi alcuni hanno cominciato a considerare cosa succede alle probabilità di percolazione quando si lavori sulle *mappe conformi*.

Ricordiamo, per quel 99,8% delle persone che non se lo ricordano, che le mappe conformi sono quelle funzioni che, applicate ad una regione del piano, danno come risultato una

[15] Dovreste conoscerle: di tassellature semiregolari abbiamo parlato tempo fa, e avevamo trovato un paio di errori nel buon vecchio Ghersi. Il tutto è raccolto in un introvabile best-seller di matematica ricreativa dal significativo titolo "Rudi Simmetrie", ma anche negli archivi di RM.

regione in cui le *distanze* sono distorte, ma vengono conservati gli *angoli*. Per fare un esempio (tutt'altro che) semplice, le funzioni analitiche sul piano complesso sono conformi.

Supponiamo di avere una regione D definita da quattro curve (cerchiamo di stare sul semplice: non si intersecano, sono continue, gli "angoli" dove comincia una e finisce l'altra sono ben definiti… Insomma, una cosa come quella del disegno qui di fianco).



20 *Una "Regione Ragionevole"*

Possiamo allora considerare un reticolo L di un qualche tipo all'interno della regione e una probabilità p che i lati dei poligoni del reticolo siano permeabili[16]. A questo punto, possiamo definire $P(D_4, L, p)$ come la probabilità che, ad esempio, esista un cammino percorribile tra i lati A_1 e A_3 della figura. In ultimo, teniamoci anche la possibilità di eseguire uno *scaling* del reticolo passando da un qualche L ad un reticolo δL, dove riduciamo i lati del poligono base del reticolo di un fattore δ.

Nella speranza che anche a voi come a noi[17] piacciano le denominazioni piuttosto esoteriche e fumose, vi diciamo che a seguito della *Congettura di Aizenman-Langland-Puilot e Saint-Aubin* è stata proposta la *Formula di Cardy*. No, fermi, stiamo scherzando.

La Congettura (ALP&SA) e la Formula si esprimono, di solito, in questo modo:

Per qualsiasi reticolo L "ragionevole", il limite:

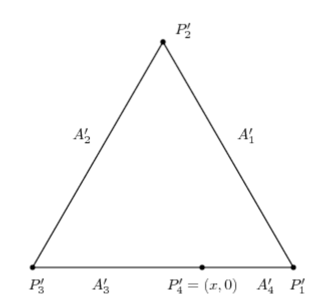
$$\lim_{\delta \to 0} P(D_4, \delta L, p_c) = P(D_4)$$

Esiste, assume valori nell'intervallo aperto $]0,1[$ e non dipende da L.

Dove "ragionevole" significa (come al solito) che non andate a cercare grane con casi particolari.

Come ultima cosa, cerchiamo di capire cosa c'entri una Formula con una Congettura; per dirla con Doc, siamo abituati ad associare le congetture con approssimazioni e condizionali, mentre le formule tendono a definire dei risultati precisi.

L'idea è di avere una regione D_4 e di lasciare momentaneamente perdere il quarto punto; possiamo (neanche per sogno: lo fate voi, se vi divertono certe attività) allora definire una trasformazione conforme in cui i punti P_1, P_2, P_3 restanti vengano portati nei vertici di un triangolo equilatero in cui $P_1^1 = (1{,}0)$, $P_2^1 = \left(1/2, \sqrt{3}/2\right)$ e $P_1^1 = (0{,}0)$; a quanto pare questo si ricava dal Teorema delle Mappe di Riemann, e se lo dice Riemann noi siamo d'accordo per principio.



21 *Dove finisce l'ultimo*

Viene da chiedersi dove finisca P_4: il bello è che $P_4^1 = (x{,}0)$; per far finta di aver capito il concetto, abbiamo riassunto tutto in un disegno che trovate qui di fianco.

[16] Evidentemente, qui stiamo considerando ad esempio il *primo* caso del reticolo esagonale; siccome però ogni reticolo o ha un duale o è autoduale, la cosa non rappresenta un problema.

[17] *Qui si capisce benissimo, che è il Capo a parlare, vero? Se questa nota sopravvive alla sua revisione, sappiate che i concetti fumosi piacciono SOLO al Consumatore di Tabacchi da Pipa (AR).*

A qualcuno potrebbe restare ancora un po' di amaro in bocca, visto che abbiamo continuato a parlare di reticoli regolari di un tipo ben preciso. Purtroppo (o per fortuna: fate voi, noi siamo più per la seconda) a questo punto si sono scomodati i fisici; non vi diamo troppi dettagli, anche perchè vorremmo scriverne una serie di pezzi e anticipare troppa roba li renderebbe inutili.

Abbiamo detto che, per quanto riguarda la probabilità critica, $\vartheta(p)=0$ per $p<1/2$, ma quanto vale la probabilità critica se *p* è *al di sopra* del valore ½? La risposta dei fisici[18], abbastanza sorprendente, è che in una prossimità destra di ½ sia:

$$\vartheta(p)\approx(p-1/2)^{5/36}$$

Da qui in poi, però, se volete ulteriori informazioni ve le andate a cercare da soli. E dopo ce le spiegate.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[18] Vi diamo un *caveat*: partono da considerazioni di gravità quantistica, quindi la cosa è tutt'altro che semplice.