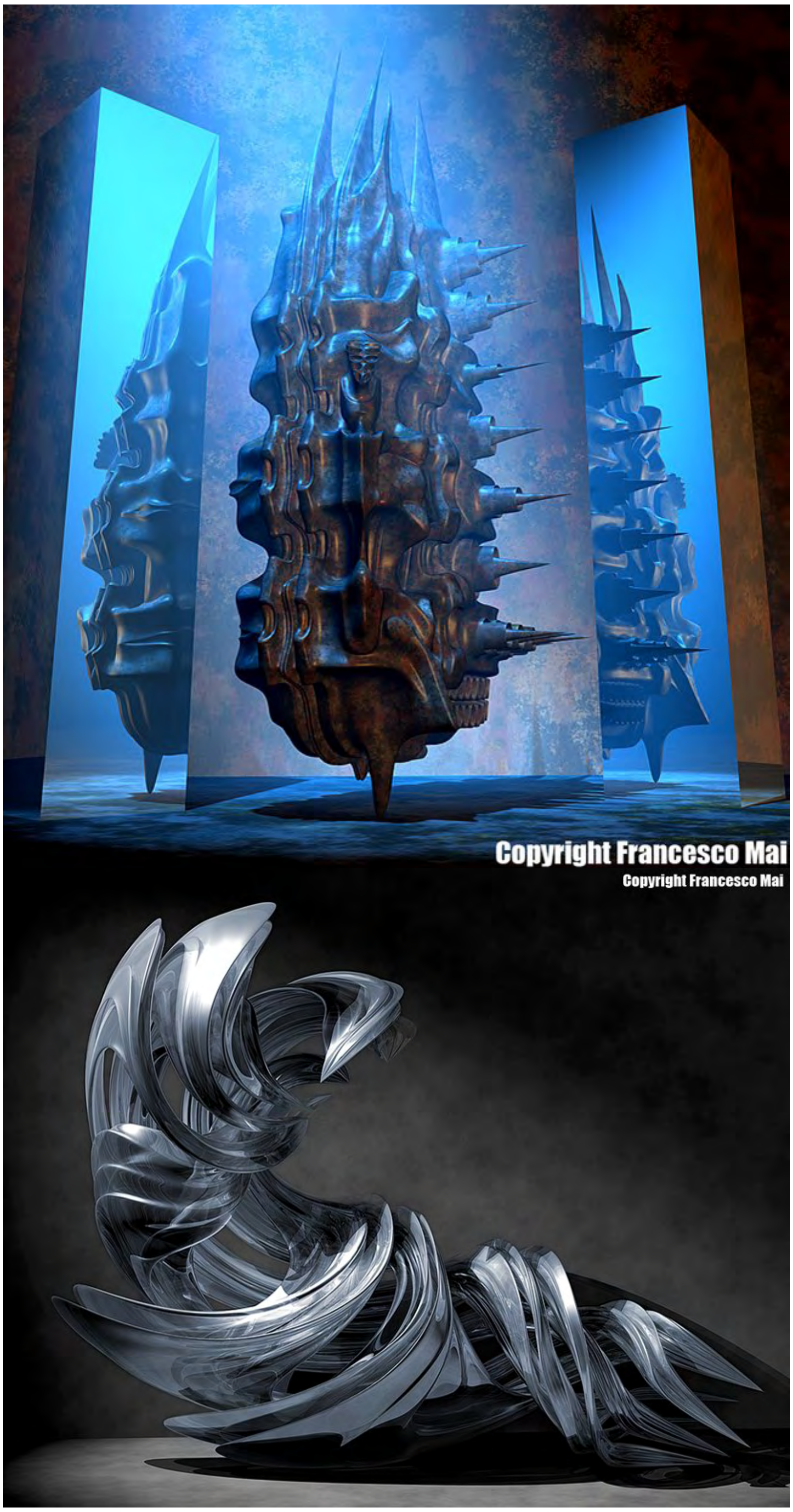
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 116 – Settembre 2008 - Anno Decimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 115 ha diffuso 2014 copie e il 31/08/2008 per Google eravamo in 7'580 pagine.

Quando buona parte della redazione era piccola (e la parte restante doveva ancora nascere), uno squilibrato prese a martellate il *Mosè* di Michelangelo. Se al suo posto ci fosse stata un'opera di ***Francesco Mai***, probabilmente avrebbero dovuto restaurare lo squilibrato. Ne trovate altre presso ***www.francescomai.com***.

1. Orgoglio e pregiudizio

Il nazionalismo è una malattia infantile.
È il morbillo dell'umanità.
(Albert Einstein)

Noi siamo da secoli
Calpesti, derisi
Perché non siam Popolo
Perché siam divisi
Raccolgaci un'Unica
Bandiera una Speme
Di fonderci insieme
Già l'ora suonò.
(Goffredo Mameli, 1847)

All'indomani dei giochi olimpici si fanno confronti e paragoni, e orgogliosamente ci si congratula per il numero di medaglie vinte, come se ogni singolo atleta presente a Pechino fosse un nostro parente. Poi ci si chiede quali nuove forme di doping abbiano scoperto i cinesi per vincere così tanti ori olimpici e i giamaicani per poter correre tanto veloci, e come mai le gare di velocità siano corse solo da atleti di colore e il nuoto da caucasici, e via di seguito. È un rituale che si ripete regolarmente ad ogni olimpiade e ad ogni mondiale di calcio: ci colpisce (non troppo positivamente, a dire il vero) che l'orgoglio nazionale italiano sia raramente collegato ad altro che lo sport; del resto celebriamo la nostra grandezza come nazione ed ascoltiamo *Fratelli d'Italia*[1], dal 1946 inno nazionale italiano *provvisorio*, quasi solo in occasione di eventi sportivi.

1 *L'Italia di Erodoto*

D'altra parte, la stessa "italianità" è invenzione abbastanza recente. Per gli antichi Greci era solo la punta dello stivale, e anche sull'origine dell'etimo ci si può sbizzarrire senza piena certezza d'ottenere una risposta certa: è comunque probabile che greci e latini la usassero per indicare gli abitanti dell'attuale Calabria, con un misto del termine greco *italós*, toro, e dell'umbro *vitlu*, vitello.

Ma, come sempre, l'etimologia è il terreno ideale per miti e leggende: la metà o quasi dei racconti mitologici serve proprio a giustificare i nomi delle cose, e il termine *Italia* non fa eccezione: Si narra che Italo fosse il nome del re che governava la popolazione locale, che l'attività principale locale fosse l'allevamento, o altro

---

[1] "*Il Canto degli Italiani*" è il vero titolo dell'Inno di Mameli, a voler essere precisi. Goffredo Mameli aveva solo vent'anni quando lo scrisse sull'onda dei moti che poi sfociarono nelle rivolte del 1848, e morì appena due anni dopo, nel 1849. Divenne estremamente popolare, resistendo a censure monarchiche e accompagnando persino Garibaldi coi suoi Mille, anche se Mameli era già parte del passato. In parte proprio per il suo essere "provvisorio", in parte per i suoi contenuti, l'Inno è stato spesso al centro di polemiche: in un epoca di Unione Europea, è poco diplomatico avere dei versi che recitano "*già l'aquila d'Austria ha le penne perdute*" o "*Il sangue d'Italia, il sangue Polacco bevé col cosacco, ma il cor le bruciò*"; anche per questo l'uso prevede che dell'Inno si esegua solo la prima strofa. È poi noto che la maggior parte degli italiani canti a squarciagola "*stringiamoci a corte*" anziché "*stringiamci a coorte*", che rende assai meno militaresco il contenuto del verso. Di recente, infine, è stato messo sotto accusa il passaggio nel quale sembra che Mameli indichi come destino d'Italia quello d'essere "*schiava di Roma*", ma francamente le nostre scarse conoscenze d'analisi logica ci fanno concludere che si tratti invece della *Vittoria* ad essere schiava *d'Italia*. Dopo un verso in cui *l'Italia* è palesemente soggetto della frase (*l'Italia s'è desta, dell'elmo di Scipio si è cinta la testa*), arriva il verso ove il soggetto è la *Vittoria* (*Dov'è la Vittoria? Le porga la chioma*), che è chiamata a porgere la chioma, alla maniera delle antiche schiave. Il verso dice chiaramente "*le porga*" con riferimento al soggetto del verso precedente, cioè all'Italia: quindi, in breve, *la Vittoria deve porgere la chioma all'Italia*, e questo perché *"schiava di Roma Iddio la creò*": il pronome è naturalmente riferito al soggetto della frase precedente (la Vittoria) che il Creatore avrebbe creato *schiava di Roma,* e ci sembra che il termine "Roma" sia in questo caso abbastanza chiaramente una sineddoche per il termine "Italia".

che abbia a che fare con una buona quantità di tori e vitelli in zona[2]. Che il termine abbia ulteriore origine etrusca è anche possibile, e che questi lo utilizzassero per nominare in tono sprezzante quegli “allevatori di bestiame” dei loro vicini[3].

2 *L’Italia nell’anno Mille*

Indipendentemente da dove venga la parola “Italia”, si tratta di un nome che non appare più nelle cartine europee fino al 1800. Intorno al Mille, la Sicilia era un Emirato, la Lombardia un reame che comprendeva il Piemonte e la Liguria, e in generale quella che noi oggi chiamiamo Patria era un bel guazzabuglio di ducati, marchesati e protettorati.

Non stupisce che l’unico stato che mantenne il proprio territorio attraverso gli anni fu lo Stato Pontificio, che basava il proprio potere su autorità superiori a quelle terrene: nelle figure qui accanto si ritrova pressoché identico a distanza di trecento anni.

3 *L’Italia nel 1796*

Forse la debolezza dello spirito nazionale italiano sta proprio qui: per centinaia di anni ogni regione ha avuto il suo modo di agire e reagire agli eventi storici, ma lo spirito del nazionalismo dilagante in Europa ha pian piano attecchito anche da noi. Nel 1796 Napoleone completa da trionfatore la sua prima Campagna d’Italia, e anche se le sue intenzioni sono essenzialmente quelle di aumentare l’influenza della giovane Repubblica Francese sulla penisola, il risultato è comunque quello di una decisa riduzione dell’influenza austriaca.

4 *L’Italia nel 1494*

La tempesta napoleonica sconvolge tutta l’Europa, e l’Italia in modo particolare. Dopo la campagna del 1796 i Savoia sono costretti a firmare l’armistizio, e già in autunno Bonaparte con il trattato di Campoformio riconosce una Repubblica Cisalpina (Lombardia, Emilia Romagna parte di Toscana e Veneto), cede la Repubblica di Venezia all’Austria e annette il Piemonte alla Francia. Sono questi anni di ribaltamenti veloci: la pace con l’Austria dura poco, occorre una nuova campagna d’Italia che culmina con la vittoria di Marengo. I territori d’Italia non hanno requie: nel 1802 la Repubblica da *Cisalpina* diventa *Italiana* con Napoleone come Presidente. Ma questa *Repubblica Italiana* non è certo unica né duratura: nel periodo delle rivoluzioni si sono viste nascere e morire sullo stivale una pletora di repubbliche: Cremasca, Subalpina, Cispadana, Transpadana, Romana, Napoletana.

[2] Pare insomma che Fellini, quando girò “*I Vitelloni*” nel 1953, non facesse altro che ribadire un concetto davvero antico.

[3] I romani continuano a fare qualcosa del genere, più o meno consapevolmente: i l termine “*burino*”, da sempre usato con connotazione denigratoria, è riservato a coloro che, abitando in campagna e allevando bestiame, portavano il *burro* nei mercati cittadini

Come tutte le altre di quei tempi, anche quella Repubblica Italiana avrà vita breve, e non sopravvivrà alla caduta del còrso: con la Restaurazione i Savoia ottengono il Piemonte, Genova, Nizza e la Sardegna; l'Austria si prende la Lombardia, il Veneto l'Istria e la Dalmazia; i ducati di Parma e Modena si ricostruiscono, lo Stato della Chiesa è restituito al Papa e il Regno di Napoli ai Borboni.

5 *L'Italia nel 1810*

L'Italia non torna a far parte delle carte geografiche fino al 1861, quando la lunga e avventurosa corsa del Risorgimento si conclude con Garibaldi che consegna la corona del nascente Regno d'Italia a Vittorio Emanuele II. Facendo un rapido conto, quindi, la nostra Patria esiste da meno di centocinquanta anni, niente a che vedere con la maggioranza degli stati europei, che nel settecento avevano già una qualche tradizione e lingua in comune, o gli stessi Stati Uniti, che nel settecento si erano già resi indipendenti.

Il popolo italiano è veramente un amalgama di numerose componenti distinte, che si notano ancora oggi nelle forti differenziazioni regionali. Forse non c'è da sorprendersi se ci sentiamo uniti quasi solo quando gioca la Nazionale, ma comunque non ci sentiamo di sminuire la passione sportiva, proprio dopo aver tanto parlato di spirito olimpico e del desiderio di migliorare e migliorarsi a cui si ispira[4]: la nostra nazione contribuisce da decenni a livello internazionale ad innalzare il livello di eccellenza che De Coubertin aveva predicato. Tra estivi e invernali, l'Italia ha partecipato a 45 giochi olimpici (mancandone solo uno nel 1904), vincendo un totale di 623 medaglie e un totale di 226 ori, terza di tutti i tempi tra tutte le nazioni partecipanti, dopo Stati Uniti ed Unione Sovietica: impressionante soprattutto considerando la differenza nel numero di abitanti delle nazioni in gioco. Nei campionati mondiali di calcio, la partecipazione azzurra forse non fu assicurata dalla prima edizione (1930 in Uruguay – vinta dagli organizzatori) ma dalla seconda in poi: da allora 75 nazioni sono apparsi almeno una volta nel torneo mondiale, ma solo undici sono arrivati alla finale, e solo sette hanno trovato la vittoria. I nostri, cominciando con quella del 1934, hanno accumulato quattro vittorie e due piazzamenti d'onore, secondi solo ai brasiliani.

A livello internazionale lo stivale è ancora conosciuto per le città d'arte, per le innumerevoli bellezze naturali, siti storici e coste mozzafiato... qualcosa di cui ci dimentichiamo spesso di essere orgogliosi e di prenderci cura, purtroppo. Eppure non è questo che ha conquistato il mondo, e nemmeno la nostra concezione di moda con i nostri stilisti, e nemmeno le nostre canzoni ed i nostri tenori.

Se forse l'Italia sulla stampa internazionale occupa più pagine per la politica arruffata, i conflitti d'interesse, la mafia ed il nepotismo, nemmeno queste sono le prime cose che vengono in mente allo straniero quando pensa al Bel Paese.

Quello che ha conquistato il mondo è la cucina italiana. Pizza, focaccia, bruschetta, piadina sono termini conosciuti in quasi tutte le lingue; e ancora spaghetti, tortellini, ravioli, tagliatelle, fusilli, lasagne, gnocchi, risotto; per non parlare di parmigiano, mozzarella, pecorino; e panettone, pandoro, tiramisù, gelato; i nostri vini sono bevuti ovunque: amarone, barbera, barolo, lambrusco, nero d'Avola, chianti, prosecco, moscato…; i liquori sono famosissimi: limoncello, grappa, amaro. Persino l'aceto balsamico è invenzione nostrana che ha conquistato le cucine internazionali.

[4] Nel precedente compleanno in RM115.

Come tutti questi manicaretti abbiano raggiunto i confini del mondo non è dato di sapere: è però una realtà che l'ultimo secolo ha segnato una gran migrazione verso le Americhe ed il Nord Europa, tanto che si calcola che al mondo ci siano più di sessanta milioni di italiani oriundi (che hanno adottato un'altra nazionalità) e altri quattro milioni che hanno conservato la nazionalità italiana ma vivono all'estero. Insomma, al mondo ci sono più di centoventi milioni di persone con una certa cultura od origine italiana, circa un due per cento della popolazione mondiale, di cui più della metà non vive nello stivale.

Per fare un confronto con una nazione confinante con analoga popolazione, si può considerare la popolazione di origine francese, che in tutto dovrebbe contare 70-75 milioni di persone di cui circa 54 milioni abitano in Francia – la stragrande maggioranza – e gli emigrati sono principalmente in USA e Canada, in particolare circa undici milioni sono gli oriundi negli Stati Uniti, contro circa diciotto milioni di italiani.

Avendo scoperto una possibile ragione della diffusione dei cibi italiani nel mondo, restiamo ancora senza parole quando confrontati con la varietà dei metodi e modi, delle specialità regionali, delle tradizioni culinarie, forse solo paragonabili alla cucina cinese. Basta scegliere una regione, o addirittura un comune, a caso per stupirsi di quante diverse specialità siano disponibili in una regione geograficamente anche limitata: prendiamo per esempio Modena[5], e ci affidiamo a Wikipedia:

> *Modena è al centro di una fortunatissima porzione della Pianura Padana in cui si estende l'area di produzione tipica del formaggio Parmigiano-Reggiano e del Prosciutto di Modena. Queste due glorie della gastronomia nazionale illustrano alla perfezione i caratteri della cucina modenese, basata sul formaggio e soprattutto sul maiale, l'animale d'allevamento più diffuso nella zona.*
>
> *Oltre al prosciutto, che è più sapido rispetto a quello di Parma, tanti sono gli insaccati di suino che meritano di essere assaggiati: citiamo i salami, la mortadella, la coppa di testa e i ciccioli. Due piatti tipici della stagione invernale, ma che è possibile trovare per buona parte dell'anno nelle trattorie come nelle case modenesi, sono lo zampone, ottenuto con carne macinata di maiale insaccata nella cotica della zampa anteriore, ed il cotechino, dalla lavorazione piuttosto simile, ma diverso per forma e cotenna. Ma dal maiale si ottiene anche lo strutto indispensabile per il tipico gnocco fritto: una focaccia fritta quadrata che si accompagna molto bene ai salumi. Originaria dell'Appennino (ma gustata volentieri in tutta la provincia) è invece la crescentina, detta anche tigella, cotta sulla pietra nella caratteristica forma rotonda. Anche in questo caso formaggio, salumi e pesto modenese, ossia lardo misto a rosmarino e aglio, sono l'ideale complemento.*
>
> *Tradizionalmente conteso con l'antica ed eterna rivale Bologna è il tortellino, un quadretto di pasta sfoglia ripiegati su un trito di maiale, prosciutto e parmigiano reggiano (anche se le ricette variano spesso di famiglia in famiglia). Tipico delle zone montane in particolare di Guiglia, Zocca, Marano sul Panaro, Serramazzoni è anche il borlengo sottilissima sfoglia ottenuta cuocendo in un'apposita piastra (la "ròla") un impasto di acqua e sale, detto "colla", condito, una volta cotto, prevalentemente con la "cunza", il pesto, altrimenti gustato con salumi, formaggi, e talvolta anche con marmellate o creme al cioccolato.*
>
> *Ma la provincia di Modena è giustamente famosa per altri due prodotti tipici della tradizione: l'aceto balsamico e il vino lambrusco. Il primo si ottiene con le uve locali, in particolare l'uva trebbiano della zona collinare intorno a Spilamberto, e una sapiente lavorazione che prevede una complicata serie di passaggi tra botti di legni diversi (comunemente cinque). Di aceto balsamico esistono due tipi denominati il primo "Aceto balsamico tradizionale di Modena" il più costoso invecchiato anche più*

[5] Per una volta ci allontaniamo dal più famigliare Piemonte, e quindi ci scusiamo in anticipo per mancanze, imprecisioni ed errori con i nostri lettori locali.

di venticinque anni prodotto con i metodi tradizionali e quello comunemente denominato "Aceto balsamico di Modena", un normale condimento a base di una mistura di aceto di vino e mosto cotto, prodotto industrialmente e meno costoso. Quanto al lambrusco, è forse il più celebre dei vini rossi frizzanti. Gli intenditori sanno distinguere al primo sorso le differenti varietà: il Lambrusco di Sorbara (prodotto nella pianura) ha un aroma più delicato e un profumo di violetta; il Lambrusco Grasparossa di Castelvetro (prodotto sulla collina) ha una gradazione più alta e una caratteristica schiuma rossa. Si tratta in entrambi i casi di un vivace vino da pasto che va bevuto rapidamente, prima che svapori: non è un vino d'annata, anzi, esso dà il meglio di sé a un anno dall'imbottigliamento, mentre il novello è un vino ideale per i brindisi e i festeggiamenti. Infine vi è il Lambrusco Salamino di Santa Croce, prodotto in tutta la parte nord ed ovest (al di sopra della via Emilia) della provincia, dal sapore più armonioso e lievemente tannico. Si dice che il lambrusco 'soffra' particolarmente i trasporti: perciò esso dovrebbe essere gustato appieno soltanto nel territorio modenese. Il che non gli ha impedito di essere commercializzato con successo un po' in tutto il mondo (anche se questa grande diffusione ha significato forse un abbassamento della qualità).

Tra i liquori il più tipico è certo il nocino, dotato di marchio di tutela, un infuso in alcool dei malli verdi delle noci, che si raccomanda per il sapore intenso e le proprietà digestive; tra i dolci va ricordato il bensone, una sorta di pane dolce, cotto al forno e decorato con grani di zucchero: si mangia tagliato a fette e intinto nel vino.

Un'intera pagina per descrivere le specialità locali dovrebbe bastare per rendere l'idea, anche se probabilmente potrebbe essere ampliata.

Ma qui abbiamo solo estratto le informazioni relative alla gastronomia locale, ignorando tutto il resto: Modena è città dalle diverse attrattive, ha un'Università famosa in tutto il mondo, ed è legata a nomi come Ferrari e Maserati – anche loro ben noti internazionalmente. Ed è a Modena che è diventato famoso il protagonista di questo mese.


6 *Paolo Ruffini*

Paolo Ruffini nasce a Valentano, vicino a Viterbo[6], città appartenente allo Stato Pontificio , il 26 settembre 1765.

Si sa poco di quello che succede in quegli anni al piccolo Paolo: solo che ha un carattere tendente al misticismo, un padre dottore di paese ed una famiglia numerosa, e che la sua vocazione è quella di diventare prete. Ad un certo punto deve aver comunque cambiato idea, se dopo essersi trasferito con la famiglia prima a Reggio e poi a Modena, si iscrive all'Università di Modena nel 1783 per studiare matematica, medicina, filosofia e letteratura.

Sono anni molto attivi: la famiglia Este che controlla Modena e dintorni, chiama al proprio servizio uno dei professori di calcolo di Paolo, e lui – ancora studente – lo sostituisce in classe. È il 1788, lo stesso anno in cui ottiene la sua laurea di chirurgo. È bravo, e quando il professore che gli aveva insegnato geometria si

[6] Valentano ha anche un proprio sito internet (www.valentano.org) che vale una visita e contiene qualche foto interessante, che abbiamo ignominiosamente copiato senza chiedere il permesso.

ritira, nel 1791, viene chiamato a rilevarne la cattedra; nello stesso anno ottiene la licenza di praticare la medicina, diventando così *dottore* come il padre.

Ma la guerra è alle porte: la Francia di Napoleone sta stravolgendo la geografia del continente, e interrompe il dominio estense. Quando infine le truppe francesi entrano a Modena, Ruffini suo malgrado si trova nel pieno di un rovesciamento politico: viene nominato rappresentante nel Consiglio della Repubblica Cisalpina, ma ne esce quasi subito (nel 1798) per tornare al suo lavoro scientifico all'Università di Modena. Qui non accetta di sottoporsi ad un giuramento di fedeltà alla Repubblica napoleonica per motivi religiosi, e gli viene negato il permesso di insegnare.

La negazione della cattedra non sconvolge la vita di Ruffini, che frattempo divide il suo tempo tra i pazienti e lo studio della matematica; proprio in quei giorni era giunto a studiare le equazioni di grado superiore al quarto, per dimostrare il contrario di quanto mezza Europa stava provando a calcolare: e cioè che non ne esistono possibili soluzioni per radicali.

La soluzione per la cubica era stata trovata da Scipione del Ferro, Tartaglia e Cardano[7], quella di quarto grado da Ferrari nel 1540, per cui erano passati due secoli e mezzo senza progressi malgrado i numerosi attacchi di matematici d'alta levatura, quali Eulero e Lagrange[8]. Soprattutto quest'ultimo, tenuto in gran stima dallo stesso Ruffini, aveva pubblicato le sue "Riflessioni sulla risoluzione algebrica delle Equazioni[9]", nella quale esprimeva chiaramente la possibilità di trovare un metodo solutivo per radicali.

La "Teoria Generale delle Equazioni" di Paolo Ruffini[10] è del 1799, e comincia così: "*La soluzione algebrica delle Equazioni generali di grado superiore al quarto è sempre impossibile. Ecco un teorema troppo importante nelle Matematiche, che io credo, se pur non erro, di poter asserire, e di cui la dimostrazione quella si è, che principalmente mi à spinto alla pubblicazione del presente Volume. L'immortale de la Grange con le sublimi sue Riflessioni intorno alle Equazioni inserite negli Atti dell'Accademia di Berlino à somministrato il fondamento alla mia dimostrazione: conveniva dunque premettere a questa per la maggiore sua intelligenza un Ristretto di simili Riflessioni.*"


TEORIA GENERALE
DELLE
EQUAZIONI,
IN CUI SI DIMOSTRA IMPOSSIBILE
LA SOLUZIONE ALGEBRAICA DELLE
EQUAZIONI GENERALI DI GRADO
SUPERIORE AL QUARTO
DI
PAOLO RUFFINI.
PARTE PRIMA.

BOLOGNA MDCCXCVIIII.
NELLA STAMPERIA DI S. TOMMASO D' AQUINO.

7 *L'opera di Ruffini (1799)*

Nella storia della matematica, la ricerca di soluzioni delle equazioni ha spesso causato antipatie e litigi, e questa sembra essere l'ennesimo episodio nel novero. Ruffini ammira e rispetta Lagrange ed è proprio dalle sue pubblicazioni che trae ispirazione per la sua dimostrazione.

Negli scritti del matematico piemontese ci sono infatti i primi segni di teoria dei gruppi, ed è proprio questa parte dell'opera che il modenese di adozione recupera e utilizza, portandola alle estreme conseguenze e provando teoremi di teoria dei gruppi; il linguaggio non è certo estremamente moderno, ma comunque efficace. Però il mondo

---

[7] Questa storia è narrata dall'ottimo Dario Bressanini su queste pagine, in RM054.

[8] Anche loro sono stati protagonisti di compleanni, rispettivamente in RM051 e RM048.

[9] Versione integrale in francese nella biblioteca digitale di Göttingen: http://gdz.sub.uni-goettingen.de.

[10] Integralmente pubblicata su google books (http://books.google.com).

matematico dell'epoca non è pronto per una tale scoperta, anche se comprensibilmente Ruffini desidera riconoscimento. Invia al mentore Lagrange almeno tre volte l'opera: ma non riceve risposta alcuna.

All'interno della dimostrazione c'era effettivamente un errore, ma non è certo per questa ragione che l'opera non riscuote successo: malgrado le insistenti richieste dell'autore, nessun matematico dell'epoca intende prendere in considerazione seriamente l'opera. Quasi paradossalmente, e a dimostrazione del clima politico del tempo, l'unico commento che Ruffini riceve è di natura assai poco scientifica: un collega si complimenta con lui per l'eccellenza di un risultato *italiano* a cui non ha contribuito alcuno *straniero*.

Paolo Ruffini non si da per vinto e scrive all'Istituto di Parigi di controllare la validità della sua dimostrazione, compito assegnato a Lagrange, Legendre e Lacroix: niente da fare. I tre, capeggiati dal celebre torinese, dichiarano che il lavoro non ha nessun interesse scientifico e non lo degnano di una critica costruttiva. Chi invece riconobbe il valore del libello di Ruffini fu Cauchy: la cosa è sorprendente perché lo stesso Cauchy era estremamente critico ed avaro nel dare credito ai colleghi. Ciononostante, il pioniere della teoria dei gruppi fu grandemente influenzato dal lavoro di Ruffini e gliene rese merito con una lettera del 1821, vent'anni più tardi, ad un anno dalla morte dell'italiano.

Nel frattempo la vita del medico e matematico era proseguita: aveva lasciato l'Università di Modena per insegnare matematica applicata alla scuola militare della città. Dopo la caduta di Napoleone, nel 1814 Ruffini rientrò all'Università per diventarne il Rettore.

Erano tempi politicamente estremamente complessi, e non ci sono dubbi che il rispetto di cui godeva Ruffini non doveva essere poco, per poter mantenere la posizione di rettore; e comunque il rettorato non impiegava tutto il suo tempo: teneva anche una cattedra di matematica applicata, due cattedre di medicina, e continuava a curare i propri pazienti. Quando nel 1817 ci fu un'epidemia di tifo, Ruffini non esitò a darsi anima e corpo per curare la popolazione, fino al punto di contrarre lui stesso la malattia. Dovette così ridurre il suo impegno all'interno dell'Università; anche questa fu un'esperienza da cui trasse il massimo profitto, e non appena si riprese anche solo parzialmente scrisse una memoria sulla cura del tifo.

Laureato in tre discipline, produsse in tutte e tre materiale di interesse: per la filosofia dissertò di immortalità dell'anima in "*Della immaterialità dell'anima*", che sembra essere un'accesa critica *ante litteram* del darwinismo[11], e "Riflessioni critiche sopra il saggio filosofico intorno alle probabilità del signor conte Laplace".

Eppure, nel mondo della matematica, della filosofia e della medicina ben poco è rimasto del poliedrico e generoso modenese: la regola per la divisione dei polinomi che abbiamo studiato a scuola è nota nel resto del mondo come regola di Horner e il famoso teorema che prova che non è possibile risolvere una equazione di grado superiore al quarto per radicali è noto come teorema di Abel[12].

	a_n	a_{n-1}	…	a_i	…	a_1	a_0
α		$\alpha\, b_{n-1}$	…	$\alpha\, b_i$	…	$\alpha\, b_1$	$\alpha\, b_0$
	$b_{n-1}=a_n$	b_{n-2}	…	b_{i-1}	…	b_0	$R=\sum_{j=0}^{n}\alpha^j a_j$

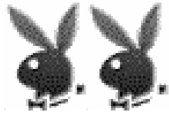
8 *La divisione di polinomi con la regola di Ruffini*

Ma noi, nel nostro piccolo, siamo orgogliosi di Paolo Ruffini, del medico, dell'uomo e del modenese. Non come siamo orgogliosi dei tortellini e del barolo, ma in un modo che non ha niente a che vedere con la sua nazionalità, anche se sì: forse è stato uno dei primi matematici italiani.

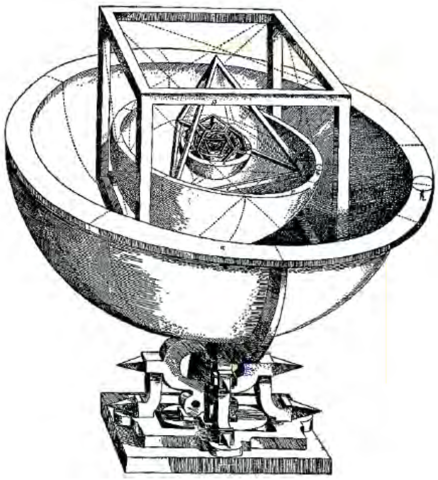
[11] Quando Ruffini muore, nel 1822, Charles Darwin ha solo tredici anni.

[12] Celebrato in RM055.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Keplero era uno sprecone in qualunque dimensione.			
Numeri simpatici			

2.1 Keplero era uno sprecone / In qualunque dimensione.



Probabilmente tutti voi riconoscerete il disegno qui a fianco, che era il nostro logo su una Prestigiosa Rivista di Astronomia Ricreativa.

Riordinando i vecchi numeri (gli è schiantato l'hard disk, quindi ha dovuto mettere ordine a partire da backup piuttosto approssimativi), Rudy ha lasciato per un certo periodo il disegno sul computer; i Validi Assistenti, sempre alla ricerca (infruttuosa per mancanza di materia prima nell'ambiente che stiamo considerando) di MSV e giochi vari, si sono dovuti accontentare di guardare questo. Segue dialogo.

A(lberto): "Secondo me, si spreca un mucchio di spazio"

F(red): "In che senso?"

A: "In tutti. Quelle sfere una dentro l'altra sprecano spazio. Era più comodo limitarsi a mettere i solidi, uno dentro l'altro. Possibilmente cercando di mettere il più grande possibile dentro l'altro, e avanti così…"

F: "Credo che la mamma lo troverebbe anche piuttosto disordinato"

A: "Stavolta 'In che senso?' lo chiedo io"

F: "Non per prendere per il Cubo, come l'altro mese, ma perché comincia con il cubo? Io avrei cominciato con quello più semplice, quello triangoloso…"

A: "Si chiama tetraedro"

F: "Per me puoi anche chiamarlo Ugo, ma avrei cominciato con quello; poi il cubo, poi gli altri…"

A: "E fare al contrario?"

F: "Cominciamo a ripeterci: 'In che senso?'"

A: “Quello al contrario. Prima metti l’icosaedro, poi il dodecaedro,… secondo me così ottimizzi lo spazio”

F (e A): “PAPAAAAA!!!!!”

Ragazzi (e qui parlo a voi, non a loro), non ne ho la più pallida idea, quindi se volete provarci fate pure ma non garantisco niente. Non ho la soluzione, quindi **non è questo il problema**. Comunque, dovrebbe aver ragione Alberto.

In compenso ho la soluzione di un grazioso problemino simile a questo, che ho proposto ad Alberto. Basta prenderla una riga più bassa (come si diceva una volta), o meglio una *dimensione* più bassa. Segue monologo.

Prendete un cerchio, per comodità di raggio unitario.

Disegnateci dentro (al cerchio) il triangolo equilatero più grande possibile.

Disegnateci dentro (al triangolo) il quadrato più grande possibile.

Disegnateci dentro (al quadrato) il pentagono (regolare) più grande possibile.

Poi tocca all’esagono, e poi ci fermiamo perché prima o poi bisogna.

Bene, *Quanto è grande l’esagono?*

A questo punto, Fred è contento di aver scatenato un nuovo problema, ma Alberto continua ad essere insoddisfatto. Infatti, lui è convinto che sia meglio fare al contrario: prendere il cerchio, piazzarci un esagono, con dentro un pentagono con dentro un quadrato con dentro un triangolo.

In questo caso, *quanto è grande il triangolo*?

Al momento ho tenuto buono Alberto spiegandogli che riuscirà a risolverlo in un paio d’anni, se lo promuovono tutte le volte; Fred, che è un tipo pragmatico e innocente (infatti, si fida di voi) si accontenterà delle risposte. Qualcuno vuole dargliele?

Per chiudere con la risposta che mi ha dato Alberto: “Tu faresti venire il mal di teste anche all’Idra di Lerna…”.

2.2 Numeri simpatici

Tutti noi abbiamo le nostre personali simpatie nel mondo dei numeri; a Rudy, ad esempio, sin da piccolo stavano antipatici il sette (come a quasi tutti, del resto) e l’otto; poi, col primo ha dovuto imparare a conviverci, in quanto la maggior parte degli amici di famiglia hanno un figlio e quando si va a mangiare fuori la divisione per sette è all’ordine del giorno[13], ma il secondo ancora oggi suscita in lui una certa diffidenza, che non sa spiegare.

Appunto per questo, ha deciso di dare una definizione oggettiva di numeri simpatici o antipatici; dovendo essere oggettiva, prescinde dalle sue particolari preferenze, quindi non abbiamo la più pallida idea della categoria cui appartengano il sette e l’otto.

Limitandosi ai numeri naturali, Rudy pensava di definire *numeri simpatici* quelli per cui sia possibile trovare un insieme di numeri razionali tali che la somma e il prodotto di questi numeri siano pari al numero dato; quelli per i quali il suddetto insieme non esiste, sono antipatici. A questo punto si tratterebbe di catalogarli, ma siccome al momento è in ritardo su tutto (anzi, di più), vi delega volentieri il compito.

Quali sono i numeri simpatici? E quali quelli antipatici?

[13] E tra CercaIlTelefonino-TrovaLaCalcolatrice-QuantoEraIlConto-DivisoSetteUguale, di solito arriva prima lui a mente al risultato corretto.

3. Bungee Jumpers

Trovare il più piccolo quadrato perfetto che inizia con sei "2".

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Per fortuna le vacanze sono finite.

9 *CdR zurighese*

Alice, a cui toccano queste note, le ha trovate quest'anno particolarmente dure, e continua a lamentarsi del fatto che non arrivino mai buone notizie. Eppure, di cose belle ne sono successe: per esempio ad agosto c'è stato il famoso ed incredibile CdR zurighese, e proprio l'apertura delle olimpiadi ha avuto come testimoni televisivi chiusi nella stessa stanza tutti e tre i Redattori della Prima e più Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa in Rete. Dato che i Redattori hanno solo mangiato, bevuto, visitato la ridente località transalpina e preso assolutamente nessuna decisione, non possiamo fornirvi altri dettagli dell'evento, tranne la foto di repertorio che non siamo sicuri non venga censurata prima dell'uscita della rivista.

Tornando alle note, non abbiamo ricevuto alcune notizie sul gioco proposto il mese scorso: pazienza, passiamo oltre.

Agosto è un mese piuttosto morto per la matematica in genere, ma in questo 2008 ha contenuto il centocinquantenario della nascita di Peano: l'uomo ci è oltremodo simpatico per un centinaio di motivi, per cui vi ricordiamo che lo abbiamo celebrato sia sul blog di Le Scienze (http://rudimatematici-lescienze.blogautore.espresso.repubblica.it/), sia in tempi remoti in RM067; recentemente ha celebrato lui noi – ma essendo molto timidi vi lasciamo capire da soli in che senso.

Abbiamo ricevuto da ***Luc*** una segnalazione di un articolo che vi giriamo volentieri: http://www.mondodigitale.net/Rivista/08_numero_2/Longo%20p.%2035-45.pdf, parla di temi che noi avevamo già toccato in RM059 e dimostra che la sensibilità per la matematica in rete sta cambiando. Del resto ***Randy*** ci ha inviato due documenti incredibili che calcolano la probabilità di un colpo di fulmine o che due persone "telepaticamente" si possano pensare allo stesso tempo: siamo ancora indecisi su dove e come pubblicarli, sono proprio divertenti.

Per il resto, abbiamo incontrato virtualmente Francesco Mai, che ci sembra un artista originale e generoso (ci ha permesso di usare le sue opere per la copertina): vi invitiamo a visitare il suo sito www.francescomai.com. Ed ora passiamo alle soluzioni.

4.1 [115]

4.1.1 A rischio fratricidio

Il problema dei cubi ha avuto un certo successo, ma è stata anche un'ottima occasione per il Capo ed il Doc per dimostrare ancora una volta la loro abilità di solutori del famoso cubo. Per quelli che ancora stanno combattendo con i quadrettini colorati e hanno cominciato a studiare il modo di staccare e riattaccare i colori, da ***Cid*** arriva un ottima segnalazione: http://utenti.quipo.it/base5/cuborubik/cuborubik.htm. Il sito di Base5 e ***Gianfranco Bo*** in particolare ci hanno abituato ad ottimi articoli e questo metodo funziona: c'è riuscita anche Alice. Inoltre sul Cubo di Rubik (o meglio, sulle complicazioni del cubo e sui gruppi sporadici) c'e' un articolo su Le Scienze di Settembre.

Per quanto riguarda il problema, abbiamo i soliti ed inossidabili ***Trekker*** e ***Cid***, poi ***il Panurgo***, ***Randy***, ***Andrea***, ***Sergio*** e ***Uyulala***. Visto che adesso Alice passa tutto il tempo a giocare con il cubo di Rubik, ha deciso di passarvene solo alcune a caso, per esempio quella di ***Trekker***:

> Supponiamo di avere un cubo (non colorato) di lato $n>1$[14] suddivisibile in n^3 cubetti unitari. Colorando la prima faccia (caso 1) del cubo avremo n^2 cubetti "superficiali" con una faccia colorata (e l'incremento di n^2 cubetti "superficiali" colorati lo avremo anche ogni volta che coloreremo una faccia non limitata da "spigoli" già colorati).
>
> Colorando la seconda faccia si possono avere due casi:
>
> - la seconda faccia colorata è opposta alla prima (caso 2a) e quindi si aggiungono altri n^2 cubetti "superficiali" colorati
> - la seconda faccia colorata condivide con la prima uno spigolo (caso 2b) e quindi si aggiungono solo altri $n(n-1)$ cubetti "superficiali" colorati (e tale incremento si ripete ogni volta che coloreremo una faccia già limitata da un solo spigolo colorato)
>
> Colorando la terza faccia si possono avere altri due casi:
>
> - la terza faccia colorata condivide uno (e uno solo) spigolo già colorato della prima faccia e uno (e uno solo) della seconda faccia e questi spigoli sono paralleli (caso 3a): il numero dei cubetti "superficiali" colorati viene aumentato di altri $n(n-1)$
> - la terza faccia colorata condivide uno (e uno solo) spigolo della prima faccia ed uno (e uno solo) spigolo della seconda faccia e questi spigoli hanno un vertice comune (sono parti cioè dello stesso diedro) (caso 3b): il numero dei cubetti "superficiali" colorati viene aumentato di altri $(n-1)^2$
>
> E via di questo passo. Possiamo riassumere dicendo che colorando una nuova faccia:
>
> 1. non limitata da spigoli già colorati –> si aggiungono n^2 cubetti "superficiali" colorati
> 2. limitata da uno solo spigolo già colorato –> si aggiungono $n(n-1)$ cubetti "superficiali" colorati
> 3. limitata da due soli spigoli opposti già colorati –> si aggiungono $n(n-2)$ cubetti "superficiali" colorati
> 4. limitata da due soli spigoli colorati con un vertice in comune –> si aggiungono $(n-1)^2$ cubetti "superficiali" colorati
> 5. limitata da tre soli spigoli già colorati –> si aggiungono $(n-1)(n-2)$ cubetti "superficiali" colorati
> 6. limitata da quattro spigoli già colorati –> si aggiungono $(n-2)^2$ cubetti "superficiali" colorati.
>
> Posto che F sia il numero delle facce colorate del cubo, S il numero di spigoli comuni colorati e V il numero di "diedri" con le tre facce colorate, allora il numero totale C di cubetti colorati almeno su una faccia è esprimibile con: $C = F \cdot n^2 - S \cdot n + V$.

[14] Il caso n=1 è abbastanza "patologico": un cubo di lato 1 colorato di rosso su F facce (con 0<F<6) ha lo stesso numero di cubetti unitari, e cioè 1, di un cubo di lato 1 colorato di blu su F+1 facce.

La tabellina che segue forse può servire come riassunto di tutti i casi possibili:

Caso	N. Facce Colorate	N. cubetti unitari colorati	Note
1	1	n^2	Una sola faccia colorata
2a	2	$2n^2$	Due facce opposte colorate
2b	2	$2n^2-n$	Due facce con uno spigolo comune colorate
3a	3	$3n^2-2n$	Tre facce colorate di cui una sola con uno spigolo comune alle altre due
3b	3	$3n^2-3n+1$	Tre facce colorate del medesimo diedro
4a	4	$4n^2-4n$	Due facce NON colorate opposte
4b	4	$4n^2-5n+2$	Due facce NON colorate con uno spigolo comune
5	5	$5n^2-8n+4$	Una faccia non colorata
6	6	$6n^2-12n+8$	Tutte le facce colorate

Sia ora R la misura del lato del cubo da colorare di rosso e B la misura del lato del cubo da colorare di blu. Per trovare la soluzione al problema dovremo, sfruttando la tabellina sopra, uguagliare le opportune espressioni scritte per ciascun caso sostituendo n con R e B.

Ad esempio, chiediamoci se esistono due interi R e B tali che colorando di rosso 5 facce del cubo di lato R e 6 facce del cubo di lato B si ottenga lo stesso numero di cubetti unitari con almeno una faccia colorata. Per risolvere questo problema basta osservare le formule del caso 5 e 6 risolvere la seguente equazione a numeri interi:

$$5R^2-8R+4=6B^2-12B+8$$

Estendendo il problema, in modo assolutamente analogo, potremmo chiederci se esistono due interi R e B (maggiori di uno) tali che colorando di rosso un numero opportuno di facce del cubo di lato R e colorandone M>0 in più del cubo di lato B si ottenga lo stesso numero di cubetti unitari con almeno una faccia colorata.

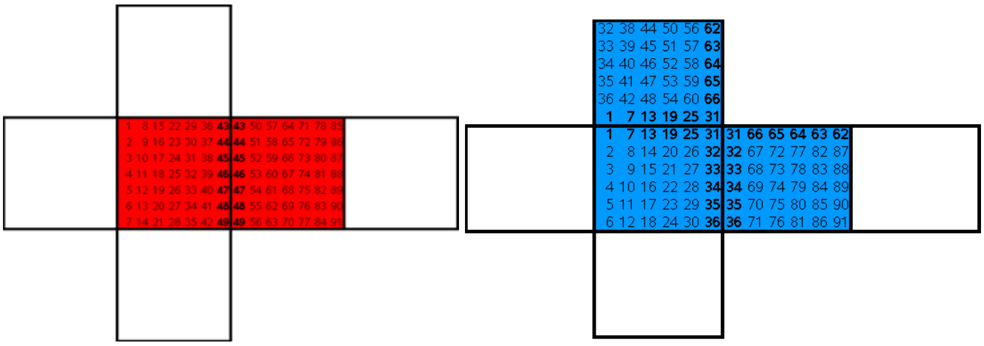
Limitandoci a cubi di lato maggiore di uno e minore o uguale a 1000 le coppie di cubi "notevoli" sono elencate in tabella.

Riferendoci ad esempio alla riga con l'asterisco possiamo dire che il cubo di lato R=7 dipinto di rosso su due facce adiacenti (caso 2b) ed il cubo di lato B=6 dipinto di blu su tre facce (una in più del cubo parzialmente dipinto di rosso) del medesimo diedro (caso 3b) se "segati" in cubetti unitari genereranno 91 cubetti colorati su almeno una faccia.

	M	R	B	Casi	N.Cubetti
	1	2	2	caso 4a-5	8
	1	2	2	caso 4b-5	8
	1	2	2	caso 5-6	8
	1	2	2	caso 2a-3a	8
	1	2	2	caso 3a-4b	8
	1	2	2	caso 3a-4a	8
*	1	7	6	caso 2b-3b	91
	1	24	21	caso 3a-4a	1680
	1	26	24	caso 5-6	3176
	1	35	25	caso 1-2b	1225
	1	67	55	caso 2b-3b	8911
	1	77	63	caso 2b-3a	11781
	1	91	79	caso 3b-4b	24571
	1	97	87	caso 4b-5	37153
	1	107	93	caso 3a-4b	34133
	1	198	162	caso 2a-3a	78408
	1	316	274	caso 3a-4b	298936
	1	330	286	caso 3a-4a	326040
	1	438	392	caso 4b-5	765188
	1	458	410	caso 4a-5	837224
	1	554	506	caso 5-6	1530152
	1	661	540	caso 2b-3b	873181
	2	2	2	caso 2a-4a	8
	2	2	2	caso 4a-6	8
	2	2	2	caso 4b-6	8
	2	2	2	caso 2a-4b	8
	2	2	2	caso 3a-5	8
	2	8	6	caso 2b-4a	120
	2	8	7	caso 4b-6	218
	2	12	9	caso 2a-4a	288

M	R	B	Casi	N.Cubetti
2	13	8	caso 1-3b	169
2	14	12	caso 4a-6	728
2	15	9	caso 1-3a	225
2	22	16	caso 2b-4b	946
2	24	19	caso 3b-5	1657
2	29	23	caso 3a-5	2465
2	67	48	caso 2a-4b	8978
2	70	50	caso 2a-4a	9800
2	100	78	caso 3a-5	29800
2	128	105	caso 4b-6	64898
2	134	110	caso 4a-6	71288
2	181	105	caso 1-3b	32761
2	209	121	caso 1-3a	43681
2	264	187	caso 2b-4a	139128
2	408	289	caso 2a-4a	332928
2	722	590	caso 4b-6	2081528
2	739	523	caso 2b-4b	1091503
3	2	2	caso 3a-6	8
3	2	2	caso 2a-5	8
3	146	104	caso 3a-6	63656
3	769	487	caso 2b-5	1181953
4	2	2	caso 2a-6	8
4	5	3	caso 1-5	25
4	7	5	caso 2a-6	98
4	26	16	caso 2a-6	1352
4	34	16	caso 1-5	1156
4	97	57	caso 2a-6	18818
4	233	105	caso 1-5	54289
4	362	210	caso 2a-6	262088

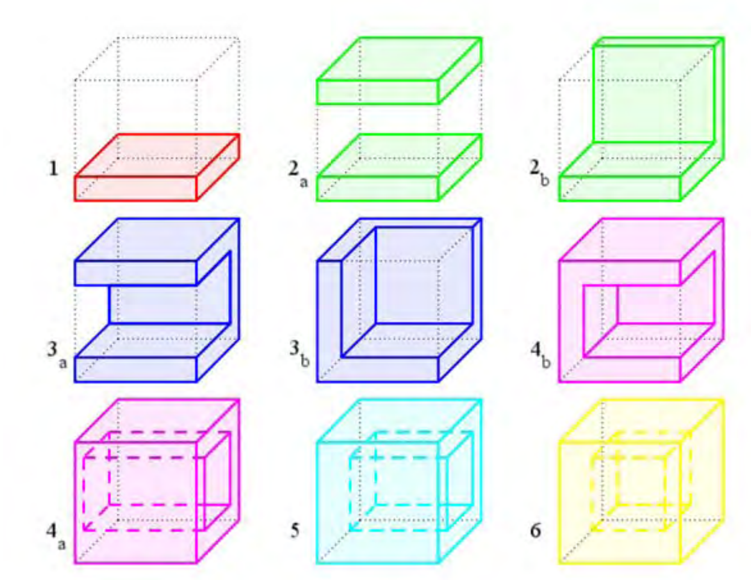
Nella figura che segue sono disegnati gli sviluppi di questi cubi ed etichettati i 91 cubetti con almeno una faccia colorata (i numeri in grassetto indicano i cubetti con più facce colorate).



Ringraziando ***Trekker***, facciamo un po' di spazio alle figure del ***Panurgo***, che sono bellissime:

Per prima cosa è necessario capire in quanti modi sia possile colorare f facce del cubo $n \times n \times n$.

Per $n = 1$, qualunque sia il numero di facce colorate, il numero di cubetti colorati è 1.



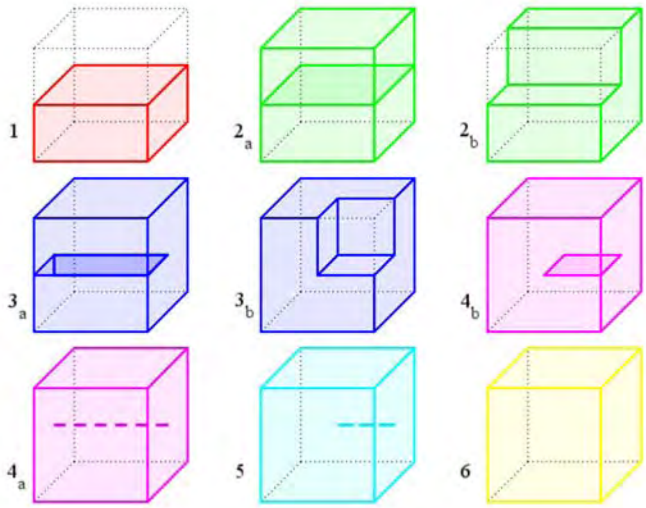
Per $n > 1$, con riferimento alla figura, una faccia può essere colorata in un solo modo; la prima faccia modifica radicalmente la simmetria del cubo differenziando la faccia opposta dalle quattro laterali che sono equivalenti per rotazione: si hanno perciò due modi di colorare le seconda faccia, 2a e 2b. A partire da 2a, le quattro facce rimanenti sono tra loro equivalenti e otteniamo 3a; viceversa, a partire da 2b le due facce parallele a quelle colorate sono equivalenti e portano a 3a mentre quelle perpendicolari portano a 3b. Da 3b, le tre facce rimanenti sono equivalenti e si arriva a 4b, mentre da 3a la faccia parallela porta a 4a, le altre due a 4b. Quando quattro facce sono colorate le due rimanenti sono sempre equivalenti e vi è un solo modo di colorare 5 facce, cosi come vi è un solo modo di colorarne 6.

In tabella è riportato il numero di cubetti colorati che si hanno per ciascuna configurazione.

Basta ora verificare se vi siano configurazioni con f facce colorate che producano lo stesso numero di cubetti colorati di una configurazione con $f+1$ facce: troviamo che un cubo di lato 7 in configurazione 2b produce 91 cubetti colorati come un cubo di lato 6 in configurazione 3b.

Un discorso a parte va fatto per $n = 2$: tutte le configurazioni producono otto cubetti colorati tranne la 1, la 2b e la 3b che ne producono rispettivamente 4, 6, e 7.

1	$n^3 - n^2(n-1) = n^2$
2a	$n^3 - n^2(n-2) = 2n^2$
2b	$n^3 - n(n-1)^2 = 2n^2 - n$
3a	$n^3 - n(n-1)(n-2) = 3n^2 - 2n$
3b	$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$
4a	$n^3 - n(n-2)^2 = 4n^2 - 4n$
4b	$n^3 - (n-1)^2(n-2) = 4n^2 - 5n + 2$
5	$n^3 - (n-1)(n-2)^2 = 5n^2 - 8n + 4$
	$n^3 - (n-2)^3 = 6n^2 - 12n + 8$



E basta così. Certo le altre soluzioni sono anche interessanti, ma non abbiamo convinto Alice ad impaginarle.

4.1.2 Come (non) decidere le ferie

Questo problema era decisamente più complesso, tanto che le risposte si sono fatte desiderare. Il nostro ***.mau.***, con il solito umorismo minimalista ci ha inviato una mail dal titolo "poco caso", il cui contenuto era semplicemente:

> Ai problemi ci penso con calma, ma è chiaro che la distribuzione proposta da Rudy non è proporzionale alla superficie. Basta prendere un intervallo di un grado di longitudine e latitudine e vedere che se la latitudine è compresa tra 0 e 1 abbiamo (più o meno) un quadrato di lato 111 km, mentre se è compresa tra 89 e 90 abbiamo (più o meno) un triangolino isoscele con la base di un chilometro.

Vero, ma poi non abbiamo più sentito niente. Per fortuna che ***Zar*** ci ha pensato:

> Dal freschino della montagna vi propongo una parte di soluzione al quesito sul mappamondo. Prima di tutto: perché non va bene scegliere una latitudine e una longitudine casuali (uniformemente distribuite)?
>
> La mia risposta è questa: mentre i meridiani hanno tutti la stessa lunghezza, i paralleli sono tutti diversi e, man mano che ci si avvicina ai poli, la loro lunghezza diminuisce, fino a diventare zero quando si arriva proprio ai due poli. Allora una

distribuzione uniforme sui paralleli concentrerà più punti vicino ai poli, proprio perché c'è "meno spazio" disponibile.

Come ovviare a questo problema? Propongo questa modalità:

Si genera una longitudine uniformemente distribuita nell'intervallo –180...+180; poi si genera un valore casuale x uniformemente distribuito nell'intervallo –1...+1 e se ne calcola l'arcoseno (in gradi). Si dovrebbe ottenere una latitudine compresa tra –90 e +90 con la distribuzione corretta. Uso il condizionale perché non ho una dimostrazione... a occhio si dovrebbe fare così. :-)

Veniamo alla prima domanda: tutti i punti hanno probabilità ½ di trovarsi nell'emisfero nord quindi, se abbiamo n punti, la probabilità è $1/2^n$.

E fin qua è stato facile.

Per quanto riguarda le altre domande, posso solo dire che tre punti stanno sempre nella stessa semisfera (2 di loro determinano un cerchio massimo, il terzo sta su una delle due semisfere che si formano), mentre non è detto che 4 ci stiano (controesempio: i vertici di un tetraedro: essi non stanno nella stessa semisfera). Il resto è buio.

Ho provato a cercare in giro un qualche aiuto per arrivare alla soluzione, ma ho trovato due soluzioni diverse (una delle due fa riferimento all'altra dicendo che è sbagliata...). Vi riporto due link, con due dimostrazioni diverse (ovviamente non sono mie) dello stesso risultato, caso mai non li conosceste:

http://www.mathpages.com/home/kmath327/kmath327.htm

http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~sillke/PUZZLES/ranpoint.txt

Questo era difficile, avevo provato a lavorare sul legame tra geometria euclidea e geometria sferica, ragionando sul fatto che sulla sfera le "rette" sono i cerchi massimi, che i punti antipodali devono essere identificati, e che le rette passanti per il centro di una sfera determinano due punti antipodali, ma non sono riuscito a concludere nulla.

Era difficile, ma quando i giochi sono duri, sono sempre i soliti a provarci, come ***Cid***:

Prima domanda: La probabilità che gli N punti siano tutti nell'emisfero Nord è: $1/2^N$.

Seconda domanda: La probabilità che almeno 6 punti su 9 si trovino su una stessa semisfera (scelta in modo opportuno, dopo aver segnato gli N punti casuali) ritengo che sia pari al 100%

Terza domanda: Suppongo che k valga 5, cioè che 5 punti scelti a caso abbiano probabilità pari a ½ di trovarsi su una stessa semisfera scelta in modo opportuno.

Quarta domanda: Suppongo che il valore atteso di K sia 7 (dove K è il numero di punti scelti a caso che riesco a confinare su una semisfera).

Ultima domanda: Il metodo di Rudy non genera una distribuzione di probabilità proporzionale alla superficie. Chiamando h la distanza tra un piano parallelo all'equatore e il polo Nord, si ricava che l'area della calotta sferica ottenuta è: $2 \cdot R \cdot \pi \cdot h$. Quindi per avere una distribuzione di probabilità uniforme occorre attribuire ad h un valore casuale compreso tra 0 e 2·R.

- Se $h \leq R$ l'angolo di latitudine sarà: $\arcsin\left(1 - h/R\right)$ di latitudine Nord.
- Se $h \geq R$ l'angolo di latitudine sarà: $\arccos\left(1 + \dfrac{R-h}{R}\right)$ di latitudine Sud.

Dimostrazione

Prima domanda

La soluzione si ricava immediatamente considerando che abbiamo N eventi indipendenti, aventi ciascuno probabilità uguale a ½ di verificarsi.

Seconda domanda

Risolvo per approssimazioni successive:

La probabilità che almeno 6 punti si trovino sull'emisfero Nord o sull'emisfero Sud è pari alla probabilità di non avere 4 o 5 punti sull'emisfero Nord.

Probabilità di avere esattamente 4 punti sull'emisfero Nord = $126/512$.

Probabilità di avere esattamente 5 punti sull'emisfero Nord = $126/512$.

Quindi la probabilità che almeno 6 punti si trovino sull'emisfero Nord o sull'emisfero Sud è: $1-\frac{126}{512}-\frac{126}{512}=\frac{65}{128}$.

La probabilità che, dividendo la terra in due emisferi tramite un piano passante per i due poli, almeno 6 dei 9 punti si trovino sullo stesso emisfero è pari a $\frac{255}{256}$ (circa 99,6%), quindi la probabilità che almeno 6 tra i 9 punti scelti casualmente si trovino sullo stesso emisfero è superiore a $1-\left(1-\frac{65}{128}\right)\cdot\left(1-\frac{255}{256}\right)=1-\frac{63}{32768}=\frac{32705}{32768}$ (quindi supera il 99,8%).

Intuitivamente direi che la probabilità è uguale al 100%, in quanto non riesco ad immaginare una disposizione di 9 punti su una sfera che non permetta di trovare una semisfera che ne contenga almeno 6.

Terza domanda

I primi 3 punti hanno chiaramente probabilità uguale a 1 di trovarsi dentro una semisfera, in quanto per 3 punti passa una circonferenza che non può essere più grande del cerchio massimo e quindi si trova all'interno di una semisfera.

Il quarto punto ha chiaramente probabilità maggiore di 0.5 di trovarsi dentro una semisfera. Suppongo che per k=5 i k punti scelti a caso abbiano probabilità pari a ½ di trovarsi su una stessa semisfera scelta in modo opportuno.

Quarta domanda

Suppongo che il valore atteso di K sia 7, in quanto i primi 3 punti hanno probabilità uguale a 1 di trovarsi sulla stessa semisfera e sulla base delle seguenti ipotesi:

il quarto punto abbia probabilità uguale a 0,75

i primi 5 abbiano probabilità uguale a 0,5 di trovarsi su una stessa semisfera

i primi 6 abbiano probabilità uguale a 0,33 di trovarsi su una stessa semisfera

i primi 7 abbiano probabilità uguale a 0,2 di trovarsi su una stessa semisfera

...

Ultima domanda

> Ho risposto ragionando sulla formula dell'area della superficie della calotta sferica ed applicando le nozioni base della trigonometria.

Qualcosa è giunta anche da ***Sergio***, pubblicheremo in un secondo tempo se possiamo. Nel frattempo vi auguriamo un buon settembre!

5. Quick & Dirty

Come sapete Rudy è particolarmente fiero del fatto di aver trovato il modo per costruire i poliedri regolari (e anche qualche semiregolare) con l'*origami*. È un po' meno fiero del fatto che sovente, oltre a risultare scarsamente regolari, siano anche instabili su alcune facce.

Pronto a trasformare ogni errore in un vantaggio, adesso sta cercando di capire che forma dovrebbe avere un poliedro instabile su ogni faccia. Secondo voi, come viene?

> *Rudy non ce la farà mai. Se esistesse un poliedro di questo tipo, sarebbe un'ottima macchina per il moto perpetuo.*

6. Zugzwang!

6.1 Onyx

Questa volta non abbiamo il coraggio di chiedervi di giocarlo; questa spiegazione ha unicamente un fine didascalico per chiarire come vengano inventati i giochi di scacchiera.

Siccome dobbiamo raccontare la storia, tanto vale cominciare dai personaggi e dall'epoca. L'idea di questo gioco è nata nella testa di ***Larry Black*** dalle parti del 1984, momento nel quale come *tutti* sanno ci fu una letterale mania per i giochi di connessione dotati di regole di cattura; lui sostiene di averci messo undici anni ad inventare Onyx, ma noi siamo convinti che non abbia proprio passato tutto il tempo a pensare al gioco. Il Nostro iniziò sperimentando con la scacchiera da *Hex* ed accorgendosi che un reticolo triangolare dava poche possibilità di sviluppo, nel momento stesso nel quale venga introdotta la possibilità di catturare i pezzi avversari; sembrava obbligatorio il passare ad una scacchiera di tipo quadrato, ma il guaio era che lì il gioco era già stato inventato; trattasi, se non ve ne siete accorti, del *Go* (chi ha detto "La dama!" si sta complicando inutilmente la vita; stiamo cercando qualcosa di semplice, niente regole di movimento e promozione).

Il guaio dei giochi a scacchiera quadrata (*Go* incluso) è che hanno un paio di vicoli ciechi; ad esempio, nel *Go* un vicolo cieco può assumere la forma di una posizione del tipo "Io conquisto un territorio e tu lo riconquisti alla mossa dopo e io lo riconquisto a quella dopo…" e avanti all'infinito, nota come *ko*, che è proibita[15]. Un altro caso può essere di aver raggiunto una posizione in cui due o più caselle diventano particolarmente "indesiderabili" da giocare per entrambi i giocatori (*seki*, sempre nel *Go*).

[15] Succede una cosa del genere anche in altri giochi; prendete la regola dello *scacco perpetuo* degli scacchi, ad esempio.

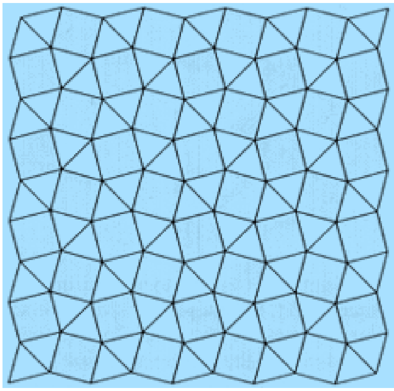


Figura 1 – La scacchiera nuova

Larry, a questo punto, ha lasciato perdere e si è dato alla progettazione di altri giochi quando, un giorno, si è ritrovato a lavorare con una scacchiera del tipo indicato qui a fianco e ha pensato che, *non essendoci quadrati contigui*, in questo aggeggio non erano possibili né il *ko* né il *seki*; ha ripreso in mano la sua vecchia idea del gioco di connessione con cattura e ha provato a vedere cosa veniva fuori.

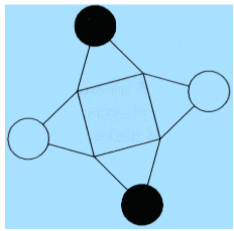


Figura 2 – Patta!

Purtroppo, anche in questo aggeggio sono possibili delle posizioni di *ko* o di *seki* (ve ne indichiamo una nella *Figura 2*), e disgustato il Nostro stava per mollare tutto quando gli è venuta un'idea: "…e se tracciassi le diagonali al quadrato?"

Happy end: la cosa funziona, anche se bisogna complicare un po' le regole, e il rischio è che il primo giocatore abbia un vantaggio troppo grande.

"Rudy, guarda che non ce le hai ancora date, le regole! Ti decidi?" Vero. Ma non fatemi di nuovo citare Thurber. Va bene, eccole.

- Onix è un gioco per due giocatori
- L'attrezzatura di gioco consiste in una scacchiera da Onyx e un set sufficiente di pezzi bianchi e neri.
- Prima dell'inizio del gioco, quattro pezzi per ogni colore sono inseriti nelle posizioni indicate in *Figura 3*.
- La scacchiera da Onyx consiste di triangoli e quadrati collegati tra loro; i quadrati sono ulteriormente divisi in quattro triangoli. Una mossa consiste sempre nel posizionare un pezzo del proprio colore in un punto di intersezione al centro di un quadrato o in uno degli angoli di un quadrato o triangolo; però un pezzo non può essere posizionato al centro di un quadrato se sono presenti dei pezzi ai vertici del medesimo quadrato.
- Una volta piazzati sulla scacchiera i pezzi non possono muoversi; possono però essere catturati, nel qual caso vengono restituiti al giocatore che li aveva giocati.

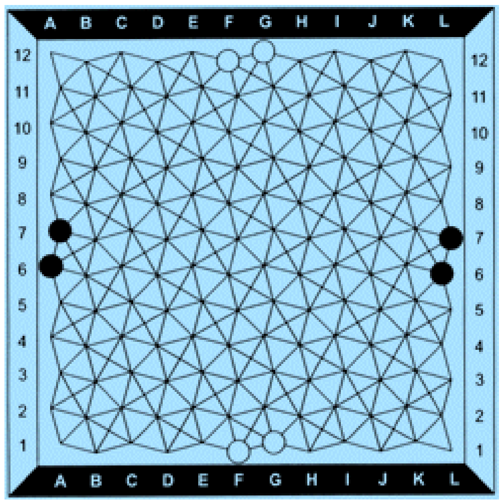


Figura 3 – Posizione iniziale

- Se il centro di un quadrato è libero e un giocatore gioca un pezzo su un angolo del quadrato in modo tale che entrambi i giocatori occupino angoli diagonalmente opposti del quadrato, allora i due pezzi dell'avversario sono catturati (primo schema in *Figura 4*)

- È possibile catturare due coppie con una mossa; in questo caso, tutti e quattro i pezzi avversari sono rimossi dalla scacchiera (secondo schema in *Figura 4*).

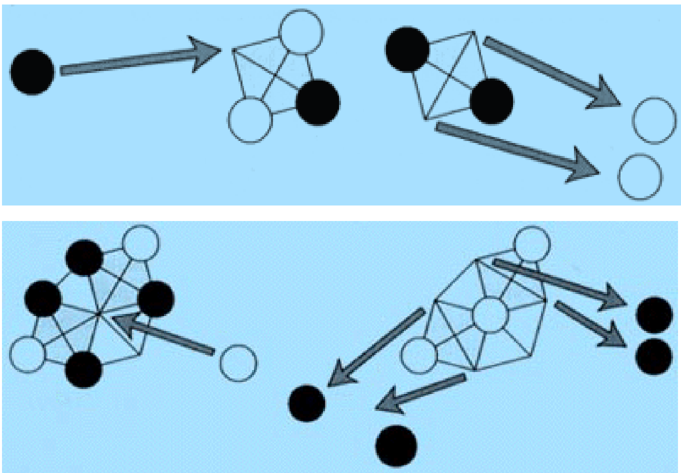


Figura 4 – Finalmente si cattura

- All'inizio del gioco il bianco e il nero non sono assegnati ai giocatori; uno dei due giocatori effettua una mossa per il nero e l'altro giocatore decide se tenere il nero o giocare con il bianco; il giocatore che ha il bianco esegue la mossa successiva, e da quel momento i colori sono associati ai giocatori.
- Ognuno dei quattro lati della scacchiera è composto da undici punti terminali; i punti d'angolo appartengono ad entrambi i lati adiacenti della scacchiera; scopo del nero è comporre una catena continua che comprenda almeno un pezzo sul lato superiore e almeno un pezzo sul lato inferiore; scopo del bianco è comporre una catena continua che comprenda almeno un pezzo sul lato sinistro e almeno un pezzo sul lato destro; il gioco termina quando uno dei due giocatori raggiunge lo scopo.

Come vi dicevamo, non ci aspettiamo che lo giochiate; vorremmo però farvi notare che se prendete l'ultimo gioco che vi abbiamo raccontato (*Octagons*, RM_112), tracciate il suo duale sostituendo punti agli spazi, ruotate il tutto di quarantacinque gradi ottenete una cosa del tipo di quella mostrata in *Figura 5*; i triangoli sono isosceli, ma dovreste riconoscerla!

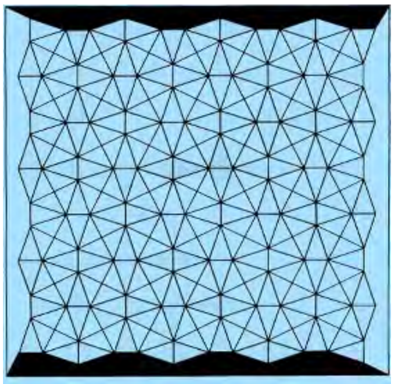


Figura 5 – Ricorda qualcosa?

Ossia, i due giochi hanno una grossa parentela; i quadrati della vecchia scacchiera, ad esempio, sono diventati i centri dei quadrati.

Ossia, se avete avuto la pazienza di costruirvi la scacchiera da Onyx ma Onyx vi sembra troppo complicato, potete sempre giocare a Octagons; ogni tanto, se volete complicarvi la vita, una partita ad Onyx può anche scapparci.

Insomma, una scacchiera, due giochi. Vi ricorda qualcosa, una situazione di questo genere?

Noi? Octagons. Siamo delle menti semplici che si accontentano di poco.

7. Pagina 46

Visto che il numero 222.222 non è un quadrato perfetto, l'intero cercato deve essere nella forma $222222a_7a_6\dots a_n$, dove le cifre $a_7, a_8, \dots, a_n$ devono essere determinate.

Supponiamo, come primo caso, che *n* sia pari, ossia $n = 2k$; l'abituale metodo per la risoluzione delle radici quadrate ci porta a:

```
√ 22 22 22 a7a8...a2k-1a2k | 471 405
  16                       |-----------
  ----                     | 87x7=609
   6 22                    | 941x1=941
   6 09                    | 9424x4=37696
   ------                  | 942805x5=4714025
     13 22
      9 41
     ------
       3 81 a7a8
       3 76 96
       ----------
          x1 x2x3 a9a10 a11a12
           4  71   40    25
          ---------------------
```

Si noti che la quinta cifra del risultato deve essere zero in quanto x_1 può essere solo 4 o 5; con analogo ragionamento si mostra che a sesta cifra deve essere 5 per terminare la radice quadrata.

Il resto della radice quadrata diventa pari a zero se $a_9 = 4$, $a_{10} = 0$, $a_{11} = 2$ e $a_{12} = 5$; inoltre, deve essere $x_1 = 4$, $x_2 = 7$, $x_3 = 1$; quindi il più piccolo intero con un numero pari di cifre soddisfacente le condizioni date risulta:

$$222\,222\,674\,025 = 471\,405^2 .$$

Supponiamo ora che il numero cercato abbia un numero di cifre dispari, ossia che sia $n = 2k + 1$; con il medesimo metodo, otteniamo:

```
√ 2 22 22 2a7 a8a9...a2ka2k+1 | 149 071 ...
  1                           |-------------
 ----                         | 24x4=96
  1 22                        | 289x9=2601
    96                        | 29807x7=208649
  ------                      | 298141x1=298141
    26 22
    26 01
    ------
       21 2a7 a8a9
       20 86   49
       -------------
          x1x2 x3x4 a10a11
          29   81   41
          ----------------
          x5x6 x7x8 x9x10 a12a13
```

Ora, il numero x_1x_2 non può essere minore di $119 - 86 = 33$ e non può essere maggiore di $129 - 86 = 43$, e la sesta cifra del radicale deve essere 1. Quindi l'estrazione della radice non termina qui, ma continua: il radicale avrà almeno sette cifre, e sarà maggiore del caso precedente che rappresenta infine la nostra soluzione.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Make Money Fast! [01] - Basics

Solo a leggere il titolo, i conoscitori della situazione economica della Redazione a questo punto si sono già resi conto che questo è un articolo eminentemente teorico. Il primo problema, comunque, riguarda la *consecutio temporum*. Vi prometteremo di scrivere questo pezzo, e quindi cominciamo adesso; molto probabilmente sarà a puntate, e prima della fine ve lo avremo promesso.

Allora, parliamo di soldi; o meglio, di cosa fare con i soldi per aumentarne la quantità. Trattandosi di un campo nel quale la nostra ignoranza è pressoché totale, la prenderemo molto calma.

Supponiamo depositiate in banca al tempo $t = 0$ un capitale di 1 Euro ad un rateo di interesse r . A questo punto, l'ammontare del vostro capitale aumenterà ad un ritmo:

$$\frac{dB}{dt} = rB$$

che è un'equazione differenziale ragionevolmente semplice da risolvere; imponendo la condizione iniziale $B(0) = 1$ (l'euro che avete versato) si ricava:

$$B(t) = e^{rt}$$

E, almeno sin quando ci fidiamo dell'esponenziale (leggasi: sin quando il tasso di interesse è abbastanza alto), siamo tutti contenti.

Un deposito in banca è un esempio di *asset* finanziario *senza rischio*, ossia indipendente dall'*andamento del mercato*. Ora, siccome le banche non sono degli enti benefici, ci si chiede come facciano a prendervi dei soldi e a rendervene di più: molto semplicemente, a voi danno pochi soldi in più per i vostri e, una volta che hanno i soldi, li prestano (a tasso decisamente più alto di quello che danno a voi) a qualcuno che intende compiere delle operazioni rischiose ma che forniscano molti soldi alla svelta; siccome le operazioni sono rischiose, ci si aspetta rendano più di un conto in banca (altrimenti sarebbe da stupidi) ma, essendo rischiose, per rischiare il meno possibile le banche non prestano tutto in un unico campo, ma tendono a diversificare i loro investimenti.

Vediamo quali possono essere questi altri investimenti.

Un modo leggermente più rischioso del semplice deposito in banca è quello di investire in *bond o buoni*: in pratica, se tutto va bene vi ridanno i soldi (anzi, ve ne danno qualcuno in più); la differenza rispetto al conto in banca è che il pagamento avviene a date ben definite, dette la *maturità* del buono; sono considerati ragionevolmente sicuri, tranne per il fatto che l'ente di emissione potrebbe saltare (*default*) qualche pagamento o, peggio ancora, potrebbe proprio decidere di non pagarli più, trasformandoli in carta straccia[16].

Un privato, ad esempio un'azienda che abbia necessità di capitali per investire, può decidere di vendere *azioni* (*stock* o *shares*, se preferite l'inglese); in pratica, vi comprate un pezzetto di azienda, e vi assicurate una partecipazione ai profitti; non solo, ma se l'azienda aumenta di valore, potete sempre rivendere le azioni ad un prezzo maggiore di quello al quale le avete comprate, garantendovi un guadagno; evidentemente, qui il rischio nasce dal fatto che l'andamento economico di un'azienda è impredicibile, e quindi tanto per cominciare non sapete con quanto vi ritroverete alla fine, e secondariamente potreste ritrovarvi meno di quanto avete pagato. Giusto per complicarci la vita,

[16] Si veda, alcuni anni fa, il caso dei *Bond Argentini*.

descriviamo questa variabilità attraverso *due* termini: una parte *predicibile*, indicata da μ e un termine "fluttuante" di rumore, indicato con $\xi(t)$: il guadagno risulta allora

$$\frac{dS}{dt} = [\mu + \xi(t)]S$$

E basandovi sull'esempio precedente potete integrare l'equazione e calcolare quanto vi ritrovate in tasca alla fine.

Egoisticamente, vorremmo trovare il modo di guadagnarci anche quando l'azienda sulla quale investiamo sta perdendo punti. Logicamente, la cosa comporta un certo rischio, in quanto altrimenti sarebbe tutto troppo semplice; quel pescecane del nostro consulente finanziario ha già pronti un paio di "oggettini" fatti apposta per situazioni di questo genere.

Questi oggetti sono noti come *opzioni* (*options*) o *futures*: viaggiano in due sensi, vediamone metà e poi ci complicheremo la vita. Definizione teorica:

> Un'opzione europea[17] di *call*[18] con prezzo di esercizio (*strike price*) K e maturità (*expiration date*) T rispetto ad un *asset soggiacente* S è un contratto che dà il diritto di comprare l'asset soggiacente S al momento T.

Ossia, voi vi mettete d'accordo con qualcun altro e gli dite che aprite un'opzione di *call* a sei mesi per due euro l'una su determinate azioni. Se tra sei mesi le azioni valgono dieci euro l'una, problemi suoi: deve vendervele a due euro, e i soldi in più quando rivendete le azioni sono tutti vostri; se invece tra sei mesi quelle azioni valgono meno di due euro, non esercitate l'opzione e vi tenete i vostri soldi (o comprate le azioni sul mercato azionario, che costano meno).

Se a questo punto vi sorge il dubbio di aver trovato la gallina dalle uova d'oro guadagnandoci in ogni caso, colpa mia: non vi ho detto che per comprare l'opzione pagate "un tot", e il problema che vogliamo esaminare consiste proprio nel determinare questo "tot". Cominciamo con qualche notazione.

Supponiamo di esercitare un'opzione di *call*; in questo caso, avremo un guadagno pari a $max(S-K;0)-C_0$, dove con C_0 abbiamo indicato il "tot" di cui sopra: insomma, i nostri due pescecani hanno visioni completamente diverse del mercato (secondo chi compra l'opzione sale, secondo chi la vende scende), ma dobbiamo giustappunto determinare la costante in modo tale che nessuno dei due abbia una possibilità maggiore di vincere. Tra l'altro, una volta che avete sottoscritto un'opzione, nulla vi vieta di venderla, e qui si procede come per le azioni, ossia chi offre di più; capite quindi che determinare C_0 diventa una faccenda decisamente importante anche se non intendete esercitare l'opzione direttamente ma (come succede nella maggior parte dei casi) rivenderla. Per capirla, però, dobbiamo prima studiare qualche altro metodo per fare soldi, o meglio dobbiamo studiare quali categorie di investitori si occupano di questi aggeggi.

Un primo metodo è quello dell'*hedging*: supponiamo abbiate comprato delle azioni di un qualche tipo, ma siate preoccupati dal fatto che il mercato nel futuro possa scendere; potreste vendere le azioni e tenervi i soldi, ma esiste un modo migliore: comprate un'opzione *put* sulle vostre azioni. In questo modo, se il mercato scende potete sempre venderle al prezzo attuale (guadagno zero) mentre se sale potete tenervele, con il guadagno corrispettivo. Insomma, qui l'opzione funziona come un'assicurazione: ad un

---

[17] Non trattiamo le opzioni *Americane*: l'unica differenza è che in questo secondo caso potete esercitare l'opzione in qualsiasi momento *successivo* alla scadenza.

[18] Esistono anche le opzioni di *put*, in cui vi impegnate a vendere azioni ad un prezzo concordato: cambiano solo i segni, quindi per semplificarci la vita non le trattiamo sin quando non diventa indispensabile.

piccolo costo (giustappunto, C_0) vi garantite la sicurezza dal tracollo[19], quindi è un investimento a basso rischio.

Al contrario, gli *speculatori* prendono una posizione molto più decisa sul mercato, assumendo dei rischi; se siete convinti che un'azione nei prossimi mesi salirà, oltre alla normale possibilità di comprare l'azione, avete anche quella di comprare un'opzione *call* su di lei. Questo non solo costa molto meno che comprare l'azione[20], ma garantisce ritorni molto maggiori: con spesa minore, vi tornano in tasca gli stessi soldi di chi l'azione l'ha comprata sul serio.

Il terzo metodo è complicato, in quanto si basa su mercati diversi (non solo, ma solitamente in questo gioco si riesce ad entrare anche senza capitali); prima, però, un altro termine gergale: se vendete qualcosa che non avete (ma promettete di comprare, eventualmente in modo virtuale, in un prossimo futuro), si parla di *short sell*. Se nell'intervallo tra la vostra vendita e l'acquisto reale le azioni scendono, realizzate un guadagno, mentre nel caso contrario ci perdte; per questo, di solito, assieme allo *short sell* si piazza anche un'altra operazione per limitare il rischio.

Vediamo un esempio; tenete conto che la stessa azione, su mercati diversi, può avere diverse quotazioni, e proprio su questo si basa l'arbitraggio.

Supponiamo una certa azione sia valutata a New York 100 dollari; la stessa azione alla Borsa di Milano viene valutata 65 euro, con 1 euro pari a 1.5 dollari. A questo punto, senza impegnare una lira, facciamo uno *short sell* di N azioni a New York e, con i soldi guadagnati da questa vendita, compriamo N azioni a Milano; alla fine, abbiamo un guadagno di $(100–1.5\cdot65)N = 2.5\cdot N$ dollari (poco più di un euro e mezzo per azione); anche qui i soldi non si riproducono da soli, quindi tra commissioni e il fatto che la vendita su New York fa calare il valore (e l'acquisto su Milano lo fa salire: normale legge della domanda e dell'offerta), l'operazione "distrugge sé stessa", ossia nel momento stesso in cui la fate chi arriva secondo non ci guadagna: in un mercato "sano", infatti, di solito si dice che non deve esistere l'arbitraggio.

Bene, adesso andiamo in Borsa. Quotiamo al tempo t_0 un'azione di una Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa a 57 euro; supponiamo anche di sapere che al tempo t_1 ci siano due possibilità equivalenti: o l'azione sale al valore 65 euro, o scende al valore 35 euro, entrambi i casi con probabilità pari a ½; in questo caso, possiamo calcolare il valore atteso del guadagno μ a partire dalla formula $(1+\mu)S_0 = E[S_1]$, dove con $E[S_1]$ abbiamo indicato il valore atteso dell'azione alla fine del periodo; facendo i calcoli sul valore dato, $\mu = 0.035 = 3.5\%$.

Tutto chiaro, sin qui, vogliamo sperare. Ora, affinché sia conveniente comprare queste azioni, devono fornire un guadagno maggiore di quello che fornirebbe mettere i soldi in banca a tasso fisso; per comodità, supporremo che il tasso fisso mensile sia $r = 0.6\%$.

A questo punto, volendo giocare sul sicuro, acquistiamo un'opzione *call* con prezzo d'esercizio $K = 57$; si vede subito che in questo caso se l'azione va "su" (apice "s") avremo un guadagno al tempo dato pari a $C_1^s = 8$, mentre se l'azione va "giù" (apice "g"), avremo un guadagno $C_1^g = 0$, e che entrambi i valori sono equiprobabili; quello che ci interesserebbe, sarebbe stabilire il prezzo di questa opzione.

[19] Siccome però i soldi non crescono sugli alberi, qualcuno ci rimette: vedasi il tracollo degli *hedge funds* di qualche anno fa.

[20] Non l'abbiamo detto, ma vi preghiamo di notare che tutto questo lavoro si può fare anche in *completa assenza* delle azioni: se volete divertirvi, aprite con qualche collega delle opzioni del valore di un caffé, basandovi sulla pagina borsistica dei quotidiani.

Il metodo più semplice per fare il conto è noto come "*argomento delta-hedging*"; supponiamo di avere un portfolio formato da un'opzione C (le abbiamo viste sopra) e di andare corti su Δ azioni (il numero lo determineremo in seguito). Al tempo t questo portfolio varrà:

$$V_t = C_t - \Delta S_t \,,$$

Dove il segno negativo indica che siamo andati corti, ossia che, in pratica, ci siamo "fatti prestare" Δ azioni dal mercato; grazie a questa formula possiamo calcolare i valori del portfolio sia al tempo $t = 0$ che ai due casi del tempo $t = 1$; abbiamo infatti:

$$\begin{aligned} V_0 &= C_0 - 57\Delta, \\ V_1^s &= 8 - 65\Delta, \\ V_1^g &= -53\Delta. \end{aligned}$$

Adesso arriva il trucco: scegliamo un Δ tale che *il valore delle azioni sia lo stesso in entrambe le situazioni possibili di mercato, ossi imponiamo* $V_1^s = V_1^g$ e calcoliamo il valore; si vede facilmente che deve essere $\Delta = 2/3$, e quindi questo valore ci permette di *eliminare il rischio*, in quanto guadagniamo la stessa cifra in entrambi i casi. Ma se non c'è rischio, questo deve essere equivalente a mettere i soldi in banca a tasso fisso, e quindi deve dare lo stesso guadagno (altrimenti potrei costruire un arbitraggio). Da cui, sostituendo i valori:

$$(1 + r)[C_0 - \Delta S_0] = -\Delta S_1^g \,,$$

Dove l'incognita è C_0 (prezzo dell'opzione al momento dell'acquisto) ed è facilmente calcolabile, visto che tutti gli altri valori sono noti: $C_0 = 2.88$ euro.

Per adesso giocate con questi, che il mese prossimo partiamo da tutto un altro punto.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms