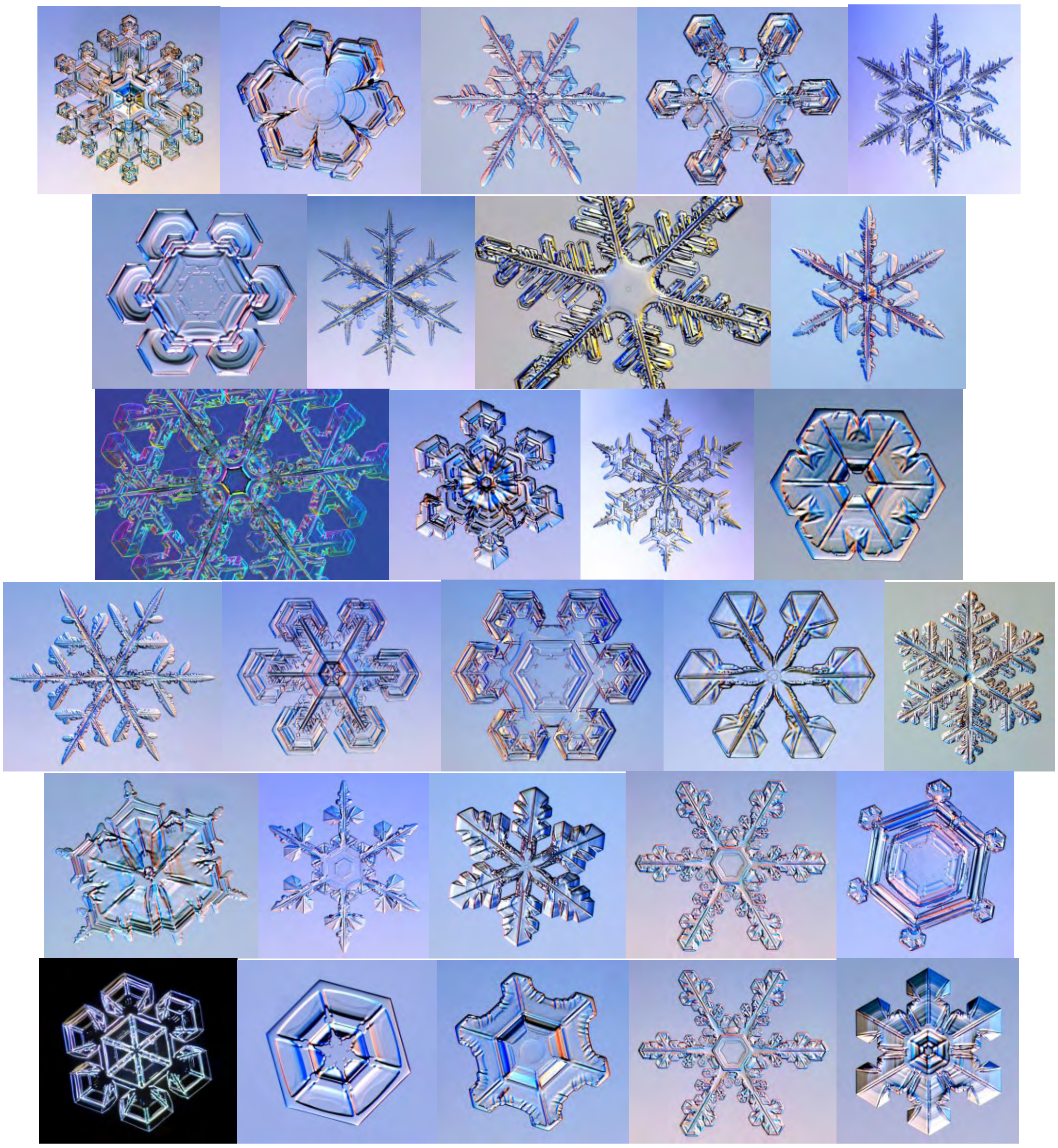
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 115 – Agosto 2008 - Anno Decimo



Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com
RM 114 ha diffuso 1953 copie e il 30/07/2008 per Google eravamo in 7'550 pagine.

Cosa c'è di più effimero di un fiocco di neve in agosto? Probabilmente, un fiocco di neve in agosto sotto il microscopio. ***Kenneth G. Libbrecht***, comunque, ci tiene a sottolineare che tutti questi sono naturali; considerato che lavora al CalTech, la cosa non è da poco. Se ne trovate due uguali, vuol dire che ci siamo sbagliati con il copia e incolla.

1. La Ventinovesima e la Tredicesima Olimpiade

La battaglia di Waterloo è stata vinta
sui campi da gioco di Eton
(Arthur Wellesley, duca di Wellington)

Quelli della vecchia scuola si sono stupiti di
vederci tenere le nostre assisi in piena Sorbona;
essi hanno sentito che noi siamo ribelli,
e che finiremo per gettare a terra l'edificio tarlato.
Cela est vrai, Messieurs: nous sommes des rebelles
(Pierre de Coubertin, Congresso di Parigi, 1894)

Parleremo di Olimpiadi.

Argomento non estremamente originale nel mese delle Olimpiadi estive 2008, ma l'originalità è merce rara e preziosa, durante gli afosi mesi estivi. Del resto, l'originalità non deve essere sempre ricercata a tutti i costi: talvolta, anche la familiarità della ripetizione ha i suoi vantaggi, il suo potere rassicurante. Del resto, il lettore che legge queste righe, quantomeno se è un lettore abituale di RM, sa già benissimo che la storia finirà in qualche modo (quasi sempre in modo molto artificiale, a dire il vero) col toccare il mondo della matematica, e che da lì si userà il pretesto per parlare di un matematico e della sua vita. Quindi tanto vale annunciare fin dall'inizio che parleremo delle Olimpiadi. Però per arrivarci bisogna partire da Olimpia, e scoprire nel frattempo perché il titolo nomini due olimpiadi invece di una, e magari nel frattempo cercare di capire verso quali matematico si stia parando. Del resto, chi non è interessato sa bene (sempre nell'assunzione iniziale, tutt'altro che scontata, che si tratti di un *habitué* della rivista) che può sempre punto saltare rapidamente fino alla prima foto di un matematico e magari limitarsi a leggere la vera biografia che, come sempre, parte da quel punto. Se invece ha intenzione di andare più lento (quasi una contraddizione, con il *Citius* olimpico), può prendere la torcia olimpica qui, accenderla al braciere di Olimpia, e condurla fino in fondo.

1 *Il Braciere Olimpico.*

I Giochi Olimpici sono spesso detti Olimpiadi, ma non vanno confusi con l'olimpiade[1], che tecnicamente è l'intervallo di quattro anni che separa un evento dall'altro: non per niente anche se alcune Olimpiadi non sono state celebrate vengono contate ugualmente nella successione. La tradizione dei giochi e della celebrazione degli atleti è antica, con ogni probabilità è perfino precedente all'ottavo secolo prima di Cristo, quando i Giochi Panellenici riunivano tutto il mondo greco intorno ad Olimpia, Delfi, Corinto e Nemea per un evento che si ripeteva ogni quadriennio – e da qui il nome dato al lasso di tempo – e celebrava l'eccellenza dell'uomo. Per l'occasione una pace sacra era dichiarata tra le città greche, notoriamente più litigiose di un branco di scimmie, per permettere agli atleti e agli spettatori di raggiungere i luoghi dei giochi, partecipare all'evento e tornare sani e salvi alle loro case. I giochi di ogni città erano dedicati ad una particolare divinità: Poseidone (dio dei mari e dei cavalli) patrocinava i Giochi Istmici che si tenevano a Corinto; ad Apollo (dio della luce e della ragione) erano dedicati i Giochi Pitici, che si tenevano a Delfi; il nome deriva infatti dalla Pizia, la più importante sacerdotessa del dio, che vaticinava proprio nel tempio apollineo di Delfi. Zeus (padre di tutti gli dei) era invece il destinatario sia dei giochi Nemei, così detti perché si svolgevano

[1] E, a dirla tutta, non vanno neanche confusi con Olimpiade, energica mamma di Alessandro Magno. Ma è vero che questa confusione non si fa molto spesso.

a Nemea, sia dei giochi Olimpici, che prendevano il nome da Olimpia anche se si svolgevano il tutta la regione circostante, l'Elide[2]. Il motivo per cui quelli di Olimpia sono diventati i più celebri già nell'antichità è probabilmente insito nella natura stessa del luogo: era un sito denso di sacralità, più che una semplice città, con una vasta parte riservata e dedicata a templi, i più importanti dei quali erano quelli affiancati di Era e di Zeus; in questo, tra l'altro, era custodita la stupenda statua crisoelefantina di Zeus scolpita da Fidia, che era annoverata tra le Sette Meraviglie del mondo antico. Ovunque si trovavano altari per sacrifici, e la via principale era costellata dai dodici *thesauroi*, i tempietti riservati alle città partecipanti ai Giochi dove venivano custoditi i trofei vinti dalle città, oltre alle statue e agli ornamenti dedicati agli dei. La parte sacra era circondata da mura, e all'esterno si trovava la parte secolare, con le aree per le competizioni, gli edifici per ospitare amministratori, ospiti, atleti, mercanti e tutto quello che l'organizzazione del tempo poteva permettersi. Il numero di persone che potevano accorrere per i giochi olimpici era incredibile per quei tempi, e del tutto stupefacente anche ai giorni nostri, se si considerano le difficoltà logistiche del tempo: fino a quarantamila.

I greci avevano un concetto di atleta (concetto peraltro strettamente riservato ai maschietti) che esaltava l'equilibrio tra mente e corpo. Gli sportivi si esercitavano e gareggiavano completamente nudi[3] affinché fosse evidente l'armonia tra corpo e spirito, un concetto successivamente espresso dai romani come *mens sana in corpore sano*; e del resto nelle palestre greche i giovani imparavano davvero non solo a gareggiare, ma anche musica, aritmetica, e grammatica.

Non dovrebbe stupire quindi che l'evento avesse regole rigorose, e che la gloria fosse il solo premio per i vincitori: ricevevano infatti una corona d'olivo, un fiocco di lana rossa e una fronda di palma, ma tornavano a casa per essere onorati dai concittadini e spesso ottenere cariche pubbliche e monete con la loro effige o statue e composizioni poetiche per la celebrazione delle vittorie. Chi veniva preso a barare era costretto a pagare multe per produrre statuette che costeggiavano la strada verso la zona dei giochi, con il nome del mascalzone ben visibile: una punizione sì pecuniaria, ma che colpiva molto più l'onore che il portafoglio.

Purtroppo ogni buona tradizione ha una fine, e i romani, che pure si erano per lungo tempo uniti alle celebrazioni, furono proprio quelli che le annullarono; Teodosio I, imperatore cristiano della *pars orientalis* proibì l'evento intorno al quarto secolo dopo Cristo, perché pagano. E proibì anche il conteggio degli anni attraverso le Olimpiadi, come si era fatto fino a quel momento.

Olimpia, senza più i giochi, perse d'importanza e divenne un piccolo centro agricolo che fu definitivamente abbandonato intorno al settimo secolo: fu ritrovato sotto forma di sito archeologico solo nel 1776. Non a caso il luogo fu scoperto da un inglese, perché nel Regno Unito c'era un forte revival dello spirito olimpico e degli studi ellenici, e nei primi dell'Ottocento si cominciò a sentire il desiderio di vivere eventi unificanti e pacifici un po' in tutta Europa. Ad Atene il filantropo greco Evangelos Zappas sponsorizzò una vera e propria riedizione dei giochi olimpici nel 1859 a cui parteciparono atleti ellenici e dell'impero ottomano; nel frattempo il barone Pierre de Coubertin[4], che si era fino a quel punto occupato dell'educazione fisica francese e della funzione importante della disciplina sportiva nella preparazione dei giovani universitari, si accorse che il tempo era adatto per restaurare la tradizione olimpica. Nel giro di pochi anni de Coubertin e Zappas fondarono

[2] Molte più informazioni su www.olympic.org, sito ufficiale del Comitato Olimpico Internazionale, disponibile in francese ed inglese. Se invece a Losanna ci passate non solo virtualmente, ma fisicamente, vi consigliamo di visitare il Museo Olimpico, è una sorgente di ispirazione per visitatori di tutte le età.

[3] Per proteggere la pelle dal sole (e dalle bacchettate degli allenatori) si ricoprivano il corpo di olio di oliva e sabbia fine.

[4] Lo abbiamo già nominato in queste pagine, e proprio per parlare di Olimpiadi, in RM063.

quello che oggigiorno è il Comitato Olimpico Internazionale, la cui prima operazione fu proprio la prima edizione delle Olimpiadi Moderne, nel 1896 ad Atene. Non si sa bene come venne scelta Atene, ma pare che l'intenzione di de Coubertin fosse quella di avere i primi giochi olimpici dell'era moderna a Parigi in corrispondenza dell'Esposizione Universale del 1900, ed essendo il comitato interessato a cominciare la serie di eventi un po' prima, la capitale greca era una soluzione che avrebbe potuto accontentare tutti, compresa la tradizione.

Le nazioni partecipanti ai primi Giochi Olimpici Moderni erano quattordici[5], nove gli sport per quarantatre eventi e duecentoquarantuno atleti, tutti uomini. I premi distribuiti furono medaglie d'argento e rami d'olivo, anche se in seguito il comitato olimpico distribuì retroattivamente le classiche medaglie d'oro, argento e bronzo per non avere divari con le olimpiadi successive. L'evento fu reso memorabile dalla vittoria nella maratona, la disciplina più attesa, dell'atleta greco, Spiridion Louis, nel tradizionale gonnellino bianco dei militari greci.

Incredibilmente, la seconda Olimpiade moderna, quella di Parigi del 1900, l'evento che avrebbe dovuto consolidare la forza dei Giochi in corrispondenza del cambio del secolo e nella patria del suo promotore, fu un disastro totale. Gli eventi furono distribuiti su diversi mesi ed alcuni atleti non seppero nemmeno di aver vinto medaglie olimpiche se non dopo anni. Gaston Meyer, storico dello sport, scrisse che "*è un miracolo che l'olimpismo sia sopravvissuto ai Giochi del 1900 a Parigi*". Per fortuna il barone francese non si diede comunque per vinto, e continuò a combattere per la diffusione e la regolamentazione dei Giochi fino alla sua morte, nel 1937.

2 *Il logo dei giochi olimpici*

Ognuno dei simboli che oggi sono connessi alle Olimpiadi hanno a che fare con la passione di de Coubertin per lo sport come elemento unificatore delle nazioni, come strumento di pace ed equilibrio. Il logo, per esempio, fu una proposta dello stesso barone nel 1913, utilizzando il simbolismo degli anelli come unione (si pensi alle fedi matrimoniali) e continuità, ed utilizzando tutti i colori principali presenti nelle bandiere nazionali conosciute e tanti anelli quanti i continenti. La prima guerra mondiale interruppe ogni attività in proposito, ma il simbolo fu usato a partire dai Giochi del 1920 in Belgio.

Tra quelli che crearono più tradizioni e leggende olimpiche ci furono i tedeschi, che nel 1936, in piena fase di propaganda politica, decisero di far accendere una torcia negli antichi luoghi dei giochi panellenici, e farla trasportare con una vera e propria staffetta attraverso mezza Europa per giungere a Berlino. Da quel momento in poi il viaggio della fiaccola olimpica diventa un'autentica tradizione, mentre le torce diventano di volta in volta più tecnologiche e simboliche[6], così come l'accensione del braciere durante la cerimonia d'inaugurazione.

Curiosamente, la prima volta i tedeschi scelsero Delfi, e non Olimpia, per il rituale dell'accensione della torcia (rigorosamente senza fiammiferi, diamine: si concentrano i raggi solari per mezzo di lenti e specchi): a futura memoria dell'evento, vennero scolpiti gli anelli olimpici sulla pietra miliare che doveva indicare ai posteri il punto di partenza dei tedofori. La pietra non fu rimossa dopo la cerimonia, così quando alcuni visitatori britannici negli anni cinquanta la ritrovarono nacque la leggenda che i cinque anelli fossero un antico simbolo greco.

---

[5] In realtà le nazioni a quei tempi avevano una rilevanza relativa e gli atleti rappresentavano più che altro il loro club, per cui questo numero, anche a causa della situazione internazionale del momento, è opinabile.

[6] Si possono vedere proprio tutte al museo di Losanna, alcune ancora annerite per il fumo.

3 *Roma, 1960.*

L’inno olimpico, invece, è decisamente greco. Contiene le parole del poeta Kostis Palamas e la musica di Spyros Saramas, e non è un caso se fu eseguito proprio per la prima olimpiade greca; il guaio è che per le successive edizioni ogni paese pensò bene di crearsene uno su misura. Solo a Roma, nel 1960, l’inno originale venne reinstaurato definitivamente, ed è ancora oggi eseguito, a volte tradotto nella lingua locale.

A parte questi fondamentali simboli generali, ad ogni paese organizzatore è poi permesso crearsi un logo specifico per la specifica edizione d’Olimpiade, che richiami sia le tradizioni locali sia lo spirito olimpico di fratellanza e rispetto – ma per quello basta ricordarsi gli anelli. Da qualche tempo è ormai necessario (anzi quasi indispensabile) trovare delle mascotte; scotto che vale non solo per le Olimpiadi ma anche per ogni evento che si rispetti. Dubitiamo fortemente che de Coubertin avrebbe apprezzato (o anche solo immaginato) ma il *merchandising* è un’istituzione potente quasi quanto il CIO, ormai.

5 *Il Logo delle Olimpiadi 2008*


4 *Le Mascotte 2008*

Ci siamo appena risollevati dalle mascotte dei Campionati Europei[7] di Calcio, e già dobbiamo prepararci, per queste olimpiadi cinesi, a ricordare cinque mostriciattoli dotati dei sorridenti sorrisi inquietanti che hanno tutti i protagonisti dei cartoni animati dell’estremo oriente. Le mascotte sono cinque Fuwa, bambole della fortuna cinesi, ognuna caratterizzata da uno dei cinque colori dei cerchi olimpici ed associata a un elemento e a un animale della cultura cinese. In buon ordine: *Beibei* (colore blu, elemento acqua, animale pesce: il tutto ne fa un simbolo di prosperità); *Jingjing* (nero – metallo – panda, e perciò rappresenta l’attenzione per l’ambiente ed esplicitamente il WWF); *Huanhuan* (rosso – fuoco – fiamma olimpica, rappresenta la passione per lo sport); *Yingying* (giallo – terra – antilope tibetana, simbolo delle specie in via di estinzione); *Nini* (verde – legno – rondine, messaggera della primavera e della felicità). L’ordine non è affatto causale, perché le prime sillabe dei loro nomi lette di seguito formano la frase *Běijīng huānyíng nǐ* che in cinese mandarino significa "Benvenuti a Pechino".

Se forse le mascotte non entusiasmano lo spirito matematico, i simboli lo fanno ampiamente, e quindi è sempre il logo ad attirare la nostra attenzione: per ogni logo c’è una seria ricerca storica e si cerca di rappresentare al meglio la cultura non solo del paese organizzatore, ma anche quello specifico della città[8] organizzatrice.

Il logo ufficiale delle Olimpiadi è *Dancing Beijing* ed è l'ideogramma stilizzato della parola *jing* che significa "capitale" in cinese. Osservando il logo di queste Olimpiadi si possono fare diverse scoperte. Innanzitutto, non ci vuole molto a capire che la figura saltellante è anche il pittogramma (京) che rappresenta *Jing*, che è una metà del nome della città ospitante: è un “*Jing* danzante” che rappresenta *Bei-Jing*.

[7] *Trix* e *Flix*, ricordate nel caso aveste già dimenticato come si chiamavano. Coppia inseparabile perché uno austriaco e l’altro svizzero, uno col 20 e l’altro col 08 – e se non li lasciaste uniti non si capirebbe neppure perché – il cui nome è stato determinato da elezione popolare nei due paesi organizzatori. No, non vi diciamo quali erano le altre due possibili coppie di nomi.

[8] Chi ci segue ricorderà che queste pagine hanno anche ospitato il logo delle Olimpiadi Invernali 2006, svolte a Torino, che riportava stilizzata in rombi di ghiaccio la Mole Antonelliana.

Beijing in cinese si scrive (**北京**), che significa "capitale del nord", ed il simbolo danzante di prima è quello che significa *capitale*: tradizionalmente gli asiatici dell'est chiamano le città per quello che sono, senza troppi voli di fantasia: per esempio Nanchino, *Nanjing* (南京), vale "capitale del sud"; mentre Tokyo (東京), ma anche Đông Kinh (sempre 東京), antico nome di Hanoi, in Vietnam, "capitale dell'est", come mostra l'identità degli ideogrammi, che però venivano presumibilmente pronunciati in maniera diversa dai giapponesi e dai vietnamiti; mentre Kyoto (京都), non a caso contrapposta a Tokyo, vale "capitale dell'ovest". Quel che è certo è che sia la *capitale* a danzare nel logo delle Olimpiadi di quest'estate.

Il nome italiano, Pechino, sembra rimanere ugualmente misterioso, ma solo fino ad un certo punto; i missionari francesi in Asia nel XVI secolo avevano trovato un modo di tradurre in lettere latine la maggior parte dei suoni dal cinese, ma con una certa imprecisione anche dovuta alle difficoltà di pronuncia. Senza considerare che i nomi delle città, soprattutto di quelle interessanti, cambiano con frequenza insospettabile: a forza di spostamenti di capitale a beneficio di Nanchino, Beijing ha addirittura finito col perdere il *jing*, per ottenere in cambio qualcosa che produce 北平, ovvero *Pinyin* o *Beiping*, letteralmente "pace del nord"; gran bel nome, anche se frutto di variazioni imprevedibili. Comunque adesso capitale è, si trova ragionevolmente a nord e celebra le Olimpiadi Estive 2008, che sono appunto le ventinovesime della storia moderna.

Ventinovesima olimpiade moderna, ovviamente, non significa che sono stati celebrati ventinove Giochi, perché con buona pace di de Coubertin, che sperava di utilizzare le Olimpiadi per eliminare i conflitti, è finita che i conflitti hanno eliminato alcune Olimpiadi. Nel 1916 Berlino aveva vinto l'onore di ospitare la sesta edizione, e ci teneva tanto che andò avanti a prepararla malgrado la Grande Guerra fosse scoppiata e stesse mettendo a ferro e fuoco l'Europa; ma infine i Giochi numero sei vennero cancellati. Berlino, un po' anche perché ritenuta prima colpevole del massacro continentale, pur continuando ad offrire la sua candidatura non riuscì ad ottenere lo stesso onore per altri vent'anni, fino all''undicesima edizione del 1936, di cui si è già parlato.

Forse per sfortuna, forse per caso, più probabilmente per nemesi storica, le altre cancellazioni importanti furono proprio quelle che dovevano seguire i giochi tedeschi di Berlino. La Seconda Guerra Mondiale cancella senza pietà i dodicesimi e i tredicesimi Giochi Olimpici estivi, e la precisazione stagionale è necessaria perché dal 1924 esistono anche i Giochi Invernali, la cui quinta e sesta edizione[9] sono parimenti fagocitate dal conflitto. Fino all'edizione prebellica del 1936 i Giochi d'Inverno sono celebrati dalla stessa nazione organizzatrice dei giochi estivi[10], ma in seguito finirono separati completamente dal punto di vista organizzativo, tanto che dopo il 1994 furono messi in calendario sfasati di due anni rispetto ai giochi estivi[11].

Ma se la tredicesima olimpiade estiva non fu celebrata e la tredicesima invernale è ormai perduta nelle nebbie di Lake Placid, perché la si dovrebbe accoppiare nel titolo all'incombente ventinovesima? Per rispondere a questa domanda occorre tornare al 1960 e alle Olimpiadi di Roma, anzi occorre tornare proprio a quei tempi di guerra che avevano interrotto per ben due olimpiadi la tradizione dei Giochi.

---

[9] Per ragioni inspiegabili o quantomeno assai ben nascoste, visto che non siamo riusciti a trovarle, i Giochi Invernali, a differenza di quelli estivi, non conteggiano le edizioni cancellate. Le edizioni del 1940 e del 1944 non sono semplicemente computate, altrimenti gli ultimi Giochi di Torino avrebbero dovuto essere i XXII, e non i XX che invece sono stati.

[10] O quasi: non tutte le nazioni hanno un clima e un'orografia che consenta l'organizzazione dei giochi invernali. La città svizzera di Saint Moritz ha fatto da balia nel 1928 e nel 1948 a paesi poco montagnosi come l'Olanda e l'Inghilterra. La sincronia ha tremato con l'accoppiata Helsinki-Oslo per poi crollare per l'impazienza di Cortina d'Ampezzo, che non ha saputo aspettare Roma nel 1960 e si è fatta bella già nel 1956.

[11] Naturalmente, perché questo fosse possibile, era necessario avere due edizioni dei Giochi Invernali a distanza di soli due anni uno dal'altro: e infatti prima dell'edizione norvegese di Lillehammer nel 1994 si erano tenuti i giochi francesi di Albertville, nel 1992.

Nel primo dopoguerra, molti dei veterani erano inabili a ritornare alle vite che avevano condotto in precedenza; in particolare molti di coloro che avevano ricevuto un danno alla colonna vertebrale non riuscirono più a camminare. In Inghilterra (ma verosimilmente accadeva lo stesso anche in altri paesi europei) si cominciarono ad organizzare attività sportive che potessero coinvolgere atleti inabili, Finalmente, nel 1948 – e quindi dopo che un altro conflitto mondiale aveva causato altre menomazioni e altri dolori, il medico britannico Ludwig Guttmann organizzò una competizione a Stoke Mandeville, che da quell'anno in poi continuò ad essere un appuntamento fisso per i veterani sportivi inabili. Già dal '52 divenne competizione internazionale, coinvolgendo anche atleti olandesi; poi, quando nel 1958 il direttore del centro paraplegici dell'INAIL, Antonio Maglio, propose di disputare i noni giochi di Stoke Mandeville a Roma, che nello stesso anno avrebbe ospitato la diciassettesima olimpiade, non si rese conto di aver cominciato una catena di eventi che era destinata a proseguire a lungo: Guttmann non solo accettò, ma proprio a Roma incontrò la delegazione giapponese e prese accordi per le successive olimpiadi di Tokyo. Nel 1968 i Giochi olimpici si disputarono in Messico, ma gli Stoke Mandeville – snobbati dal governo messicano – ebbero luogo in Israele. In seguito seguirono sempre le dislocazioni dei giochi estivi.

6 *Stoke Mandeville a Roma, 1960*

Già a Roma i Giochi avevano coinvolto quattrocento atleti di ventitrè paesi diversi, e dalle amicizie e conoscenze create a Roma nasceva la ISOD, Organizzazione Internazionale Sportiva per Disabili, che si diede da fare per aumentare le tipologie di disabili che potessero partecipare ai giochi, includendo handicap della vista ed amputazioni, e anche danni celebrali e paraplegici. Ad ogni olimpiade l'importanza dei giochi per disabili cresceva, e crescevano gli stati che si affiliavano ai diversi comitati che nel frattempo si erano creati. Finalmente questi riuscirono ad unirsi e l'unione sfociò nel 1989 nel Comitato Paralimpico Internazionale, poco dopo che il CIO aveva finalmente definito ed accettato la parola "Paralimpico", usando la versione di "para" di origine greca, che significa "*a lato, accanto*". E proprio dopo il 1984 tutti i giochi di Stoke Mandeville hanno preso il nome di Giochi Paralimpici, termine esteso retroattivamente anche ai precedenti, a partire da quelli di Roma. Dal 1976 i Giochi Paralimpici sono anche invernali; quella di Torino è stata la loro nona edizione.

7 *Il logo dei giochi paralimpici 2008.*

E, ovviamente, il piccolo mistero del titolo si risolve perchè i tredicesimi giochi paralimpici sono proprio quelli di Beijing: il loro logo richiama il pittogramma "之", un atleta in movimento, i colori del logo paralimpico[12].

Rosso, blu e verde rispettivamente rappresentano infatti il sole, il cielo e la terra; in perfetto equilibrio, più o meno lo stesso messaggio del logo paralimpico, che vuole rappresentare l'equilibrio tra mente, corpo e spirito, in accordo con una versione definita solo recentemente (2003), ma del resto anche queste olimpiadi parallele sono ancora abbastanza giovani. Lo stesso motto "*Spirito in movimento*" ha anch'esso non più di una decina d'anni, mentre "*Citius, Altius, Fortius*" è un'altra delle invenzioni originali di de Coubertin, per indicare la ricerca dell'eccellenza, il superamento dei propri limiti per ottenere sempre di più: più veloce, più in alto, più forte.

8 *Il logo paralimpico*

[12] Sul significato letterale dell'ideogramma, invece, non riusciamo ad essere più espliciti: sappiamo che si pronuncia "zhi", ma l'unica traduzione che riusciamo a trovare in rete è la proposizione semplice "di". Mah.

Malgrado l'ancor tenera età, non c'è già più confronto tra quello che accadde a Roma e le odierne celebrazioni che, grazie alla tecnologia, permettono agli atleti di poter dare il meglio; e allo stesso tempo quella stessa tecnologia guida la ricerca per ottenere una vita migliore anche ai non atleti.


9 *Le discipline paralimpiche 2008*

Atletica leggera (47)
Badminton (5)
Baseball (1)
Beach volley (2)
Calcio (2)
Canoa/Kayak (16)
Canottaggio (14)
Ciclismo (18)
Equitazione (6)
Ginnastica (18)
Hockey su prato (2)
Judo (14)
Lotta (18)
Nuoto (34)
Nuoto sincronizzato (2)
Pallacanestro (2)
Pallamano (2)
Pallanuoto (2)
Pallavolo (2)
Pentathlon moderno (2)
Pugilato (11)
Scherma (10)
Softball (1)
Sollevamento pesi (15)
Tae-kwon-do (8)
Tennis (4)
Tennis tavolo (4)
Tiro a segno/volo (15)
Tiro con l'arco (4)
Triathlon (2)
Tuffi (8)
Vela (11)

10 *Le discipline olimpiche*[13] *a Beijing 2008*

I numeri, gli sponsor, l'attenzione dei media, le attività, le palestre, i metodi, le opportunità sono ancora molto diverse per atleti olimpici e paralimpici, ma la tendenza è quella giusta. rispetto ai 400 di Roma, nel 2004 ad Atene c'erano 3'806 atleti da 136 paesi.

I pittogrammi che descrivono i vari sport e le varie categorie di eventi richiamano la scrittura a china classica e in tutto c'è un tocco di cultura cinese, un mondo che cerca di aprirsi al resto del globo nel più diretto dei modi, parlando di sport invece che di politica ed economia. Ogni disciplina sportiva, ogni competizione, ogni evento avrà un plotone di cinesi istruito e preparato a tifare per tutti gli atleti, in modo allegro e vivace. E Pechino/Beijing sta cercando di ridurre lo smog dell'aria per la prima volta nella sua storia, con giornate a targhe alterne e campagne ecologiste.

Qualcuno potrebbe pensare che non sia un caso che regimi criticati siano pronti a spendere enormi quantità di denaro per dimostrare al mondo di essere quello che non sono, e qualcuno potrebbe fare confronti tra la propaganda del 1936 e quella di quest'anno per lo stesso evento. Noi ci limitiamo a notare quanto sforzo c'è stato negli ultimi anni per dare più visibilità all'evento paralimpico, e a tutto quello che significa, inclusa l'accettazione delle differenze.

11 *La mascotte dei giochi paralimpici 2008*

La mascotte paralimpica è Lele, una mucchina, e per i cinesi la mucca rappresenta la costanza e la cocciutaggine, la capacità di non arrendersi e andare avanti malgrado le avversità. Del resto non si può dire che la vita sia facile per gli atleti dell'olimpiade parallela, che spesso non ottengono sponsor e la maggior parte dei quali ha un lavoro a cui ritornare tra allenamenti e gare.

[13] Il numero delle discipline olimpiche è meno facile da determinare di quanto possa sembrare a prima vista. I simboli da noi riportati sono 32; molte fonti assicurano che gli sport in totale a Pechino siano 35, il sito ufficiale di Pechino 2008 ne elenca fino a 38. Questo dipende soprattutto dal fatto che la *canoa* si può duplicare (olimpica o slalom), la *ginnastica* può essere vista come singola , doppia o tripla (artistica, ritmica, tappeto elastico), e il *ciclismo* addirittura quadruplo (strada, pista, mountain bike e BMX). Il tutto senza parlare del *wrestling*, che si dimentica assai facilmente.

Malgrado i Giochi Olimpici non prevedano alcun premio in denaro e le medaglie abbiano un valore quasi esclusivamente simbolico (anche le medaglie d'oro sono in realtà d'argento placcato), da una quindicina d'anni ormai atleti professionisti possono parteciparvi, e le restrizioni alla sponsorizzazione e commercializzazione dell'evento vanno riducendosi ad ogni nuova sessione, per cui gli atleti delle nazioni più potenti vivono di sport e sponsor – fatto certo non valido per le nazioni più povere e per gli atleti paralimpici.

Se la fiaccola olimpica non ha mai significato che un messaggio di pace sia trasmesso per il mondo, l'idea di utilizzare uno specchio parabolico per accenderla al braciere di Olimpia, lo sforzo del migliaio di atleti e volontari che la portano attraverso altri paesi, il passaggio da una mano all'altra di un oggetto simbolico convengono un messaggio innegabile. De Coubertin aveva sperato di riunire il mondo ed eliminare le guerre, ma lo stesso strumento pacificatore divenne in diverse occasioni un metodo di propaganda politica con direzione opposta, come in occasione dei boicottaggi delle due opposte fazioni durante la guerra fredda. Eppure il messaggio trasportato in occasione delle olimpiadi da atleti eccellenti in diverse discipline, non è un semplice messaggio politico, né sportivo: è sempre ancora la volontà di migliorare se stessi come parte dell'umanità.


12 *Mark Kac.*

Mark (*Marek*) Kac[14] nacque nell'agosto del 1914 in una Polonia che adesso sarebbe Ucraina e che allora faceva parte dell'Impero Russo, da una famiglia ebrea. La sua data di nascita fu registrata come 3 agosto, e lui continuò a celebrare il proprio compleanno in quella data, ma sarebbe più corretto affermare che nacque il 16 agosto[15]. Il padre era un accademico, con lauree in filosofia, storia e filologia, ma per mantenere la famiglia faceva il tutore nel monolocale in cui vivevano, insegnando un po' di tutto, tra cui anche geometria. Il cinquenne Mark rimase rapito dalla materia, e chiese al padre delle lezioni, ed i genitori ebbero la tipica disperazione di chi vede il proprio figlio dimostrare teoremi geometrici elementari ma incapace di ricordare le tabelline.

Anche se durante il conflitto i Kac erano stati costretti a trasferirsi più a est, nel 1921 tornarono in Polonia, dove Mark imparò il francese da una governante. Ancora un paradosso linguistico: il giovane parlava ebraico (imparato dal padre), russo e francese, ma non la lingua di cui aveva la nazionalità, il polacco. Entrando al liceo dovette impararlo, e insieme anche greco, latino, matematica, fisica e chimica: come ci si può immaginare eccelleva nelle materie scientifiche, tanto che la madre lo spinse verso studi di ingegneria.

Il destino, però, aveva altri piani per Mark: a quel tempo era ossessionato dallo studio di equazioni cubiche[16], e studiando la formula di Cardano volle trovare una dimostrazione che meglio ne spiegasse il senso. Il padre, per lo meno scettico, scommise una somma di denaro che non ci sarebbe riuscito, somma che pagò senza battere ciglio quando il figlio, dimostrata la formula, la sottopose al suo insegnante di matematica che a sua volta la fece pubblicare su una rivista chiamata "*Giovane matematico*". Fu così che alla laurea in ingegneria fu sostituita prima una laurea e poi un dottorato in matematica nel 1937.

[14] Si pronuncia *kaz*.

[15] Di calendari diversi e sfasati abbiamo parlato a profusione in queste pagine; quello ortodosso è il protagonista di questo caso specifico. L'importante è che si tratti di agosto, comunque.

[16] Su questo argomento RM064 fornisce tutta la storia nei dettagli, grazie a Dario Bressanini.

Durante gli studi ebbe prima come insegnante e tutore, poi come amico, Hugo Steinhaus, da cui imparò forse il suo approccio positivo e giocoso alla matematica: uno dei proverbi polacchi che l'amico prediligeva era *'Forturny kolem sie tocza'*, che significa che la fortuna gira in cerchi, un modo per spiegare come mai π, così intimamente collegato con i cerchi, continui a comparire in teoria della probabilità e statistica, due discipline che trattano la casualità e la fortuna.

Nel frattempo la Polonia cominciava a intravedere nuvole all'orizzonte, e il nostro eroe cercò modi di trasferirsi all'estero, facendo domande di lavoro prima in Inghilterra e poi negli Stati Uniti, sempre sostenuto da Steinhaus. Purtroppo questi paesi erano già sovraffollati di richieste di asilo di tedeschi di origine ebraica, e le sue prime domande di borse di studio e lavori in università furono rifiutate. In parte questa fu una fortuna, perché quando, al secondo tentativo, ottenne la borsa di studio alla John Hopkins University, si trovava lontano dalla Polonia proprio nel momento cruciale. Se avesse ottenuto la borsa l'anno precedente sarebbe tornato in tempo per essere deportato ed ucciso come il resto della sua famiglia. arrivato Rimase quindi negli Stati Uniti, lavorò a Cornell come insegnante dal 1939 fino al '43, quando ottenne la cittadinanza americana ed una cattedra ufficiale; nel '61 si trasferì in California per il resto della sua carriera, una carriera brillante, costellata da collaborazioni con grandi matematici del tempo, come Paul Erdös[17], Richard Feynman[18], John von Neumann[19], Stanislav Ulam.

I temi principali dei suoi interessi erano la probabilità e la statistica applicata alla fisica, la teoria dei numeri: malgrado il gran lavoro in collaborazione con Erdös su quest'ultima (le pubblicazioni relative definiscono la distribuzione probabilistica dei numeri primi), quello che lo rese più famoso fu il lavoro con Feynman che portò alla formula di Feynman-Kac, e il suo tentativo di scoprire se "si può *sentire* la forma di un tamburo?"[20], un tentativo di collegare le proprietà dell'onda sonora alla forma dell'oggetto risonante, un problema che anche Herman Weyl[21] si era posto in precedenza.

Quando gli chiesero in un'intervista quale parte del suo lavoro scientifico lo avesse più entusiasmato, non ebbe alcuna esitazione:

> ... Sono sempre stato interessato ai problemi più che alle teorie. In retrospettiva la cosa di cui sono più felice, fatto in cooperazione con Erdös (…) è l'introduzione della probabilità nella teoria dei numeri. Per metterlo in modo poetico, i primi giocano un gioco casuale. E ancora, alcuni lavori di fisica matematica. Sono divertito dalle cose. Si può sentire la forma di un tamburo? Vede, ho anche una certa dose di giornalismo in me: mi piace un buon titolo, e perché no? Sono compiaciuto con quello che ho fatto per cercare di comprendere più in profondità la teoria delle transizioni di fase. Inoltre sono affascinato dai problemi matematici, ed in particolare (…) dal ruolo delle dimensioni: perché certe cose accadono "dalla terza dimensione in avanti" ed altre no. Ho sempre pensato che questo sia il punto dove l'interfaccia, se mi si passa l'espressione, tra la natura e la matematica è più profonda. Sapere perché solo alcune cose osservate in natura possano accadere nello spazio di una certa dimensione. Qualsiasi cosa possa contribuire a comprendere questo mistero è significativo e sono contento di aver contribuito in parte nello studio del problema..

[17] L'uomo che amava solo i numeri in RM110.

[18] Il fisico innamorato di RM076.

[19] Il dottor Stranamore di RM107.

[20] La risposta è no. Senza andare nei dettagli tecnici, per avere una forma unica occorre porre severe condizioni al contorno sulla forma del tamburo.

[21] La sua storia è in RM082.

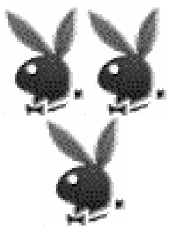
Le università americane dagli anni cinquanta in avanti erano piene di studiosi di origine ebrea provenienti da Ungheria, Polonia, Romania, Germania; su ognuno di loro gravava forse la condanna di un'origine diversa, famiglie separate e amicizie condotte attraverso oceani, con un solo elemento in comune: il genio, l'eccellenza. Tra loro molti parlavano un inglese spezzato e strano, con ogni genere di accento: non era il caso di Kac, che aveva una grande cultura e parlava correntemente un inglese forbito, e che non perse mai il senso dell'umorismo e la passione per la ricerca del vero attraverso quello che più gli piaceva, la matematica. Usava dire: "Ci sono cose peggiori dell'avere torto, ed essere noiosi e pedanti è sicuramente una di quelle".


13 *Mark Kac.*

Mark Kac morì nell'ottobre del 1984, lo stesso anno in cui le olimpiadi estive (le ventitreesime) si svolsero proprio in California, boicottate in massa dal blocco dell'est: di sicuro vide passare la fiamma dei giochi.

A coloro che con pazienza hanno trasportato la torcia olimpica dall'inizio dell'articolo fino a qui, ricordiamo che ogni attività, così come quella sportiva anche la ricerca matematica, ha come scopo principale il miglioramento delle condizioni dell'uomo e dell'umanità, anche quando sbaglia strada, e anche quando sembra andare in direzione opposta.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
A rischio fratricidio			
Come (non) decidere le ferie			

2.1 A rischio fratricidio

Dovete sapere che Alberto in questo periodo è perseguitato dai cubi: ha deciso di imparare a risolvere il Cubo di Rubik e l'Augusto Genitore, forte del fatto che sono in vendita per due euro, glie ne ha procurato uno opportunamente mescolato[22]. Nell'ultima settimana, con lo sguardo perso nel vuoto, anche a tavola le mani continuavano a muovere un cubo immaginario per riuscire a trovare algoritmi di risoluzione, e la cosa probabilmente andrà avanti ancora per un bel po' di tempo. Ma non è questo il problema.

Fred, da quando si è accorto di questa nuova ossessione del fratello, non perde occasione per nominare i cubi; parte da un improvviso interesse per la geometria, recitando tutte le formule che gli vengono in mente contenenti cubi, sino ad arrivare a terribili barzellette che erano già vecchie all'inizio dell'altro millennio ("Buongiorno, signor Cubo"… con quel che segue, e scontata lamentazione finale della Sfera stufa di essere presa per il Cubo). Ma Fred è un problema nostro e non vostro, quindi non sta neanche qui il problema.

In un tranquillo week-end di luglio – con Alberto impegnato nella manovra di un cubo che forse solo annodandolo avrebbe potuto allontanarsi ulteriormente dalla soluzione – un Fred male intenzionato si è recato nello studiolo di Rudy, a sua volta impegnato a battere sui tasti del computer. Il dialogo tra i due si è sviluppato più o meno in questi termini:

Fred: "Cosa stai facendo?"

Rudy: "Sto scrivendo i problemi per RM"

Fred (a voce altissima): "È TANTO CHE NON NE FAI UNO SUI CUBI!".

Onde salvare Fred dal linciaggio, Rudy ha improvvisato un problema, che segue.

"Fred, hai due cubi, a lati di dimensione intera e minore di quindici unità[23]; del primo, colori un certo numero di facce in rosso, e nel secondo ne colori una in più del primo in

[22] Rudy e Doc sono felici possessori di due cubi "della prima ora" (1975, salvo errori), originali ungheresi. Si riconoscono per il fatto di avere il viola (anziché l'arancione) opposto al rosso e un movimento particolarmente "smoothed". No, non glieli prestano.

[23] Centimetri, pollici, piedi liprandi, Palmi di Fred... Vanno bene tutti.

blu. Dopo seghi i due cubi nel corretto numero di cubetti unitari, e ti accorgi che il numero dei cubetti che hanno almeno una faccia colorata di rosso è pari al numero dei cubetti con almeno una faccia colorata di blu. Le domande sono: quanto erano grandi i due cubi originali, quante facce avevi colorato in ciascuno di loro e quali erano. E adesso lasciami lavorare e fai silenzio, grazie".

Siamo riusciti a tenere Fred con l'aria perplessa (anche lui intento ad elaborare cubi immaginari) per un paio d'ore di tranquillità; purtroppo, alla fine di questo periodo, si è alzato con una luce diabolica negli occhi uscendosene con un "Potrei chiedere a mio fratello…"

Ora, prima che il fratello lo polverizzi, potreste fornire a Fred la soluzione? Mi sa che con questa allergia ai Cubi andremo avanti a lungo…

2.2 Come (non) decidere le ferie

Il modo per *non* decidere ci viene da una vecchia storia di Paperino, in cui il Nostro e la famiglia stavano giustappunto applicando un pessimo metodo, consistente nel tirare una freccetta su una carta geografica e nel selezionare per le ferie il punto centrato; ricordiamo solo due tiri, uno indicante come destinazione il "*portapiume posteriore*" di Paperino e l'altro indicante Paperopoli.

La storia ci è venuta in mente perché è recentemente avanzato dalla camera dei Validi Assistenti di Laboratorio un mappamondo di raggio R, che al momento staziona nel deposito delle cose da trasferire nel Luogo da Cui. Ogni volta che lo vede, Rudy pensa a possibili problemi e connesse complicazioni per RM, e quale miglior momento per proporli ai lettori se non quando sono loro stessi sparsi per il mappamondo?

*Nota: per la definizione di "*casuale*", si veda al fondo.*

Prima domanda, abbastanza facile: scegliamo n punti casuali sulla superficie; quali sono le probabilità che siano tutti nell'Emisfero Nord?

Seconda domanda, più difficile: se scelgo *nove* punti, quali sono le probabilità che *sei* siano tutti nello stesso emisfero? Attenzione che qui i due emisferi potete definirli come volete.

Terza domanda (e qui Rudy ha remato): scelgo k punti a caso sulla superficie, con k intero e prefissato; verifico, dopo aver eseguito un ragionevole numero di esperimenti, che la probabilità che siano tutti sul medesimo emisfero è *un mezzo*. Quanto vale k?

Quarta e (quasi) ultima: scelgo un punto, poi un secondo, poi un terzo, poi un *k-esimo*… Mi fermo quando il *k+1-esimo* punto non è più nello stesso emisfero dei precedenti k. Ripetendo l'esperimento un gran numero di volte, secondo voi qual è il valore atteso di k?

Vi avevamo promesso una nota al fondo: Rudy intende per distribuzione casuale, in questo caso, una distribuzione di probabilità proporzionale alla superficie. Il metodo che ha usato consiste nel generare un primo numero casuale tra –180 e 180 e nel considerarlo longitudine, e quindi nel generarne un secondo compreso tra –90 e 90 definendolo latitudine; quindi, va a cercarsi il punto sul globo. Ora gli sta venendo il dubbio che questo metodo non generi una distribuzione di probabilità proporzionale alla superficie. Voi cosa ne dite? Se dite "no", evidentemente, ci aspettiamo che troviate un metodo.

Niente freccette, comunque: è un mappamondo gonfiabile!

3. Bungee Jumpers

(a) Dimostrare che, dati cinque numeri interi positivi consecutivi, è sempre possibile trovarne uno primo rispetto a tutti gli altri.

(b) Dimostrare che, dati sedici numeri interi consecutivi, è sempre possibile trovarne uno primo rispetto a tutti gli altri.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Quelli estivi sono tradizionalmente mesi piuttosto morti per questa rubrica, che dipendendo completamente dai solutori si riduce ed allarga a dismisura a seconda di quanti ci scrivono. Ed in estate prima o poi anche i lettori accaniti devono andare in vacanza e grazie al cielo se calcolano qualcosa si tratta della via più breve per raggiungere le spiagge o la montagna.

Per noi della Redazione, che quest'anno abbiamo fatto vacanze a turno, è un po' tradizione ed un po' orgoglio produrre comunque il numero agostano, che molte altre riviste non mettono nemmeno in lavorazione, e quindi eccoci qui.

In luglio è stato il Capo ad andare in spiaggia, e dalla costa ci ha fatto sapere che:

> WARNING: mancano un mucchio di accenti: il BlackBerry non sa il francese.
>
> Questo gioco lo stanno giocando una nonna (palesemente stufa) e una nipote (palesemente irrequieta) sotto la mia finestra. Si gioca in due (o, almeno, lo stanno giocando in due).
>
> Il mazzo è composto da quattro FAMILLES (equivalenti ai semi): ROUGE, ORANGE, D'OR e D'ARGENT. Ogni Famiglia ha i valori GRAND-PERE, GRAND-MERE, PERE, MERE, FILS, FILLE, PETIT-FILS, PETITE-FILLE. Totale 32, i disegni a questa distanza hanno una forte somiglianza con Barbapapà, ma forse è perché sono senza occhiali.
>
> Si distribuiscono N carte (non vedo quante), scopo del gioco è riuscire a costruire delle "famiglie" (almeno "$k1$" – tre? – in relazione diretta di parentela) o dei "gruppi di amici" (almeno "$k2$" – sempre tre? – aventi lo stesso grado di parentela ma di famiglie diverse).
>
> Il bello è che una volta ricevute le carte (e messe da parte quelle già raggruppate) cominci a chiedere: "je voudrais le (grado di parentela) de la famille (colore)", e l'avversario se lo ha te lo dà, in caso contrario risponde "je ne l'ai pas" e peschi dal pozzo.
>
> Vince il primo che resta senza carte; se si resta senza carte per cessione di carta all'avversario, l'avversario ha ancora il diritto di "scendere" le "k-uple" che si ritrova fatte in mano.
>
> ...Ma secondo voi, per che valore di "N" è un gioco decente? Direi bassino...

Appena letto il messaggio, il Doc ha deciso che si poteva chiedere ai lettori cosa ne pensassero, visto che è estate e tutti hanno voglia di giocare. In più (al solito) ha aggiunto i dettagli di un gioco che a lui è più famigliare:

> ...un gioco quasi identico si giocava noi (piccoli ternani) con un normale mazzo di piacentine da 40, quelle con denari spade bastoni coppe e valori da asso a sette più fante cavallo re.
>
> Si distribuivano tutte le carte in maniera equa (per quanto possibile) ai giocatori, che potevano essere più o meno quanti si voleva. La distribuzione delle carte poteva non essere perfetta, ma faceva parte del gioco. A differenza del tuo, vince chi ottiene TUTTO il mazzo, non chi rimane senza carte: chi rimane senza è escluso dal gioco, perde, insomma.
>
> A turno si "chiede" una carta ad uno degli avversari. Questo se ce l'ha la consegna, se non ce l'ha gioisce perché adesso tocca a lui chiedere.
>
> Seguendo il gioco, i giocatori capiscono chi forma le "famiglie", perché se uno – tanto per dire – chiede ed ottiene dei 4, poi passa a chiedere dei 7, verosimilmente

ha completato la famiglia di "4". È lecito nascondersi addosso le carte, per non farle vedere agli altri, specie le famiglie completate. Una volta che tutte le famiglie sono complete, si passa a chiedere proprio le intere famiglie, invece delle singole carte. E vale la solita regola: se te la chiedono e ce l'hai, la devi consegnare. Se invece non ce l'hai, il gioco passa a te. Con un po' di fortuna e un po' di memoria, alla fine uno riesce a raccogliere tutte le dieci "famiglie", e vince.

Il gioco si chiama "faniglia".

Indipendentemente dal confronto tra l'irruenza ternana e la compassata calma occitana, voi che ne pensate? Scriveteci.

Per il resto, ci siamo dimenticati le cose importanti, siamo in vacanza, a turno, e quello che dovrebbe ricordarsi di tutto non c'è mai, per cui vi auguriamo solo buone vacanze.

4.1 [104]

4.1.1 Deserto Asimmetrico Monodimensionale

Un problema che sembrava completamente risolto ha però stimolato ***Alessandro***, che negli ultimi tempi ha preparato ed inviato una soluzione, gli diamo volentieri spazio.

Data la sequenza a_n definiamo la "Funzione Generatrice" di suddetta sequenza come: $\mathrm{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

Ora se la F(z) converge per qualche z la teoria ci assicura che essa converge in tutto il disco che ha raggio <z ed è pertanto ben definita. Nel nostro caso trattandosi di una sequenza di probabilità la funzione convergerà sicuramente per |z|<1.

Se, come vedremo, la F(z) può esprimersi come rapporto di polinomi, ovvero come espressione razionale, la sua espressione normalizzata conduca ad una somma ti termini del tipo $\frac{A}{z-s}$. Un termine di questo tipo si può anche scrivere sotto forma di serie: $\frac{A}{z-s} = -\frac{A\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{s}\right)^n\right)}{s}$

Il risultato precedente si ricava immediatamente dall'equivalenza: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = -\frac{1}{z-1}$. Naturalmente la relazione è valida per z<1.

Detto ciò, la formula di ricorrenza del problema è la seguente: $X_{n+3} = 2X_{n+2} - X_n$.

Per ragioni che saranno chiare in seguito analizziamo prima il caso di spostamento verso l'asse negativo. Per semplicità ribaltiamo gli assi, ovvero invertiamo il segno delle n. Questo trasforma la formula di ricorrenza nella seguente: $X_{n+3} = 2X_{n+1} - X_n$.

Facciamo ora qualche passaggio per ricavarci la funzione generatrice. Moltiplichiamo per z^n e sommiamo su n tra 0 e inf:

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_{n+3} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2X_{n+1} - X_n) z^n$$

Quindi moltiplichiamo e dividiamo le rispettive serie per un opportuna potenza di z per normalizzane i termini:

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} X_{n+3}\, z^{(n+3)}}{z^3} = \frac{2\left(\sum_{n=0}^{\infty} X_{n+1}\, z^{(n+1)}\right)}{z} - \mathrm{F}(z)$$

Come si può notare è apparsa F(z), aggiungiamo e sottraiamo i termini mancanti nelle due serie per ottenere altre F(z).

$$\mathrm{F}(z) - X_0 - X_1\, z - X_2\, z^2 = 2\, z^2\, (\mathrm{F}(z) - X_0) - z^3\, \mathrm{F}(z)$$

Sostituiamo le F(z) così formatesi e raccogliendo ecco l'espressione esplicita della F(z).

$$Fz := -\frac{-X_0 - X_1\, z - X_2\, z^2 + 2\, z^2\, X_0}{1 - 2\, z^2 + z^3}$$

Cerchiamo ora di riscrivere l'espressione della F(z) come somma delle radici dei suoi poli: $-\dfrac{-X_0 - X_1\, z - X_2\, z^2 + 2\, z^2\, X_0}{1 - 2\, z^2 + z^3} = \dfrac{A}{z - s_1} + \dfrac{B}{z - s_2} + \dfrac{C}{z - s_3}$

Questo comporta che la sequenza può rappresentarsi come:

$$X_n = -\frac{A\left(\frac{1}{s_1}\right)^n}{s_1} - \frac{B\left(\frac{1}{s_2}\right)^n}{s_2} - \frac{C\left(\frac{1}{s_3}\right)^n}{s_3}$$

Le radici si trovano semplicemente risolvendo l'equazione di terzo grado a denominatore: $1 - 2\, z^2 + z^3 = 0$, le cui soluzioni sono: $s := \left[1, \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$

Il fatto che non ci siano radici multiple semplifica il problema. Assumendo che la probabilità per n–>inf tenda a 0 (facilmente dimostrabile) comporta che i coefficienti delle radici s1 e s3 siano 0. Comparendo la radice a denominatore della serie esponenziale essa deve essere >1, mentre la radice unitaria conduce ad una costante:

$$A := X_0 - X_2 - X_1$$

$$B := \frac{-4\, X_0 + X_1 \sqrt{5} + X_1 + X_2 \sqrt{5} + 3\, X_2 - 2\, X_0 \sqrt{5}}{-\sqrt{5} + 5}$$

$$C := \frac{-4\, X_0 + X_1 - X_1 \sqrt{5} - X_2 \sqrt{5} + 3\, X_2 + 2\, X_0 \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}$$

Andiamo ora ad impostare il sistema in base alle considerazioni fatte. Dato di partenza $X_0 := 1$ Non devono esserci componenti asintotiche non nulle: A=0

$$eq1 := X_1 = 1 - X_2$$

Non devono esserci componenti esponenziali divergenti: C=0.

$$eq2 := X_2 = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)(-3+2X_1+\sqrt{5})$$

Risolvendo il sistema così ottenuto si ricavano le componenti X1 e X2 incognite

$$sf := \{X_1 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}, X_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3}{2}\}$$

Sostituendo alle espressioni dei coefficienti moltiplicativi abbiamo i seguenti valori normalizzati per i coefficienti dei termini esponenziali:

$$-\frac{A}{s_1}=0 \qquad -\frac{B}{s_2}=1 \qquad -\frac{C}{s_3}=0$$

Da quanto precede segue l'espressione esplicita per i valori di Xn riportati sull'asse negativo. $X_n = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)^n$

Ripetiamo ora velocemente gli stessi passi per quello che riguarda l'asse positivo. Partiamo ora dalla relazione di ricorrenza originaria. $X_{n+3} = 2X_{n+2} - X_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_{n+3} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2X_{n+2} - X_n) z^n$$

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} X_{n+3} z^{(n+3)}}{Z^3} = \frac{2\left(\sum_{n=0}^{\infty} X_{n+2} z^{(n+2)}\right)}{z^2} - \mathrm{F}(z)$$

$$\mathrm{F}(z) - X_0 - X_1 z - X_2 z^2 = 2\,\mathrm{Z}(\mathrm{F}(z) - X_0 - X_1 z) - z^3\,\mathrm{F}(z)$$

$$(z^3 - 2z + 1)\,\mathrm{F}(z) = X_0 + (X_1 - 2X_0)z + (X_2 - 2X_1)z^2$$

Da cui l'espressione esplicita della $Fz := \frac{X_0 + X_1 z - 2zX_0 + X_2 z^2 - 2z^2 X_1}{z^3 - 2z + 1}$

Cerco i coefficienti di normalizzazione della F(z).

$$\frac{X_0 + X_1 z - 2zX_0 + X_2 z^2 - 2z^2 X_1}{z^3 - 2z + 1} = \frac{A}{z - s_1} + \frac{B}{z - s_2} + \frac{C}{z - s_3}$$

Radici della F(z).

$z^3 - 2z + 1 = 0$ con soluzioni $s := \left[1, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$

Espressioni esplicite dei coefficienti:

$$A := -X_0 - X_1 + X_2$$

$$B := \frac{4\,X_0 - 2\,X_0\sqrt{5} - 7\,X_1 + 3\,X_1\sqrt{5} + 3\,X_2 - X_2\sqrt{5}}{-3\sqrt{5} + 5}$$

$$C := \frac{4\,X_0 + 2\,X_0\sqrt{5} - 7\,X_1 - 3\,X_1\sqrt{5} + 3\,X_2 + X_2\sqrt{5}}{3\sqrt{5} + 5}$$

Condizioni iniziali: la prima è la medesima del caso negativo: $X_0 := 1$, come peraltro la seconda anche se applicata ad una radice differente: B=0.

$$eq1 := X_1 = \frac{1}{4}(3 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5} + 2\,X_2)$$

Qui appare chiaro il motivo per cui abbiamo risolto per primo il caso negativo. Per ricavare la seconda equazione abbiamo fatto uso della relazione $x[2]=2\cdot x[1]-x[-1]$.

$$eq2 := X_2 = \frac{2\,(X_1 + X_1\sqrt{5} - 1)}{1 + \sqrt{5}}$$

Soluzione del sistema $sf := \{ X_2 = \frac{13}{2} - \frac{5\sqrt{5}}{2}, X_1 = 3 - \sqrt{5} \}$

Coefficienti dei termini esponenziali:

$$-\frac{A}{s_1} = -\frac{5}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2} \qquad -\frac{B}{s_2} = 0 \qquad -\frac{C}{s_3} = \frac{7}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Ed ecco infine il tanto agognato risultato. Essendo, ovviamente, –C/s[3]=1–A esso indica anche la percentuale di non passaggio per un certo punto per n–>inf ovvero il risultato cercato: . $X_n = -\frac{5}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{7}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{(-n)}$

Questa soluzione è identica a quella ottenuta dal ***Cid*** pubblicata nel n.105.

...che è abbastanza una garanzia, conoscendo ***Cid***.

4.2 [113]

4.2.1 Cessato Allarme

Rub ci propone una lettura diversa del problema:

Chiamiamo i due giocatori U (uguale) colui che vince con carte uguali e D (diverso) colui che vince se alla fine del gioco non sono mai uscite due carte uguali.

Inizialmente ipotizziamo di avere i due mazzi rosso e nero, NON mescolati.

Alla prima carta estratta, è evidente che D ha una probabilità di 51/52 di vincere (ma ricordiamoci che lui incassa il premio solo se arriva alla fine senza MAI una uguaglianza…).

Alla seconda carta abbiamo due possibilità: la carte richiesta è tra quelle gia estratte (una sola, con probabilità 1/52) ed in questo caso D vince sicuro OPPURE (che vuol dire +, nello slang probabilistico) è tra le 51 rimaste (probabilità 51/52), E (che vuol dire x, nello slang probabilistico) la estraggo con probabilità 50/51, ovvero abbiamo:

D vince alla seconda carta = 1/52 + 51/52 x 50/51 = 1/52 + 50/52 = 51/52

(lo stesso valore per il primo tiro..) Sarà un caso? Alla terza carta abbiamo

D vince alla terza carta = 2/52 + 50/52 x 49/50 = 2/52 + 49/52 = 51/52

(ancora lo stesso valore). In effetti ad ogni carta D ha la probabilità di 51/52 di vincere, considerando le carte che sono state tolte dal mazzo e la probabilità residua che sia tra quelle rimaste.

Infine D vince se per riesce a vincere per tutte le 52 mani, ovvero (51/52)^52 = 36,4%.

Ma i due mazzi non sono uguali, sono stati mescolati e possiamo ipotizzare che ogni carta abbia il 50% di probabilità di essere in uno o in un altro. Pertanto concluderei che si debba raddoppiare la probabilità di vittoria di D, portandola al 72,9%.

Perverso! Mescolando si scommette su D; con i mazzi intatti su U.

Non commentiamo per niente: in estate abbiamo ben poche idee.

4.3 [114]

4.3.1 Leggenda Metropolitana (vera)

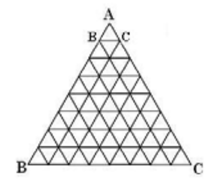
Il Capo, in un altro messaggio criptico estivo, si è pubblicamente scusato della formulazione del problema:

Il problema dice: "etichettare i vertici dei triangolini di lato unitario senza etichetta (evitate pure di contarli: sono quarantadue)". Ammetto che la frase è profondamente ambigua, infatti "quarantadue" non è il numero dei triangolini, ma il numero dei vertici da etichettare (ossia il numero delle giocate possibili dei due VAdLdRM): escludendo i tre etichettati, 7+8+7+6+5+4+3+2=42.

L'unico che non si è fatto spaventare da questo quesito è stato il nostro ***Cid***:

Ritengo che questo problema non abbia soluzione.

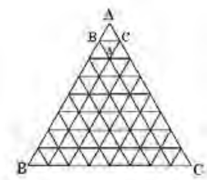
Parto dal triangolo iniziale e provo ad etichettare i vertici del triangolino in alto, l'unico modo per etichettarli è il seguente (fig 1). Infatti, essendo sul triangolino già presente il vertice A restano da assegnare le etichette B e C; sul lato AB può comparire solo A o B, quindi devo mettere l'etichetta B su questo lato, sul lato CA può comparire solo A o C, quindi devo mettere l'etichetta C su questo lato.



14 *Fig 1 di **Cid***

Ora etichetto il triangolino sottostante, avendo già i vertici B e C, resta da etichettare con A il vertice rimanente. Per cui ottengo la fig 2.

I due triangoli al lato di questo risultano ora impossibili da etichettare, infatti a quello a destra manca il vertice C, ma non posso assegnargli il vertice C perché sul lato AB non si può mettere l'etichetta C.



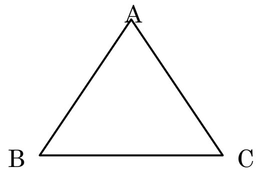
15 *Fig 2 di **Cid***

Analogamente, a quello a sinistra manca il vertice B, ma non posso assegnargli il vertice B perché sul lato CA non si può mettere l'etichetta B.

Da cui risulta che il problema non ammette soluzione, in quanto non è possibile etichettare tutti i vertici.

All'ultimo momento, quando queste note erano già considerate chiuse, è arrivato ***Val316***, che si è documentato e in qualche modo risuona con il numero di RM che avete di fronte…

In questo periodo mi è capitato sotto mano (leggasi comperato) un delizioso volumetto della Dover Publications dal titolo "Mathematics and Logic" di Kac e Ulam, in cui veniva preso in esame, tra gli altri argomenti, un teorema il cui enunciato riproduceva (quasi) fedelmente quello del problema, un teorema che va sotto il nome di Lemma di Sperner. Cosa dice il lemma?

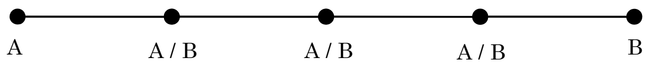


Triangolo completo

Dato un triangolo suddiviso in tanti sotto-triangoli più piccoli in modo che ogni volta che ci sia un'intersezione questa avvenga o in un vertice oppure in un intero lato, data cioè un triangolazione di un triangolo(!), e associata ad ogni vertice in gioco un'etichetta come quella descritta nel problema, deve sempre esistere almeno un triangolino completamente etichettato, anzi il numero di tali triangolini *completi* è sempre dispari.

A dire il vero il lemma generale è multidimensionale, nel senso che vale in una dimensione, in due dimensioni (è il nostro caso), in tre dimensioni per i tetraedri e a seguire.

Per il caso 1-dimensionale si ha un segmento suddiviso in tanti sottosegmenti:



Comunque si scelgano le etichette, tra A o B, per i tre nodi interni la somma dei segmenti del tipo

è sempre dispari.

La dimostrazione del lemma generale segue per induzione proprio dal caso 1-dimensionale ed è notevole il fatto che da una proposizione all'apparenza così innocua possa essere derivato il principio del punto fisso di Brouwer e il teorema fondamentale dell'algebra.

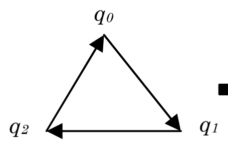
Tornando al problema in esame, nel lemma non si fa nessun riferimento all'orientazione oraria o antioraria delle etichette. Comunque la parità non è possibile ed un vincitore c'è sempre. Infatti se T_O è il numero di triangoli orientati in senso orario e T_A il numero di quelli orientati in senso antiorario non è possibile che $T_O = T_A$ perché altrimenti $T_O + T_A$ = numero pari.

Esiste nondimeno una versione "orientata" del lemma il quale afferma che, quale che sia l'etichettatura scelta per i vertici, si deve avere $| T_O - T_A | = 1$, cioè il valore assoluto della differenza dei due tipi di orientazione è sempre 1.

In questo valore assoluto si gioca la vittoria per uno o per l'altro giocatore. Vediamo nel nostro caso chi dei due può sempre assicurarsi di vincere. Si tratta in pratica di riportare la dimostrazione del lemma, di cui mi sono preso la briga di fornire una ritraduzione aderente alla configurazione proposta nel problema. La dimostrazione che ho trovato fa un uso estensivo di concetti e notazioni derivanti dall'omologia simpliciale.

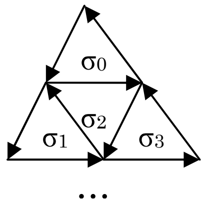
In questo ambito i sessantaquattro triangolini vengono definiti 2-simplessi mentre il triangolo equilatero è chiamato 2-complesso. Per prima cosa si orienta il complesso distribuendo, come meglio si creda, i numeri interi da 0 a 63 sui vari vertici. Automaticamente questa operazione orienta il complesso, tutti i triangolini e le rispettive facce (lati). Orienta nel senso che definisce un senso di percorrenza.

Ad ogni 2-simplesso possiamo associare un terna orientata σ:



$\sigma = <q_0, q_1, q_2>$

Ed al complesso possiamo far corrispondere la somma formale delle terne relative ai 2-simplessi che lo compongono:



$c=\sigma_0+ \sigma_1+\ldots+ \sigma_{63}$

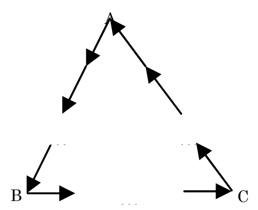
L'oggetto *c* viene chiamato nel nostro caso 2-catena. Per un simplesso e per linearità per la 2-catena si definisce il cosiddetto *operatore bordo*, che associa in generale ad ogni k-catena una (k–1)-catena:

$$\partial\sigma \equiv \partial\langle q_0, q_1, q_2\rangle \equiv \langle q_0, q_1\rangle + \langle q_1, q_2\rangle + \langle q_2, q_0\rangle \quad (*)$$

e

$$\partial c \equiv \sum_i \partial\sigma_i$$

L'operatore di bordo assume questo nome non a caso. Per un 2-simplesso il bordo (*) è la 1-catena data dalla somma dei suoi lati (1-simplessi). Per la 2-catena il bordo è la 1-catena qui di fianco.



bordo di ***c***

Supponiamo ora che i due giocatori abbiano scelto in maniera qualsiasi per ogni vertice un'etichetta tratta dall'insieme {A,B,C} rispettando le regole del gioco.

Possiamo definire la funzione $L : \{q_i\} \to \{A, B, C\}$, che ad ogni vertice q_i associa A o B o C ed in più la funzione indice *N* nella seguente maniera:

$$Sia\ \sigma =< q_0, q_1, q_2 >,$$

$$\begin{cases} N(\sigma) = 1 & se \quad < L(q_0), L(q_1), L(q_2) >=< A, B, C > o < B, C, A > o < C, A, B > \\ N(\sigma) = -1 & se \quad < L(q_0), L(q_1), L(q_2) >=< A, C, B > o < C, B, A > o < B, A, C > \\ N(\sigma) = 0 & se \quad < L(q_0), L(q_1), L(q_2) >=< A, A, B > o < C, B, B > o < B, B, B > \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} N(< q_0, q_1 >) = 1 & se \quad < L(q_0), L(q_1) >=< A, B > o < B, C > o < A, C > \\ N(< q_0, q_1 >) = -1 & se \quad < L(q_0), L(q_1) >=< B, A > o < C, B > o < C, A > \\ N(< q_0, q_1 >) = 0 & se \quad < L(q_0), L(q_1) >=< A, A > o < B, B > o < C, C > \end{cases}$$

Per la 2-catena la definizione di *N* si estende per linearità:

$$N(c) \equiv N(\sum_i \sigma_i) \equiv \sum_i N(\sigma_i)$$

Il significato di N è chiaro: sui triangolini assume 1 o –1 a seconda se i vertici siano etichettati rispettivamente in senso antiorario od orario e sul triangolo ABC essa ci dà il valore $T_A - T_O$ (numero "netto" di triangolini orientati).

Il nucleo centrale del lemma di Sperner generalizzato è

$$N(c) = N(\partial c) \quad (^{**})$$

Cioè il numero "netto" di triangolini orientati è pari al numero "netto" dei lati orientati del bordo dell'intero complesso.

La strategia per vincere a questo gioco è riuscire a vincere sui bordi del triangolo.

Per dimostrare (**) è sufficiente verificarlo per il caso base di un 2-simplesso:

$$N(\sigma) = N(\partial\sigma) \text{ ovvero per } (^*)$$

$$N(\langle q_0, q_1, q_2 \rangle) \equiv N(\langle q_0, q_1 \rangle) + N(\langle q_1, q_2 \rangle) + N(\langle q_2, q_0 \rangle) \quad (^{***})$$

Perchè poi per linearità si estende alla 2-catena. Infatti

$$N(c) = N\left(\sum_i \sigma_i\right) = \sum_i N(\sigma_i) = \sum_i N(\partial\sigma_i) = N\left(\sum_i \partial\sigma_i\right) = N(\partial c).$$

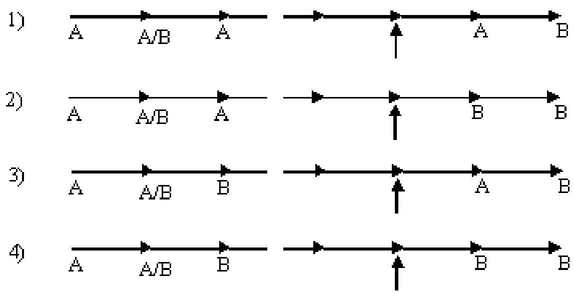
La relazione (***) può essere dimostrata enumerando tutti i casi possibili (3x3x3=27 terne etichettate possibili), che sostanzialmente si riconducono ai seguenti quattro:

<L(q0),L(q1),L(q2)>	N(<q0,q1,q2>)	N(<q0,q1>)	N(<q1,q2>)	N(<q2,q0>)
<A,B,C>	1	1	1	–1
<A,C,B>	–1	1	–1	–1
<A,A,B>	0	0	1	–1
<A,A,A>	0	0	0	0

Vediamo cosa succede ai bordi del triangolo.

Prendiamo per esempio il bordo A→B del triangolo, per gli altri B→C e C→A il ragionamento è identico. Possiamo dimostrare che in A→B il giocatore che ha scelto il senso antiorario vince comunque si giochi. Anzi il numero di segmenti orientati che si aggiudica è superiore di un'unità a quello dell'altro giocatore che ha scelto il senso orario. Infatti all'inizio abbiamo solo due etichette A e B ai due vertice estremi che danno 1 –0 = 1 come numero "netto" di segmenti orientati.

Dopo un certo numero di passi il giocatore che deve scegliere quale etichetta apporre ai vertici si troverà in una delle seguenti quattro configurazioni:



Indichiamo con la freccia verticale la posizione che sceglie di etichettare.

Nella tabella sottostante ho elencato tutte le possibili mosse per tutte le configurazioni, la variazione *ΔN* dell'indice e il suo valore risultante.

Configurazion e	Moss a	N iniziale	ΔN	N finale
1)	A	1	0	1
1)	B	1	1+(–1)=0	1
2)	A	1	0	1
2)	B	1	0	1
3)	A	1	0	1
3)	B	1	0	1
4)	A	1	1+(–1)=0	1
4)	B	1	0	1

Come si vede il valore finale di *N* sul bordo A→B è 1.

Il bordo B→C si comporta come A→B, per cui *N* (B→C)=1.

Invece in C→A si ottiene il risultato opposto. Si parte da un valore –1 e tutte le mosse non modificano il valore dell'indice, cioè *N* (C→A) =–1.

Finalmente possiamo concludere che $N(\partial c) = 1 + 1 - 1 = 1$. Il giocatore del senso antiorario vince sempre.

Classico gioco di Rudy, in cui si sa piuttosto chiaramente che saprà come vincere lui.

4.3.2 Problema con Virgilio

Il problema del gatto ha invece avuto un po' più solutori: ***Martino***, ***Rub***, ***Cid*** e ***Teo***. Tra le più originali la proposta di ***Martino***:

Bel problema, non ho ancora pensato a come possa risolverlo Alberto, pertanto vi spiego come lo risolverebbe Matteo.

Matteo, 25 mesi pochi giorni fa, agiterebbe la scatola delle crocchette – se ci sono gatti in giro è pressoché impossibile staccare il pargolo dalla scatola delle crocchette – e Virgilio arriverebbe di corsa – perlomeno è ciò che Matteo è abituato a vedere con la tribù felina del nostro "luogo diadainconsupertrafra cui".

Soluzione assolutamente valida, il Capo ne ha convenuto. ***Rub*** invece, prova a cimentarsi con velocità relative e furbizia felina:

Dobbiamo minimizzare il massimo tempo, ed ipotizziamo che il gatto sia diabolicamente (è nero!) furbo.

Caso base: la mia velocità è V, quella del felino V/2.

Entro nel corridoio A, e l'animale è rintanato nel fondo del corridoio C.

Percorro 14 metri di A, mi rendo conto dell'assenza del micio, torno indietro: tempo trascorso 28/V.

Inizio il B, stesso risultato, tempo 28/V.

Inizio il C, dopo 14 metri vedo il gatto. Lo prendo, torno al centro; tempo 42/V.

Tempo totale 98/V.

Se il micio si pone sempre nel C, ma a "7+epsilon" metri di distanza; quando ho esplorato A, e sono entrato in B, lui sgattaiola verso il centro e si inoltra in A; quando io sono tornato al centro lui ha percorso "7–epsilon" metri in A. Pertanto, se ho l'accortezza di scrutare A con la torcia prima di entrare in C, lo posso vedere e raggiungere, ripercorrendo in A < 28 metri, ovvero un tempo complessivo <84/V. Il gatto, che è furbo, capisce che non ha speranza e quindi non sceglie questa strategia.

Ma negli altri casi, con la pila scarica, l'animale è in grado di penetrare il corridoio esplorato e di aggiungere una distanza sufficiente per non essere visto dal centro.

Pertanto nei due casi, esiste una possibilità teorica che io non raggiunga mai il gatto, per cui mi devo arrendere o devo cercare di adescarlo con bocconcini appetitosi, ma in questo casi esuliamo dall'approccio matematico propriamente detto!

Cid ha come sempre affrontato il problema in maniera scientifica, includendo nell'analisi anche le capacità visive del felino nero in questione...

Per il <u>caso 1</u> vi propongo la seguente strategia:

Alberto parte dal punto O e si dirige verso la porta A, alla ricerca del gatto; giunto a 7 metri da A (ed avendo controllato quindi tutto il primo corridoio, essendo $d = 7$ metri) ritorna al punto O.

Se non ha ancora trovato il gatto, ha la certezza che si trova in uno degli altri 2 corridoi.

A questo punto, illumina i primi 7 metri del corridoio C, se il gatto non è visibile parte istantaneamente verso la porta B e giunto a 7 metri dalla porta torna indietro ed illumina i primi 7 metri del corridoio A; se non ha trovato il gatto, allora è certo che si trova nel corridoio C; infatti se, mentre Alberto percorreva il corridoio B, il gatto avesse cercato di passare dal corridoio C al corridoio A avrebbe dovuto percorrere più di 7 metri del corridoio C perché proveniva dalla parte non illuminata e più di 7 metri del corridoio A per nascondersi nella parte non illuminata. Ma nel tempo che Alberto percorre (14+14) metri il gatto riesce al massimo a spostarsi di 14 metri e quindi non fa in tempo a sparire nel corridoio A. Quindi ora ad Alberto basta percorrere fino in fondo il corridoio C per raggiungere il gatto.

Al massimo, la distanza percorsa da Alberto nel caso 1 è uguale a: 14+14+14+14+21=77 metri.

Per il caso 2 e il caso 3 le strategie variano al variare della vista del gatto:

<u>– Se il gatto ci vede bene:</u>

<u>Caso 2</u>

Alberto percorre il corridoio A fino ad illuminare la porta, poi torna al punto O.

Illumina il corridoio C, poi (se non ha visto il gatto) percorre lungo il corridoio B una distanza uguale a: 8,4 metri (essendo 4,2 metri la distanza di illuminazione garantita dalla pila); ritorna in O ed illumina il corridoio A, (se non ha visto il gatto) percorre lungo il corridoio C una distanza uguale a: 16.8 metri.

Occorre notare che: se Virgilio ci vede bene non si sposterà verso O lungo il corridoio B finché Alberto si trova nel corridoio, perché lo vedrebbe ed il problema dice che "il gatto (...) se vi vede scappa";

Nota: i gatti vedono bene anche al buio

Quindi se comincia a muoversi quando Alberto è entrato nel corridoio C, per sparire nella parte non illuminabile da O del corridoio A ha il tempo che Alberto impiega a percorrere avanti e indietro i 16,8 metri del corridoio C. In quel tempo, il gatto dovrebbe percorrere più di: 4,2 + 8, 4 + 4,2 = 16,8.

Ma il gatto non è in grado di percorrere più di 16,8 metri mentre Alberto ne percorre (16,8·2) metri, quindi al ritorno dal corridoio C, se Alberto non ha ancora trovato il gatto illumina il corridoio A e (se non ha visto il gatto) sa che si trova nel corridoio B e per raggiungerlo gli basterà percorrere il corridoio fino in fondo.

Totale (nel caso peggiore): 16,8·2 + 8,4·2 + 16,8·2 + 21 = 105 metri.

Caso 3

Alberto percorre il corridoio A fino ad illuminare la porta, poi torna al punto O.

Illumina il corridoio C, poi (se non ha visto il gatto) percorre lungo il corridoio B una distanza di 6 metri (essendo 3 metri la distanza di illuminazione garantita dalla pila); ritorna in O ed illumina il corridoio A, (se non ha visto il gatto) percorre lungo il corridoio C una distanza uguale a: 12 metri.

Occorre notare che: *se Virgilio ci vede bene* non si sposterà verso O lungo il corridoio B finché Alberto si trova nel corridoio, perché lo vedrebbe ed il problema dice che "il gatto (...) se vi vede scappa";

Nota: i gatti vedono bene anche al buio

Quindi se comincia a muoversi quando Alberto è entrato nel corridoio C, per sparire nella parte non illuminabile da O del corridoio A ha il tempo che Alberto impiega a percorrere avanti e indietro i 12 metri del corridoio C. In quel tempo, il gatto dovrebbe percorrere più di: 3 + 6 + 3 = 12.

Ma il gatto non è in grado di percorrere più di 12 metri, mentre Alberto ne percorre (12·2) metri, quindi al ritorno dal corridoio C, se Alberto non ha ancora trovato il gatto illumina il corridoio A e (se non ha visto il gatto) percorre 18 metri del corridoio B e (se non ha ancora trovato il gatto) al ritorno in O illumina il corridoio A e (se non ha visto il gatto) sa che si trova nel corridoio C e quindi per raggiungere il gatto gli basta percorrerlo fino in fondo.

Totale (nel caso peggiore): 18·2 + 6·2 + 12·2 + 18·2 + 21 = 129 metri.

Metodo risolutivo (se Virgilio ci vede bene):

Essendo d la distanza illuminata dalla pila.

Al giro k-esimo Alberto percorre x metri di un corridoio, al giro successivo percorre y metri dell'altro corridoio.

Mentre Alberto percorre $2 \cdot y$ metri, il gatto percorre al massimo y metri, il gatto per cambiare corridoio dovrebbe percorrere $(x + 2 \cdot d)$ metri. Quindi, la distanza massima che può assumere y è:

$$y = x + 2 \cdot d$$

Siccome inizialmente x è uguale a 0, si ha che al giro k-esimo la distanza percorribile da Alberto lungo un corridoio risulta uguale a $2 \cdot k \cdot d$.

– Se il gatto è miope:

In questo caso il gatto potrebbe seguire Alberto mentre Alberto ritorna verso O perché essendo miope non riesce a vederlo.

Metodo risolutivo (se Virgilio è miope):

Essendo d la distanza illuminata dalla pila. Al giro k-esimo Alberto percorre x metri di un corridoio, al giro successivo percorre y metri dell'altro corridoio.

Mentre Alberto percorre ($2\cdot y + x$) metri, il gatto percorre al massimo $\left(y+\frac{x}{2}\right)$ metri. Il gatto per cambiare corridoio dovrebbe percorrere ($x + 2\cdot d$) metri. Quindi, la distanza massima che può assumere y è:

$$y+\frac{x}{2}=x+2\cdot d$$

$$y=\frac{x}{2}+2\cdot d$$

Siccome inizialmente x è uguale a 0, si ha che al giro k-esimo la distanza percorribile da Alberto lungo un corridoio risulta uguale a: $d\cdot\left(4-\frac{4}{2^k}\right)$

Caso 2

Alberto percorre il corridoio A fino ad illuminare la porta, poi torna al punto O. Illumina il corridoio C, poi (se non ha ancora visto il gatto) percorre lungo il corridoio B una distanza uguale a: $2\cdot d$ (sappiamo che d è maggiore di 4,2 metri); ritorna in O ed illumina il corridoio A, (e se non ha visto il gatto) percorre lungo il corridoio C una distanza uguale a: $3\cdot d$ metri.

Occorre notare che: *se Virgilio è miope* potrà spostarsi verso O lungo il corridoio B mentre Alberto si trova nel corridoio, perché non vedendolo non scappa.

Poi, Alberto prosegue percorrendo alternativamente i corridoi B e C, percorrendo al k-esimo giro la distanza di $d\cdot\left(4-\frac{4}{2^k}\right)$ ed illuminando ogni volta al ritorno in O il corridoio A per vedere se il gatto vi si è nascosto dentro. Dopo aver percorso un numero finito di volte i due corridoi, Alberto giungerà ad illuminare le porte in fondo ai corridoi e a catturare il gatto.

Essendo $d > 4{,}2$ metri la soluzione assume un valore finito, ma occorre notare che se d tende a 4,2 metri, allora la distanza percorsa da Alberto tende ad infinito. (Ciò deriva dal fatto che: $21-4{,}2=4\cdot 4{,}2$).

Caso 3

Soluzione impossibile.

Vediamo invece la versione di ***Teo***, che prima ci invia una prima soluzione a parole, e poi la migliora in un secondo tempo. Vediamo la prima parte:

> Dunque, per prima cosa premetto che non si capisce dal testo se il gatto può attraversare le porte, magari tramite le porticine da gatti, se Alberto lo vede subito quando lo incontra o se bisogna inserire delle probabilità che il gatto sia trovato ecc... per seconda cosa ho arbitrariamente supposto che le porte siano chiuse a chiave e il gatto non possa attraversarle e non si nasconda.
>
> Per farla breve, consiglio al valido cercatore di percorrere un corridoio a caso fino a che non vede la porta e poi tornare al centro. Una volta qui deve illuminare gli altri corridoi con la pila e accertarsi che Virgilio non sia in vista. A questo punto percorre un po' un corridoio non ancora percorso e, non trovando Virgilio, tornare indietro prima che il suddetto gatto non possa aver percorso un tratto più lungo di quello che Alberto può illuminare con la pila nel primo corridoio esplorato. Fatto questo il valido cercatore si dovrebbe dirigere nel terzo ed ultimo corridoio inesplorato e tornare indietro al centro in modo che il gatto non riesca ad inoltrarsi nel corridoio già interamente esplorato per una distanza maggiore di quella

> illuminata dalla pila. Fatto questo si itera il procedimento di ricerca alternando i due corridoi. Scegliendo sapientemente la distanza alla quale inoltrarsi ogni volta lungo i corridoi (che sarà pari al doppio della distanza minima del gatto dal centro più una distanza d che è la distanza illuminata dalla pila) DOVREBBE essere garantito che il gatto venga trovato in un tempo finito.
>
> Non ho idea se ci siano algoritmi di ricerca migliori tuttavia questo mi sembra sensato perché appunto porta al ritrovamento in un tempo finito.

Ed ecco il completamento dei dettagli, proprio alla vigilia della partenza per le vacanze:

> Ho fatto i conti e il metodo che ho proposto va bene solo nel caso d=7. Ovviamente mi sono accorto solo alla fine. Ti lascio il ragionamento come dimostrazione che il metodo è sbagliato per distanze come $4d$ per esempio.
>
> Siano a, b, c i tre corridoi e O il centro.
>
> 1/Alberto si inoltra in a fino che non riesce ad illuminare la porta
>
> 2/torna indietro in O
>
> 3/illumina in c, quindi vede se Virgilio è ad una distanza d da O in c.
>
> 4/va in b per una distanza di $2d$ e da lì illumina fino a $3d$.
>
> 5/torna in O e illumina
>
> Così facendo è sicuro che Virgilio non può entrare in a senza che venga visto. Questo perché nel peggiore dei casi per scomparire in a Virgilio dovrebbe percorrere, mentre Alberto va ad esplorare b, una distanza di $2d$ ma siccome alberto va il doppio più veloce del gatto può ben percorrere $4d$ nello stesso tempo.
>
> 6/Sfrutta l'informazione che Virgilio non è in a nè in b, almeno fino ad una distanza dal centro O di $2d$
>
> Questo perché avendo Alberto illuminato fino a $3d$ ed essendo poi tornato indietro percorrendo $2d$, Virgilio non può che aver percorso al massimo una distanza d e quindi essere in $2d$.
>
> 6/Va in c per $2d+d=3d$ e da lì illumina fino a $4d$.
>
> 7/Torna al centro O
>
> Ancora è sicuro che Virgilio non possa scomparire in a senza che venga visto da Alberto. Il motivo è sempre che il gatto per scomparire deve percorrere $2d$, distanza minima da O in b alla quale poteva essere, $+d$ lungo a, distanza fino alla quale Alberto può illuminare con la torcia, e quindi $3d$. Questa è proprio la metà della distanza che Alberto percorre prima di illuminare in a. Visto che la velocità di Alberto è doppia...
>
> 8/ Itero il procedimento aumentando ogni volta le distanze
>
> Come aumentare ogni volta le distanze?
>
> Così: supponiamo di aver illuminato un corridoio, non a ovviamente, fino a $(n+1)d$. Allora si può procedere nell'altro per $(n+1)d-(n/2)d+d$ perché questa è la distanza illuminata dalla quale sottraggo la distanza che Virgilio può percorrere mentre Alberto torna indietro e a cui sommo la lunghezza del pezzo di corridoio a che riesce ad illuminare con la torcia.
>
> Dunque Alberto si può inoltrare nell'altro corridoio fino a $(n+4)d/2$.
>
> Questa è infatti la distanza che Virgilio deve percorrere nel peggiore dei casi per scomparire in a. Siccome Alberto va ad una velocità doppia di quella del gatto nello stesso tempo può percorrere tale distanza in un corridoio, illuminare e tornare

indietro al punto di partenza. Così facendo illumino fino a $(n+4)d/2+d$ ed itero il procedimento...

In base a questo ragionamento l'ennesimo spostamento $S(n)$ sarà

$S(n) = S(n-1)d - S(n-1)d/2 + 2d = S(n-1)d/2 + 2d.$

Gli spostamenti vanno fatti alternativamente lungo i corridoi b e c.

La successione che otteniamo purtroppo non ci porta a niente, me ne sono accorto solo adesso... però per d=7 funziona. Intanto quindi Alberto dovrebbe evitare questo metodo se le pile non sono nuove...

Ci penso su...

Anche noi: ancora una volta, soluzioni che non portano al risultato atteso possono comunque essere interessanti. Noi speriamo che per tutti i problemi di questo mese riceveremo ancora contributi, ma per ora concludiamo qui. Buon Ferragosto!

5. Quick & Dirty

Come sapete Rudy è particolarmente fiero del fatto di aver trovato il modo per costruire i poliedri regolari (e anche qualche semiregolare) con l'*origami*. È un po' meno fiero del fatto che sovente, oltre a risultare scarsamente regolari, siano anche instabili su alcune facce.

Pronto a trasformare ogni errore in un vantaggio, adesso sta cercando di capire che forma dovrebbe avere un poliedro instabile su ogni faccia. Secondo voi, come viene?

6. Pagina 46

(a) Se la differenza tra due numeri dispari non è maggiore di 4, non avranno divisori comuni maggiori di 4; quindi due dei cinque numeri dati possono avere al più un divisore comune pari a 2, 3, 4 o essere primi tra loro.

Almeno due dei cinque numeri consecutivi devono essere dispari, e di due dispari consecutivi almeno uno non sarà divisibile per 3.

Quindi tra i numeri dati ne esiste almeno uno dispari non divisibile per 3, che quindi è primo rispetto agli altri quattro.

(b) Il ragionamento in questo caso è simile al caso precedente, anche se più complesso.

Se la differenza tra due numeri dispari non è maggiore di k, allora questi non possono avere un divisore comune maggiore di k; inoltre, per determinare se due numeri sono primi tra loro, è sufficiente determinare se hanno fattori *primi* comuni e quindi, dati sedici interi consecutivi, è sufficiente determinare quello che non ha in comune con gli altri numeri i fattori 2, 3, 5, 7, 11 o 13; questo intero sarà allora primo rispetto a tutti gli altri numeri dati.

Per prima cosa, eliminiamo i pari dall'insieme dei sedici interi; degli otto numeri restanti, la divisibilità per 3 si applicherà ad una e una sola dei seguenti sottoinsiemi:

1. al primo, quarto e settimo degli otto numeri, oppure
2. al secondo, quinto e ottavo degli otto numeri, oppure
3. al terzo e al sesto degli otto numeri.

Nello stesso modo, si vede che la divisibilità per 5 si applica:

1. al primo e al sesto degli otto numeri, oppure
2. al secondo e al settimo degli otto numeri, oppure

3. al terzo e all'ottavo degli otto numeri.

Per quanto riguarda la divisibilità per 7, essa si applica:

1. al primo e all'ottavo degli otto numeri, oppure
2. a uno e uno solo dei numeri restanti.

Inoltre, solo uno dei numeri dati sarà divisibile per 11 e solo uno dei numeri dati sarà divisibile per 13.

Se non più di cinque degli otto numeri dispari considerati sono divisibili per uno dei numeri 3, 5 o 7, allora tra i restanti tre (o più) almeno uno non sarà divisibile per 11 e per 13; poiché questo numero non ha tra i propri fattori 2, 3, 5, 7, 11 o 13, sarà primo rispetto ai sedici numeri della sequenza originale.

Consideriamo ora il caso in cui il numero degli interi dispari divisibili per 3, 5 o 7 non supera sei (che è il numero massimo di interi dispari della sequenza considerata divisibili in questo modo). Per prima cosa, assumeremo che tre degli otto numeri siano divisibili per 3: allora, in funzione della loro posizione (primo, quarto e settimo o secondo, quinto e ottavo), due dei numeri restanti saranno divisibili per 5 (terzo e ottavo o primo e sesto), mentre uno dei numeri restanti sarà divisibile per 7. Se eliminiamo dalla nostra lista gli (al più) cinque numeri divisibili per 3 o per 5, resteranno o il secondo, il quinto e il sesto o il terzo, il quarto e il settimo.

Consideriamo allora il primo caso (secondo, quinto e sesto). Il secondo, quinto e sesto numero dispari, se torniamo alla sequenza originale di sedici numeri, si troveranno nella quarta, decima e dodicesima posizione o nella terza, nona e undicesima.

Nel primo sottocaso (quarto, decimo, dodicesimo) due di questi numeri dispari non possono avere 7 come divisore e, di questi due, nessuno può avere 13 come divisore comune con uno qualsiasi degli altri numeri della sequenza originale, in quanto tutti i numeri restanti differiscono dalla sequenza originale per un valore minore di 13. Inoltre, siccome uno di questi due numeri deve essere per 11, ne rimane almeno uno che non è divisibile per 2, 3, 5, 7, 11 o 13 e quindi deve essere primo rispetto a tutti gli altri numeri della sequenza originale.

Nel secondo sottocaso (terzo, nono e undicesimo), se uno di questi numeri dispari ha in comune il fattore 13 con un altro numero della sequenza originale, può trattarsi solo del numero in terza posizione. Se eliminiamo questo numero, ci restano solo i numeri in nona e undicesima posizione, ma solo uno di questi due può essere divisibile per 7; qualunque esso sia, il restante non può avere un fattore 11 in comune con qualsiasi altro numero della sequenza, in quanto differisce per meno di 11 da qualsiasi altro numero della sequenza originale, e quindi almeno un numero sarà primo rispetto a qualsiasi altro numero della sequenza originale.

La dimostrazione per il secondo caso (terzo, quarto e settimo) è perfettamente identica.

Se solo due numeri della sequenza di otto dispari sono divisibili per 3 (il terzo e il sesto), allora è possibile che due dei restanti numeri (il primo e l'ottavo) siano divisibili per 7 e altri due (il secondo e il settimo) siano divisibili per 5. Se questi sei numeri sono eliminati e solo il quarto e il quinto della sequenza dei dispari sono considerati, questi non saranno divisibili per 3, 5 o 7. Ognuno di questi restanti tre numeri sarà primo rispetto ai restanti quindici numeri della sequenza originale, in quanto ognuno di essi differisce dai tre per meno di 11 e quindi non può condividere come divisori né 11 né 13[24].

[24] La nostra sorgente riporta, a questo punto, un controesempio *sbagliato* per il caso $k=17$; per quanto ci risulta, comunque, non è noto se la proposizione sia valida per $k>17$.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 La crescita reticolare mesoscopica degli amici di Helge

Non ci vuole un grande sforzo di fantasia per capire che in una Redazione virtuale come la nostra il funzionamento regolare dell'aria condizionata è equiparabile alla probabilità di trovare un primo pari di sei cifre.

Essendo intenzionati a mantenere ragionevolmente bassa la temperatura, portiamo avanti il discorso iniziato nella copertina; visto che questa è l'ultima rubrica, lo affrontiamo da un punto di vista leggermente diverso e cominciamo con una coincidenza.

Verso l'inizio di luglio avevamo trovato il sito che ci ha permesso di sfoggiare questa meravigliosa e rinfrescante copertina, e veleggiavamo verso le ferie una volta tanto liberi dal dramma di che libri portarci dietro; nelle pagine di spiegazione del sito[25], si trovava la notizia che la forma esagonale dei fiocchi di neve venne esaminata per la prima volta in un libro di Keplero, lo *Strena Seu de Nive Sexangula*; ora, nonostante i consigli di Umberto Eco di qualche anno fa, noi siamo scarsamente entusiasmati dall'idea di leggerci roba in latino sotto l'ombrellone, sia essa il pacco dei 141 volumi della *Patrologia* di Migne o un agile libretto scritto da un astronomo squattrinato per fare un regalo a un principe, quindi optavamo per una ricerca tra i link del sito.

La coincidenza è nella frase "…liberi dal dramma di che libro portarci dietro…". Infatti, raggiunta la spiaggia, aprivamo la nostra copia di *Flatterlandia* di Ian Stewart[26] e veleggiavamo tranquilli sino al capitolo sui frattali, dove facevamo la conoscenza di Helge il fiocco di neve (di Koch) che si peritava di raccontarci la storia di Keplero; a questo punto, un pezzo sui fiocchi di neve diventava un imperativo categorico.

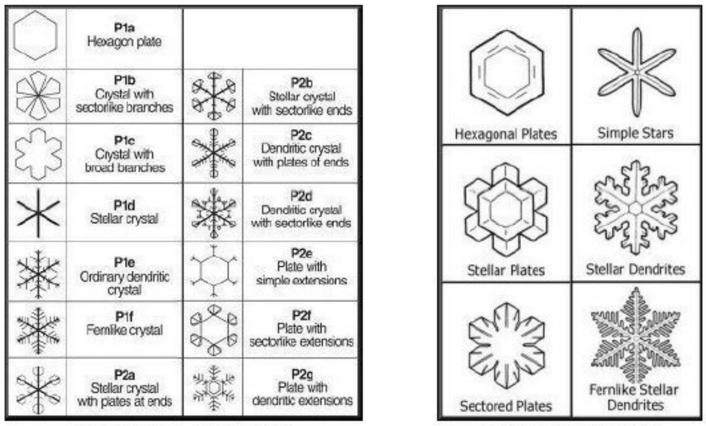
Il fiocco di Neve di Koch lo conosciamo ormai ragionevolmente bene, avendone calcolato tempo fa la dimensione frattale[27] (ottimo ripasso del metodo su *Flatterlandia*), quindi passiamo agli esagoni; qui è interessante notare che Keplero riesce a dimostrare che la disposizione esagonale è quella ottimale per quanto riguarda l'impaccamento bidimensionale di particelle rotonde uguali tra di loro; sempre in *Flatterlandia*, trovate un'interessante discussione su quanto sia invece complicato il problema per un numero superiore di dimensioni; qui intendiamo occuparci invece delle variazioni successive alla generazione del seme, in particolare chiedendoci come possano venir fuori delle forme del tipo rappresentato in copertina.

Il tutto, come al solito, comincia cercando una catalogazione; e, esattamente come al solito, ce ne sono troppe. Infatti, sia *Magono-Lee* sia *Libbrecht* (sì, proprio lui!) cercano di classificare le diverse tipologie; i primi nel 1966 arrivano ad una catalogazione di *ottantacinque* tipi diversi (uno dei quali, purtroppo, si chiama *Miscellanea*), mentre il secondo riesce a ridurre la tassonomica nivologica a trentacinque tipi (nel 2006 il libro *Field Guide to Snowflakes* risultava in preparazione: non abbiamo ulteriori notizie); giusto per darvi un'idea, in figura trovate una riproduzione delle categorie fondamentali di entrambi i tipi.

[25] Posto che vogliate farci un giro: http://www.its.caltech.edu/~atomic/snowcrystals/. Il Nostro vende anche delle stampe delle foto, ottime per decorare la casa al mare.

[26] Edizioni Aragno, traduzione Demonte Barbera, a voi meglio noto come ***Gavrilo***. L'unico difetto di quel libro è di avere una fine: comunque, regge tranquillamente sino alla quarta rilettura, soprattutto se seguite la matematica. Per saperne di più potete cercare anche nell'EUBNET di RM112.

[27] Dalla serie dei PM "Roba da Islandesi" in RM058, RM059 e RM077, soprattutto il secondo.



16 *I tipi di Magono-Lee (sx) e di Libbrecht (dx)*

Per dirla con un autore di pubblicazioni nel ramo, "…ad onta dell'abbondanza del prodotto finale, abbiamo ancora una scarsa conoscenza dell'evoluzione del fiocco di neve…"; infatti, i primi studi sperimentali in merito sono stati compiuti da *Nakaya* (1954), che eroicamente riuscì a far crescere dei cristalli di neve su un pelo di coniglio utilizzato come innesco; l'introduzione di elaboratori sempre più veloci sembrava fornire un buon metodo per studiare una crescita virtuale in ambiente controllato, ma ancora oggi è un problema bilanciare le due richieste fondamentali di un algoritmo ad un tempo realistico e trattabile.

Va detto che il fiocco di neve, almeno nel periodo della sua crescita, è un oggetto intrattabile; ad oggi, i fenomeni coinvolti nella costruzione dei fiocchi di neve (soprattutto quando andiamo oltre la fase microscopica: giustappunto, quella *mesoscopica*) sono frutto di una serie di osservazioni e i condizionali, come sempre quando le idee non sono molto chiare, abbondano.

Infatti, la prima cosa che si forma, di solito (in accordo con Keplero) è un piccolo prisma formato da due facce *basali* (quelle esagonali) e sei facce rettangolari (dette *prismatiche*) che uniscono le due basi; questa era l'idea originale di Keplero, e anche la neve sembra d'accordo.

Se consideriamo le temperature immediatamente sotto lo zero (tra zero e meno quattro, per intenderci) e tra i dieci e i venti gradi sotto zero, tutto funziona ragionevolmente bene: le facce prismatiche mostrano un fenomeno di crescita che ci porta all'usuale fiocco di neve che tutti conosciamo; se però andiamo a prendere le temperature restanti (compreso quelle tra meno quattro e meno dieci), il nostro fiocco comincia a comportarsi in modo decisamente strano, privilegiando la crescita delle facce basali e quindi dando origine a strutture simili a colonne o aghi.

Per semplificarsi la vita (e forse anche perché in questo caso i disegni vengono migliori dal punto di vista artistico), solitamente quando si studiano i fiocchi di neve si considera l'intervallo tra zero e quattro gradi sotto lo zero; non crediate, però, che anche in questo campo siano tutti rose e fiori; la prima e probabilmente l'unica semplificazione che otteniamo è che i tipi di *Magono-Lee* si riducono a tredici, mentre quelli di *Libbrecht* a sei (e sono quelli che vi abbiamo mostrato nella figura precedente); comunque, soprattutto in vicinanza dello zero, ne succedono di tutti i colori: i guai principali, al momento, sembrano appartenere a tre categorie.

Tanto per cominciare, la *transazione brusca*; le facce del cristallo (quelle prismatiche: qui crescono solo quelle, in pratica) cessano di essere piane e si trasformano in strutture arcuate (con l'interessante proprietà di mandare a gambe all'aria qualsiasi modello matematico); la cosa sembra causata da un brusco (da cui il nome) aumento della fusione del ghiaccio.

Poi, la *sublimazione*; il ghiaccio cristallizzato si trasforma direttamente in vapore, erodendo e arrotondando i bordi e complicando notevolmente (qui quelli gentili dicono "degradando") la struttura del cristallo.

Infine, l'*orlatura* (nostra pessima traduzione dell'originale *rimming*): un brusco abbassamento di temperatura può portare a far sì che acqua super-raffreddata (e quindi ancora allo stato liquido, anche se sottozero) non riesca a vaporizzare prima di raggiungere i confini del cristallo e quindi solidifichi in gocce; questi aggregati vanno sotto il nome di *graupel*, che ci rifiutiamo di tradurre anche perché non abbiamo capito in che lingua sia scritta.

Insomma, come dovrebbe aspettarsi chiunque abbia una ragionevole conoscenza del diagramma di stato dell'acqua, le complicazioni si sprecano.

In ogni caso, anche con le opportune semplificazioni la situazione non diventa molto più rosea; infatti, esistono tre tipi di variazioni rispetto al caso banale di crescita secondo gli esagoni.

Tanto per cominciare, la *prima instabilità*, e qui muoviamo un'aperta critica al nome scarsamente fantasioso. In sostanza, gli angoli dell'esagono risultano molto più facilmente accessibili dei lati alle molecole intenzionate a far parte del cristallo, il che ingenera rallentamenti nelle crescite lungo i lati; secondo alcuni, qui sta la ragione della crescita "creativa" (termine nostro) dei fiocchi di neve; evidentemente, crescere su un angolo genera dei nuovi angoli su cui imbastire una crescita, e questo rende l'ambiente piacevolmente caotico.

Secondariamente, le onde di *macrogradini* (brutto? OK, "*macrosteps*" va meglio?); qui si tratta del fatto che su un lato del nostro esagono comincia a svilupparsi un ulteriore strato (lineare), che genera un "gradino" sulla faccia; questi aggeggi (o meglio il loro arresto nella crescita) sono considerati la principale origine della crescita e della ramificazione dei dendriti felciformi (per gli anglofoni: *fern-like*).

Infine, l'*instabilità apicale* (va bene, ce la stiamo tirando: l'originale è *tip instability*) è l'effettiva nascita del dendrite da un arresto nella crescita di un macrogradino, causata dal rinforzo della singolarità di spigolo (che è un angolo a tutti gli effetti, e quindi permette le instabilità del primo ordine).

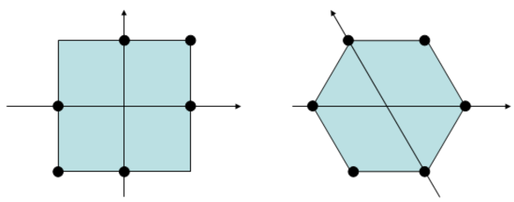
Se a questo punto il tutto vi pare una questione di lana caprina, avete completamente sbagliato punto di vista; infatti, proprio da qui sono cominciate roventi diatribe che hanno portato ad una certa freddezza di rapporti personali tra gli interessati al problema (i fetenti giochi di parole nella frase precedente sono *voluti*).

Infatti, una teoria sostiene che la *nucleazione* dei cristalli non avviene se non a livello quantomeno mesoscopico, e quindi che tutte le teorie che cercano di spiegare la crescita del fiocco di neve "da zero ad infinito" con la stessa legge siano sostanzialmente sbagliate; la cosa non ci preoccupa assolutamente, visto che qui (anche per motivi di temperatura di un fine luglio piuttosto caldo) siamo più interessati alle divagazioni matematicamente valide che alla verifica di un qualcosa che vedremo, nella migliore (peggiore) delle ipotesi, tra quattro mesi.

L'idea che ci interessa risale al 1984 e l'ha avuta *Packard*: i fiocchi di neve crescono su una base predefinita, quindi non sono altro che degli *automi cellulari*; se consideriamo che un fiocco non perde quello che ha già costruito, possiamo aggiungere che sono *persistenti* e, tenendo conto di quanto ha detto Keplero, che crescono su un *reticolo esagonale*.

E fin qui tutto sembra semplicissimo; il fatto è che possiamo parlarne in modo molto più formale.

La base di tutto è il considerare la solidificazione del fiocco di neve su un *reticolo triangolare T*; per il momento, consideriamo un *seme* in (0,0) e l'insieme *N* dei suoi *vicini* composto da lui e dai punti (±1,0), (0,±1) e ±(1,1); siccome gli automi cellulari di solito si sviluppano su un reticolo ortogonale, vi forniamo entrambe le rappresentazioni, fermo restando che per far crescere fiocchi di neve come si deve dovete usare la rappresentazione triangolare, anche se in fin della fiera *T* coincide con Z^2 e quindi i nostri "automi esagonali" sono riconducibili dal punto di vista del calcolo a quelli classici.



17 *I reticoli*

Adesso cominciamo ad inventarci un po' di notazioni, che aiuta sempre. In base a quanto detto sopra, i *vicini* di un punto *x* sono l'insieme *x+N*, e la cosa non è immediata se usate i reticoli ortogonali tipici degli automi.

Di solito, si indica con $A_t \subset Z^2$ l'insieme dei punti del nostro reticolo che al tempo *t* risultano occupati (o *solidificati*, se preferite); il suo complementare si indica con A_t^c e, nel momento stesso in cui si renda necessario, si indicano gli elementi del primo con 1 e quelli del secondo con 0.

Formalmente, l'insieme A_t *cresce* in tempo discreto *t*=0, 1, 2…, ed è sempre $A_t \subset A_{t+1}$. Tecnicamente, automi cellulari di questo tipo sono detti di *solidificazione*, e il motivo dovrebbe essere chiaro a chiunque; contrariamente al solito, non esistono leggi di "morte" dell'elemento dell'insieme, che resta a far parte della struttura per tutto il tempo in esame.

Ora, il fatto che per un $x \notin A_t$ sia[28] però $x \in A_{t+1}$ dipende unicamente dal numero di siti che *x* è in grado di vedere dell'insieme A_t, ossia di cosa ci sia in $|(x+N) \cap A_t|$, dove il segno di norma serve a tener conto della "distanza" (le virgolette nascono dal fatto che stiamo lavorando su un grafo triangolare) tra i punti.

Questo significa che possiamo creare una *regola* che ci dice quali vicini solidificheranno ad un dato momento; formalmente, possiamo scrivere (tranquilli, dopo la spieghiamo):

$$\pi : \{1,2,3,4,5,6\} \to \{0,1\} : x \notin A_t, \pi(|(x+N) \cap A_t|) = 1 \Leftrightarrow x \in A_{t+1}.$$

Ossia, se un *x* non è congelato, congelerà al prossimo passo solo se la funzione π mi dice che congelerà in funzione del fatto che un qualche suo vicino faccia già parte del cristallo; attenzione che il calcolo va fatto sui vicini *congelati* del punto *non congelato*, non al contrario (come sembrava logico a Rudy).

Ora, la richiesta che il fiocco "cresca" impone che sia $\pi(1) = 1$, ma per gli altri valori si può fare come vi pare; anche se questo sembra molto bello, significa semplicemente che dovete calcolarvi tutti i trentadue candidati alla costruzione del fiocco di neve; fortunatamente, molti di questi calcoli li ha già fatti qualcun altro e vi riassumiamo la conclusione[29]: i sedici che hanno $\pi(2) = 1$ sono tutti uguali, ottenete un esagono punto e

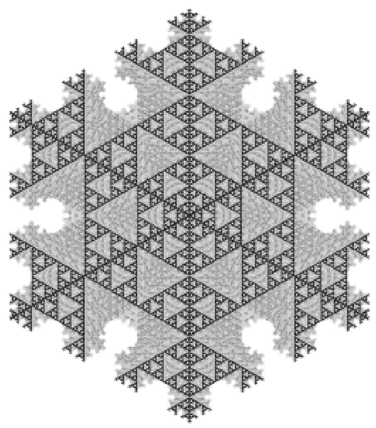
[28] Comunicazione interna: di recente abbiamo avuto in redazione un'interessantissima discussione sul verbo inglese *to belong*: l'originale da cui abbiamo tratto queste note lo utilizza, ma abbiamo preferito la sua traduzione in linguaggio "freddamente" formale, anche per evitare discussioni.

[29] Mettiamo la nota qui ma lo ripeteremo nel seguito: se qualcuno scrive un programmino che riesca a disegnare i fiocchi a partire dalla regola, accetteremo, ringrazieremo, pubblicizzeremo e pubblicheremo. Se poi ci cavate fuori uno screen-saver, lo utilizzeremo almeno sino a fine settembre.

basta. Quindi, gli automi "seri" sono solo i sedici restanti per cui $\pi(1)=1$ e $\pi(2)=0$; fortunatamente, la notazione classica continua a considerare tutti i punti e non "semplifica" eliminando questi due valori: la cosa risulta, almeno ai nostri occhi, più comprensibile.

Il fatto che sia $\pi(1)=1$ ha l'aria abbastanza insignificante, ma porta un'informazione molto utile: lungo i sei "assi" (virgolette dettate dal fatto che in realtà quelli veri e propri sono due, ma in un esagono fa comodo considerarne sei) ad ogni passo temporale avremo l'aggiunta di un nuovo centro di aggregazione; questo significa che lungo questi assi avremo sempre la crescita più veloce, e da questo nasce la "forma" esagonale del fiocco di neve e il (per noi sicuramente più importante) bellissimo nome di *"light cone"* per queste direzioni; in effetti, nulla può andare più veloce della crescita su questi assi e quindi il nome è decisamente appropriato.

Sempre restando nell'analisi della notazione come sin qui schematizzata, va notato che $\pi(1)=1$ e $\pi(2)=0$ sono, a ben vedere, una forma complicata della regola dell'*or esclusivo*: se tra i vicini hai un punto "congelato" congeli, se ne hai due resti liquido. Di conseguenza, la costruzione del fiocco di neve ricorda molto quella della "*Gerla di Sierpinsky"*, che trovate spiegata nel libro di ~~Gavrilo~~ Ian Stewart, anche se la sua "parentela" con il fiocco di neve (Helge) viene limitata al fatto di essere entrambi dei frattali; ci pare, comunque, che la figura qui di fianco mostri l'evidente parentela.



"Il" fiocco di neve al tempo t=218, con evidenziati in nero i "coni di luce"

Insomma, le regole di Packard per la creazione dei fiocchi di neve hanno tre importanti proprietà:

1. Partendo da una singola cella occupata, il cono di luce dell'automa cellulare forma una ragnatela impenetrabile all'interno della quale il processo di crescita continua in modo indipendente;
2. Gli effetti dati dal contorno vanno verificati
3. Il cono di luce di un automa cellulare è additivo, ossia la ragnatela di crescita da un qualsiasi seme finito è rappresentabile come la sovrapposizione delle ragnatele formate da ogni singola cella[30]

Probabilmente qualcuno si sta chiedendo come cavolo si descrivano questi cosi. Provvediamo subito.

Il modo migliore è quello di indicare quali siano, nella funzione π, i punti che possono essere a 1 per garantire il congelamento; notate che non ci si preoccupa assolutamente di numerarli, in quanto se decidete voi l'ordine, la cosa funziona da sola. Per intenderci, il fiocco di neve con la Gerla di Sierpinsky qui sopra è descritto dall'Automa *Hex134*.

"Rudy, a cosa serve 'Hex'?" buona domanda.

In realtà non ci si ferma a considerare i reticoli esagonali: si sono anche introdotti, ad esempio, gli automi *Box* consistenti della cella (0,0) e dei vicini (0,±1), (±1,0) e (±1,±1); totale dei vicini, otto.

[30] "ragnatela", qui, è la pessima traduzione dell'originale "web". *Ça va sans dire.*

"E cosa generano, questi? Cubetti di ghiaccio?" No, anzi, non si è capito molto bene al momento; ad esempio *Box1357* sembra che ad un certo punto perda i coni luce e mostri un comportamento caotico; al contrario, quelli esagonali si comportano decisamente meglio; se definite la *densità* ρ come il valore (asintotico) del rapporto tra il fiocco di neve A_t e il suo complementare A_t^c per $t \to \infty$, allora vi accorgete "dopo semplici ma noiosi passaggi" che otto automi hanno una densità esattamente calcolabile:

$$\rho_{Hex13} = \rho_{Hex135} = \frac{5}{6};$$
$$\rho_{Hex134} = \rho_{Hex1345} = \frac{21}{22};$$
$$\rho_{Hex136} = \rho_{Hex1356} = \rho_{Hex1346} = \rho_{Hex13456} = 1.$$

Mentre per altri sei potete al massimo fare una stima entro meno di una parte su mille, e gli ultimi due (intrattabili) dovete accontentarvi di stime con errori dalle parti del cinque per mille; questi due balordi sono ρ_{Hex146} e $\rho_{Hex1456}$, con valori pericolosamente vicini a 1 ma, a quanto pare, non uguali.

Ora, abbiamo dei problemi con una traduzione che tutti quelli di voi che conoscono i Jethro Tull giudicheranno insoddisfacente. Come si traduce *"thick"*? La traduzione classica, visto che stiamo parlando di topologia, dovrebbe essere "compatto", ma secondo noi si perde qualcosa, e Ian Anderson è d'accordo con noi; quindi, se trovate qualcosa di meglio, fatecelo sapere; per intanto, usiamo "compatto", confortati dal fatto che ***Gavrilo*** (e Ian Stewart) riescono bellamente a dribblare il termine quando fanno litigare Victoria con il Pastopo.

In ogni modo, a quanto pare, per quanto riguarda gli automi *esattamente risolvibili* (ossia quelli dei quali possiamo calcolare esattamente la densità) valgono le seguenti regole:

1. A_∞ è sempre compatto.
2. Hex13456 ha sempre $A_\infty = Z^2$ (ossia, satura il piano); per quanto riguarda le altre regole con densità 1, esistono sempre delle condizioni iniziali per cui A_∞ contiene infiniti zeri.
3. A_∞^c è sempre compatto per regole con densità $\rho < 1$, e non lo è mai per regole con densità $\rho = 1$.

Inoltre,

> Per le regole non esattamente risolvibili A_∞ non è mai compatto, mentre per quanto riguarda *Hex1* A_∞^c è sempre compatto.

Posto che poi vi interessino i problemi da risolvere, ci si sta ancora chiedendo se per le sette regole restanti A_∞^c sia compatto; sembra di sì, ma la cosa è più che altro una sensazione: nessuno è ancora riuscito a dimostrarlo.

Ora, esattamente su A_∞ nasce il problema; le regole degli automi cellulari sin qui viste sembrano descrivere molto bene l'evoluzione *micro*scopica dei fiocchi di neve, ma quando si passa alla crescita *meso*scopica, le cose sembrano meno definite. Ad oggi abbiamo dei sostenitori della teoria che la crescita mesoscopica vada considerata solo come un insieme di crescite microscopiche (*Libbrecht* e *Wolfram*, ad esempio), mentre altri ritengono che le regole nell'ambito mesoscopico vadano generate completamente ex-novo. Posto che vi interessi la nostra opinione, noi tifiamo per gli automi cellulari che, anche se non fossero veri, sono di sicuro più divertenti.

Un'ultima nota: pare che l'osservazione dei cristalli sia notevolmente facilitata da abbondanti dosi di *vin brulé*.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms