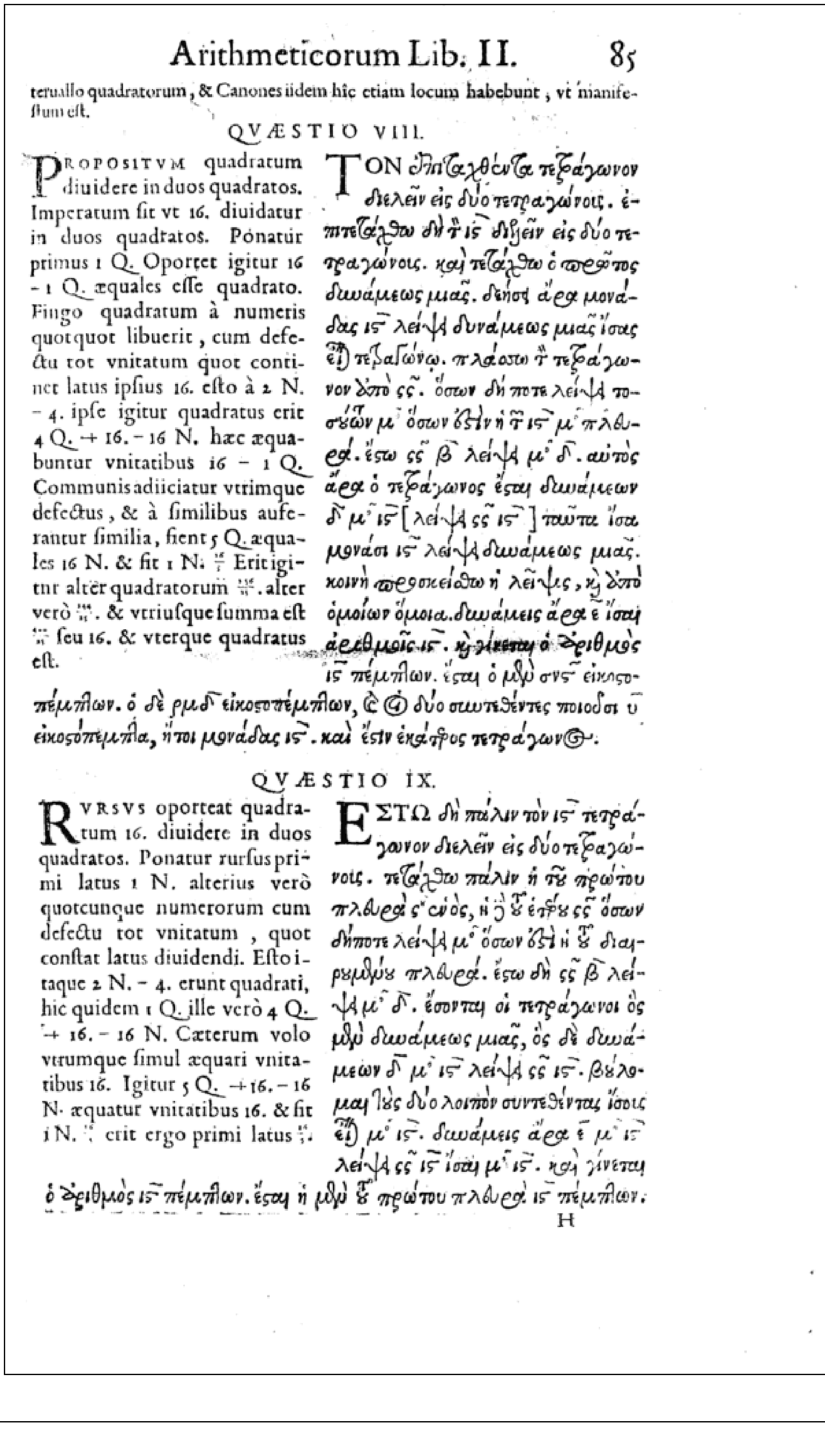
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 114 – Luglio 2008 - Anno Decimo



teruallo quadratorum, & Canones iidem hic etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 – 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quot continet latus ipsius 16. esto à 2 N. – 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. – 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 – 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$. Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter verò $\frac{144}{25}$. & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

Τὸν ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ιϛ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. καὶ τετάχθω ὁ πρῶτος δυνάμεως μιᾶς. δεήσει ἄρα μονάδας ιϛ λεῖψει δυνάμεως μιᾶς ἴσας εἶναι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςς. ὅσων δή ποτε λεῖψει τοσούτων μ° ὅσων ἐστὶν ἡ τῶν ιϛ μ° πλευρά. ἔστω ςς β λεῖψει μ° δ. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεων δ μ° ιϛ [λεῖψει ςς ιϛ] ταῦτα ἴσα μονάσι ιϛ λεῖψει δυνάμεως μιᾶς. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. δυνάμεις ἄρα ε ἴσαι ἀριθμοῖς ιϛ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιϛ πέμπτων. ἔσται ὁ μὲν σνϛ εἰκοστοπέμπτων. ὁ δὲ ρμδ εἰκοστοπέμπτων, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι υ εἰκοστόπεμπτα, ἤτοι μονάδας ιϛ. καὶ ἔστιν ἑκάτερος τετράγωνος.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16. diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. – 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. – 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. – 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ erit ergo primi latus $\frac{16}{5}$.

Ἔστω δὴ πάλιν τὸν ιϛ τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. τετάχθω πάλιν ἡ τοῦ πρώτου πλευρὰ ς ἑνός, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου ςς ὅσων δήποτε λεῖψει μ° ὅσων ἐστὶν ἡ τοῦ διαιρουμένου πλευρά. ἔστω δὴ ςς β λεῖψει μ° δ. ἔσονται οἱ τετράγωνοι ὃς μὲν δυνάμεως μιᾶς, ὃς δὲ δυνάμεων δ μ° ιϛ λεῖψει ςς ιϛ. βούλομαι τοὺς δύο λοιπὸν συντεθέντας ἴσους εἶναι μ° ιϛ. δυνάμεις ἄρα ε μ° ιϛ λεῖψει ςς ιϛ ἴσαι μ° ιϛ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιϛ πέμπτων. ἔσται ἡ μὲν τοῦ πρώτου πλευρὰ ιϛ πέμπτων.

H

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 112 ha diffuso 1830 copie e il 30/06/2008 per Google eravamo in 7380 pagine.

Dr. Bob degli "Australian Skeptics" tiene in rete una specie di "trivial pursuit" mensile difficilissimo e cattivissimo (se andate a vedere i vincitori degli anni passati, dovreste trovare qualcuno che conoscete). A marzo ha chiesto cosa fosse 'sta roba, ricevendo la risposta che il (margine del) form era troppo piccolo per rispondergli.

1. Il brutto anatroccolo

Per quanto viaggiamo in tutto il mondo per trovare ciò che è bello,
dobbiamo portarlo con noi oppure non lo troveremo.
(Ralph Waldo Emerson)

Se ho visto più lontano è perché sedevo sulle spalle di giganti.
(Isaac Newton)

Una favola è un piccolo capolavoro di ottimizzazione: mentre si intrattiene un bambino gli si insegna qualche virtù o un modo in cui comportarsi, distinguere il bene dal male, il giusto dallo sbagliato ed evolvere il proprio senso critico. La distinguiamo dalla fiaba, che invece dovrebbe avere un intento meno allegorico, ed avere un alto contenuto di magia e figure fantastiche, ma a nostro modesto parere la divisione è piuttosto vaga. In ogni caso le favole/fiabe esistono da sempre in tutte le possibili culture, ambientate in modo diverso e con personaggi più o meno adeguati ai tempi e alla cultura che le diffonde.

La favola è alla fine una rappresentazione delle aspirazioni popolari, del loro modo di vedere le classi più fortunate e di semplificare i modi in cui personaggi di umili origini potrebbero andare a far parte del mondo degli eletti. Non per niente è spesso necessario introdurre maghi, fate, eventi soprannaturali: la realtà, soprattutto in epoche più oscure del nostro passato, come nel medioevo, era ben più triste e presentava ben poche possibilità[1]. In questo senso il genere è legato a doppio filo con i tempi e i luoghi del racconto: se la generazione dei 30-40-50-enni di oggi si è immaginata durante questa spiegazione una *Biancaneve e i sette nani* o *Le Mille e una Notte*, non ci stupiremmo se un ragazzino dei giorni nostri avesse pensato a *Lilo & Stitch*[2] o *Nemo*. Potenza della cinematografia, le storie di oggi sono molto più "visive", così come i giorni in cui viviamo sono basati sull'immagine.

1 *La locandina di Lilo & Stitch*

Ignorando le attuali tendenze a dare più importanza all'apparenza chiassosa rispetto alla ricerca della conoscenza – anche perché, per una generazione successiva, è sempre scorretto (e troppo facile) giudicare negativamente le "moderne" inclinazioni – lo scopo vero e proprio della fiaba (come della favola) è proprio quello di indicare ad un giovane che il percorso verso il "mondo adulto" è irto di difficoltà, e che il superamento di tali difficoltà secondo una certa etica lo porterà prima o poi al successo.

I temi moderni non sono più quelli dei principi che devono conquistare la loro principessa – separati da torri, fortezze, matrigne e chissà quale altro maleficio – ma famiglie spezzate, affidamenti famigliari, la ricerca di un lavoro stabile; eppure il punto è sempre lo stesso: bisogna superare le difficoltà, confrontarsi con le proprie origini e la propria diversità ed aspirare al meglio, imparare ad essere una versione consapevole e felice di sè stessi.

Una buona fiaba deve essere una parabola di vita, insegnare qualcosa, contenere un valido apparato di regole non scritte; per esempio nel classico *La bella e la bestia* ci sono varie lezioni da imparare: il saper vedere al di là dell'apparenza nell'atteggiamento di Bella, l'importanza di mantenere le promesse in vari momenti della storia, il legame di

[1] Del resto gli iniziatori del genere "Favola" nella tradizione occidentale, Esopo e Fedro, erano schiavi e utilizzavano le loro storie didascaliche per dire quello che pensavano senza farlo esplicitamente (per Esopo parliamo di qualche secolo prima di Cristo, non è che gli schiavi avessero molta voce in capitolo…).

[2] Ne riportiamo la locandina proprio per mostrare quanto siano cambiate le fattezze degli eroi di oggi rispetto a quelli di solo una trentina di anni fa...

una famiglia nel rapporto padre-figlia, gli effetti negativi della gelosia nel rapporto tra le sorelle. Ogni parte è insegnata mostrando come il comportamento sbagliato porta ad effetti maligni, mentre la reazione corretta porta al lieto fine. Questa è una fiaba già piuttosto moderna, in cui ci sono "cattivi" assoluti, ma personaggi (come la bestia) che imparando la gentilezza riescono a conquistare l'amore e riscattare degli errori del passato.

I cattivi veri, come la strega di Biancaneve o il Lupo di Cappuccetto Rosso, sono destinati alla morte ed è pure questo un insegnamento: morendo sono relegati nella posizione in cui non possono più imparare nulla, non possono migliorare e passare al prossimo stadio, mentre Biancaneve sposa il Principe e rimane gentile e amica dei Nani e Cappuccetto Rosso impara a non perdere tempo nel bosco e ad eseguire gli ordini della madre.

2 *Hans Christian Andersen*

Tanto della vita di chi racconta le storie viene trasposto nelle storie stesse: il povero H.C. Andersen (l'autore di *La sirenetta*, *Scarpette Rosse*, *La piccola fiammiferaia*, *Il brutto anatroccolo*, *La principessa sul pisello…*) aveva avuto un'infanzia triste e – anche se non se ne parla molto nelle biografie – aveva la tendenza ad innamorarsi di uomini e donne che non lo ricambiavano. Era "diverso" fin da bambino, con una voce particolare da soprano e modi un po' effeminati. Era l'inizio dell'Ottocento e non era certo qualcosa di cui vantarsi, e quando restò orfano e senza mezzi dovette vivere di espedienti per un po'. Anche se in seguito riuscì ad avere un certo successo e divenne amico di personaggi come Dickens – ed è tuttora una specie di eroe nazionale in Danimarca, come testimoniano le statue sue e dei suoi personaggi da tutte le parti a Copenhagen – il percorso per giungere alla maturità lo aveva segnato seriamente, e non è un caso se i suoi personaggi hanno difficoltà a trovare l'amore, se mai lo trovano.

La sirenetta (non quella del film, quella del libro) diventa schiuma di mare quando il principe finisce per sposare un'altra, la piccola fiammiferaia muore di freddo, il soldatino di piombo e la ballerina di carta finiscono nel fuoco… fiabe, per così dire, anomale, che magari possono cominciare con "c'era una volta", ma alle quali manca il finale "…e vissero tutti felici e contenti": ma non proprio tutte.

3 *Dal "brutto anatroccolo" di Disney del 1931.*

Il brutto anatroccolo, rifiutato da quella che crede la sua famiglia, perseguitato da chiunque incontri, rischia la vita ed il congelamento durante l'inverno, ma in primavera scopre la sua vera natura, scopre di essere uno splendido cigno. La parabola insegna a coloro che a volte si sentono isolati e "diversi" che la diversità può essere positiva, che le difficoltà da superare rendono più forti e abili ad affrontare la vita.

Se ai tempi di Andersen (Ottocento) la sopravvivenza dei ragazzini era difficile e la gioventù dei più complicata, doveva essere ancora peggio due secoli prima, quando l'elevata mortalità infantile era talmente diffusa da essere considerata normale. Il Seicento è il secolo di grandi rivoluzioni filosofico-scientifiche, il tempo di Cartesio, Newton, Pascal, Hobbes, Huygens, Locke, Leibniz, Boyle, Torricelli, Mersenne, Fermat. Ci sembra importante nominare i grandi filosofi, fisici e matematici del tempo – anche se sicuramente solo alcuni – per rendere l'idea del periodo storico senza nominare poteri temporali, regnanti e guerre, per una volta. Quasi tutti i personaggi menzionati ebbero parecchi fratelli e sorelle, alcuni ebbero infanzie difficili e brillanti carriere, ma di tutti ci si ricorda il nome[3].

4 *Robert Hooke (forse).*

Un nome un po' relegato a posizioni secondarie nella storia del secolo è quello di Robert Hooke, un vero e proprio uomo universale, nato sull'isola di Wight, a Freshwater in Inghilterra il 18 luglio del 1635. Il padre era il curato responsabile per la chiesa e la comunità di Freshwater e gestiva una piccola scuola come tutore privato.

La tradizione di famiglia prevedeva per i giovani Hooke una carriera ecclesiastica, ma il povero Robert era nato di salute cagionevole[4], così i genitori – non sapendo se sarebbe sopravvissuto ai primi anni di vita – decisero di lasciare l'educazione del figlio a lui stesso.

Robert aveva una passione per i movimenti meccanici ed aveva un eccezionale spirito d'osservazione: passò quindi i primi dieci anni di vita ad osservare piante, animali, fattorie, rocce, scogliere e spiagge intorno a lui. Era affascinato da giocattoli ed orologi meccanici e creava lui stesso oggetti di legno dalla precisione incredibile per un ragazzino decenne: le sue doti artistiche cominciarono ad essere evidenti a quest'età, ed il ragazzo passava la maggior parte del suo tempo con un ritrattista locale, imparandone le tecniche. E' proprio in questo periodo che John, il padre, si ammalò, e morì nel 1648 lasciandogli una piccola somma e tutti i suoi libri. A Robert, che aveva dimostrato solo interesse per la pittura, la famiglia assicurò l'apprendistato a Londra presso Peter Lely, che in quel momento andava per la maggiore come ritrattista della nobiltà londinese.

A questo punto della storia, però, il giovane Hooke comincia ad interessarsi al mondo scolastico, rinuncia alla possibilità di apprendistato ed investe invece la piccola somma in un'educazione, iscrivendosi a Westminster. Ancora una volta il ragazzo, il cui valore viene immediatamente riconosciuto dal rettore, ottiene il permesso di studiare un po' quello che vuole. E con che risultati: Robert imparò il latino, il greco e a suonare l'organo, studiò geometria e cominciò a costruire macchine volanti. Nel 1653 aveva già appreso tutto quello che Westminster poteva offrire, così si iscrisse al Christ College di Oxford, proprio quando personaggi del calibro di Robert Boyle, John Wallis, Christopher Wren[5] si riunivano in quello che venne chiamato anche "il collegio invisibile", dove non ottenne mai un titolo accademico ma imparò molto più di quanto gli studenti regolari riuscissero a fare, e strinse amicizie che durarono tutta la vita.

Di questo periodo sono i suoi esperimenti e le creazioni di macchine volanti di diversi tipi, di cui però ben poco è stato documentato: Robert studiava attentamente gli insetti e le loro tecniche di volo e volle costruire dei "muscoli artificiali". È possibile che riuscì

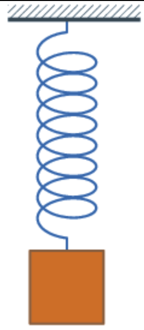
[3] Anche perché molti in queste pagine hanno fatto il loro passaggio: Newton RM071, Pascal RM053, Leibniz RM054, Mersenne RM091, Fermat RM091, e degli altri di sicuro si è già parlato in tutti i compleanni dei contemporanei… quindi del periodo storico chi ci segue ha un'idea ben chiara.

[4] Una caratteristica che lo accomuna con Cartesio, che per tutta la vita non riuscì ad alzarsi dal letto prima delle undici di mattina, a causa della povertà della sua costituzione.

[5] Anche loro nostri vecchi amici: Wallis in RM070, Wren – che ritornerà più volte nel seguito – in RM105. Pare che non ci sia quasi matematico dell'epoca che non abbiamo ancora celebrato, a parte Hooke… comunque in particolare di questa comunità di scienziati si parla già in RM070, e di come la loro collaborazione portò alla creazione della Royal Society.

parzialmente nell'intento, ma nello studio delle vibrazioni delle ali degli insetti ottenne anche una certa quantità di idee sulla relazione tra la frequenza di vibrazione e le note musicali, che sfortunatamente non approfondì.

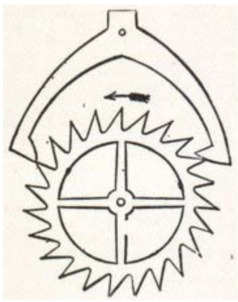
Era ancora interessato alla meccanica, ma si assicurò basi stabili in astronomia: era un uomo che non riusciva a fare una sola cosa per volta, contribuiva a esperimenti di dissezione di insetti mentre otteneva un lavoro come assistente di Boyle nel 1655. Per Boyle Hooke progettò e realizzò una pompa pneumatica il cui schema è tutt'ora usato e che permise a Boyle stesso di proseguire i suoi esperimenti e finalmente formulare le "Leggi di Boyle"; mentre se ne occupava si interessò anche del funzionamento degli orologi e su come utilizzarli per calcolare la longitudine in mare. Per fare una cosa del genere i sistemi a pendolo non potevano essere di grande utilità, disturbati sicuramente dal beccheggiare del mezzo, così il nostro eroe propose l'utilizzo delle molle invece della forza di gravità, e dopo qualche anno di esperimenti formulò la legge di Hooke.



F=-kx

5 *Legge di Hooke*

In pratica Robert scoprì la relazione di proporzionalità diretta tra l'allungamento di una molla rispetto alla posizione a riposo e la forza necessaria all'allungamento stesso. Come d'uso all'epoca[6] la legge fu annunciata con un anagramma in latino ("*ceiiinosssttuu*", che vale "*Ut tensio, sic vis*", ovvero "Come l'estensione, così la forza"), ma solo più di una decina di anni dopo averla scoperta ed utilizzata per il suo lavoro di progettazione di orologi.



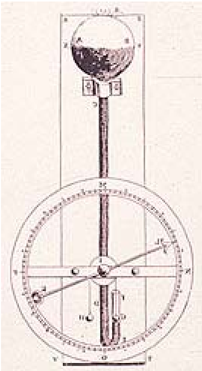
6 *Scappamento ad àncora per orologi – invenzione di R.H.*

L'idea era quella di utilizzare il principio per ottenere degli orologi "portatili", e per farlo cominciò a lavorare con tre colleghi (l'amico Wren, Moray e Brouncker): insieme prepararono il progetto per un brevetto, ma non appena Robert scoprì che la registrazione del brevetto avrebbe permesso anche agli altri tre di ottenere vantaggi economici dalla sua idea iniziale, rifiutò di proseguire. Anni dopo in tanti realizzarono separatamente orologi di tipi diversi basati sullo stesso principio, ma l'invenzione dello scappamento ad àncora, almeno, è ancora riconosciuto ad Hooke, malgrado Huygens ne faccia largo uso nei suoi scritti.

Era il 1660, e la situazione in Inghilterra stava cambiando: Hooke, con le sue idee brillanti e innovative era parte attiva di quella società che in pochi anni diventò la Royal Society of London, e nel frattempo si interessava di vasi comunicanti e azioni capillari: realizzò quindi degli esperimenti che dimostravano che l'acqua saliva più in alto nei tubi più piccoli.

Nel 1662 il re (Charles II) riconobbe la Società – che da questo punto in poi ebbe il nome con cui la conosciamo ancora oggi – e nel patto c'era un piccolo contributo finanziario per un "Curatore degli Esperimenti", posizione peraltro legata a garanzie considerate impossibili da fornire: il responsabile avrebbe dovuto mostrare almeno tre o quattro esperimenti ad ogni riunione della Società. Era un compito che forse solo Hooke avrebbe potuto svolgere, ed infatti nei seguenti quindici anni produsse un numero di idee e spunti originali, ma non ebbe mai tempo di approfondire nulla. In più il salario non era garantito, e l'unico vantaggio che ottenne fu di poter evitare di pagare la tassa di associazione alla Royal Society.

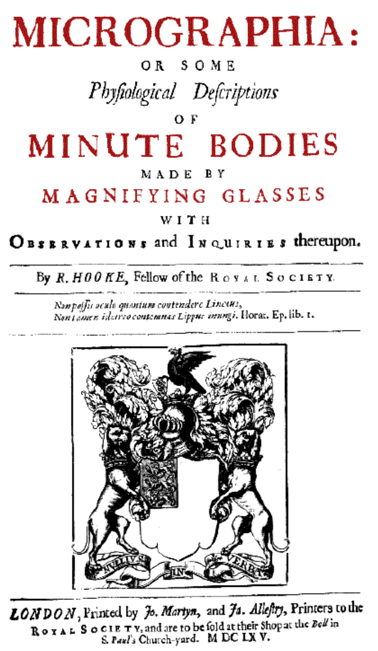
[6] Vi abbiamo raccontato anche questo tipo di abitudini in RM054.



7 Il barometro di R.H.

Eppure non basterebbero queste poche pagine a descrivere il numero di esperimenti, scoperte e ricerche effettuate con fondi scarsi e tante idee: studio della natura dell'aria e relazioni con la respirazione e la combustione (incluso verificare la respirazione indotta in un cane direttamente nei polmoni, lo studio della circolazione venosa ed arteriosa), pesi specifici, leggi della caduta dei gravi, miglioramenti delle campane per immersione, metodi telegrafici, relazioni tra le letture barometriche ed il tempo, definizione dello zero del termometro in corrispondenza della temperatura di congelamento dell'acqua, nonché l'invenzione di numerosi strumenti per la misurazione e la verifica dei fenomeni dimostrati. Ma non solo: per ogni tipo di esperimento a cui si dedicava c'era uno strumento che poteva essere costruito o migliorato, come per la costruzione degli orologi, per la quale approntò un attrezzo per intagliare i denti dei meccanismi in dimensioni che a mano erano impossibili da ottenere.

Il lavoro per la Royal Society dava a malapena da vivere a Hooke, ma il nostro eroe non si dava pena di tali piccolezze: nel frattempo aveva costruito il proprio microscopio e si era dedicato allo studio del "molto piccolo".



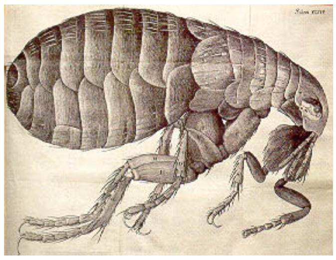
MICROGRAPHIA:
OR SOME
Physiological Descriptions
OF
MINUTE BODIES
MADE BY
MAGNIFYING GLASSES
WITH
OBSERVATIONS and INQUIRIES thereupon.

By R. HOOKE, Fellow of the ROYAL SOCIETY.

Non possis oculo quantum contendere Linceus,
Non tamen idcirco contemnas Lippus inungi. Horat. Ep. lib. 1.

LONDON, Printed by Jo. Martyn, and Ja. Allestry, Printers to the ROYAL SOCIETY, and are to be sold at their Shop at the Bell in S. Paul's Church-yard. M DC LX V.

9 Micrographia (1665)



8 La pulce disegnata da Hooke su Micrographia

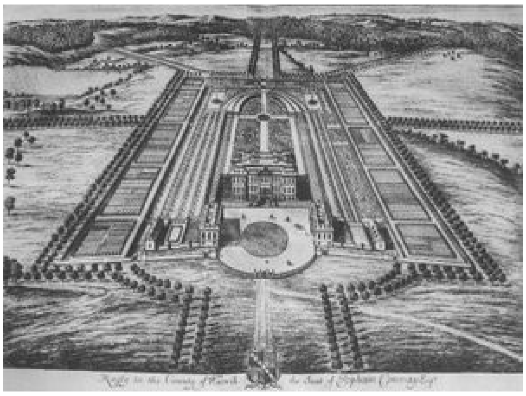
Nel 1665 finalmente il suo lavoro completo su tutte le scoperte che aveva fatto osservando al microscopio – *Micrographia*[7] – fu pubblicato, e conteneva non solo una dettagliata analisi di molti fenomeni e parecchie scoperte in campo biologico, ma anche un intero set di disegni ed illustrazioni eseguite da Hooke stesso. Tra le pagine di *Micrographia* ci sono preziose osservazioni sull'interferenza luminosa e le prime teorie sulla luce in termini di vibrazioni, e la relazione tra il calore e le vibrazioni delle particelle di un corpo.

Lo studio delle lenti e la costruzione di strumenti non si limitò ovviamente al microscopio: costruì un telescopio a riflessione e fece numerose scoperte astronomiche, per esempio il fatto che Giove ruota intorno al suo asse (osservandone le macchie); inventò un "elioscopio" per studiare le macchie solari e cercare di misurare la velocità di rotazione del sole; fece dei disegni di Marte che permisero in seguito di determinarne la velocità di rotazione[8]. Inoltre spese parecchio tempo studiando le comete e ponendo domande non banali, soprattutto a quei tempi: come mai la coda delle comete punti in direzione opposta al sole, come sia possibile che bruci tanto tempo senza consumarsi e soprattutto com'è possibile che bruci in assenza di aria. Le sue osservazioni sulle comete vennero pubblicate solo più tardi, ma gli spunti furono parecchi, e tutti diretti ad una migliore comprensione dei fenomeni gravitazionali.

[7] Molte delle figure e delle informazioni riportate provengono da un sito entusiasta, che vi consigliamo se masticate la lingua d'albione: www.roberthooke.org.uk

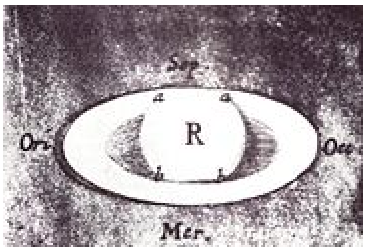
[8] Più di duecento anni dopo. R.H. era un pozzo di idee, ma lo sviluppo della maggior parte lo lasciava ad altri.

Si vede chiaramente che Robert Hooke non passava la maggior parte del suo tempo con le mani in mano: mentre pubblicava disegni particolareggiati delle sue scoperte astronomiche inventava e studiava le leggi del pendolo conico, e nel 1666 proponeva di misurare la gravità con un pendolo. In quell'anno al suo amico Sir Christopher Wren fu assegnato il compito di ricostruire Londra dopo il Grande Incendio, e Robert – valente architetto, come si può immaginare – gli fece da braccio destro per l'intero progetto, finalmente ottenendo un decente compenso economico per le sue fatiche. Parecchi edifici furono disegnati direttamente da Hooke stesso (come il monumento celebrativo), ma la maggior parte del lavoro del nostro eroe fu distrutta durante il diciannovesimo secolo per guerre, incendi o semplicemente nuove mode architettoniche. In ogni caso il lavoro incessante del braccio destro di Wren è in tutte le opere dell'architetto la cui fama è sopravvissuta: la stessa St. Paul fu seguita in tutti i dettagli da Robert Hooke durante il progetto e la costruzione, e il nostro Leonardo inglese inventò e approntò numerosi marchingegni per facilitare i lavori (come ad esempio il giunto cardanico, che gli inglesi chiamano "giunto di Hooke" – ma anche le finestre a ghigliottina, ancora adesso in uso nei paesi anglosassoni), studiò miglioramenti nelle tecniche di costruzione, supervisionò la scelta di materiali e l'efficienza dei costruttori.



10 *Uno dei progetti di Hooke: Ragley Hall*

Mentre si dilettava con passeggiate tra un cantiere e l'altro, fece anche numerosi studi sui fossili che lo portarono a formulare alcune teorie geologiche e una serie di conferenze e conclusioni sui terremoti e sulla tettonica. Pare che amasse svegliarsi molto presto la mattina e fare lunghe passeggiate esplorative (un'abitudine che si portava dietro fin da bambino), e lavorasse fino a tardi, ma non senza passare del tempo con gli amici e bere del buon liquore. Secondo i diari di alcuni di questi amici e colleghi, Hooke era molto magro e pallido, spesso curvo, mangiava poco e curava poco il suo aspetto. Probabilmente restò malaticcio tutta la vita, ma era sempre così impegnato da non farci gran caso.



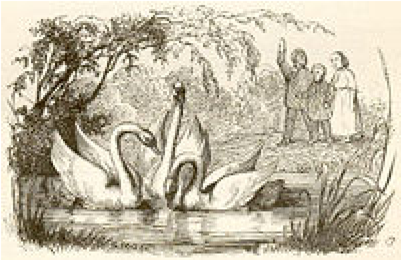
11 *Disegni di Saturno di R.H.*

Eppure, di quanto si è detto finora, resta ben poco nella storia. Robert Hooke è ricordato principalmente per le sue polemiche con Newton e Huygens, che ebbero inizio intorno al 1672 con la pubblicazione da parte di Newton della sua teoria sulla luce ed i colori: l'impegnatissimo Hooke argomentò che le idee riportate fossero copiati o ispirati da concetti già da lui provati con esperimenti nel 1665. Inoltre proprio in quell'anno Hooke ipotizzò che la Terra ruotasse intorno al Sole in traiettoria ellittica e scrisse in proposito una lettera a Newton, in cui proponeva anche la legge di proporzione inversa con il quadrato della distanza per l'attrazione tra corpi celesti.

Newton, con più tempo a disposizione del nostro Robert, creò tutto l'impianto teorico necessario nell'edizione dei suoi *Principia*, ma negò il riconoscimento della scoperta a Hooke, e la loro diatriba andò talmente avanti che riuscì ad oscurare il lavoro di anni.

In realtà la discussione non toglie niente alle capacità e alle scoperte del grande matematico dei *Principia*, che portò avanti le idee e le approfondì – per non parlare del fatto che la famosa frase "*Se ho visto tanto lontano è perché stavo seduto sulle spalle di giganti*" è contenuta in una delle lettere scambiate con Hooke; i due scienziati avevano due visioni completamente diverse della natura dell'universo. Mentre Newton riusciva a concepire il vuoto che separava i corpi celesti, Hooke vedeva ovunque un mezzo – l'etere – attraverso il quale le forze agivano; Hooke basava tutte le sue teorie su un movimento ondulatorio delle particelle di materia e per ognuna cercava di approntare un esperimento o una misurazione che la potesse provare.

Negli ultimi anni di vita, quando la sconfitta nella disputa che lo aveva opposto a Newton era ormai chiara, Hooke fu angosciato dalla malattia e dal timore di essere completamente dimenticato, e non si sbagliava. L'anno della sua morte, il 1703, fu anche l'anno dell'elezione di Isaac Newton alla presidenza della Royal Society, e presto il ritratto di Hooke che lì si trovava sparì misteriosamente. Negli anni successivi, mentre l'influenza di Newton sugli ambienti scientifici inglesi diveniva un'egemonia incontrastata, il ricordo dell'antico rivale fu sistematicamente cancellato e molti dei suoi risultati furono attribuiti ad altri.



12 *Dal "brutto anatroccolo" disegni originali.*

Il ritratto che recentemente si è trovato (e che vi abbiamo proposto) quasi certamente non è quello di Robert Hooke, ma almeno ricorda l'immagine descritta nei diari degli amici: magro e curvo, sì, e bilioso ed irritabile, invidioso e vendicativo, forse. Ma anche un vulcano di idee, che combatteva contro una cagionevole salute (che alla fine lo rese cieco) con ogni mezzo a disposizione ed aggiungeva alle capacità artistiche (la pittura, il disegno, l'architettura) l'amore per l'osservazione e la sperimentazione, lo studio della meccanica e delle relazioni tra quello che osservava.

Un brutto anatroccolo che per noi non ha mai smesso di essere un cigno.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Leggenda Metropolitana (vera)			
Problema con Virgilio			

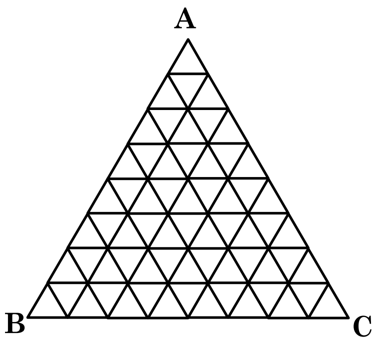
2.1 Leggenda Metropolitana (vera)

Siamo sicuri non ci crederete, ma ve la raccontiamo lo stesso; e possiamo portare svariate testimonianze in merito.

La cosa alla quale nessuno vuole credere è che Rudy, sino ad una decina di anni fa, fosse di una timidezza infinita, al punto da avere dei blocchi a parlare anche solo davanti a due persone; figuratevi quindi come si sentiva, ai tempi dell'Università, dopo aver più o meno sommariamente preparato un esame (in rigorosa solitudine e su carta, quindi "in orizzontale", come scrittura) a dover esporre i concetti davanti a Prof & Assistenti vari scrivendo su una lavagna (verticale).

All'epoca per risolvere questo problema decise di procurarsi una di quelle lavagne bianche che si trovavano per poche lire (foglio di plastica adesiva bianca, il supporto lo mettevate voi) e di ripetere i concetti davanti al cane che all'epoca conviveva con lui (non Balto, un altro, che si chiamava Snoopy, come la maggior parte dei cani dell'epoca).

La cosa ebbe un ragionevole successo (vietate le battute su chi, alla fine, conoscesse meglio la materia) e Rudy di recente ha deciso di fornire ai due Validi Assistenti uno strumento similare; i due teppisti (timidi suppergiù come un moderno squadrone di cavalleria[9]) logicamente lo hanno immediatamente ignorato come sussidio didattico, chiedendo a gran voce un gioco da praticare lì sopra.



Colto alla sprovvista, Rudy ha provato ad inventare qualcosa, con risultati comunque interessanti. Per prima cosa, ha chiesto ad Alberto di tracciare il disegno che trovate nella figura a fianco, e si è esibito nel seguente discorso, prendendola come al solito molto alla lontana:

"Come sapete recentemente ho parlato con un collega francese in merito ad un problema (piuttosto facile ma decisamente carino) consistente nel sapere quanti

[9] Vi ricordiamo che adesso si chiamano così i carri armati.

triangoli equilateri ci siano in un aggeggio del genere. La cosa ormai è nota a tutti, quindi il problema non è questo.

"Anche se sono d'accordo con il concetto di senso *orario*, l'implicita negatività insita nel concetto di *antiorario* non mi è mai piaciuta. Bene, grazie al collega, ho scoperto che in francese il senso antiorario prende il più positivo nome di *sens trigonométrique*, e d'ora in poi per casi del genere ho intenzione di utilizzare il termine "senso trigonometrico"… ma neanche questo è il problema.

"Qui avete un triangolo equilatero diviso in sessantaquattro triangolini di lato unitario, con i vertici del triangolo grande etichettati in senso trigonometrico. Scopo del gioco è etichettare i vertici dei triangolini di lato unitario senza etichetta (evitate pure di contarli: sono quarantadue) secondo le seguenti regole:

- Se un vertice è sul lato AB può essere etichettato A o B, ma non C.
- Se un vertice è sul lato BC può essere etichettato B o C, ma non A.
- Se un vertice è sul lato CA può essere etichettato C o A, ma non B.
- Un vertice all'interno del triangolo può essere etichettato A, B o C.

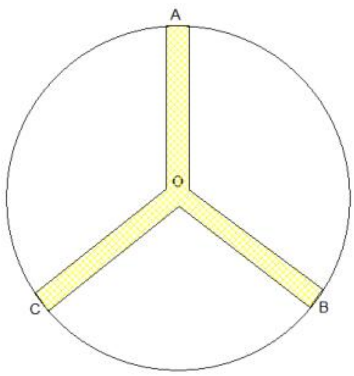
Una volta che avete etichettato tutti i vertici, si parte con il conteggio: Alberto vince un punto per ogni triangolino unitario etichettato in senso trigonometrico, Fred vince un punto per ogni triangolino unitario etichettato in senso orario; vince chi fa più punti.

Ora la domanda (anzi due) è: ma Alberto, se gioca per primo, può vincere? E Fred, se gioca per primo?

Ma quanti di voi la sapevano, quella del *sens trigonométrique*?

2.2 Problema con Virgilio

Anni fa vi avevamo promesso che nel momento stesso nel quale Virgilio (il GccGC: Gatto convivente col Grande Capo) ci avesse creato un problema, ve lo avremmo presentato. Bene (mica tanto), quel momento è venuto. Ma prima di tutto, per soddisfare la sua vanità (superata solamente da quella del suo meno giovane convivente – sarebbe Rudy) vi facciamo vedere una sua foto pochissimo ritoccata (gli occhi sono gialli, ma lui li preferisce verdi: il resto proviene dall'originale). Il sunnominato Virgilio, spalleggiato da Fred, ci ha impedito di pubblicare una loro foto di gioventù nella quale era arduo decidere se occupassero più spazio le orecchie o i portatori delle medesime (avevano entrambi delle "sventole" di taglia epica).



Il problema è che Virgilio è riuscito ad andare in cantina, e vorremmo recuperarlo per riportarlo alla civiltà del primo piano, anche se lui ci si trova benissimo, e non c'è verso di cavarlo fuori; qui di fianco trovate una mappa dei corridoi della cantina, il gatto è da qualche parte, se vi vede scappa e tutte le porte (incluse quelle delle cantine) sono chiuse.

Alberto (incaricato del recupero felino) si trova nel punto O; tutti i corridoi sono lunghi 21 metri, tutte le porte al fondo sono chiuse e il gatto non si vede.

Alberto è in grado di muoversi ad una velocità doppia rispetto al gatto, però (cantina "del pettine" senza luce) ha una pila in grado di illuminare solo sino ad una distanza d. Prima che la moglie di Rudy (e madre di Alberto) si arrabbi di brutto, dovreste suggerire delle strategie di ricerca ad Alberto nei diversi casi:

1. d=7 metri (pile nuove!)
2. 4,20<d<7 (…si stanno scaricando…)
3. 3<d<4,20 (cosa pretendete, da delle pile comprate allo stesso discount dove PMP compra i computer per la bici?)

Come dicevamo, il tutto nel più breve tempo possibile, grazie…

3. Bungee Jumpers

Siano $a_1, a_2, \dots, a_n$ interi distinti. Mostrare che il prodotto di tutte le frazioni della forma $\frac{a_k - a_l}{k - l}$, con $n \geq k > l$ è un intero.

La soluzione, a “Pagina 46”

4. Soluzioni e Note

A dire il vero, noi lo sospettavamo fortemente. Non lo diciamo per vantarci, è proprio così: sia da una parte sia dall’altra delle Alpi la pioggia ha imperversato per tutta la primavera, ma tutti e tre coltivavamo in modo chiarissimo il sospetto che sopra le nuvole il sole ci fosse ancora. E, infatti, appena le nuvole si sono levate di torno, visto cos’è successo? Quaranta afosi gradi in tutta la penisola. Ma adesso basta, con queste elevate considerazioni meteorologiche, sennò finiamo col lamentarci della scomparsa delle mezze stagioni e del fatto che qui, una volta, era tutta campagna.

Da questa parte della rivista, il mese è cominciato come al solito con qualche *osservazione* sulle nostre (usualmente improvvide) *osservazioni*. Ad esempio, prima ***Ollie*** e poi ***Bexie*** (sì, si conoscono; e sì, lo hanno fatto apposta a scegliersi degli allonimi che ricordano calciatori di cartoni animati giapponesi) ci fanno notare che abbiamo definito Giugno come un mese già un po’ *morto* per la matematica, dimenticandoci che interi stuoli di studenti stavano preparando, proprio in quel mese fatidico dedicato a Giunone, la più grande celebrazione di matematica annuale, ovvero la prova della maturità. Tra l’altro, proprio il Bexie stava sudando su una tesina che riguardava tra l’altro le “*notazione di O grande per indicare la complessità degli algoritmi”*, il “*pruning degli alberi di gioco*”, e in particolare quelli “*alpha-beta e negascout*”. Ci siamo sentiti molto ignoranti, lusingati all’idea di essere letti da ragazzi in grado di muoversi su certi oggetti, e soprattutto molto contenti di aver già passato (qualche eone fa) lo scoglio della maturità. Ormai Bexie e tutti i suoi coetanei dovrebbero essere verso la fine della fatica: per coloro che ancora non hanno completato la pratica, in bocca al lupo per gli orali!

Del resto, l’estate è una stagione che riesce bene ad armonizzare le idee più creative: ***Ant*** si chiedeva se le sequenze di cui parlavamo nel numero scorso potessero essere utili nel tentativo di risolvere la *Congettura di Golbach*, e non è domanda da poco. Quasi simultaneamente, ***Lorenzo*** era invece impegnato nel tentativo di dare una qualche forma matematica ai passi e alle regole del *tango*. Noi adoriamo sia il tango sia Goldbach, ma non riusciamo ad essere di molto aiuto: se qualche lettore ha delle idee in merito, fatecelo sapere, e ci faremo latori dei contributi.

Il fatto è che è proprio piacevole far parte della Redazione di RM: anche le segnalazioni di errore ci arrivano per mezzo di mail divertenti: ***Caronte*** ha notato l’errore nel giorno di nascita di *Maxwell* (nel compleanno lo facciamo nascere il 18 Giugno, invece del corretto 13), e ci assicura che *Vorstellung* ha un’etimologia del tutto assimilabile alla parola italiana *rappresentazione*. Questo era un dubbio che avevamo palesato nell’articolo, ed è davvero piacevole vederlo sciolto dalla comunità.

Questa veloce sezione *Note* del capitolo *Soluzioni e Note* sta già volgendo al termine: prima di dare la stura alle soluzioni, riteniamo doveroso dare la voce a ***Marco***, un nostro vecchio lettore, che ci scrive così:

> … volevo segnalarvi un nuovo sito, che se riterrete opportuno (ve ne sarei grato) potreste aggiungere tra i link consigliati del vostro sito, il link è www.scienzematematiche.it, è appena nato (e quindi ha bisogno di un po' di spinte per partire) e si propone come luogo di incontro per studenti delle facoltà scientifiche. L'esigenza di questo forum è nata per la mancanza nel panorama italiano di un forum di matematica, informatica e fisica di alto livello per studenti universitari (e oltre).

Abbiamo fatto un giro sul forum, e abbiamo capito subito che è popolato da gente più in gamba di noi, quindi siamo scappati via in tutta fretta. Ma per voi il discorso dovrebbe essere diverso, no?

4.1 [110]

4.1.1 Peggio di Doc

Questo problema continua a catturare l'attenzione dei solutori. Non riusciamo ancora a capire se dipenda dal fatto che tratta di bicchieri, e da qui concludere che i solutori di RM siano tutti una banda di alcolizzati. Sia come sia, le soluzioni continuano ad arrivare, e non possiamo mica passarle tutte sotto silenzio. A metà mese, si è fatto vivo ***Rub***, new entry che mostra subito di avere intenzioni serie: dopo aver sezionato in quattro parti problema e bicchiere [(A) il fondo, (B) l'acqua, (C) le pareti laterali sino al livello e (D) le pareti laterali sopra il livello] ed essersi lanciato in calcoli, conclude in breve che:

> …e quindi il peso del bicchiere sarà
>
> $\rho vS(\pi R2+2\pi RH) = \pi\rho vSR(R+2H) \approx 28{,}3*28\approx 792$ grammi.
>
> Un gran bel bicchierone!!!

Mentre ci stavamo ancora sorprendendo del fatto che questo problema fosse ancora vivo dopo che un'intera stagione era passata dalla sua presentazione, subito dopo la mail di ***Rub*** è arrivata quella di ***Matarank***, anche lui new entry e anche lui sullo stesso problema; sembra quasi una congiura di neofiti. ***Matarank*** inizia a spiegare la ragione del suo interesse:

> un problema mi ha colpito:
>
> – si tratta di fisica;
>
> – si parla di bicchieri.
>
> Ora, dal momento che mi piace la – e mi occupo di – fisica; e soprattutto si tratta di bicchieri pieni (preferirei non di acqua), ho provato a cimentarmi con questo quesito.

Visto che avevamo ragione, sulle abitudini alcoliche degli RMers? Per amor di bisboccia, seguiamo il discorso del nostro:

> Cominciamo con le definizioni:
>
> - r: raggio del bicchiere (misurato all'interno);
> - h: altezza del bicchiere (misurata dal tavolo, in quale altro modo la misurereste?);
> - s: spessore – incognito ed uniforme – del bicchiere;
> - ρ: densità – incognita – del bicchiere;

- z_{min}: quota di minimo – dal tavolo – del baricentro del sistema bicchiere + acqua (per la simmetria del problema il baricentro è posto sull'asse del bicchiere, per cui è sufficiente una sola coordinata per individuarlo).

Indichiamo inoltre:

- m_A: massa dell'acqua versata nel bicchiere;
- z_A: baricentro dell'acqua versata nel bicchiere (il baricentro è solo della massa d'acqua);
- ρ_A: densità dell'acqua – pari per ipotesi a 1 kg/dm3;
- m_B: massa – incognita – del bicchiere vuoto;
- z_B: baricentro – incognito – del bicchiere vuoto.

Queste ultime due grandezze possono essere espresse in funzione di quelle definite in precedenza, ma per ora non ci interessa (basti sapere che z_B è al più uguale ad h/2). Il baricentro del sistema bicchiere + acqua è:

$$z = \frac{m_B z_B + m_A z_A}{m_B + m_A}$$

Sappiamo che la massa d'acqua – ed il suo baricentro – dipendono dall'altezza dell'acqua dal fondo del bicchiere, che assumeremo come zero per il nostro sistema di coordinate (non dal tavolo, che a questo punto si trova a –s), che indicheremo con x:

$$\begin{cases} m_A = \rho_A \pi r^2 x = kx, \quad k = \rho_A \pi r^2 \\ z_A = \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

Da cui otteniamo:

$$z = \frac{m_B z_B + \frac{k}{2} x^2}{m_B + kx}$$

Ovviamente z è funzione di x, ed il suo minimo si può facilmente trovare:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{kx(m_B + kx) - k\left(m_B z_B + \frac{k}{2} x^2\right)}{(m_B + kx)^2} = k\frac{m_B x + kx^2 - m_B z_B - \frac{k}{2} x^2}{(m_B + kx)^2} = k\frac{\frac{k}{2} x^2 + m_B x - m_B z_B}{(m_B + kx)^2} = 0$$

$$x^2 + 2\frac{m_B}{k} x - 2\frac{m_B z_B}{k} = 0 \Rightarrow x_{\pm} = -\frac{m_B}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{m_B}{k}\right)^2 + 2\frac{m_B z_B}{k}}$$

Scegliendo l'unica radice fisicamente accettabile:

$$z_{\min} = \frac{m_B z_B + \frac{k}{2}\left[-\frac{m_B}{k} + \sqrt{\left(\frac{m_B}{k}\right)^2 + 2\frac{m_B z_B}{k}}\right]^2}{m_B + k\left[-\frac{m_B}{k} + \sqrt{\left(\frac{m_B}{k}\right)^2 + 2\frac{m_B z_B}{k}}\right]} = \frac{1}{k}\left(\sqrt{m_B^{\ 2} + 2k m_B z_B} - m_B\right)$$

Da cui facilmente:

$$m_B = \frac{1}{2}\frac{k z_{\min}^{\ \ 2}}{z_B - z_{\min}}$$

Sfortunatamente in questa espressione anche z_B è incognita, però possiamo facilmente esprimerla in funzione di altri parametri, pure incogniti (il primo termine si riferisce alla superficie laterale del bicchiere, il secondo al suo fondo):

$$\begin{cases} m_B = m_{Blat} + m_{Bfondo} = \rho\left[\pi(r+s)^2 - \pi r^2\right](h-s) + \rho\pi(r+s)^2 s \\ m_B z_B = m_{Blat} z_{Blat} + m_{Bfondo} z_{Bfondo} = \rho\left[\pi(r+s)^2 - \pi r^2\right]\frac{(h-s)^2}{2} - \rho\pi(r+s)^2 \frac{s^2}{2} \end{cases}$$

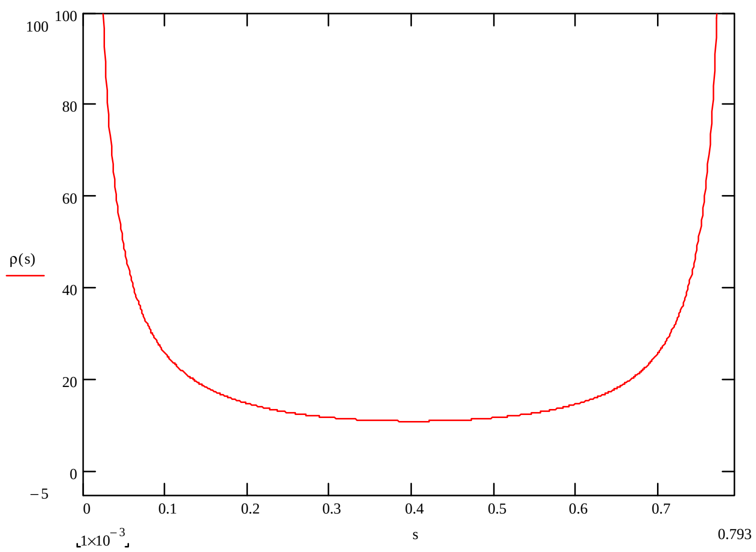
Con qualche passaggio otteniamo:

$$\begin{cases} m_B = \rho\pi s\left(2rh + r^2 + hs\right) \\ z_B = \dfrac{h + \left(\frac{1}{2}\frac{h}{r} - \frac{1}{2}\frac{r}{h} - 2\right)s - \frac{1}{r}s^2}{2 + \frac{r}{h} + \frac{1}{r}s} \end{cases}$$

Sostituendo nell'espressione precedente per m_B possiamo ottenere la densità del bicchiere (che dipende solo dal suo spessore s):

$$\rho = \rho_A \frac{z_{\min}^{\ \ 2}}{s\left[2\frac{h^2}{r} - 4z_{\min}\frac{h}{r} - 2z_{\min} + \left(\frac{h^2}{r^2} - 4\frac{h}{r} - 2z_{\min}\frac{h}{r^2} - 1\right)s - 2\frac{h}{r^2}s^2\right]}$$

Ebbene, sapendo che questo bicchiere è particolarmente leggero possiamo assumere che la sua densità sia minima; osserviamo a proposito il grafico seguente:



possiamo ottenere, tralasciando i conti:

$$\begin{cases} s^* = 0{,}387 \quad cm \\ \rho = 11{,}3 \quad kg/dm3 \\ m_B = 1{,}609 \quad kg \end{cases}$$

che è il risultato sperato (per un *tumbler* di forma bassa o al più media).

Se però – come alcuni hanno fatto, sbagliando in maniera più o meno consapevole – assumessimo r=2 cm, otterremmo dei valori più consoni ad un bicchiere reale (che sarebbe un *tumbler* a forma alta):

$$\begin{cases} s^* = 0{,}624 \quad cm \\ \rho = 2{,}21 \quad kg/dm3 \\ m_B = 0{,}258 \quad kg \end{cases}$$

Alcune osservazioni di carattere generale:

- l'assunzione che s sia trascurabile è fisicamente inaccettabile: dovremmo almeno considerare il contributo al primo ordine in s (in senso proprio quello che interessa è ρs, cioè lo spessore del bicchiere espresso come massa per unità di superficie);
- la scelta del sistema di coordinate non è particolarmente influente per un "vero" bicchiere: è quasi indifferente misurare l'altezza del bicchiere dal tavolo o dal suo fondo, al di là delle difficoltà analitiche (ammettendo che sia un bicchiere, e non un buco in un oggetto di qualsivoglia forma).

A queste considerazioni di carattere generale fatte da ***Matarank***, aggiungiamo la nostra: d'ora in avanti solo bicchieri monouso, di plastica o carta, e quando Rudy comincia a pensare come farci un quesito, via dritti in pattumiera.

4.2 [111]

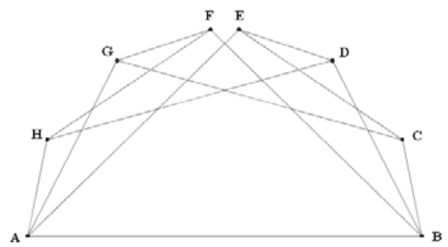
4.2.1 Ritorno al Luogo da Cui

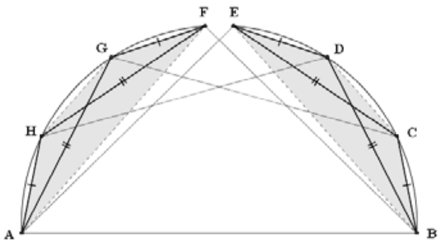
Se il problema precedente continua ad imperversare e a tornare, cosa dire di questo? Quantomeno che, avendo la parola "ritorno" nel titolo, è in qualche modo autorizzato a ripresentarsi. Stavolta lo fa su sollecitazione del ***Panurgo***, che dice:

> È un po' lungo! Comunque lo posterò anche su Base5 (dove ho aperto un topic a riguardo).

E in effetti, per essere lungo è davvero lungo – otto pagine – e sarebbe un po' faticoso riprodurlo per intero. Ne approfittiamo allora per dare il link a Base5 (http://utenti.quipo.it/base5/), che a nostro parere è un sito davvero bello, che abbiamo sempre apprezzato e che non è mai abbastanza pubblicizzato, e per limitarci ad estrarre una specie di *trailer* dal lavoro del ***Panurgo***, tanto per farvi venire la voglia di andare a vedervi il resto, proprio come fanno i veri trailer cinematografici con i film in prima visione:

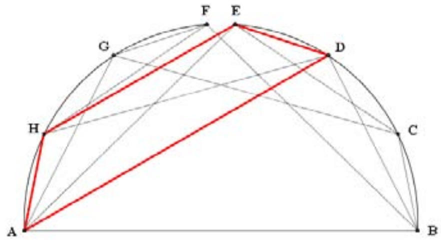
> (…) Mi sarei potuto accontentare, dunque. Ma chi ama la montagna sa che è più bello arrivare in cima: è quello che ho cercato di fare io sovrapponendo i sei recinti (con una nuova nomenclatura).



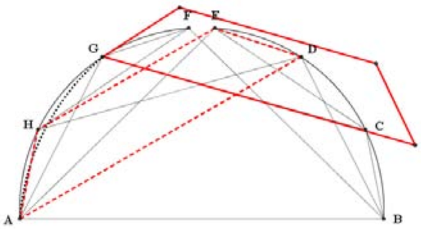


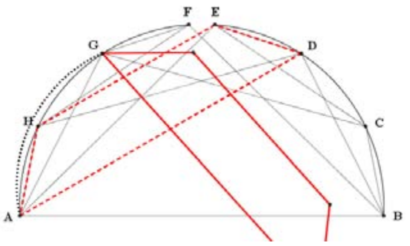
Ho diviso i vertici in due gruppi, AFGH e BCDE, osservando che essi sono i vertici di due trapezi isosceli che hanno lati obliqui uguali a 1 e diagonali uguali a 2.

Quindi, i quattro punti di ciascun gruppo appartengono ad un arco di cerchio. Ho considerato poi il quartetto ADEH: anche questi punti sono i vertici di un trapezio isoscele (lati obliqui, 1, diagonali, 3).

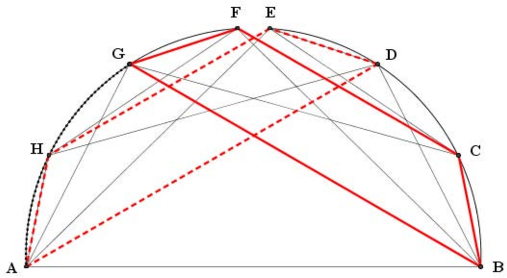


Vi sono infiniti modi di ruotare il trapezio in modo tale che il punto A vada a finire in G, per esempio così:





ma vi è un'unica rotazione che mandi anche H in F ed è quella effettuata intorno al centro dell'arco FGHA:



Ma, attenzione! Anche i punti D e E sono andati a finire rispettivamente in B e C, e l'unica rotazione che sortisce questo effetto è quella intorno al centro dell'arco BCDE: i due archi di cerchio devono appartenere alla stessa circonferenza. Oplà, tutti i recinti, oltre ad essere equiestesi, sono anche conciclici (coinscritti?). Ho scelto dunque uno dei nostri recinti: uno a caso, (…)

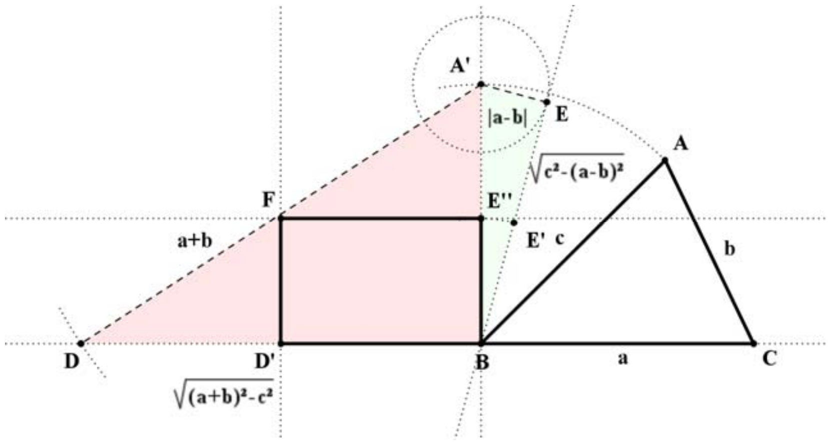
Allora, vi è venuta o no la voglia di saperne di più? Con quei bei disegni, poi… è un piacere anche solo guardarli, anche se uno non avesse voglia di seguire la dimostrazione. Del resto, ***Panurgo*** con le figure ci va a nozze, e anche con la fantasia. Poco più avanti, lo troviamo mentre genera una piccola *perversione* di sapore classico: dopo una prolusione in cui afferma che…

… Mi permetto a questo punto una piccola digressione sulla formula di Erone. Qualcuno l'ha definita "insulsa"; a me è sempre stata fortemente antipatica e solo

> dopo aver lavorato su questo problema ho capito il perché: si chiama "Formula di Erone" e non "teorema di Erone" perché non è fatta per spiegare o dimostrare, ma per stupire. Ecco il motivo di quella *p*, che nasconde la vera natura (geometrica) della formula…

Il nostro arriva a funambolismi di questo tipo:

> Riporto sul prolungamento di *a* il punto medio del segmento BD e, sulla perpendicolare, il punto medio del segmento BE e costruisco un rettangolo che ha area uguale a quella del triangolo di partenza



> Ecco a voi il "rettangolo di Erone"!
>
> Un'ulteriore curiosità: se sono dati i lati *a* e *b*, l'area del triangolo è massima quando il triangolo è rettangolo, cioè quando
>
> $$c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad (a+b)^2 - c^2 = c^2 - (a-b)^2 = 2ab$$
>
> e il rettangolo di Erone è un quadrato.

Niente male, vero? Da un *triangolo* al *rettangolo*, da questo al *quadrato*, e tutto era iniziato con *poligoni irregolari* (che però sovrapposti generavano *trapezi*). Speriamo che il trailer vi abbia fatto venir voglia di vedere il film per intero: in quel caso fate un salto su Base5 e salutateci l'ottimo ***Gianfranco Bo***.

4.3 [113]

4.3.1 Senza titolo, per protesta (*aka* Solitario Polacco)

Cominciamo subito col dire che questo problema, innominato e sbattezzato, il nome se lo è guadagnato sul campo. Quasi inevitabilmente i solutori si sono riferiti ad esso chiamandolo *Solitario Polacco*, e tanto vale tenersi tale nome. Anche se sorge spontanea una domanda… visto che il più famoso dei solitari di carte prende il nome da *Napoleone*, e visto che uno dei *Marescialli* dell'imperatore dei francesi, il principe *Poniatowski*, era polacco, chissà se sussiste una qualche relazione, più o meno gerarchica, tra i due solitari? No? Dite di no? Ah, ho capito… non state dicendo di "no", state dicendo di piantarla con queste idiozie. D'accordo, d'accordo. Vediamo chi ha risolto e come, allora.

Il problema ha suscitato una pletora di soluzioni e una caterva di osservazioni: questo è certo un bene per il problema e per la rivista, ma è drammatico ai fini della stesura di queste righe. Ci saranno senza dubbio delle notevoli soluzioni che non troveranno spazio, e di questo ci scusiamo in anticipo.

Ad esempio, tra i primi ad arrivare in redazione è stato ***FraPao***, che ha analizzato qualitativamente il problema e alcuni casi notevoli (tra l'altro introducendo alcune definizioni creative (come "coppia o multipla minima", "coppia ritardante", sempre riferendosi alle pile di carte del gioco, o "configurazioni flip-flop", per indicare quelle situazioni che si perpetuano l'una nell'altra).

D'altro canto, l'immarcescibile ***Puntomaupunto***, grazie alla sua proverbiale laconicità nelle soluzioni riesce a trovare spazio facilmente:

> (…) inizio a tirare fuori un controesempio che mostra come sia possibile che nel GiocoStupido(tm) si possa avere un ciclo, e quindi che k_12 non esista (o sia infinito). Se non ho capito male le regole, partendo da 2235 (un mazzetto di due carte, un altro mazzetto di due carte, uno di tre carte e uno di cinque carte) si ottiene questo:
>
> **2235 –> 11244 –> 1335 –> 2244 –> 11334 –> 2235**
>
> Un controesempio è un po' come un problema **NP**: il problema magari è complicato, ma si può verificare facilmente che la soluzione è una soluzione :-) Non so se 12 sia il minimo, devo ammettere che ho fatto una prova più o meno a caso. A questo punto però mi sono impuntato, e ho fatto una seconda prova a caso (no, non è a caso, ho iniziato a usmare qualcosa):
>
> **124 --> 133 --> 223 --> 1123 --> 124**
>
> e a questo punto sono sceso al quasi minimale
>
> **13 --> 22 --> 112 --> 13**
>
> e al sicuro minimale
>
> **2 --> 1 1 --> 2**
>
> Nel caso n=6 il solitario riesce sempre, e il ciclo più lungo è
>
> **141 (o 114, o 411) –> 33 –> 222 –> 1113 –> 24 –> 132 –> 213 –> 123 –> 123**

Non so cosa ne pensiate voi, ma fosse anche solo per il verbo *usmare,* la soluzione (o quantomeno l'approccio contro fattuale) ottiene la dignità di pubblicazione.

Certo, il meglio deve ancora venire.

Nell'indagine risolutoria si possono riconoscere quantomeno due grossi filoni di caccia: coloro che, un po' emuli di Markov, un po' affascinati dalla forza bruta del calcolo (e dei calcolatori) cercano di mappare tutti i cicli possibili; e coloro che, invece, si concentrano soprattutto sulle proprietà dei numeri (soprattutto, ovviamente, le proprietà del numero di carte iniziale).

Un paladino del primo gruppo è stato ***Zar***: anche se il nostro storico solutore ha sempre mostrato di non avere pregiudiziale alcuna contro nessun metodo risolutivo (atteggiamento assai ***prof***essionale e del tutto ammirevole), questa volta è stato davvero incantato durante la caccia dal ritrovamento d'un software potente e quasi stupefacente, per la rapidità con la quale generava risposte a chi fosse in grado di formulare le giuste domande.

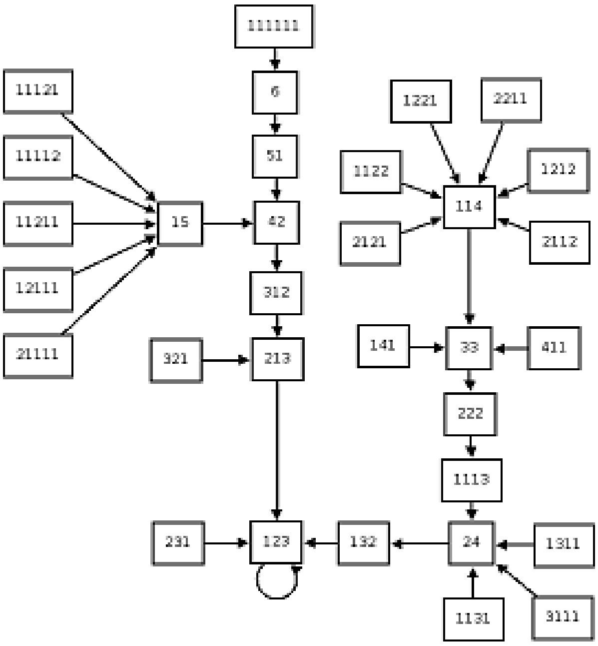
> (…) Ora veniamo alla domanda principale: in quanti modi si possono disporre le sei carte? Si tratta del problema della ricerca delle "composizioni" di un numero (http://en.wikipedia.org/wiki/Composition_%28number_theory%29), da non confondere col ben più difficile problema della ricerca delle "partizioni" (http://en.wikipedia.org/wiki/Integer_partition), problema sul quale ha lavorato anche Ramanujan, e solo per questo fatto rientra nella categoria degli impossibili. Bene, le composizioni di un numero sono i modi di scrivere quel numero come somma di interi, tenendo conto dell'ordine. C'è un modo carino per contarle: prendiamo come esempio il numero 6, quello del quesito.
>
> Se consideriamo la seguente formula:
>
> 1*1*1*1*1*1

le varie composizioni si possono ottenere sostituendo, al posto dell'asterisco, un segno "+" oppure una virgola. Per esempio,

6=1+1+1+1+1+1

4+2=1+1+1+1,1+1

3,1,2=1+1+1,1,1+1



e così via. In quanti modi, quindi, si possono sostituire dei segni di somma o di virgola al posto degli asterischi? Ho due possibili scelte per il primo asterisco, due per il secondo, e così via fino al quinto, totale 2^5=32 possibilità. Siccome non sono tante, si possono utilizzare i tempi morti tra uno scrutino e l'altro per fare un bello schema di quello che succede giocando al solitario polacco. Lo schema dimostra anche che il solitario riesce sempre.

Se il mazzetto raccolto viene messo a sinistra, e non a destra, dei mazzetti già esistenti, non cambia nulla se non la configurazione stabile, che in questo caso diventa 3,2,1.

Un'analisi qualitativa, spannometrica e per nulla rigorosa mi fa presumere che il solitario riesca sempre con i numeri triangolari, mentre (forse) non riesce con gli altri numeri. Per esempio, con 4 carte non viene, si entra in un ciclo.

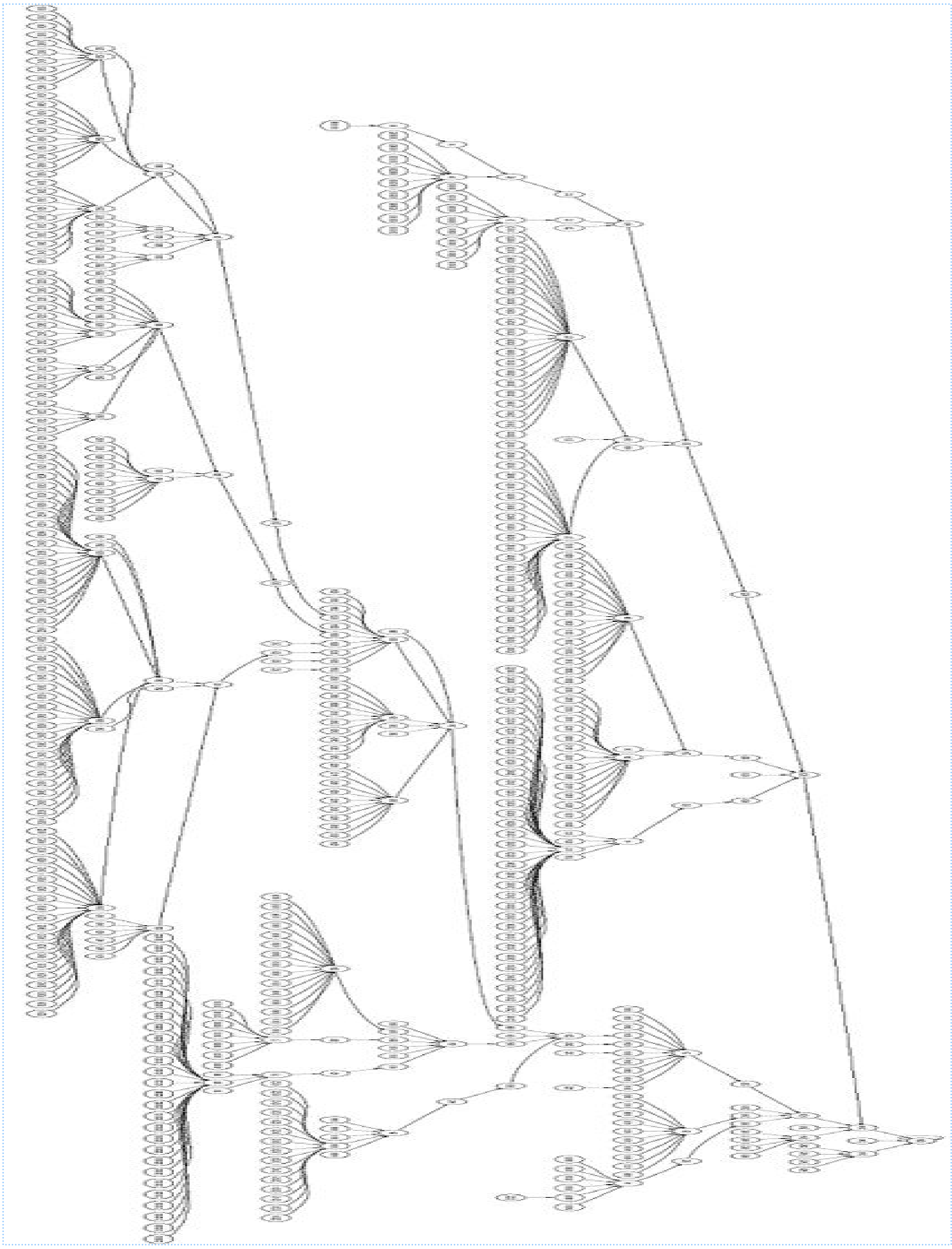
A questo punto, il nostro eroe (del quale non riveleremo mai la *prof*essione, neanche sotto tortura, altrimenti chissà cosa ci potrebbe fare, nei *tempi morti tra uno scrutinio e l'altro*) decide di passare alla forza bruta. E qui fa degli incontri fatali:

(…) sto facendo pratica del mio Nuovo Linguaggio Di Programmazione Preferito, il ***python***. Ecco i miei risultati. Il massimo numero di passaggi che sono necessari per arrivare alla convergenza è riassunto nella seguente tabella (numero di carte/numero di passaggi):

(3 / 3) (6 / 8) (10 / 15) (15 / 24) (21 / 35)

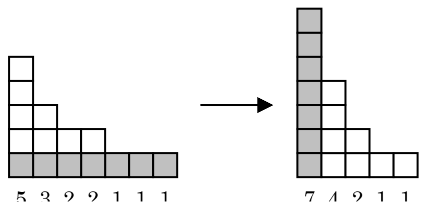
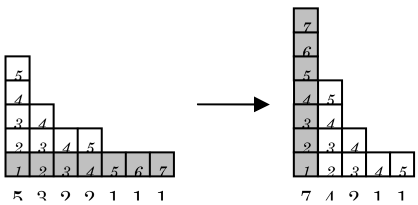
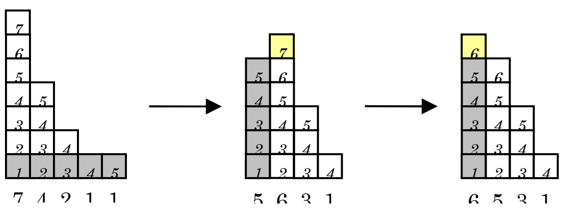
oltre non sono andato, occorrono ottimizzazioni che non ho (ancora) fatto. La congettura è che questi valori seguano la formula $n(n+2)$, ma tra congetturare e dimostrare c'è di mezzo il mare. Ma non è tutto qui: ho scoperto l'esistenza di un programma, che si chiama ***graphviz***, che costruisce grafi *da solo* a partire da un file contenente le relazioni. Allora gli ho dato in pasto i risultati per il solitario *k*6, ottenendo un grafo simile a quello che vi ho spedito ieri (che avevo fatto a manina). Poi gli ho dato in pasto i risultati del *k*10, ottenendo un grafo mostruoso. Ve lo allego, ma vi avverto che va ingrandito un po'... Potrete resistere alla tentazione di pubblicarlo (cosa che reputo impossibile)? :-)

Sapremo resistere? Ah, al momento, mentre scriviamo, non lo sappiamo ancora, noi. Voi però potete scoprirlo in fretta, girando pagina. Se cambiamo discorso, avremo resistito alla tentazione di pubblicare il grafo *k*10 di ***Zar***. Altrimenti, no.



Adesso non state lì a lamentarvi che non si riesce a leggere dentro i pallini. Noi quel che potevamo fare l'abbiamo fatto, il resto sta a voi: fatevi prestare quel programma da ***Zar***, no?

Nella soluzione di ***Zar*** compare una congettura interessante: ad un certo punto afferma che "*un'analisi qualitativa, spannometrica e per nulla rigorosa mi fa presumere che il solitario riesca sempre con i numeri triangolari, mentre (forse) non riesce con gli altri numeri*". Questo è il punto centrale del lavoro dell'altro gruppo di solutori: uno di essi, ***Marco C.***, si è fregiato a lungo dell'ambito titolo di *Ambasciatore di RM a Londra* (anche se, a dire il vero, è stato RM a fregiarsi del suo nome e dei suoi titoli, ma non state a ricordarglielo, sennò è finita): da cotanta diplomatica cattedra, ci scrive così:

> Il gioco con sei carte riesce sempre, e se si parte con la suddivisione (2,2,1,1), ci vogliono 6 passaggi per arrivare alla situazione stabile. Ma andiamo con ordine.
>
> **Proposizione 1 –** Se il gioco riesce (ossia si trova una situazione stabile), allora la suddivisione deve essere del tipo (k, k–1, k–2, …, 1), che chiamo *triangolare*.
>
> Supponiamo che una suddivisione S sia stabile, e che abbia k mazzetti. Allora applicando una mossa, ottengo un mazzetto con k carte. Ma allora S ha un mazzetto con k carte. Applicando la mossa, ottengo un mazzetto con k–1 carte. Ma allora S ha anche un mazzetto con k–1 carte, ecc…[]
>
> **Corollario 2 –** Il gioco può riuscire solo se il numero di carte è un numero triangolare.
>
> E fin qui, ce la siamo cavata bene… Vediamo la roba un po' più tosta.
>
> **Proposizione 3 –** Se il numero di carte è un numero triangolare, allora il gioco riesce, a prescindere dalla situazione di partenza.
>
> Perché? Iniziamo a fare qualche disegno. Supponiamo di avere, boh, 15 carte e di partire da, diciamo, la situazione S = (5, 3, 2, 2, 2, 1, 1). Dopo la mossa, mi ritrovo con la situazione S'=(7, 4, 2, 1, 1). Schematizzo la cosa con delle pile di quadratini (che, per oscure ragioni mie, nel seguito chiamerò *elettroni*):
>
> 
>
> Vista l'idea? Raccogliere una carta da ogni mazzetto significa staccare la prima riga di elettroni e appiccicarla come nuova colonna. Bene. Adesso nei miei schemi assegniamo un potenziale ad ogni elettrone, a seconda della sua posizione. Così:
>
> 
>
> La magia bella, è che il potenziale totale del gruppo di elettroni non cambia: il blocco grigio si sistema in piedi, quello bianco slitta in diagonale, ma tutto torna per benino. Sempre? Quasi. Applichiamo un'altra mossa alla situazione S', e otteniamo S"=(6, 5, 3, 1):
>
> 
>
> Questa volta, non solo abbiamo rizzato in piedi i quadrati grigi, ma l'elettrone a potenziale 7, disegnato in giallo è slittato a sinistra, decadendo a potenziale 6. Questo avviene ogni volta che il mazzetto grigio ha meno elettroni di un mazzetto bianco. In questi casi, si vede che il potenziale totale scende. Perciò:

Lemma 4 – Definendo il potenziale di una situazione come sopra, si ha che applicando una mossa del solitario, il potenziale non aumenta.

Come faccio a vedere se un solitario termina? Supponiamo che proceda in eterno. Significa che da un certo punto in poi non avvengono più decadimenti (il potenziale è intero, positivo e non crescente). Ora chiamo *orbitale* di potenziale t l'insieme delle posizioni in cui i quadratini hanno potenziale t. In un orbitale possiamo trovare degli elettroni, oppure delle *buche* o *lacune*. Inoltre, in ogni orbitale, posso numerare le posizioni a seconda del mazzetto in cui compaiono. Se non avvengono decadimenti, ogni elettrone (ma anche ogni buca) è costretto a percorrere il suo orbitale. Per come sono fatte le mosse, all'interno di ogni orbitale, le posizioni vengono fatte ciclare, e l'orbitale di potenziale t ha esattamente t posizioni. Ne segue che una buca o un elettrone di potenziale t completa il giro del proprio orbitale in t mosse. Supponiamo ora che esista una buca con potenziale t e che ci sia un elettrone con potenziale t+1. Dato che t e t+1 sono primi tra loro, la buca (che si muove con periodicità t) e l'elettrone, che si muove con periodicità t+1, presto o tardi si troveranno sulla stessa riga ("collideranno"), causando un decadimento. Quindi:

Lemma 5 – Se non avvengono più decadimenti, allora ogni buca ha potenziale non minore di ogni elettrone.

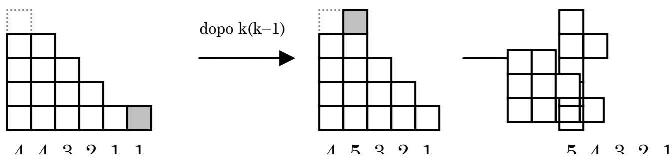
Bene. A questo punto abbiamo quasi fatto.

Corollario 6 – L'unica possibilità per non avere decadimenti è essere in una situazione in cui ci sono i primi k orbitali pieni, eventualmente l'orbitale k+1 incompleto, ossia con buche, e nessun elettrone con potenziale maggiore di k+1.

Dimostro la Proposizione 3. È chiaro che se il numero di carte (quadratini) è un numero triangolare, per il Corollario 6, l'unica situazione senza decadimenti è quella triangolare, in cui ci sono esattamente i primi k orbitali pieni, e i successivi tutti vuoti. Abbiamo detto che il gioco si stabilizza in una situazione senza decadimenti, ma l'unica situazione senza decadimenti è quella triangolare, in cui il solitario riesce.

Proposizione 7 – Supponiamo che il numero di carte sia il k-esimo numero triangolare (k>=2). Allora la situazione (k–1, k–1, k–2, …, 1, 1) si stabilizza in esattamente k(k–1) mosse.

Considero la struttura per orbitali della situazione data. I primi k–1 orbitali sono completi, il k-esimo ha una lacuna nella prima posizione, il k+1 esimo ha un elettrone in eccedenza in ultima posizione. Il decadimento può avvenire solo quando la lacuna ritorna nella prima posizione del suo orbitale, cosa che avviene ogni k mosse. In k mosse, l'elettrone soprannumerario recede di una posizione. Quindi dopo k(k–1) mosse, l'elettrone eccedente si trova in seconda posizione, cioè collide con la buca e finalmente decade (vedete diagramma), raggiungendo la situazione triangolare.



Osservazione 8 – Di tutte le posizioni con una sola lacuna e un elettrone in eccedenza, quella della Proposizione 7 è quella che ci mette il maggior numero di mosse a stabilizzarsi.

Infatti, a priori, i possibili posizionamenti della coppia buca-elettrone sono k(k+1). Tuttavia, vi sono k posizioni con la buca sulla stessa colonna dell'elettrone e k con la buca sulla stessa riga dell'elettrone. Tali posizioni sono instabili, quindi le posizioni stabili sono le restanti k(k–1). Perciò una struttura con la struttura elettronica data, può passare al massimo per k(k–1) diversi passaggi prima di dover decadere. Del resto, sappiamo già che la posizione di Proposizione 7 passa per esattamente k(k–1) situazioni diverse prima di decadere. Ad esempio, per rispondere a uno dei quesiti di RM, con quindici carte (k=5) abbiamo costruito una posizione che si stabilizza in 20 mosse.

Quel che ci piacerebbe è che questo sia il meglio che si possa riuscire a fare.

Congettura 9 – Nelle ipotesi di Proposizione 7, ogni posizione decade al massimo in k(k–1) mosse.

Per oggi basta…

E se dice "Basta" il ***Marco C.***, non saremo certo noi a contraddirlo. Anche perché a noi tocca ancora rendere conto di altre soluzioni sullo stesso tema, non meno interessanti. In particolare, ci piace riportare questa di ***Caronte***: più che una soluzione numerica, la sua è una serie di osservazioni ragionate e aperte ad altre discipline, proprio come piacciono a noi:

Incuriosito dalla difficoltà dichiarata da 3 pipe + 3 birre + 3 conigli, fattimi gli auguri (che in polacco, secondo un vocabolario in rete, si dicono *wszystkiego najlepszego*), mi sono messo a meditare un po' sul "problema senza titolo", alias "solitario polacco" (…)

Il problema è in parte banale e in parte terribile.

Pensando alla realizzazione pratica del procedimento, effettuata giocando con un mazzo di carte, vi consiglio di non provare a fare il solitario con un mazzo di carte da scopa (40 carte), né con uno da poker per quattro giocatori (32 carte), nè, tampoco, con uno da bridge (52 carte), perché non arrivereste mai a costruire una partizione in pile di tali insiemi di carte che si riproduca prelevando una carta da ogni pila della partizione ed aggiungendo alle pile rimaste una nuova pila formata dalle carte prelevate. Se però scartate un nuovo mazzo da bridge e tenete anche i due jolly e la carta dei punteggi, ottenendo così un mazzo di 55 carte, potete essere sicuri che, prima o poi[10], arriverete alla partizione

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10

che si riproduce all'infinito. E il gioco vi riesce anche se avete tra le mani un bel mazzo di tarocchi tradizionali[11], formato da quattordici carte per ognuno dei quattro semi, più 22 Trionfi (o Arcani Maggiori o, volgarmente, semplicemente "tarocchi"), dallo 0 (il matto) al 21 (il mondo), per un totale di 78 carte.

Queste considerazioni ludiche preliminari sono legate a quella che ho chiamato la parte banale del problema. Banale è infatti la determinazione di quei valori di n per i quali il risultato cercato può essere raggiunto. Siccome ad ogni passo viene creato un nuovo gruppo di elementi formato dal sottoinsieme dei k singoli elementi prelevati da ognuno dei k gruppi preesistenti, perché sia possibile che la partizione

[10] Ma potreste trovare lungo, dato che già solo le prime mosse possibili (le possibili divisioni in pile del mazzo, da un'unica pila di 55 carte a 55 pile di una carta) sono quasi mezzo milione (per l'esattezza 451276; provare per credere!) *[Nota di Caronte]*.

[11] Sono esistiti anche tarocchi con un numero maggiore di carte; tra questi, particolarmente famoso il mazzo creato alla corte di Filippo Maria Visconti nella prima metà del 1400 e dipinto a mano da Michelino da Besozzo in cui le figure erano 6 per ogni seme, per la presenza di una damigella accanto al fante e di una dama a cavallo accanto al cavallo (o cavaliere); questi tarocchi, risultato di una presumibile rivendicazione femminista medievale, ebbero però successo e diffusione piuttosto scarsi *[Nota di Caronte]*.

considerata si ripeta, è necessario, in primo luogo, che contemporaneamente alla creazione del nuovo gruppo (di *k* elementi) venga effettuata la distruzione di uno e uno solo dei gruppi della partizione precedente; questa deve quindi contenere uno e un solo gruppo formato da un unico elemento; questo, scomparendo, deve essere rimpiazzato da un nuovo sottoinsieme formato da un solo elemento, ottenuto togliendone uno da un sottoinsieme di due elementi, il quale deve, a sua volta, essere rimpiazzato da un nuovo sottoinsieme di due elementi, ottenuto togliendo un elemento da un gruppo di tre elementi, e così via, secondo lo schema

$$1(muore), 2 \to 1, 3 \to 2, \ldots, k \to k-1, k(nasce).$$

Gli insiemi per i quali il gioco può riuscire sono quindi quelli contenenti un numero n_k di elementi pari alla somma dei primi *k* numeri naturali:

$$n_k = 1 + 2 + \ldots + k \equiv \sum_{l=1}^{k} l = \frac{1}{2}k(k+1). \qquad [a]$$

I primi valori di n_k sono

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78

e qui mi fermo, essendo 78 il numero massimo di carte da gioco dei mazzi comunemente in uso.

Finita la parte banale, cominciano le difficoltà già tentando di rispondere alla domanda "se il numero di carte scelto è di tipo [a], il gioco riesce sempre?". Sono sicuro che la risposta è sì, ma la dimostrazione non ce l'ho; per dimostrarlo è necessario addentrarsi nel campo minato dello studio dettagliato delle possibili partizioni di un generico numero intero *n*, cosa che non ho avuto il coraggio di fare. Ho tuttavia l'impressione che il modo più semplice per ottenere la dimostrazione consista nel mostrare che, per numeri del tipo [a], il procedimento seguito per la creazione di nuove partizioni non può mai generare una sequenza di più partizioni che si riproduca ciclicamente, come succede, viceversa, per numeri diversi da quelli dati dalla [a]; per esempio, partendo dalla partizione 2+3 del numero 5, si origina il ciclo chiuso

$$2+3 \to 1+2+2 \to 1+1+3 \to 2+3$$

pronto a riprodursi all'infinito. Se è vero, come affermato, che per i numeri di tipo n_k il procedimento seguito non può generare catene di partizioni che si riproducono, allora ne segue che, partendo da una qualsiasi partizione di un numero del tipo n_k, si possono generare al più tutte le partizioni possibili di n_k, compresa quindi certamente anche quella autoriproducentesi.

Accettato come vero quanto detto sopra, segue immediata la risposta alla domanda se esista un numero di passi che costituisca una maggiorazione certa di quelli necessari per raggiungere il risultato, partendo da una partizione arbitraria; questo è certo dato dal numero $p(n_k)$ delle possibili partizioni di n_k, numero già di per sè tutt'altro che banale da calcolare. Per determinare il numero $p(n)$ di partizioni di un generico numero *n* si può utilizzare la relazione di ricorrenza[12] (†) (di dimostrazione tutt'altro che immediata)

$$p(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sigma_1(k)\, p(n-k),$$

[12] Vedi M. Abramovitz e I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications Inc., New York (nona ristampa, 1972), pag. 825 *[Nota di Caronte]*

dove, convenzionalmente, si pone $p(0)=1$ e $\sigma_1(k)$ è la somma dei divisori del numero k; potete, come ho fatto io, divertirvi a verificarne la validità per i primi valori di n. Vi riporto qui di seguito i valori di σ_1 (n) e di $p(n)$, per $n < 16$.

n	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
σ_1 (n)	1 3 4 7 6 12 8 15 13 18 12 28 14 24 24
$p(n)$	1 2 3 5 7 11 15 22 30 42 56 77 101 135 176

Nei casi che ho esaminato, la maggiorazione data da $p(n)$ è però insoddisfacente, nel senso che, in pratica, il numero di passi necessari per arrivare al risultato è sempre piuttosto minore di $p(n)$; per esempio, per $n=6$, si ha $p(6)=11$ e il massimo numero di passi è 7, nel caso della sequenza

$$6 \rightarrow 2+2+1+1 \rightarrow 1+1+4 \rightarrow 3+3 \rightarrow 2+2+2 \rightarrow 1+1+1+3 \rightarrow 2+4 \rightarrow 1+3+3(STOP);$$

come altro esempio, per n=10 si ha p(10)=42 e il massimo numero di mosse per raggiungere la partizione finale 1 + 2 + 3 + 4 è di 13 mosse, necessarie se si parte dalle partizioni

$$10 \rightarrow 3+2+2+1+1+1; 10 \rightarrow 3+3+2+1+1; 10 \rightarrow 3+2+2+1+1.$$

Questo è quanto sono riuscito ad arzigogolare. Probabilmente un buon matematico, abituato a giocare con la teoria dei numeri sarà in grado di darvi maggiori soddisfazioni. Per conto mio, attendo con ansia il prossimo numero di RM per vedere come hanno affrontato il problema gli altri vostri lettori.

Bene, le soluzioni sono disponibili, adesso: speriamo che soddisfino ***Caronte***: da parte nostra, ci godiamo la sua con tanto di dotte note a piè di pagina. Tra l'altro, si può anche dire con serenità che l'ipotesi del numero di carte pari ad un numero triangolare sia ritrovata da tutti i solutori. E noi abbiamo anche barato un po', nel raccontare il flusso delle soluzioni, perché lo stesso ***Puntomaupunto***, che abbiamo citato all'inizio, aveva messo in chiaro alcune cose:

Direi che è abbastanza facile dimostrare che se k non è triangolare il solitario non riesce: se il primo mazzetto non ha esattamente una carta, al giro dopo il primo mazzetto non avrà lo stesso numero di carte. Si prosegue per induzione (finita): il secondo mazzetto deve avere due carte, in modo che dopo l'operazione si scende a una carta, il terzo tre carte e così via fino all'ultimo mazzetto. Quindi il numero totale di carte è la somma dei primi n numeri, cioè l'n-esimo numero triangolare. A questo punto non resta che (a) dimostrare che vale il viceversa, che cioè se si parte con un numero triangolare di carte si finisce sempre all'attrattore senza fare cicli, e (b) qual è il più lungo attrattore.

Altre soluzioni e congetture sono arrivate, e il leit-motiv della triangolarità è stato sempre rilevato: da ***Alexphys*** a ***Cid;*** quest'ultimo dopo aver sviluppato il problema con l'utilizzo dei grafi, conclude il suo lavoro con ben tre congetture:

Prima Congettura del Cid — Se abbiamo $N=T_m$ pile che assumono tutti i valori di carte compresi tra $(m+2)$ e T_{m+1} e, allora il numero di archi necessari per andare da questo nodo al nodo finale è uguale a: $2 * T_{(T_{m+1}-2)} - T_m$.

Seconda Congettura del Cid – Se vi sono N pile formate da $(N + 1) / 2$ carte, allora il numero di archi è uguale a N.

Terza Congettura del Cid – Se vi sono N pile formate da (N – 1) / 2 carte, allora il numero di archi è uguale a (N – 1).

A questo punto dovrebbe bastare ricordare che per *archi* Cid intende ciò che altri chiamano *mosse* o *passi* (immaginate un grafo, con i nodi e appunto archi che li uniscano, un po' alla maniera dei grafi di ***Zar***), per avere ancora qualcosa da dimostrare.

Però, l'ultima parola su questo problema vogliamo darla a ***Val316***, perché con questa soluzione celebra un anno di risposte, e perché il suo metodo è abbastanza originale, anche nelle notazioni:

> Un po' di convenzioni per iniziare. Sia *n* il numero di carte in gioco. Definiamo una partizione *p(r;n)* di *n* una qualsiasi *r*-upla non decrescente di interi positivi a somma *n*. In simboli $p(r;n) \equiv (x_1, x_2, ..., x_r)$ con $0 < x_i \le x_{i+1}$ e $\sum_i x_i = n$. Sia inoltre $P_n = \{p(r;n) \,|\, 1 \le r \le n\}$ l'insieme di tutte le partizioni di *n* di qualsiasi lunghezza. Allora il gioco in esame è equivalente alla seguente mappa $G_n : P_n \to P_n$:
>
> $$G_n(p(r;n)) = G_n((x_1, x_2, ..., x_r)) = (x_1 - 1, x_2 - 1, ..., x_r - 1) \cup (r) \ .$$
>
> Ad ogni *r*-upla posso associare una *k*-upla con $k \le r+1$. Se $x_1 > 1$ allora $k = r+1$, altrimenti $k < r+1$. L'insieme P_n è finito e per il calcolo della sua cardinalità, calcolo noto come *partitio numerorum*, si sono scomodati matematici di primo valore dall'immancabile Eulero con il suo Teorema dei Numeri Pentagonali fino ad G.H.Hardy e Ramanujan che riuscirono nel 1917 a stabilire una formula asintotica ("*one of the rare formulae wich are both asymptotic and exact*" (Hardy)) :
>
> $$|P_n| \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2n/3}} \ .$$
>
> La cardinalità di P_n è cioè super-polinomiale. Consideriamo una qualsiasi partizione iniziale $p_0 = p(r_0, n)$ e formiamo la successione di $|P_n| + 1$ partizioni di *n*:
>
> $$p_0, G_n(p_0), G_n^2(p_0), ..., G_n^{|P_n|}(p_0) \ ,$$
>
> in cui, con una comune convenzione, intendiamo $G_n^{i+1} = G_n \circ G_n^i$, cioè G_n composto G_n^i. Poiché non possono esserci in un insieme di N elementi N+1 elementi (ovviamente!), necessariamente debbono verificarsi una delle due condizioni:
>
> $$\exists i_0 : G_n^{i_0+1}(p_0) = G_n^{i_0}(p_0)$$
>
> $$\exists T > 1 : G_n^{i+T}(p_0) = G_n^i(p_0), \forall i > i_0$$
>
> Nel primo caso la partizione $G_n^{i_0}(p_0)$ è un punto fisso di G_n. Una volta giunti in quel punto il gioco riproduce la stessa partizione indefinitamente (è quello che si chiede nel quesito del problema). Nel secondo caso invece siamo in presenza di un ciclo limite di periodo T. Ogni T iterazioni il gioco ritorna nella stessa partizione.
>
> In linea teorica per ogni *n* la mappa G_n può avere:
>
> - Un unico punto fisso con bacino di attrazione globale. Quale che sia la partizione iniziale prima o poi si arriverà in quella partizione limite
> - Un solo ciclo limite con bacino di attrazione globale. Prima o poi il gioco inizierà a "ciclare" con un certo periodo sempre sulle stesse partizioni.

- Più punti fissi e/o cicli limite con bacini di attrazione locali. In relazione alla partizione di partenza si avranno comportamenti limite differenti.

Vediamo per quali *n* c'è un punto fisso per G_n. Sia $p(r;n) \equiv (x_1, x_2, ..., x_r)$ un punto fisso per G_n, allora $G_n(x_1, x_2, ..., x_r) = (x_1, x_2, ..., x_r)$, ma $G_n((x_1, x_2, ..., x_r)) = (x_1 - 1, x_2 - 1, ..., x_r - 1) \cup (r)$. Se $x_1 > 1$ allora $|(x_1 - 1, x_2 - 1, ..., x_r - 1) \cup (r)| = r + 1 \neq r$.

Deve essere $x_1 = 1$, ma allora $x_2 - 1 = x_1$, $x_3 - 1 = x_2$ e così via. Quindi una partizione punto fisso deve soddisfare il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 - 1 = x_1 \\ x_3 - 1 = x_2 \\ \dots \\ r = x_r \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \\ \dots \\ x_r = r \end{cases}$$

Questo significa che $n = \sum_{i=1}^{r} x_i = \sum_{i=1}^{r} i = \frac{r(r+1)}{2}$.

Possiamo concludere che per tutti i numeri, diciamo triangolari, il gioco converge. In particolare esso converge per $n = 6 = \frac{3(3+1)}{2}$ e per $n = 15 = \frac{5(5+1)}{2}$. Ragionando in maniera simile si possono determinare i cicli limite. Ad esempio i cicli di periodo 2 si ottengono per $n = 2(k+1)^2$ (=2, 8, 18, 32,...) e la struttura del ciclo è

$$\underbrace{(1,1,3,3,...,2k+1,2k+1)}_{2(k+1)\ elementi} \Rightarrow \underbrace{(2,2,4,4,...,2k,2k,2(k+1))}_{2k+1\ elementi} \Rightarrow \underbrace{(1,1,3,3,...,2k+1,2k+1)}_{2(k+1)\ elementi}$$

I cicli di periodo 3 si ottengono per $n = (k+1)\left(\frac{9}{2}k + 5\right)$ (=5, 19, 42, 74, ...) e la struttura del ciclo è

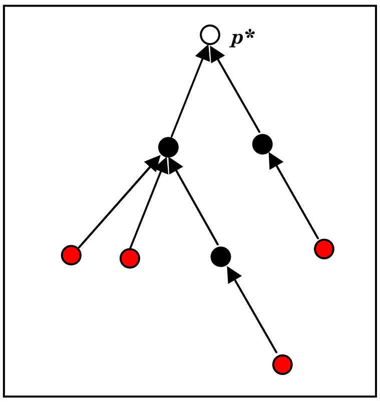
$$\underbrace{(1,2,2,4,5,5,...,1+3k,2+3k,2+3k)}_{3(k+1)\ elementi} \Rightarrow \underbrace{(1,1,3,4,4,...,3k,1+3k,1+3k,3(k+1))}_{3(k+1)\ elementi} \Rightarrow$$

$$\underbrace{(2,3,3,...,3k,3k,2+3k,3+3k)}_{3k+2\ elementi} \Rightarrow \underbrace{(1,2,2,...,1+3k,2+3k,2+3k)}_{3(k+1)\ elementi}$$

Come si vede si possono ottenere una sequenza infinita di polinomi "ortogonali". Quale sia il polinomio *monstrum* per il ciclo 10^6 non sono riuscito a calcolarlo... Per quanto riguarda il numero di iterazioni per raggiungere il punto fisso mi son lasciato guidare dalle seguenti considerazioni.

Alla coppia (P_n, G_n) possiamo associare un grafo $GRAFO(P_n, V_n)$. L'insieme dei nodi è dato dalle partizioni di P_n e quello degli archi $V_n = \{(p_i, p_j) \mid p_j = G_n(p_i)\}$.

Per quei *n,* per i quali esiste un punto fisso p^* per il gioco G_n, non essendoci percorsi ciclici di nodi, $GRAFO(P_n, V_n)$ è un albero la cui radice è p^*.



Questo è principio di maggiorazione che ho adottato: partendo da ogni foglia e percorrendo il relativo percorso verso la radice, sicuramente s'incontrano (in genere più volte) tutti i nodi dell'albero. Formalizziamolo.

Indicando con T_n l'insieme dei nodi terminali (foglie) di $GRAFO(P_n, V_n)$ e con $L_n(t_i, p^*)$ la lunghezza del percorso, o numero di nodi, dalla foglia t_i alla radice p^*, vale la seguente disuguaglianza:

$$|P_n| \le L_n(t_1, p^*) + L_n(t_2, p^*) + \ldots = \sum_{t_i \in T_n} L_n(t_i, p^*).$$

Poiché $\sum_{t_i \in T_n} L_n(t_i, p^*) \le |T_n| \max_{t_i \in T_n} L_n(t_i, p^*)$ allora $\max_{t_i \in T_n} L_n(t_i, p^*) \ge \frac{|P_n|}{|T_n|}$

Sappiamo di $|P_n|$, ma quanto vale $|T_n|$? Cioè quanti sono i nodi terminali. I nodi terminali sono quelle partizioni che non possono essere prodotte dalla regola del gioco, ma possono comparire solo come condizioni iniziali. Messa così si può dire che

$$T_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P_n : 0 < x_i < k-1,\ i = 1,2,\ldots,k\}.$$

La mappa inversa G_n^{-1} sull'insieme T_n non è applicabile. Infatti essa agisce togliendo un elemento dalla sequenza e ridistribuendo il suo valore sui rimanenti e nel caso creandone di nuovi. Non posso eliminare nessun elemento x_i perché ne rimarrebbero *k–1*, i quali si aspetterebbero di ricevere rispettivamente un'unità a testa, ma $x_i < k-1$. Non per tutti i *k* esistono sequenze terminali. Infatti deve aversi

$$k \le \sum_{i=1}^{k} x_i = n < k(k-1) \ \Rightarrow \sqrt{n} \le k < n.$$

Geometricamente T_n può essere visto come l'unione dell'intersezione (a numeri interi) tra il cubo $C_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : 0 < x_i < k-1,\ i = 1,2,\ldots,k\}$ e l'iper-piano

$$\Pi_k = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : \sum_{i=1}^{k} x_i = n\right\}, \quad \text{cioè} \quad T_n \propto \bigcup_{k=\lceil\sqrt{n}\rceil}^{n} C_k \cap \Pi_k, \quad \text{da cui}$$

$$|T_n| \propto \sum_{k=\lceil\sqrt{n}\rceil}^{n} |C_k \cap \Pi_k|.$$

$|C_k \cap \Pi_k|$ è minore dell'area del cerchio massimo della sfera che circoscrive C_k.

Quest'ultima è dell'ordine della diagonale di C_k: $\underbrace{(k^2 + k^2 + \ldots + k^2)}_{k\ volte} = k^3$. Allora

$|T_n| < \sum_{k=\lceil\sqrt{n}\rceil}^{n} k^3 = O(n^4)$. In definitiva possiamo scrivere

$$\frac{1}{4n^5\sqrt{3}}e^{\pi\sqrt{2n3}} \leq \max_{t_i \in T_n} L_n(t_i, p^*) \leq \frac{1}{4n\sqrt{3}}e^{\pi\sqrt{2n3}} .$$

Non so come si dica auguri in polacco, google mi da' *pozdrowienia*. So però come si dice arrivederci in spagnolo: *hasta la vista*.

E noi rimaniamo così, col dubbio che ***Val316*** sia già partito per vacanze dall'iberico sentore. Comunque, l'*hasta la vista* lo prendiamo per buono, ci marchiamo questo problema, e passiamo finalmente al successivo.

4.3.2 Cessato Allarme

C'erano le carte anche in questo problema, ricordate? Però in questo c'entravano anche le probabilità, e come sempre succede in questi casi, il calcolo delle probabilità filtra l'interesse dei solutori: lo sappiamo bene che il *CdP* o si odia o si ama. A prescindere da ciò, una caratteristica peculiare di questo problema è che sembra riuscire a suscitare risposte fulminee. Guardate cosa scrive ***Puntomaupunto,*** giusto qualche attimo dopo il rilascio della rivista:

> Per il problema 2, la probabilità di beccare due carte uguali non è (praticamente) 1/e? e perché hai tolto i jolly, che tanto non cambia nulla?

E siamo d'accordo, questo non è ancora né una risposta né una soluzione, al massimo è un tentativo mirato, subodorato e *usmato*. Ma un'altra *non-soluzione* che è però certamente una *risposta* ci è arrivata dal ***Panurgo***. Visto che si era parlato di soluzioni fin troppo lunghe, ci ha mandato una mail decisamente meno prolissa. Testo della mail: "*Questo non è lungo!"* e la mail conteneva un allegato. Lo riportiamo integralmente:

> La probabilità di vincere di Alberto è $\frac{193937806586896328746924473226467394949530139620339174273819171217}{527177615496365219422618541545122659969212453861982208000000000000}$

Vi siete mai chiesti come facciamo a verificare certe soluzioni, quando ci arrivano? Pensate che abbiamo già tutto pronto? O che ci si metta lì di corsa a vedere se il conto torna, in una maniera o nell'altra? Niente affatto! Noi ci mettiamo lì in tutta tranquillità, e diamo uno sguardo alla cassetta postale: non serve neanche aspettare troppo: nel giro di poco, infatti, arriva una mail come questa che ci ha spedito ***Michele***:

> Alberto vince se non gira nessuna carta uguale a quella girata da Fred. I due mazzi, quello di Alberto e quello di Fred, non sono altro che due permutazioni a caso dell'insieme [1, 2, …, 52]. Per motivi di simmetria, nulla cambia se pensiamo che la permutazione di Fred sia la permutazione fondamentale [1, 2, …, 52]. Il problema si potrebbe allora riformulare, sintetizzare e generalizzare in questo modo.
>
> Scelta una permutazione a caso di A = [1, 2, …, n], qual è la probabilità che per nessun k (k = 1, 2, …, n) risulti A[k] = k? In altri termini: quante sono le funzioni biiettive f: A → A senza punti fissi, cioè per le quali $f(k) \neq k$ per ogni $k \in$ A?
>
> Sia allora Ω l'insieme delle permutazioni di A, E il sottoinsieme di Ω delle permutazioni senza punti fissi. La probabilità che stiamo cercando è p(E).
>
> Possiamo pensare che l'evento E si realizzi se: *"1 non è un punto fisso"* e *"2 non è un punto fisso"* e … e *"n non è un punto fisso"*.
>
> Se indichiamo con F_k l'evento "k è un punto fisso" allora risulta
>
> $$E = F_1^C \cap F_2^C \cap \ldots \cap F_n^C$$
>
> $$p(E) = p(F_1^C \cap F_2^C \cap \ldots \cap F_n^C) = p((F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n)^C) = 1 - p(F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n)$$
>
> Per il principio di inclusione-esclusione risulta
>
> $$p(F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n) =$$

$$=\sum_{i=1}^{n} p(F_i) - \sum_{i_1<i_2} p\left(F_{i_1} \cap F_{i_2}\right) + \ldots + (-1)^n \sum_{i_1<\ldots<i_n} p\left(F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n}\right)$$

Poiché:

$$p(F_i) = \frac{(n-1)!}{n!} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} p(F_i) = n\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{1!}$$

$$p\left(F_{i_1} \cap F_{i_2}\right) = \frac{(n-2)!}{n!} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i_1<i_2} p\left(F_{i_1} \cap F_{i_2}\right) = \binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!}$$

$$= \frac{1}{2!}$$

…

$$p\left(F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n}\right) = \frac{(n-n)!}{n!} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i_1<\ldots<i_n} p\left(F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n}\right) =$$

$$\binom{n}{n}\frac{(n-n)!}{n!} = \frac{1}{n!}$$

allora

$$p(\mathrm{E}) = 1 - p(\mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{F}_n) = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

Per $n \to \infty$ si ottiene la celebre serie che converge (assai rapidamente!) a $1/e \approx 0.368$. In pratica già per $n = 6$ la probabilità che una permutazione scelta a caso non abbia punti fissi è

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k!} = \frac{53}{144} \approx 0.368.$$

Quindi Alberto e Fred farebbero meglio, per risparmiare tempo e carte, a giocare con un mazzo di 6 carte, perché le loro probabilità sostanzialmente non cambiano: Alberto vince con probabilità 36.8% e Fred con probabilità 63.2%.

Nel nostro caso $n = 52$ e dunque, se proprio interessa, risulta

$$p(\mathrm{E}) = \sum_{k=0}^{52} \frac{1}{k!} =$$

$$\frac{193937806586896328746924473226467394949530139620339174273819171217}{527177615496365219422618541545122659969212453861982208000000000000}$$

Visto? Appena un po' di pazienza, e tutto quel che resta da fare è dare uno sguardo alle due frazioni colte da elefantiasi. Sembrano proprio uguali, no? E poi, per buon peso, abbiamo anche una conferma all'approssimazione di ***Puntomaupunto***. Certo, potrebbero essere sbagliate anche se uguali, certo. Ma noi abbiamo una gran fiducia, nei nostri solutori. E poi siamo pigri.

Chissà cosa accadrebbe se ci arrivasse una soluzione diversa… Ad esempio, anche la soluzione del ***Cid*** conteneva una frazione gigantesca, ma non sembrava mica la stessa:

La probabilità che vinca Fred è uguale a:

$$\sum_{i=1}^{52} \frac{(-1)^{i+1}}{i!} = \frac{3332398089\,0946889067\,5694068318\,6552650196\,8231424164\,3033726180\,828783}{5271776154\,9636521942\,2618541545\,1226599692\,1245386198\,2208000000\,000000}$$

(un'ottima approssimazione di questo valore è: $\frac{e-1}{e}$ = 0,63212055882855767884...)

Dimostrazione: consideriamo la seguente tabella triangolare:

1									
1	0								
2	1	1							
6	4	3	2						
24	18	14	11	9					
120	96	78	64	53	44				
6!	a = 600	b = 504	c = 426	d = 362	e = 309	f = 265			
7!	f = 7! - 6!	g = (f - a)	h = (g - b)	i = (h - c)	l = (i - d)	m = (l - e)	n = (m - f)		
8!	...	...	...	...	...	...	...	...	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

dove la prima colonna contiene la successione dei numeri fattoriali e l'elemento k-esimo della n-esima riga è uguale alla differenza tra l'elemento (k–1)-esimo della n-esima riga e l'elemento (k–1)-esimo della (n–1)-esima riga.

Consideriamo due mazzi di n carte:

- quante sono le possibili combinazioni delle carte del 2° mazzo? Risposta: ***n!***
- quante sono le possibili combinazioni delle carte del 2° mazzo, tali che la prima carta del 2° mazzo sia uguale alla prima carta del 1° mazzo? Risposta: ***(n–1)!***

Risulta ora abbastanza evidente notare che l'elemento k-esimo della n-esima riga è uguale al numero di possibili combinazioni delle carte del 2° mazzo tali che la k-esima carta del 2° mazzo risulti essere uguale alla k-esima carta del 1° mazzo e che nelle precedenti $(k-1)$ carte dei due mazzi non ve ne siano 2 uguali. Infatti ogni elemento è uguale alla differenza tra il numero di casi favorevoli dopo $(k-1)$ carte in un mazzo di n carte e $(k-1)$ carte in un mazzo di $(n-1)$ carte, che è uguale al mazzo senza quella carta. Ora, siccome la probabilità di vincere è uguale al rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero di casi possibili, abbiamo che la probabilità che ha Fred di vincere dopo k carte in un mazzo di n carte è uguale a: (somma dei primi k termini della n-esima riga) diviso (n!)

Proviamo a fare la somma: per rendere più chiari i passaggi seguenti chiamo con x,v,w,y,z i primi cinque termini della successione dei numeri fattoriali.

x					
v	v - x				
w	w - v	w - 2v + x			
y	y - w	y - 2w + v	y -3w +3v -x		
z	z - y	z - 2y + w	z - 3y +3w - v	z - 4y +6w - 4v + x	
...	...	...	...	...	...

Suppongo che sia abbastanza evidente la somiglianza con il *triangolo di Tartaglia*, dovuta al fatto che la regola di costruzione è simile. Considerato che i termini della prima colonna formano la successione dei numeri fattoriali si ha che la successione *z*, *y*, *w*, *v*, *x*, ecc... è la successione decrescente dei numeri fattoriali a partire da (n–1). Quindi la somma di tutti gli elementi della n-esima riga è uguale a:

$$\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1}*\left(\frac{n!}{k!*(n-k)!}\right)*(n-k)!\right)=\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1}*\left(\frac{n!}{k!}\right)\right)=(n!)*\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\right)$$

dove il termine $(-1)^{k+1}$ è dovuto al fatto che nella somma si alternano addendi positivi e negativi.

Dividendo questo valore per tutti i casi possibili, ottengo che la probabilità di vincere in un mazzo di n carte è uguale a:

$$\frac{(n!)*\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\right)}{n!}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\right)$$

Quindi in un mazzo di 52 carte, la probabilità che ha Fred di vincere è:

$$\sum_{i=1}^{52}\frac{(-1)^{i+1}}{i!}$$

Una dimostrazione assai più semplice avrebbe permesso di giungere ad un'ottima approssimazione. Considerando che in un mazzo avente infinite carte l'estrazione di ogni carta è indipendente dall'estrazione delle altre carte, considero la probabilità come prodotto delle probabilità.

Probabilità che ha Alberto di vincere dopo la 1° carta: $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, dopo n carte la probabilità che ha Alberto di vincere è $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$. Calcolo quindi: $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{e}$.

Se calcoliamo la probabilità che ha Alberto di vincere in un mazzo avente poche carte si nota che la probabilità converge rapidamente al valore trovato per n che tende ad infinito.

(n = 1, Prob.=0) (n = 2, Prob.=$\frac{1}{2}$) (n = 3, Prob.=$\frac{2}{3}$)

(n = 4, Prob. =$\frac{5}{8}$) (n = 5, Prob.=$\frac{19}{30}$) (n = 6, Prob.= $\frac{91}{144}$)

(n = 7, Prob.=$\frac{177}{280}$) (n = 8, Prob.=$\frac{3641}{5760}$) (n = 9, Prob. =$\frac{28673}{45360}$) ecc...

Quindi con 52 carte si può ritenere che questo valore sia una ottima approssimazione della probabilità che ha Alberto di vincere. La probabilità che ha Fred di vincere è dunque approssimativamente uguale a: $1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}$. Mi pare interessante notare che:

1) il risultato approssimato e quello esatto coincidono nelle prime 69 cifre decimali
2) come corollario di questa dimostrazione abbiamo che: $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{i!}=\frac{e-1}{e}$

A noi piace invece notare che le frazioni sono molto meno diverse di quel che credevamo a prima vista. Okay, scherzi a parte, ci sembra davvero notevole il *quasi-triangolo di Tartaglia*. La creatività del ***Cid*** è spesso davvero sorprendente. La filosofia di RM è sempre stata quella di mostrare le molte vie d'approccio ai problemi, e siamo contenti di poter presentare questa soluzione di ***Sirjoe***, che usa un metodo diretto, sostanzialmente *operazionale*:

> A prima vista sembra un "semplice" problema di probabilità condizionata, ovvero la probabilità che la prima carta giocata sia uguale più la probabilità che sia uguale la seconda condizionata all'evento negativo della prima carta e così via. Ben presto però ci si accorge che le cose non funzionano esattamente così. Si deve infatti tenere in conto la possibilità che la carta giocata da Alfredo sia già stata giocata in precedenza da Fred. In questo caso quindi Fred non avrebbe nessuna possibilità di giocare una carta uguale a quella dell'avversario. Tale approccio non sembra impossibile, ma certamente non è semplice; forse c'è n'è uno migliore. Tanto per scaldarci, e per cercare magari qualche regolarità cominciamo a giocare con 2 carte, poi con tre, poi con quattro e così via. Senza perdere di generalità possiamo ignorare i semi e numerare le carte da 1 a n. Se mettiamo i due mazzi a terra (a carte scoperte) in modo ordinato, possiamo ridefinire la condizione di vittoria come una qualsiasi combinazione del mazzo di Fred in cui almeno una carta occupa la stessa posizione del mazzo di Alfredo. Ai fini della probabilità di vittoria la sequenza di Alfredo non è rilevante, per cui immaginiamo sempre che sia (1,2,3,4,…, n). Definiamo inoltre $\mathbf{P_n}$ la probabilità di vittoria di Fred in un mazzo di n carte e utilizziamo un po' di forza bruta, ricordandoci la definizione di base che la probabilità è il numero di eventi favorevoli (data una sequenza, almeno una carta in posizione uguale) rispetto al numero di eventi totali (numero di sequenze).
>
> $\mathbf{P_2 = 1/2} \qquad \mathbf{P_3 = 4/6 = 2/3} \qquad \mathbf{P_4 = 15/24}$
>
> Adesso cominciamo a fare qualche ragionamento:
>
> - Il numero totale di eventi in un mazzo di n carte è pari al numero delle permutazioni: **n!**
> - Il numero totale di eventi favorevoli $\mathbf{E_n}$ è pari al numero di eventi favorevoli in cui la prima carta di entrambi i mazzi è uguale sommato al numero di eventi favorevoli in cui la prima carta è diversa (è quasi ovvio ma è utile)
> - Il numero di eventi favorevoli se la prima carta è uguale è pari alle permutazioni delle restanti carte: **(n–1)!**
>
> Poiché calcolare il numero degli eventi favorevoli quando la prima carta è diversa è un problema a (n–1) carte, se riusciamo a trovare una espressione di questo valore possiamo trovare una soluzione ricorsiva al problema. Confrontiamo quindi i due

mazzi dopo la prima giocata: sono uguali a meno di una carta. Il numero di eventi favorevoli è quindi pari al numero totale di eventi favorevoli con (n–1) carte meno quelli in cui l'evento favorevole era determinato dalla sola carta mancante. Possiamo quindi scrivere che

$$\mathbf{E_n = (n-1)! + (n-1)(E_{n-1} - E_{n-1}(1\ sola\ carta))}$$

Dove abbiamo tenuto in considerazione il fatto che al primo giro potevamo giocare (n–1) carte diverse e abbiamo indicato con $\mathbf{E_{n-1}}$**(1 sola carta)** il numero di eventi in cui una specifica carta costituiva l'unica possibilità di evento favorevole. Attenzione al fatto che non ci si riferisce a tutti gli eventi favorevoli con una sola carta uguale.

Per fare un esempio con 4 carte abbiamo

Combinazioni Fred del tipo "1XXX" = 3! = 6

Combinazioni Fred del tipo "2XXX" = 3 = (4 – 1) = (totale combinazioni favorevoli a tre carte – combinazioni a tre carte in cui l'1 di Fred si trova in corrispondenza del 2 di Alfredo e non ci sono altre carte corrispondenti)

Combinazioni Fred del tipo "3XXX" = Combinazioni Fred del tipo "2XXX" = 3

Combinazioni Fred del tipo "4XXX" = Combinazioni Fred del tipo "2XXX" = 3

Totale eventi = 6+3*3 = 15. Fin qui i conti tornano. Ci resta da calcolare $\mathbf{E_{n-1}}$**(1 sola carta)**. Fissiamo quindi una generica carta e posizioniamola nella posizione favorevole. Come facciamo a sapere quanti sono gli eventi in cui è l'unica carta "favorevole". Se abbiamo fissato 1 carta ce ne restano (n – 2) che possiamo disporre in qualsiasi posizione tranne quelle che danno luogo a eventi favorevoli :

$$\mathbf{E_{n-1}(1\ sola\ carta) = (n-2)! - E_{n-2}}$$

Ovvero il totale degli eventi con (n–2) carte a cui abbiamo tolto il numero degli eventi favorevoli. Siamo quindi alla fine

$$\mathbf{E_n = (n-1)! + (n-1)(E_{n-1} - (n-2)! + E_{n-2}) = (n-1)\ (E_{n-1} + E_{n-2})}$$

Ricordando che il numero totale di eventi è **n!** possiamo passare alle probabilità e scrivere

$$\mathbf{P_n = ((n-1)P_{n-1} + P_{n-2})/n}$$

con $\mathbf{P_2 = 1/2}$ e $\mathbf{P_3 = 2/3}$. In realtà la formula continua a funzionare se estendiamo il dominio definendo $\mathbf{P_0 = 0}$ e $\mathbf{P_1 = 1}$.

La formula che abbiamo ottenuto può essere calcolata molto semplicemente in un foglio elettronico (sempre se non interessano troppi decimali) ed il risultato è:

n	P_n	n	P_n	n	P_n	n	P_n
0	0	13	0,632120559	26	0,632120559	39	0,632120559
1	1	14	0,632120559	27	0,632120559	40	0,632120559
2	0,5	15	0,632120559	28	0,632120559	41	0,632120559
3	0,666666667	16	0,632120559	29	0,632120559	42	0,632120559
4	0,625	17	0,632120559	30	0,632120559	43	0,632120559
5	0,633333333	18	0,632120559	31	0,632120559	44	0,632120559
6	0,631944444	19	0,632120559	32	0,632120559	45	0,632120559
7	0,632142857	20	0,632120559	33	0,632120559	46	0,632120559
8	0,632118056	21	0,632120559	34	0,632120559	47	0,632120559
9	0,632120811	22	0,632120559	35	0,632120559	48	0,632120559
10	0,632120536	23	0,632120559	36	0,632120559	49	0,632120559
11	0,632120561	24	0,632120559	37	0,632120559	50	0,632120559
12	0,632120559	25	0,632120559	38	0,632120559	51	0,632120559

Dove si vede che la probabilità di vittoria di Fred converge rapidamente (già con 12 carte) a 0,632120559 (pari a circa il 63,2 %).

Nota aggiuntiva: La soluzione al problema si può anche riscrivere come

$$\mathbf{P_n - P_{n-1} = -(P_{n-1} - P_{n-2})/n}$$

Dove si vede che la distanza tra due elementi successivi della sequenza converge a zero come **1/n!** (Tra l'altro oscilla tra positivo e negativo, quindi se un elemento della sequenza è superiore al valore di convergenza, il successivo sarà inferiore e viceversa). Pertanto è abbastanza semplice, data una precisione desiderata, stimare a che n ci si può fermare. Nello specifico essendo 13! pari a circa $6*10^9$ sappiamo già che con 9 cifre decimali non serve andare oltre il 12.

Anche a noi non serve andare troppo oltre: anzi, siamo proprio alla fine, ormai. Le prossime Soluzioni e Note saranno rosolate al sole d'Agosto.

5. Quick & Dirty

Questa volta ci servono solo quattro carte ed un paio di monetine. Avete, giustappunto, due carte rosse e due nere. Queste carte sono mescolate e messe sul tavolo faccia in giù. Vi si chiede di mettere le due monetine su quelle che scommettete essere due carte dello stesso colore.

Quanto vi sentite fiduciosi della vostra scelta? Ossia, quali sono le probabilità che ci abbiate azzeccato?

Il ragionamento classico **sbagliato** *è: Ci sono tre casi equiprobabili: o le ho scelte tutte e due nere, o le ho scelte tutte e due rosse, o mi è andata male e le ho scelte una rossa e una nera; quindi,* $^2/_3$ *di azzeccarci.*

In realtà, se tracciate tutte le 24 *possibili permutazioni e scegliete ogni volta la seconda e la quarta (è un esempio: siccome avete listato tutte le combinazioni, potete prenderne due qualsiasi, basta che le teniate uguali per tutte le permutazioni), vi accorgete che le probabilità di azzeccarci crollano ad* $^1/_3$.

Un metodo meno esaustivo per verificare quanto questo gioco sia una fregatura è presupporre di aver scelto una carta rossa; quando effettuate la seconda scelta, questa viene fatta su **tre** *carte di cui* **una sola** *è rossa; quindi, la probabilità è* $^1/_3$.

Giusto per chiarire con un vecchio classico: scegliete la prima carta, e questa è rossa; indicate la seconda e io vi faccio vedere una delle due non scelte e questa risulta nera... Scambiate?

6. Pagina 46

Per prima cosa mostriamo che per ogni intero b il numero delle differenze $a_k - a_l$ divisibile per b non è minore del numero delle differenze $k-l$ divisibili per b. Per prima cosa, determiniamo quante differenze $a_k - a_l$ sono divisibili per b.

Assumiamo che n_0 degli interi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ siano divisibili per b, che n_1 diano resto 1 successivamente alla divisione per b, n_2 diano resto 2 e avanti in questo modo sino agli n_{b-1} interi che danno resto $b-1$ in seguito alla divisione per b. Siccome un intero in seguito alla divisione per b dà uno solo dei resti $0,1,2,\ldots,b-1$, è evidente che:

$$n_0 + n_1 + n_2 + \ldots + n_{b-1} = n.$$

La differenza $a_k - a_l$ è divisibile per b se e solo se i due termini danno lo stesso resto quando sono divisi per b.

Il numero delle differenze $a_k - a_l$ divisibili per b in cui entrambi i termini siano divisibili per b può essere indicato come $\binom{n_0}{2} = \frac{n_0(n_0-1)}{2}$, in quanto esistono $1+2+3+\ldots+(n-1)$ di questi termini; nello stesso modo, possiamo indicare il numero delle differenze $a_k - a_l$ divisibili per b in cui entrambi i termini diano un resto 1 quando vengano divisi per b come $\binom{n_1}{2} = \frac{n_1(n_1-1)}{2}$ e quindi indicare il numero delle differenze $a_k - a_l$ divisibili per b in cui entrambi i termini danno resto 2 quando vengano divisi per b come $\binom{n_2}{2} = \frac{n_2(n_2-1)}{2}$. Procedendo nello stesso modo per tutti i termini, si arriva a $\binom{n_{b-1}}{2} = \frac{n_{b-1}(n_{b-1}-1)}{2}$. Da questo segue che il numero delle differenze $a_k - a_l$ divisibile per b risulta:

$$\begin{aligned} N &= \frac{n_0(n_0-1)}{2} + \frac{n_1(n_1-1)}{2} + \ldots + \frac{n_{b-1}(n_{b-1}-1)}{2} \\ &= \frac{n_0^2 + n_1^2 + \ldots + n_{b-1}^2}{2} - \frac{n_0 + n_1 + \ldots + n_{b-1}}{2} \\ &= \frac{n_0^2 + n_1^2 + \ldots + n_{b-1}^2}{2} - \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Da cui diventa possibile effettuare la seguente espansione:

$$\begin{aligned} \frac{n_0^2 + n_1^2 + \ldots + n_{b-1}^2}{2} &= \frac{(n_0 + n_1 + \ldots + n_{b-1})^2 - 2n_0n_1 - 2n_0n_2 - \ldots - 2n_{b-2}n_{b-1}}{2} \qquad ^{13} \\ &= \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{l} \left[(n_0 - n_1)^2 - n_0^2 - n_1^2\right] + \left[(n_0 - n_2)^2 - n_0^2 - n_2^2\right] + \\ \ldots + \left[(n_{b-2} - n_{b-1})^2 - n_{b-2}^2 - n_{b-1}^2\right] \end{array} \right\} \\ &= \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} (n_0 - n_1)^2 + (n_0 - n_2)^2 + \ldots + (n_{b-2} - n_{b-1})^2 \\ -(n_0^2 + n_1^2) - (n_0^2 + n_2^2) - \ldots - (n_{b-2}^2 + n_{b-1}^2) \end{array} \right] \\ &= \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} (n_0 - n_1)^2 + (n_0 - n_2)^2 + \ldots + (n_{b-2} - n_{b-1})^2 \\ -(b-1)(n_0^2 + n_1^2 + \ldots n_{b-1}^2) \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Notate che nell'ultimo termine all'interno delle parentesi ognuno dei termini $n_0^2, n_1^2, \ldots, n_{b-1}^2$ appare $b-1$ volte.

[13] Ci scusiamo per la notazione a dir poco fetente, ma Equation Editor ha idee tutte sue sull'andare a capo in un'espressione tra parentesi.

Trasferendo a primo membro tutti i termini contenenti i quadrati di n_k e dividendo entrambi i membri per b otteniamo:

$$\frac{1}{2}\left(n_0^2+n_1^2+\ldots+n_{b-1}^2\right)=\frac{n^2}{2b}+\frac{(n_0-n_1)^2+(n_0-n_2)^2+\ldots+(n_{b-1}-n_b)^2}{2b},$$

Da cui:

$$N=\frac{(n_0-n_1)^2+(n_0-n_2)^2+\ldots+(n_{b-1}-n_b)^2}{2b}+\frac{n^2}{2b}-\frac{n}{2}.$$

Possiamo mostrare nello stesso modo che il numero N' delle differenze $k-l$ (con $n\geq k>l\geq 1$) che sono divisibili per b è pari a:

$$N'=\frac{(n'_0-n'_1)^2+(n'_0-n'_2)^2+\ldots+(n'_{b-1}-n'_b)^2}{2b}+\frac{n^2}{2b}-\frac{n}{2},$$

Dove n'_k è il numero degli interi nella sequenza $1,2,3,\ldots,n$ che danno un resto k a seguito della divisione per b.

Segue immediatamente dalla formula appena ottenuta che se $n=mb$ (ossia se n è multiplo di b) allora è $N\geq N'$; I numeri $n'_0,n'_1,\ldots,n'_{b-1}$ sono tutti uguali a m e quindi la somma dei quadrati delle differenze viste nell'espressione sopra scompare. È meno ovvio il fatto che se n dà un resto $r\neq 0$ a seguito della divisione per b allora si ottenga la diseguaglianza $N\geq N'$; qui r dei numeri $n'_0,n'_1,\ldots n'_{b-1}$ (in particolare i numeri $n'_1,n'_2,\ldots n'_r$) sono pari a $m+1$ e i restanti numeri $n'_0,n'_{r+1},\ldots n'_{b-1}$ sono pari a m. Per provare che N non può essere minore di N', impieghiamo il seguente metodo formale:

Essendo la somma dei b numeri $n_0,n_1,\ldots,n_{b-1}$ pari a $n=mb+r$, almeno uno di questi numeri (indicato come n_t) non può essere maggiore di m (altrimenti la somma di questi numeri sarebbe non minore di $b(m+1)>n$).

Aggiungiamo allora un nuovo numero a_{n+1} alla sequenza $a_1,a_2,\ldots,a_n$; un numero tale da dare un resto t una volta diviso per b. A questo punto, il numero delle differenze (a_k-a_l) è aumentato di n, in quanto vengono introdotte le ulteriori $(a_{n+1}-a_1),(a_{n+1}-a_2),\ldots,(a_{n+1}-a_n)$. Di queste nuove differenze, esattamente n_t saranno divisibili per b. Quindi il numero delle differenze $k-l$ risulta aumentato delle n differenze $(n+1)-1,(n+1)-2,\ldots(n+1)-n$ e deve evidentemente essere $m\geq n_t$.

Quindi, se possiamo dimostrare che almeno altrettante delle $\binom{n+1}{2}$ differenze a_k-a_l per $k>l$ e $k,l=1,2,\ldots,n+1$ sono divisibili per b quante tra le n differenze $(n+1)-1,(n+1)-2,\ldots(n+1)-n$, allora seguirà che tra le $\binom{n_1}{2}$ differenze a_k-a_l per $k>l$ e $k,l=1,2,\ldots,n_1$ ce ne saranno altrettante divisibili per b di quante fossero divisibili tra le differenze $k-l$.

Se $n+1$ fosse divisibile per b, allora il nostro problema sarebbe risolto; il risultato cercato seguirebbe da quanto abbiamo testè dimostrato, in quanto analogo al caso $n = mb$. Nel caso $n+1$ non fosse divisibile per b, allora potremmo aggiungere un altro intero alla sequenza $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ e continuare in questo modo sin quando il numero non fosse divisibile per b. Questo completa la dimostrazione dell'asserzione iniziale.

La dimostrazione del problema segue immediatamente: se $b = p$ è un qualsiasi numero primo, allora p divide almeno tanti fattori di $(a_k - a_l)$ di quanti ne divide di $k - l$; la medesima asserzione sarà vera per $p^2, p^3, \ldots$.

Quindi, ogni primo p entra nel numeratore come fattore di un ordine grande almeno quanto l'ordine con cui entra come fattore nel denominatore; quindi, il denominatore di una frazione ottenuta moltiplicando tra di loro i numeri nella forma $\frac{a_k - a_l}{k - l}$ dividerà il numeratore, e quindi il prodotto sarà un intero.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Potremmo prendere l'ottantasette.

Nel senso che alla fine arriveremo al PM pubblicato su RM087.

Cominciamo dalle cose inutili. Abbiamo fatto un'indagine tra i cinque interessati a questa rubrica[14]; ci servivano tre termini suppergiù monosillabici, simpatici, simili e ragionevolmente anonimi per definire delle entità che non avevamo intenzione di nominare; seguono i risultati.

1. Miao, Bao, Ciao (3 voti);
2. Koff, Proff, Puff (un voto);
3. Gnip, Gnap, Gnop (un voto);
4. (Non risponde);
5. (Non risponde).

Queste entità possono essere messi in relazione tra di loro; la relazione che li riguarda la prendiamo in prestito da Lewis Carroll (complice Masolino D'Amico) e la definiamo come "lorpare". Bene, ora cominciamo con le regole. O meglio, gli assiomi:

1. Dati due Miao su un Bao, c'è un unico Ciao che li lorpa.
2. Dati due Ciao su un Bao, c'è un unico Miao che li lorpa.

Se vogliamo rendere le cose un po' più formali, supponiamo di avere tre Miao $\{a,b,c\}$ e tre Ciao $\{\alpha,\beta,\gamma\}$; indichiamo con $\otimes$ la relazione di "lorpaggio" (non abbiamo il coraggio di anglicizzare chiamandola "lorping") e ricordiamo che nei nostri assiomi sia i Miao che i Ciao sono su un Bao: a questo punto, possiamo definire:

$$
\begin{aligned}
\text{Bao} &:= \{a,b,c,\alpha,\beta,\gamma\} \\
\text{Miao} &:= \{a,b,c\} \\
\text{Ciao} &:= \{\alpha,\beta,\gamma\} \\
\text{Relazioni} &:= a\otimes\alpha, b\otimes\alpha, b\otimes\beta \\
&\quad\; c\otimes\beta, c\otimes\gamma, a\otimes\gamma \\
&\quad\; \alpha\otimes a, \alpha\otimes b, \beta\otimes b \\
&\quad\; \beta\otimes c, \gamma\otimes c, \gamma\otimes a.
\end{aligned}
$$

Non è complicato verificare le relazioni, ma è piuttosto noioso. Fidatevi. Non solo, ma se date un'occhiata un po' attenta agli assiomi, dovreste accorgervi che potete tranquillamente scambiare i Miao con i Ciao. E questa, è la filosofia di tutta la questione, soprattutto se considerate che sono cose diverse. Credo a questo punto cominciate a necessitare di un esempio.

Definiamo come Bao la superficie di una sfera; come Ciao prendiamo un qualsiasi cerchio massimo sulla sfera e l'azione del "lorpare" è semplicemente una relazione di incontro; dal secondo assioma, sappiamo che il Miao deve essere il posto dove si incontrano i due Ciao; come "posto" è un po' complicato, in quanto trattasi di due punti uno antipodale all'altro che vanno considerati come unica entità; la cosa però funziona decisamente bene.

[14] I tre redattori, Balto il cane e Virgilio il gatto. Quest'ultimo, ogni volta che viene salutato, miagola in risposta e la cosa nel seguito sarà molto importante.

Siccome nella definizione abbiamo usato il secondo assioma, potremmo chiederci cosa diventa nel nostro sistema il primo; effettuando le dovute sostituzioni ci vuole pochissimo ad accorgersene: significa semplicemente che se prendete due coppie di punti in cui in ogni coppia un punto sia antipodale all'altro, per quelle due coppie passa un solo cerchio massimo.

Ora, sembra chiaro che con questo esempio possiamo costruire un sistema decisamente complesso, e non dovreste avere problemi a sviluppare teoremi validi per le coppie antipodali e i cerchi massimi; l'unica restrizione che poniamo è che i teoremi devono essere veri anche per i nostri tre versacci ossia, in fin della fiera, che si possano sempre scambiare tra di loro i Miao e i Ciao.

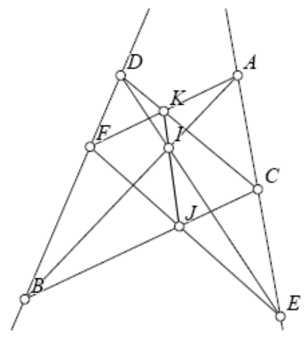
Se non vi piace lavorare con le sfere, esiste un modello più semplice; ha solo il piccolo problema che ad un certo punto è necessario un *escamotage*. Infatti potete tranquillamente considerare il piano euclideo come Bao, le rette come dei Ciao e i punti come dei Miao (o erano i Ciao? Beh, non importa); solo, dovete considerare un punto *improprio* all'infinito nel quale le rette parallele si incontrano.

"E perché dovremmo? Due rette parallele mica si incontrano". La prossima volta che dovete prendere il treno (prima che arrivi: altrimenti potreste perdere interesse alla questione) date uno sguardo ai binari; cosa fanno, all'orizzonte? Adesso possiamo dirvelo, posto che siate talmente pigri da non aver ancora controllato: il PM di RM_087 era quello sulla prospettiva, e il nostro punto all'infinito non è altro che il "punto di fuga" che tanto ha fatto dannare Rudy alle scuole medie.

Ora, se avete digerito la faccenda del punto all'infinito, potete digerire anche quest'altra: se tutte le rette parallele ad una retta data si incontrano in un unico punto e questo è valido per qualsiasi retta data, significa che ci sono *un mucchio* di punti all'infinito; se prendiamo tutti questi punti (e solo questi), otteniamo un aggeggio che definiamo come *linea all'infinito*.

Poco convinti? D'accordo con voi. Se preferite una dimostrazione più formale, prendete due Miao che si lorpino in un unico Ciao: avete esattamente la stessa cosa. Per definire la linea all'infinito, basta scambiare i concetti di "linea" e "punto" nella definizione data sopra. *Et voila*.

Questa possibilità di scambio tra gli oggetti, tecnicamente nota come *dualità*, se la considerate congiuntamente al concetto di punto all'infinito, è potentissima. Segue un esempio complicato; attenzione che, secondo la formulazione classica, è sbagliato un paio di volte: e, siccome anche semplificandolo è complicato, alleghiamo disegnino.



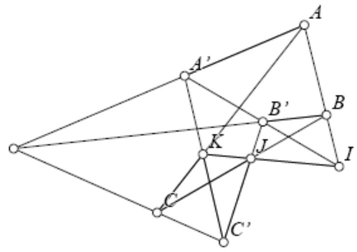
Il ***Teorema di Pappo*** afferma che:

> Dato un esagono $ABCDEF$ tale che i punti A, C, E giacciano su una linea e i punti B, D, F giacciano su un'altra linea, siano I l'intersezione di AB con DE, J quella di BC con EF e K quella di CD con FA; allora I punti I, J, K giacciono tutti sulla stessa retta[15].

Non dovreste avere soverchi problemi a dimostrarlo secondo i metodi classici; bene, il bello della Geometria Proiettiva è che avete *due teoremi al prezzo di uno!* Infatti, scambiando i punti con le linee ottenete il teorema *duale* del Teorema di Pappo: infatti il ***Teorema di Desargues*** afferma che:

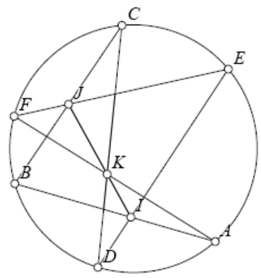
[15] Come dicevamo, la formulazione che abbiamo dato è sbagliata secondo Euclide: se vi capitano delle rette parallele da qualche parte siete fregati. Qui ci salvano i Miao e i Ciao all'infinito.

> Dati i due triangoli ΔABC e $\Delta A'B'C'$ per cui le linee AA', BB', CC' si incontrino in un unico punto, siano I, J, K le intersezioni rispettivamente di AB con $A'B'$, di BC con $B'C'$ e di CA con $C'A'$; allora, I, J, K giacciono sulla stessa linea.



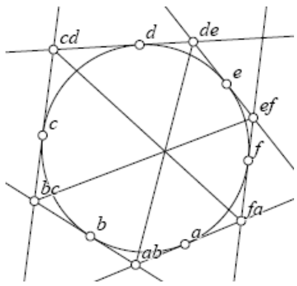
Adesso, dovete inventarvi un altro aggeggio tipo i Miao e i Ciao, o meglio, dovete inventarvene quattro: parliamo di cerchi. Questa volta cominciamo con il teorema che, nella fattispecie, è il ***Teorema di Pascal***:

> Sia $ABCDEF$ un esagono tale che i suoi vertici (distinti) giacciano su una circonferenza; siano I, J, K le intersezioni rispettivamente tra AB e DE, tra BC e DF e tra CD e FA; allora, I, J, K giacciono sulla stessa retta.



No, non ve lo dimostriamo; in compenso vi forniamo il suo duale, cambiando la notazione e utilizzando le lettere minuscole per le rette o, se preferite, per i Miao (visto che i Ciao erano indicati dalle lettere maiuscole, come abbiamo fatto nel Teorema di Pascal per i punti). Quello che otteniamo è il ***Teorema di Brianchon***:

> Sia $abcdef$ un esagono tale che le sue linee (distinte) siano tutte tangenti ad un cerchio; siano i, j, k le linee che connettono le intersezioni rispettivamente tra ab e de, tra bc e ef e tra cd e fa; allora i, j, k si incontrano in un unico punto.



Presumiamo che il passaggio dai Miao ai Ciao questa volta non vi abbia stupito più di tanto; la cosa interessante (che dovreste ricordare dalle leggi della prospettiva) è che molto raramente un cerchio viene rappresentato come cerchio; la deformazione prospettica può trasformarlo in un'ellisse, in una parabola o in un'iperbole. Qui di teoremi ve ne ritrovate *quattro* al prezzo di uno, o meglio otto; infatti potete tranquillamente estendere ciascuno dei due (per i quali ve la cavate con una dimostrazione unica e l'applicazione della dualità) a qualsiasi sezione conica. Ottimo per i pigri.

A qualcuno potrebbe però essere venuta voglia di farci dei conti, con un aggeggio del genere; e qui nascono i problemi; infatti, il piano cartesiano diventa scomodo, visto che la rappresentazione del "punto all'infinito" non è possibile; l'idea, qui, consiste nel rappresentare non con due coordinate il nostro punto, ma con *tre*; se scegliete un punto non troppo complicato potete dire che ha coordinate (a, b, c) se le sue coordinate cartesiane sono $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$. *Et voila.*

A questo punto o avete due obiezioni o non ci avete dato retta.

Tanto per cominciare, in questo modo un punto ha una quantità di rappresentazioni; non ci vuole molto a vedere che $(1,2,1)$ e $(3,6,3)$ rappresentano lo stesso punto, ma si scrivono in modi diversi.

Inoltre, farebbe piacere capire cosa rappresenta ad esempio il punto $(1,2,0)$.

La prima possiamo tranquillamente ignorarla; da quando avete imparato ad utilizzare le frazioni non dovreste avere problemi con rappresentazioni diverse dello stesso oggetto; la seconda, invece, è esattamente la soluzione al problema dell'"infinito cartesiano"; il nostro aggeggio, infatti, è esattamente un punto all'infinito; il quale (visto che è un punto "quasi" come tutti gli altri), ammette tra l'altro rappresentazioni multiple: infatti, i due punti $(x_1, y_1, 0)$ e $(x_2, y_2, 0)$ rappresentano lo stesso punto se $x_1 = \alpha x_2$ e $y_1 = \alpha y_2$; se anche solo una di queste relazioni non è valida, allora trattasi di diverso punto all'infinito (che, tutti assieme, dovrebbero esservi noti come "linea all'infinito"). Vorremmo a questo punto farvi notare che di punti inesistenti ne avete uno solo; $(0,0,0)$ non rappresenta nessun punto nel piano proiettivo, in quanto almeno una coordinata deve essere diversa da zero.

Ciao Ciao. Miao. Bao.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms