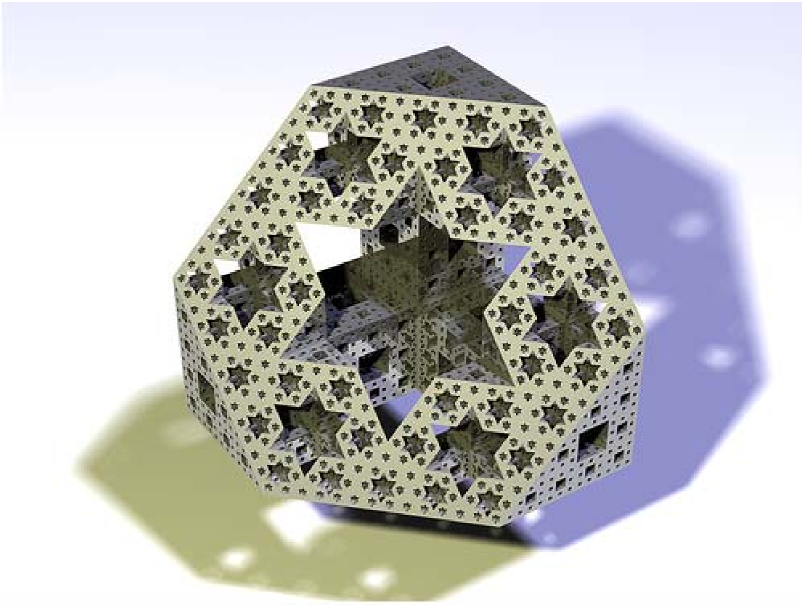
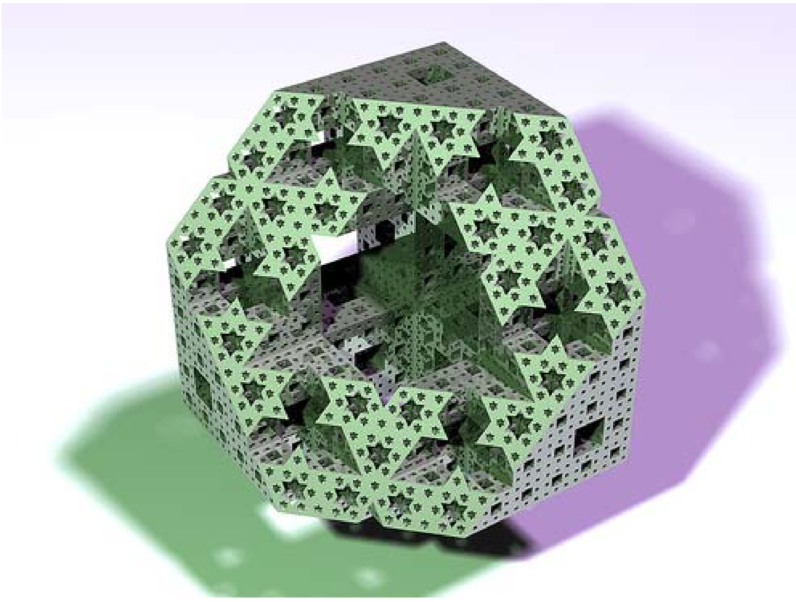
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 113 – Giugno 2008 – Anno Decimo





Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 112 ha diffuso 1830 copie e il 01/06/2008 per Google eravamo in 9'420 pagine.

Tutto quanto pubblicato dalla rivista è soggetto al diritto d'autore e in base a tale diritto *concediamo il permesso di libera pubblicazione e ridistribuzione* alle condizioni indicate alla pagina `diraut.html` del sito. In particolare, tutto quanto pubblicato sulla rivista è scritto compiendo ogni ragionevole sforzo per dare le informazioni corrette; tuttavia queste informazioni non vengono fornite con alcuna garanzia legale e quindi la loro ripubblicazione da parte vostra è sotto la vostra responsabilità. La pubblicazione delle informazioni da parte vostra costituisce accettazione di questa condizione.

Tagliare una spugna non è facile; se poi non è la vostra, ma trattasi della Spugna di Monger, la cosa può diventare decisamente complicata. ***Ed Pegg Jr.*** ci ha provato, usando piani diversi; vedete un paio di risultati in copertina.

1. Rappresentazioni e Decimali

<u>*rappresentàre*</u> = b. lat. **RE-AD-PRAESENTARE dal* class. lat. *composto dalla part. RE, che vale* di nuovo *e PRAESENS* – accusat. *PRAESENTEM* – presente *(v.q.voce), interposta la particella AD* a. *Prop. Render presenti cose passate e lontane: quindi Esporre in qualsiasi modo dinnanzi agli occhi del corpo o della mente figure o fatt. – Mostrare in sé la figura di altri; Tenere le veci di altri in assemblee, convegni, in commerci e simili.*
(da www.etimo.it – Vocabolario Etimologico Pianigiani)

... che, nel giro di pochi anni,
tutte le grandi costanti della fisica saranno
approssimativamente stimate,
e che l'unica occupazione che rimarrà
agli uomini di scienza sarà quella di arricchire
queste misure di qualche decimale...
[JCM, in forte contrasto con questa visione
e nel tentativo di controbatterla.
Scientific Papers 2,224, 1871]

«Il mondo è una mia rappresentazione»: ecco una verità valida per ogni essere vivente e pensante, benché l'uomo soltanto possa averne coscienza astratta e riflessa. E quando l'uomo abbia di fatto tale coscienza, lo spirito filosofico è entrato in lui. Allora, egli sa con certezza di non conoscere né il sole né la terra, ma soltanto un occhio che vede un sole, e una mano che sente il contatto d'una terra; egli sa che il mondo circostante non esiste se non come rappresentazione, cioè sempre e soltanto in relazione con un altro essere, con il percipiente, con lui medesimo.

Le righe con le quali inizia questo articolo (fatta eccezione per le usuali citazioni in alto a destra, che sono sempre presenti nei *compleanni* annunciandone i contenuti senza enunciarli, e che quindi non possono essere considerate vere e proprie righe d'articolo) rappresentano l'incipit di una delle maggiori opere della filosofia occidentale: *Die Welt als Wille und Vorstellung*, ovvero *Il Mondo come Volontà e Rappresentazione*, di Arthur Schopenhauer. Lungi dal volere (e potere) analizzare i contenuti della maggiore opera del filosofo di Danzica[1], ci limitiamo a notare come il titolo sia, oltre che programmatico, anche dotato di una fortissima capacità evocativa. Lo si incontra in genere al liceo, e poi è difficile dimenticarselo anche se, per quanto sia opera importantissima nel novero della filosofia tedesca, non le si riconosce certo la stessa influenza del *Discorso sul Metodo* di Cartesio, o delle tre *Critiche* kantiane. Eppure il titolo rimane ben impresso nelle meningi degli studenti; è probabile che la causa stia soprattutto nella bellezza romantica

[1] Una volta o l'altra qualche anima buona dovrebbe prendersi il compito di scrivere un libro sulle mutazioni dei nomi delle città da una lingua all'altra. Forse è solo l'abitudine a farci sembrare naturali gli accoppiamenti Londra-*London* o Parigi-*Paris*, ma è garantito che alcune città di lingue meno familiari lasciano davvero di stucco. Se, anche senza documentarsi in anticipo, è probabile che si riesca a riconoscere in *Köln* la nobile Colonia, è altrettanto possibile superare in autostrada *Mainz* senza accorgersi di aver appena abbandonato la celebre e antica Magonza. *Leipzig* è una Lipsia poco meno difficile da risolvere, ma solo gli esperti riescono a riconoscere a prima vista Danzica, quando superano il cartello stradale con su scritto *Gdańsk*. Certo questo dipende anche dal fatto che Gdańsk è polacco e non più tedesco (in teutonico la città suonerebbe più semplicemente *Danzig*), ma se il cartello fosse scritto in casciubo, *Gduńsk*, ogni speranza di riconoscimento sarebbe perduta, per i poveri parlatori di linguaggi neolatini. (No, non possiamo metterci a parlare del *casciubo*, adesso: ci vorrebbe una nota a piè di pagina dentro una nota a piè di pagina, e simili annidamenti e perversioni ricorsive sono troppo anche per una rivista di matematica ricreativa poco seria – e filoricorsiva – come questa).

delle parole che lo compongono – tre termini assoluti e decisi, familiari e allo stesso tempo insolitamente correlati – *Mondo, Volontà, Rappresentazione*. Anche la *Critica della Ragion Pura* di Kant orbita attorno a tre parole, ma sono tutte e tre forti e dure, e sembrano quasi voler spaventare il lettore: *Critica*, che quando è sostantivo come in questo caso è termine ancor più lugubre di quanto lo sia nella forma, già greve, di aggettivo; *Ragione*, che è parola bellissima e nobile, illuministica, umana e consolatrice, ma che richiama indubbiamente alla serietà, alla forma perfetta, al rigore analitico (specialmente quando è accoppiata alla precedente *Critica*, che ovviamente dichiara subito di voler guerreggiare con lei a colpi di *noumeni* e *appercezioni trascendentali*), e infine *Pura*, aggettivo spietato quanto altri mai, che rimuove dall'indagine ogni residua speranza di leggerezza, di levità: fare una *critica della ragione* potrebbe ancora lasciar sperare in una qualche allegria, magari in una lieve ironia come nell'*Elogio della Follia* di Erasmo da Rotterdam; ma l'apposizione di quell'aggettivo assolutistico toglie ogni speranza in tal senso. Varcate la copertina di questo libro – sembra annunciare il titolo – e preparate l'intelletto a scalate ardue e senza sosta[2]. A sua unica e parziale discolpa, va riconosciuto che anche la consorella *Critica della Ragion Pratica*, pur avendo l'ultimo aggettivo cambiato e assai edulcorato, non fa immaginare neanch'essa una lettura facile e rassicurante.

1 *Arthur Schopenhauer (molto giovane).*

Invece, la tripletta di Schopenhauer si modula su tre pilastri ben diversi. Il *Mondo*, parola universale e amica, forse il primo concetto davvero generale che riescono a comprendere anche i bambini piccolissimi. La *Volontà*, che possiede dentro di sé il fascino irrazionale degli eroi; è la più romantica delle doti, e ancora oggi i film e i romanzi tendono ad osannarla; tra uno sportivo dotatissimo e uno meno forte, ma animato da forza di volontà e solenne abnegazione, il pubblico sceglierà sempre quest'ultimo, e tra il genio che non fa fatica nel comprendere le cose più difficili e il giovane che ci riesce solo a prezzo di sovrumani sforzi di volontà e di sacrificio, non c'è dubbio alcuno su chi si guadagnerà la simpatia dell'uditorio. E così via... come se la volontà stessa non fosse anch'essa una dote naturale al pari delle altre, quasi come se fosse nobilitata da qualcosa di più schiettamente umano, rispetto alle altre doti.

Ma, anche se accompagnata da una concorrenza tanto temibile, è la parola *Rappresentazione* quella che maggiormente aderisce ai banchi di memoria di chi legge. Una rappresentazione sembra – o forse è più giusto dire *sembrava*, prima di Schopenhauer – essere sempre e comunque qualcosa di qualità inferiore alla cosa in sé: un conto è una *rosa*, tutt'altro è la *rappresentazione della rosa*. Eppure, non sappiamo bene se per una reiterata violenza nei confronti della nostra lingua o per qualche ardita connessione con l'idealismo tedesco, si trova spesso su libri e

[2] *"O voi che siete in piccioletta barca,*
desiderosi d'ascoltar, seguiti
dietro al mio legno che cantando varca,
tornate a riveder li vostri liti:
non vi mettete in pelago, ché forse,
perdendo me, rimarreste smarriti."
Anche Dante cercava di spaventare le menti minute, prime di lanciarsi in virtuosissimi intellettuali, ma quantomeno lo faceva in endecasillabi, e solo dopo un gran bel numero di pagine (è l'inizio del *Canto II* del *Paradiso*, quindi il settantanovesimo dei cento canti che compongono la Commedia)

giornali il verbo *rappresentare* usato come sinonimo del verbo *essere*. Se non siete del tutto convinti, potete verificare subito la vostra abitudine (o il vostro senso dello scandalo) di fronte a questa selvaggia sostituzione verbale: se siete ormai fatalmente abituati a sentir dire che "*la tal cosa* <u>*rappresenta*</u> *questo o quello*" anche quando si intende solo dire che "*la tal cosa* <u>*è*</u> *questo o quello*", allora è probabile che non abbiate notato, all'inizio di questo pezzo, che abbiamo proditoriamente scritto "*Le righe (…)* <u>*rappresentano*</u> *l'incipit di una delle maggiori opere…*". Se invece avete letto la frase avvertendo un leggero senso di fastidio, è probabile che la definitiva assimilazione della realtà alla sua rappresentazione non sia del tutto consolidata, nella vostra mente. E questo è un bene, con buona pace di Schopenhauer.

Come sempre, tornare al significato originale delle parole può essere d'aiuto. L'etimologia di *rappresentare* è ragionevolmente evidente, per chi ha la fortuna di parlare la lingua che è la maggiore erede del latino: viene da "*re-ad-presentare*", un verbo e due prefissi, e ognuna delle tre parti ha un ruolo fondamentale. *Presentare* vuol dire *rendere presente*; *re-* è il prefisso iterativo, quindi palesa che la presentazione in oggetto non è inedita, ma riproposta; e infine *-ad-* introduce un complimento di termine, ponendo in evidenza che quel "rendere nuovamente presente" è azione esplicitamente destinata a qualcuno: c'è insomma la presunzione di un pubblico. In conclusione, la rappresentazione è l'atto – ragionevolmente complesso – di far rivivere al presente una storia, un'azione a beneficio di qualcuno. In questi termini, la *rappresentazione teatrale* è senza dubbio il miglior esempio del significato della parola: un gruppo di persone (la compagnia teatrale) si ingegna e si adopera per riprodurre e far rivivere una storia ad un altro gruppo di persone (il pubblico in sala). In maniera meno efficace ma comunque comprensibile, un ambasciatore è in grado di rappresentare un'intera nazione: con la sua stessa persona fisica *rende presente* la sua patria al governo della nazione ospite durante gli incontri diplomatici. E così via, in un lento progredire di significati, attraverso i *rappresentanti legali* delle società, fino ai *rappresentanti* più immediati e diretti, i commessi viaggiatori, che rendono presente la loro ditta (solitamente una fabbrica di spazzole, nell'immaginario collettivo), di porta in porta, al pubblico delle casalinghe.

La *rappresentazione* del *mondo* di Schopenhauer è meno immediata, ma in fondo leggibile secondo la stessa chiave: se la messa in scena del *Giulio Cesare* di Shakespeare può essere vista come la *ri-presentazione* di un evento reale (l'assassinio di Cesare e quel che ne seguì) fatta secondo i dettami del genio inglese e per mezzo di una squadra di professionisti (gli attori e i tecnici del Globe, ad esempio), il *mondo* secondo il filosofo tedesco non è altro che la *ri-presentazione* di qualcosa fatta a nostro beneficio da quel grande regista che è la nostra mente. La differenza (e difficoltà) maggiore nel parallelo con il *Giulio Cesare* di Shakespeare sta nel fatto che Giulio Cesare lo immaginiamo innanzitutto come uomo reale, esistito, e dotato di un'esistenza indipendente dalla rappresentazione del Globe, mentre ciò che il nostro cervello ci *rappresenta* come *mondo* non è altrettanto conosciuto ed evidente. Volendo appellarci al significato della parola *rappresentazione*, verrebbe insomma da chiedersi "Se il mondo come rappresentazione è una nuova presentazione di *qualcosa*, qual è la presentazione originale? Qual è il *qualcosa*, insomma?". Solo che fare una domanda del genere espone almeno a due rischi macroscopici: la prima è nascosta nelle pieghe della linguistica: tutti i discorsi fatti sul significato di *Rappresentazione* magari non valgono una cicca se applicati alla parola originale tedesca *Vorstellung*, dell'etimologia della quale confessiamo di non avere neanche la più pallida idea. Il secondo rischio, ben maggiore, è che tutto questo ardito dissertare filosofico mostri tutte le sue debolezze agli esperti di filosofia, e nel contempo annoi mortalmente gli appassionati di matematica ricreativa, che solitamente si divertono molto di più a discutere di verità (con la minuscola) con le tribù dei Bugiardi e dei Veritieri che a parlare delle grandi Verità (con la maiuscola) provenienti dalla Dialettica.

Però gli appassionati di matematica probabilmente si saranno interrogati talvolta sulla natura dei numeri, accorgendosi in breve che gli interrogativi dei filosofi acquistano rapidamente significato, se riconvertiti nell'indagine della quintessenza numerica. A voler fare i disfattisti, si potrebbero definire i matematici come coloro che si occupano di entità intangibili, infinite in diversi ordini di infinitezza, non chiaramente definite, di diversa natura e in ultima analisi inconoscibili[3]. Il *numero* sembra inizialmente solo una sorta di attributo, una proprietà di alcuni gruppi di oggetti (tre mucche, sette colline, dodici teste del mostro), ma poi assume identità indipendente: frazionaria, irrazionale, trascendente, complessa immaginaria, surreale[4]. Sempre pronto ad andare all'infinito, e in infiniti di diverso ordine e grado, numerabili o non numerabili. Nessuna mucca ha *pi greco* zampe, ma *pi greco* come numero esiste, eccome. Ed esiste anche a prescindere dai cerchi disegnati sulla sabbia[5].

Purtroppo, la ricerca di cosa *non siano* i numeri aiuta poco nell'impresa maggiore, quella cioè di cercare di capire cosa siano. Anche se il numero *3* appare ben descritto dal suo carattere stampato in questa pagina, questo non significa che sia maneggevole e chiaro. Anche scrivendo più estesamente la parola *tre* arriviamo ad una facile descrizione del numero, e scegliere tra l'una e l'altra sembra essere solo questione di gusti. In realtà questo vale solo per chi parla italiano: a fior di matematici nati fuori dalla nostra penisola i segni grafici corrispondenti alla parola *tre* non dicono un accidenti. Se queste precisazioni possono sembrare solo ingenui sofismi, pensate allora al numero corrispondente ai segni grafici *1/3*. Qui la cosa è già più complessa, perché il numero descritto è meno familiare. Innanzitutto, quei tre caratteri rappresentano un *numero* o una *formula*? Dicono o non dicono la stessa identica cosa di *un terzo* e di *0,33333…*?

Siamo in genere abituati a trattare i numeri e le loro *rappresentazioni* senza soffermarci troppo sulle implicazioni (e sulle limitazioni) che queste comportano. Possiamo convenire che la frase "*un terzo*" altro non sia che la denominazione, in lingua italiana, dell'espressione *1/3*. Ma quest'ultima è un numero o no? Uno studente delle medie (e probabilmente anche dei primi anni delle superiori) tende di solito a "risolvere" ulteriormente l'espressione, perché la presenza del simbolo di divisione suggerisce la presenza di un'operazione, e quindi la necessità di operare ancora, appunto; e si sentirà in genere più soddisfatto se potrà pestare i tasti sulla calcolatrice e scrivere infine il numero in forma decimale. Del resto, i classici esercizi nei quali occorre risolvere lunghe espressioni algebriche altro non sono che successive semplificazioni di oggetti che comunque rimangono sempre uguali a sé stessi, dal punto di vista *ontologico*. Scrivere 6x7+8 è esattamente la stessa cosa che scrivere 50, abitudine e maneggevolezza a parte, nel senso che entrambe le grafie rimandano al medesimo oggetto. Ciò non di meno, se è davvero la maneggevolezza a contare, allora è quantomeno comprensibile che 1/3 sia preferibile a 0,3…, vista la scarsa maneggevolezza che in questo caso ha la rappresentazione decimale: anche perché bisogna ricordare che i puntini di sospensione[6] fanno parte integrante del numero in questione, ma non è mai molto chiaro come applicare le normali regole di calcolo (addizione, moltiplicazione, divisione) ai quei puntini sfuggenti.

Il punto è che i numeri, in maniera forse ancora più evidente del *mondo* di Schopenhauer, sono cose diverse dalle loro *rappresentazioni*, anche se noi siamo abituati ad usare quasi

[3] *La matematica può essere definita la materia in cui noi non sappiamo mai di che cosa stiamo parlando né se quello che stiamo dicendo è vero* (Bertrand Russell).

[4] Solo ad elencare i nomi delle varie classi numeriche, si mostra la sublime evanescenza degli oggetti. Neanche Tolkien avrebbe avuto il coraggio di mettere in fila, in qualche suo libro, gli aggettivi che rimandano a questa nota.

[5] Pensare a *pi greco* come numero indissolubilmente legato al rapporto tra circonferenza e diametro del cerchio è un po' come pensare a 4 come indissolubilmente legato alle zampe delle mucche. Nessuno può negare che *pi greco* sia il rapporto tra circonferenza e diametro del cerchio, ma è ben lungi dall'essere *solo* quello. Anche perché altrimenti – a voler essere obiettivi – definire come *rapporto* (ratio) quello che è il numero *irrazionale* per eccellenza (a pari merito con radice di 2), sarebbe una bella contraddizione.

[6] … o la sopralineatura della cifra ripetuta all'infinito, nel caso che abbiate voglia di usare eqeditor o simili.

esclusivamente quest'ultime. In una certa misura, *tre mucche*, la parola *tre*, il simbolo *3*, l'espressione $9^{1/2}$ o un disegno come questo ││││ rincorrono sempre lo stesso concetto, per raggiungerlo sempre soltanto in parte; questa limitazione è propria del "*rappresentare* senza *essere*", e in questo senso i numeri sono splendidi soggetti per gli estimatori della filosofia di Schopenhauer.

È solo la familiarità, a far preferire una forma di rappresentazione numerica piuttosto che un'altra? Probabilmente ci sono molti altri fattori che contano: la maneggevolezza, la praticità, l'uso. Se ci abituiamo a scrivere 87 invece che LXXXVII, guadagneremo in velocità nei calcoli. Se abbiamo a che fare con grandi quantità misurate in piccole unità di misura, un po' di esercizio con la notazione esponenziale ci farà un gran bene. Ma dovrebbe rimanere sempre ben chiaro che il *simbolo d'una cosa* non è mai la *cosa* in sé. Forse è per questo che sono stati proprio i matematici i primi a cercare di svincolarsi dal calcolo numerico, concentrandosi soprattutto sulle proprietà: mentre i fisici e gli ingegneri devono sempre stare attenti in modo particolare al danzare delle cifre nei loro strumenti. È vero che in questo caso specifico i numeri non sono più quelle entità sfuggenti che sono inseguite con difficoltà dalle definizioni filosofiche, quanto piuttosto onesti registratori di *misure*, che sono una cosa ben diversa; ma ci sono stati momenti, nella storia, in cui i trionfi della matematica e della fisica, alleate e invincibili, sembravano promettere una comprensione totale, assoluta e matematica di ogni aspetto della natura, e in quei momenti numero e misura rischiavano di confondersi. Era un periodo d'esaltazione sublime, per gli scienziati, e la paura maggiore che molti di essi paventavano era proprio la fine della ricerca, l'esaurirsi dei misteri. Una volta tolto ogni mistero al mondo, tramite la scienza ovunque trionfante, cosa altro era possibile fare, per uno scienziato?

Questo periodo d'oro per la matematica e la fisica si ebbe verso la fine dell'Ottocento: la scienza fondata da Galileo su basi matematiche e lanciata da Newton verso sconvolgenti e inaspettate conoscenze, aveva collezionato in due secoli un novero incredibile di scoperte. Le leggi dei cieli, degli astri, già da tempo sono state riconosciute come le stesse che muovono i corpi sulla Terra: la gravitazione universale di Newton si è evoluta nei grandi costrutti della meccanica analitica, dove ogni aspetto della dinamica sembra essere matematicamente controllato. Le altre grandi branche della fisica vengono domate e ricondotte pian piano alla precisione analitica: i gas hanno una loro teoria cinetica, il magnetismo sta per rivelare ogni suo segreto, come l'elettricità, l'ottica, la termodinamica. Come se ci fosse la regia di un grande sceneggiatore positivista, in pochi anni i lavori degli scienziati del Settecento e dell'Ottocento sembra coagularsi e dare tutti insieme i suoi frutti: gli strumenti matematici della meccanica possono essere usati per lo studio dei gas e di diversi aspetti termodinamici, riunendo così fenomeni che sembrano molto diversi tra loro: ma soprattutto la superba unificazione di elettricità, magnetismo e ottica in una sola famiglia di fenomeni fisici fa credere agli scienziati che ogni aspetto della natura sia conoscibile. Come si diceva a quel tempo, ai fisici delle nuove generazioni sarebbe toccato solo l'ingrato compito "*di arricchire le misure di qualche decimale*".

Era una visione trionfale, e un po' triste al tempo stesso. Si immaginava l'universo come regolato da alcune costanti universali, coniugate da alcune leggi fondamentali, fisse e inamovibili nel tempo e nello spazio. Gli scienziati di fine Ottocento avevano già compreso tutti i principi fondamentali, e non restava altro che affinare le misure: un numero – certo immaginato in rappresentazione decimale – conteneva i segreti della natura, e un lento e noioso spogliarello lo avrebbe rivelato, anno dopo anno, secolo dopo secolo, con sempre maggiore precisione. Ma senza nessuna novità concettuale o teorica.

Chi avrebbe mai scelto di fare ancora il fisico, in questo scenario? Chi si sarebbe dedicato ad anni di studi faticosi, solo per affinare la conoscenza dell'universo di qualche decimale, senza nessuna scoperta reale? Per fortuna dei fisici e della fisica, quest'idea della "ricerca dei decimali" doveva dimostrarsi clamorosamente sbagliata. Anzi, fu proprio quella ricerca, quel tentativo di ricondurre piccole anomalie nel grande oceano della teoria classica a mettere in crisi tutta la fisica ottocentesca. Una certa difficoltà nel rilevare l'etere, certo dovuta alla scarsa precisione degli strumenti, avrebbe aperto le porte alla Relatività ristretta. Una lieve anomalia nel moto del perielio di Mercurio –

probabilmente a causa di misure affrettate, che sarebbero andate a posto non appena qualcuno si sarebbe preso cura dei giusti *decimali* – si sarebbe risolta solo con la Relatività Generale. Uno strano comportamento nel grafico della radiazione da corpo nero, un'anomalia teorica dovuta probabilmente ad un errore seminato da qualche parte, avrebbe aperto la porta a Planck e alla devastazione quantistica.
Quel momento di massima gloria era molto vicino ad una serie di rivoluzioni di portata storica, vaste quanto tutta la fisica allora nota e destinate a durare per secoli. Tanto rumorosa fu la caduta delle convinzioni della fisica classica che i nomi dei grandi rivoluzionari (Einstein, Planck, Bohr, e altri) sono noti anche ai non addetti ai lavori, mentre meno noto è il nome di chi aveva compiuto l'opera – non meno importante, non meno clamorosa – di riunire tutta la conoscenza della sua epoca in poche equazioni. E questo anche se fu proprio quest'uomo il maggior avversario dell'idea che alla fisica, dopo la sua opera, non restasse altro che ricercare decimali.

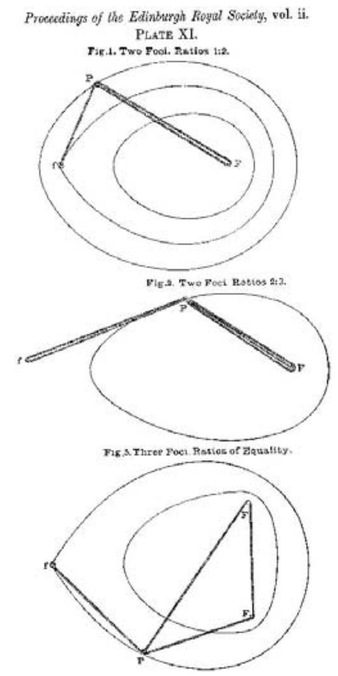

2 *James Clerk Maxwell.*

James Clerk Maxwell nacque il 18 Giugno 1831 nella capitale di Scozia, Edimburgo, e dagli scozzesi è tuttora considerato come il figlio più importante e rappresentativo della loro patria. Viene descritto come bambino curioso e attratto da meccanismi (serrature, porte, chiavi) fin da quando non aveva ancora compiuto i tre anni. I suoi genitori erano molto religiosi, e trasmisero la loro fede a James, per il quale fu un elemento portante durante tutta la sua vita[7]. Perse la madre quando era ancora molto piccolo, appena otto anni, e questo cambiò un po' i piani che i genitori avevano in merito alla sua educazione: l'idea iniziale era infatti quella di educarlo in casa fino ai tredici anni, per poi entrare direttamente all'Università di Edimburgo, ma nel 1841 entrò alla *Edinburgh Academy*[8]. Qui conobbe quello che rimase per sempre il suo miglior amico, collaboratore e collega, Peter G. Tait, che a quel tempo era anche lui un saggio decenne; ciò nonostante, frequentava la classe inferiore a quella di Maxwell.

[7] Sembra che quando arrivò a Cambridge si informò subito sugli orari delle funzioni religiose. Venuto a sapere che ce ne era una alle sei di mattina, rimuginò un po' per poi concludere "Sì, penso di riuscire a restare sveglio fino a quell'ora…".

[8] Se può suonare strana l'idea che un ragazzo di 13 anni possa entrare all'Università, è bene rammentare che le università dell'inizio Ottocento non erano esattamente le stesse istituzioni di oggi. D'altro canto, può suonare altrettanto strano (anzi forse di più) sentirsi dire che, non potendo entrare in una università perché troppo giovane (nel 1841 Maxwell ha appena dieci anni), il nostro entra allora in una Accademia. Il fatto è che la Edinburgh Academy è una scuola indipendente scozzese, con classi di ogni ordine e grado, anche se, in via esemplificativa, si può immaginare come un liceo-ginnasio. Fondata nel 1822, esiste ancora.

Non ancor quindicenne, nel 1846, Maxwell scrisse una memoria sugli ovali[9]. Vi introduceva una generalizzazione della definizione di ellisse, e prendeva in considerazione anche figure con più di due fuochi. Per quanto non del tutto nuova (anche se Maxwell non lo sapeva, alcune parti trattata erano state affrontate da Cartesio) era stupefacente, per un ragazzo di quattordici anni: venne letta alla Royal Society di Edimburgo. A sedici anni, infine, entrò davvero all'Università: aveva sempre vicino l'amico Tait, e seguì i corsi di logica e di quella che ancora veniva chiamata *filosofia naturale*. Seppur distinguendosi sopra ogni altro allievo, lasciò l'Università di Edimburgo per trasferirsi al Trinity College di Cambridge. Qui divenne discepolo e collaboratore di William Thomson, ovvero Lord Kelvin, e ottenne la laurea (in matematica) nel 1854; restò a Cambridge, come insegnante, fino al 1856; successivamente suo padre si ammalò, e Maxwell provò a riavvicinarsi alla madrepatria scozzese per stargli vicino e amministrare le proprietà di famiglia. Suo padre morì pochissimi giorni prima che James venisse a sapere di aver finalmente ottenuto una cattedra ad Aberdeen.



3 *Gli ovali di Maxwell*

4 *Gli anelli di Saturno*

Nel 1858, Maxwell si sposò con Katherine Mary Dewar, figlia del preside della sua università: il suocero però non poteva certo essere accusato di nepotismo: quando, pochi anni dopo, la sua università di fuse con un'altra e qualche professore dovette essere licenziato, a James toccò cercarsi un nuovo lavoro, visto che era tra i professori giovani che venivano sacrificati in casi come questo. Ma Maxwell era nel frattempo diventato un'autorità scientifica: aveva già scritto due pubblicazioni fondamentali sulle linee di forza di Faraday nel 1855, aveva vinto il Premio Adams con una memoria sulla stabilità degli anelli di Saturno[10] nel 1957, aveva pubblicato uno studio fondamentale sulla natura dei colori realizzando – come effetto collaterale alla sua sperimentazione – anche la prima fotografia a colori della storia[11]. Era abbastanza sicuro di ottenere la cattedra di fisica dell'Università della sua città natale, quando invece a vincerla fu proprio il suo vecchio amico Tait. Sembra che Maxwell non vinse la cattedra perché ritenuto non troppo abile nell'insegnamento ad allievi ancora privi di basi, e forse questo poteva essere vero, anche se ci sono testimonianze di una sua elevata capacità di esposizione verso uditori non digiuni di fisica.

Così, nel 1860 James Clerk Maxwell giunse al King's College di Londra, dove visse gli anni più produttivi della sua carriera, per quanto la sua carriera fosse già sensazionale. Qui riuscì a completare la sua grandiosa opera di unificazione tra l'elettricità, il magnetismo e, soprattutto, l'ottica. Nel 1862 ebbe la prova sperimentale che la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche era sostanzialmente pari alla velocità della luce, arrivando a dire che *"è difficile evitare la conclusione che la luce consista nelle*

[9] *"On the description of oval curves, and those having a plurality of foci"*, letta il 6 Aprile 1846.

[10] Maxwell aveva affrontato il problema già da studente sedicenne, insieme a Tait: lo riprese e lo risolse, mostrando per primo che la stabilità degli anelli poteva sussistere solo se questi erano composti da moltissime piccole particelle solide.

[11] Fedele alla tradizione e alla sua patria, per soggetto della foto, ottenuta con il sistema dei tre filtri di colore diverso, usò un *tartan* scozzeze.

oscillazioni trasversali del medesimo mezzo che è la causa dei fenomeni elettromagnetici…".

Qualche anno dopo, nel 1873, tutto il corpus della teoria fisica più importante dei suoi tempi fu da lui riassunta in solo quattro, fondamentali equazioni: le *Equazioni di Maxwell*., indissolubilmente legate al suo nome. Ma questo non significa che tra il 1862 e il 1873 egli non abbia fatto altro che sistemare la teoria dell'elettromagnetismo (anche se ogni fisico sarebbe disposto a dedicare volentieri tre o quattro vite, in una impresa del genere); nel frattempo Maxwell scrisse la sua Teoria Cinetica dei Gas, tra l'altro introducendo per la prima volta il concetto di *grandezza statistica*, in un periodo in cui la certezza del determinismo trionfava su tutti i fronti; sintetizzò in altre *quattro relazioni* fondamentali[12] il comportamento dei potenziali termodinamici, e verso la fine della sua carriera risistemò il Cavendish Laboratory di Cambridge.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

5 *Le famose equazioni di Maxwell*

$$\begin{aligned} dU &= TdS - pdV \\ dH &= TdS + Vdp \\ dF &= -SdT - pdV \\ dG &= -SdT + Vdp \end{aligned}$$

6 *Le relazioni fondamentali sulla teoria dei gas*

Ritornava in Scozia, nella tenuta di Glenlair che era sempre stato il suo vero rifugio, ogni volta che poteva. Nel Maggio del 1879 vi tornò per trascorrevi l'estate: sia lui che la moglie non erano in buone condizioni di salute. Dopo l'estate si decise a tornare nuovamente a Cambridge, ma le sue condizioni non erano affatto migliorate. Aveva un cancro allo stomaco: morì nell'autunno di quello stesso anno, il 5 Novembre. Aveva appena quarantotto anni.

James Clerk Maxwell, fisico matematico scozzese. In merito alle sue origini geografiche, non c'è davvero molto da aggiungere: i sondaggi che si tengono in Scozia come nel resto del mondo mostrano che per i suoi compatrioti non c'è nessuno scozzese più nobile e importante di lui. Nessun politico, statista, artista, regge il passo di Maxwell nel tenere alta la bandiera con la croce di Sant'Andrea. Come fisico, è semplicemente uno dei più grandi mai esistiti: forse meno noto al grande pubblico di Einstein, forse oscurato nella fama dal grande cugino inglese, Newton, forse senza l'aura del padre fondatore, Galileo: ma senza dubbio nella medesima loro categoria, quella dei grandissimi; è verosimile che, richiesti di indicare i maggiori cinque fisici della storia, gli addetti ai lavori pongano quasi tutti James Clerk Maxwell in quel numero ristrettissimo. È il coronatore della fisica classica, e forse in questa sua forza suprema risiede anche la sua debolezza di immagine: per quanto la visione sia riduttiva, la fisica classica è spesso narrata come in contrasto, in guerra con la fisica moderna, ma questo semplicemente non è vero. Ed è proprio grazie al lavoro di Maxwell che la visione generale della fisica ebbe modo di riconoscere i suoi limiti. Non è un caso che, tra i maggiori estimatori di Maxwell ci fossero proprio i padri della fisica moderna, da Einstein fino a Feynman.

Come matematico, riuscì in un'opera che non sappiamo ancora se potrà mai essere ripetuta con pari dirompenza. Tre edifici mastodontici, grondanti di centinaia, forse

[12] Croce e delizia dei corsi di termodinamica, riassumono sinteticamente i comportamenti di grandezze più o meno familiari come pressione, volume, temperatura, entropia (P, V, T, S) e di grandezze decisamente più esotiche, come l'energia libera di Hemholtz, l'entalpia, l'energia libera di Gibbs e l'energia interna (H, F, G,U). Un celebre artificio mnemonico per ricostruire le quattro relazioni di Maxwell della termodinamica in base alle otto variabili che vi concorrono consiste nel notare la somiglianza formale delle espressioni, mettere in circolo antiorario le iniziale della frase "*Good Physicists Have Studied Under Very Fine Teachers*" e ricostruire le espressioni facendo attenzioni ai segni. Difficile da spiegare per bene senza un disegno, ma per una nota a piè di pagina non è il caso di dire di più. Anche perché altrimenti le note finiscono con divorare il testo stesso: ad esempio sarebbe un vero peccato non ricordare da qualche parte che Maxwell si firmava talvolta col rapporto differenziale dp/dt, poiché in termodinamica vale la relazione dp/dt=JCM, e JCM erano le sue iniziali.

migliaia di effetti fisici fondamentali e diversi, furono da lui coagulati in quattro equazioni alle derivate parziali. I contemporanei devono probabilmente essere rimasti senza parole, increduli, nel vedere una sintesi tanto potente ed efficace: ed era una sintesi essenzialmente matematica. Una volta affermò che

> *Si può dire che i numeri governano l'intero mondo della quantità, e le quattro regole dell'aritmetica possono considerarsi l'equipaggiamento completo del matematico*[13]

Non sappiamo se tale equipaggiamento completo sia davvero sufficiente, per le persone normali. È certo che quel che riuscì a farci lui, con quel semplice equipaggiamento, ha ancora oggi dell'incredibile.

[13] La citazione è bella nella sua semplicità, che mostra la profonda e diretta relazione che JCM vedeva tra matematica, numeri, quantità e misura. Proprio per questo, preferiamo riportarla anche in lingua originale, visto che non ci fidiamo abbastanza delle nostre traduzioni: "*The numbers may be said to rule the whole world of quantity, and the four rules of arithmetic may be regarded as the complete equipment of the mathematician.*"

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Ridde**	**Piotr R. Silverbrahms**
Senza titolo, per protesta			
Cessato allarme			

2.1 Senza titolo, per protesta

…il che, considerato che è scritto al posto del titolo, lo trasforma in un titolo.

Riteniamo abbiate tutti presente il concetto di "Barzelletta sui Carabinieri". A prescindere dal fatto che il miglior narratore di barzellette di questo tipo che Rudy abbia mai conosciuto era Maresciallo della Benemerita, la cosa non è mai stata molto simpatica all'Arma. Ma non è questo il problema.

Il problema sorge quando dovete raccontare a qualcuno non italiano una barzelletta sui Carabinieri: a meno di premesse chilometriche che rovinano comunque lo spirito della barzelletta, farebbe comodo una tabellina di equivalenza per l'intero globo terrestre. La nostra limitata esperienza nel ramo (un prozio di Rudy era giustappunto Maresciallo dell'Arma, non quello sopra, un altro) ci permette di stabilire alcune corrispondenze; se volete contribuire, liberissimi di farlo:

- In Italia i personaggi sono Carabinieri.
- Presso i Carabinieri viene utilizzata la Polizia[14].
- In Svizzera si ride di "altri cantoni", i Bernesi degli Zurighesi e viceversa.
- In Inghilterra se la prendono con gli Irlandesi[15].
- In Spagna si inseriscono i Portoghesi.
- In Portogallo ridono sugli Spagnoli[16].
- Negli Stati Uniti tocca ai Polacchi.

E qui c'è il problema, quello vero. Infatti dagli USA ci hanno spiegato un gioco con le carte non esattamente geniale (non serve neanche sapere il valore delle carte), e noi

[14] Alcune barzellette sono però irreversibili: "La Polizia vuole scrivere sulle nuove auto 'INDICE'." "Perché?" "Perché hanno visto che gli americani sopra le loro hanno scritto 'POLICE'."

[15] "A un irlandese hanno regalato degli sci d'acqua, e da allora non l'ha più visto nessuno. Sta ancora cercando un lago in discesa".

[16] Per gli amanti della Teoria dei Grafi: vorremmo attrarre la vostra attenzione su questa (a quanto ci risulta rara) relazione commutativa.

supponiamo che il nome di "Solitario Polacco" nasca da questa caratteristica. Quindi, ci rifiutiamo di titolare. Cominciamo con la versione semplice.

Prendete sei carte, e mettetele in una pila unica. Dividete quindi questa pila in tante pile quante volete, con ogni pila contenente un numero arbitrario di carte. Quindi, prendete una carta da ogni pila e piazzate le carte recuperate in questo modo in una nuova pila, a fianco delle altre. Ricominciate prendendo di nuovo una carta da ogni pila (inclusa quella nuova) e avanti così, sin quando la (k+1)-esima operazione vi dà un risultato identico alla k-esima.

Siamo d'accordo, non è un gran ché, come gioco. Appunto per questo non gli diamo un nome.

Quello che ci chiediamo, però, è: esiste un maggiorante al valore di k_6? O, se preferite, riesce sempre il solitario con sei carte? E, in caso positivo, al massimo quanti giri devo fare? Se vi pare semplice, potreste provare a calcolare k_{15} (con quindici carte), oppure cercare di capire quanto valga in genere k_n con n carte iniziali, o se esistano dei valori di n per cui k non sia definito.

Noi l'abbiamo trovato piuttosto complesso, almeno il caso generale. Come si dice "Auguri…" in polacco?

2.2 Cessato Allarme

Con l'avanzare della Primavera, si riducono le attività inerenti le pulizie omonime; col che, i Validi Assistenti possono finalmente tornare a giocare giochi giocabili.

Purtroppo (per voi: Rudy si ritrova con un mucchio di roba da fare), con l'avanzare della Primavera aumentano anche le gite fuori porta; il che significa che i suddetti VAdLdRM sono costretti a trovare giochi decisamente lunghi ma che richiedano scarse attrezzature, in quanto devono essere praticabili nel sedile dietro della macchina.

Ora, tornando a Rudy, lui è sempre stato un entusiasta giocatore di *Ramino*; non sappiamo quanto vi sia noto il gioco, quindi ci limitiamo a dire che somiglia alla "Scala Quaranta" (chiusura in mano, ammessi resti di Asso, Due e Tre, presa dall'inizio, nessun obbligo di minimo per scendere. Se servono altri dettagli chiedete; è velocissimo e molto carino). Comunque, siccome in famiglia sono preferiti altri giochi di carte con lo stesso "doppio mazzo", è raro che ci si muova senza un pacco di 108 (due da cinquantadue più i quattro jolly) carte; e i Nostri Validi Assistenti hanno improvvisato un interessante gioco sul sedile dietro, dovendo far passare il tempo con *moooolta* calma.

Tanto per cominciare hanno tolto i Jolly e separato i due mazzi; quindi, ciascuno si è preso un mazzo da cinquantadue e lo ha accuratamente mescolato. Dopodichè, hanno cominciato a tirare una carta a testa, con l'accordo che se allo stesso tiro fossero uscite due carte uguali (in seme e valore) avrebbe vinto Fred e il gioco sarebbe finito. Se invece, a fine mazzo, non si fosse registrata nessuna vincita da parte di Fred, avrebbe vinto Alberto.

Contato che il viaggio è lungo (e quindi hanno giocato un mucchio di partite), secondo voi, come è andata a finire?

3. Bungee Jumpers

Provate che, se m e n sono numeri naturali qualsiasi, nessuna delle seguenti sequenze può essere un intero:

1. $M = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$;

2. $N = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+m}$;
3. $K = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1}$.

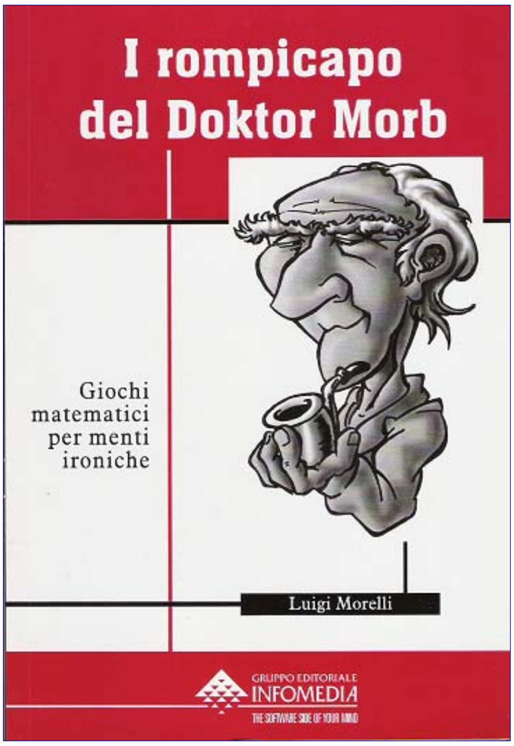
Il consiglio è di non prendere sottogamba la prima: è complicata quanto la seconda, e la terza è solo un po' più complicata. Ma la regola generale ve la ricavate voi…

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

Ci sembra quasi di sentirvi: ci prendete in giro perché questa rubrica, dichiarata come suddita della più fluida e imprevedibile diacronicità, è invece noiosamente e infallibilmente presente in rivista già da un trimestre. Beh, frenate le lingue, o malelingue: i libri da recensire che avevamo pronti in canna sono terminati, adesso, e a meno non succeda qualcosa d'imprevisto, RM di Luglio uscirà privo di questa EUNBET. In quel caso, naturalmente, dovrete sentirvi in colpa per non scrivere abbastanza, tradurre abbastanza, sceneggiare abbastanza, insomma per non propagare abbastanza matematica. Vergogna.

4.1 I Rompicapo del Doktor Morb



Nell'Ottobre 2005, sul numero 133 di DEV, nota rivista di informatica e non solo, comparve una recensione di RM. Era una recensione davvero molto lusinghiera, anzi, probabilmente il termine *lusinghiera* è ancora riduttivo. Oltre a ciò era anche la prima recensione di RM ad apparire su una rivista cartacea (a parte la citazione nelle *Internet Yellow Pages*), e vedere il nome *Rudi Mathematici* stampato su una pagina acquistabile in edicola ci fece sentire molto importanti. L'autore di quella recensione era Luigi Morelli, che su DEV scrive da sempre, e che da molti anni si fregia dell'incontestabile titolo di RMer di lunga data.

Nel creare questa rubrica di recensioni, noi di RM ci siamo dichiarati fin dall'inizio del tutto immuni dal vizio dell'imparzialità; del resto, proponendoci di recensire solo opere di lettori di RM dichiarammo anche, sia in via implicita sia in via esplicita, che le recensioni che ne sarebbero risultate sarebbero state originate soprattutto dall'affetto, più che dalla critica obiettiva. E questo ci consente di poter vedere questa recensione de *I Rompicapo del Doktor Morb* anche come una (ancora parziale) forma tardiva di ringraziamento.

Questo però non significa che parlare di questo suo libro di giochi matematici sia lo scioglimento forzato di un obbligo, un piacere da rendere, una tassa da pagare: tutt'altro. Anzi, per molti versi l'imbarazzo che si può provare nel recensirlo sta tutto nel fatto che si tratta di un vero testo di problemi di matematica ricreativa, e quindi – perdinci – di autentica *concorrenza diretta* nei nostri confronti. Uscito ormai cinque anni orsono (chi ha mai detto che avremmo recensito solo novità? Se giudichiamo un difetto l'imparzialità, figuratevi in che conto potremo mai tenere la tempestività) questo libro è infatti la raccolta di 36 articoli basati su dei problemi di matematica ricreativa. Luigi Morelli ha raccolto i pezzi da lui scritti per la sua rubrica sulla rivista DEV (e visto che 36 è un bel multiplo di 12, ci aspettiamo che siano raccolti i primi tre anni della rubrica, ma non ne siamo sicuri), e l'antologia che ne risulta è un libello che segue tutti i canoni dell'opera classica del *gioco in matematica*: un personaggio intelligente e intrigante (il Doktor Morb, appunto) viene creato apposta per proporre e risolvere i quesiti; un ambiente sufficientemente vasto e strano gli viene creato attorno per poter ospitare tutti i marchingegni e i personaggi necessari alla sceneggiature dei problemi, e, sopra ogni cosa, si applica la capacità di narrare un problema matematico trasformandolo in un racconto breve. Sarà che è un gioco a cui abbiamo giocato spesso, e quindi ci sentiamo un po' chiamati a difendere l'ideale corporazione degli scrittori di cose di matematica ricreativa, ma vi assicuriamo che non è cosa facile, questa: in un vecchio articolo di RM chiamavamo questa attività *dematematizzazione*, perché è il contrario dell'azione che fanno i solutori che, tramite la *matematizzazione,* riescono a ricondurre i termini narrativi d'un quiz ai dati matematici necessario per risolverlo. E non è attività banale: per questo troviamo intrigante la maniera in cui Luigi è riuscito a riunire sotto un'unica sceneggiatura di fondo 36 quesiti.

Poi, a dire il vero, non tutti i trentasei capitoli sono quesiti da risolvere: in qualche caso, è solo la particolare curiosità di qualche aspetto della scienza a dei numeri ad essere raccontato; del resto, molti dei problemi presentati sono dei veri classici, e ci aspettiamo che molti dei lettori di RM li conoscano già. Però il libro potrebbe essere destinato non solo agli affamati divoratori di problemi di matematica ricreativa, ma anche e soprattutto a chi si avvicina per le prime volte al fascino della ricreazione matematica. Per questi, riscoprire dei classici è cosa buona, anzi necessaria, visto che come in ogni attività umana, dagli scacchi al rock and roll, conoscere gli standard è fondamentale. E per questi, avere una storia senza quesito, o un quesito risolto subito dopo l'esposizione, piuttosto che rinviato in una apposita sezione a fondo libro, è probabilmente meglio, più colloquiale e meno carico di tensione, da *stress della domanda*.

Come capita troppo spesso nell'edizione dei testi di matematica, alcuni problemi nella correzione delle bozze non hanno trovato soluzione: gli esponenti sono numeri solo un po' più piccoli e posti solo un po' più in alto delle basi, e capita spesso che gli editor non li riconoscano come tali. È successo anche qui, e stavolta potrebbe esserci una sfida nella sfida a riconoscere quando quest'incidente (di bozze e di percorso) è capitato. Siamo certi che la cosa non sia stata voluta né dall'autore né dagli editori, ma se li lascia sopire il senso dello scandalo purista (senza contare che abbiamo incontrato di ben peggio nelle traduzioni italiane – di case editrici autorevolissime – di libri di Ian Stewart, David Foster Wallace, David Wells e molti altri ancora) e si prova a vedere la cosa come un gioco nel gioco, il rischio che si corre è quello di divertirsi.

Titolo	I Rompicapo del Doktor Morb
Sottotitolo	Giochi matematici per menti ironiche
Autore	Luigi Morelli
Editore	Gruppo Editoriale Infomedia
Data di Pubblicazione	2003
Prezzo	7,50 Euro
ISBN	8881500132
Pagine	80

5. Soluzioni e Note

Se avete già sbirciato l'indice sapete che le soluzioni sono massicce anche questa volta, per cui cercheremo in questa parte di non dilungarci, anche se c'è qualcosa da dire che ha un'importanza esagerata. Eccoci.

Il Premio Peano è stato assegnato anche quest'anno. Visto che abbiamo avuto modo di documentarci, possiamo passarvi l'albo d'oro di uno dei pochissimi, forse l'unico premio matematico italiano a livello internazionale.

	Premio Peano		
I 2000	**A.Doxiadis**	*Zio Petros e la Congettura di Goldbach*	*(Bompiani)*
	Gabriele Lolli	*La crisalide e la farfalla*	*(Bollati Boringhieri)*
II 2001	**Alan Connes**	*Triangolo di Pensieri*	*(Bollati Boringhieri)*
	P.G. Odifreddi	*C'era una volta un paradosso. Storia di illusioni e verità.*	*(Einaudi)*
III 2002	**Keith Devlin**	*Il gene della matematica*	*(Longanesi)*
		Il linguaggio della matematica	*(Bollati Boringhieri)*
IV 2003	**Mario Livio**	*La sezione aurea*	*(Rizzoli)*
V 2004	**Marcus Du Satoy**	*L'enigma dei Numeri Primi - L'ipotesi di Riemann, l'ultimo grande mistero della matematica*	*(Rizzoli)*
VI 2005	**Peter Pesic**	*La prova di Abel*	*(Bollati Boringhieri)*
VII 2006	**Ian Stewart**	*Com'è bella la Matematica - Lettere a una giovane amica*	*(Bollati Boringhieri)*
VIII 2007	**Donal O'Shea**	*La congettura di Poincaré. La storia di un enigma matematico e del genio misterioso che lo ha risolto*	*(Rizzoli)*

Dal 2006 per incoraggiare giovani autori, magari "giovani del mestiere" e piccole case editrici, viene premiato con una segnalazione speciale un autore che, pur non essendo un divulgatore noto e di fama internazionale, abbia scritto un libro di lettura di matematica in grado di suscitare interesse e curiosità in un pubblico più vasto e che meriti di venire segnalato con questo premio. La segnalazione può eventualmente essere attribuita anche a una piccola casa editrice che pubblichi un'opera interessante di un giovane autore. Beh, ecco l'albo d'oro anche per questo premio:

	Premio Peano per Giovani Autori e Piccole case editrici		
VII 2006	Luisa Girelli	*Noi e i numeri. Talvolta li amiamo, più spesso li detestiamo. Perché?*	*(Il Mulino)*
VIII 2007	**Rodolfo Clerico e Piero Fabbri**	***Rudi Simmetrie***	***CS_libri***

Qui non c'è nessun understatement piemontese, come direbbe il Capo, no, siamo proprio noi, quelli che hanno vinto il Premio Speciale per i Giovani Autori e le Piccole Case Editrici, anche se giovani non siamo e dobbiamo tutto alla CS libri.

In occasione di questo evento vi invitiamo ancora una volta a visitare il sito della Mathesis piemontese (www.subalpinamathesis.unito.it/) e quello dei nostri editori (www.arpnet.it/cs/coopstudi.htm) e vi ricordiamo che il libro è ancora in vendita (è già stato ristampato!).

Poi ringraziamo tutti quelli che ci hanno fatto gli auguri per il nostro nuovo lavoro (ebbene sì, il Direttore di Le Scienze non si è ancora accorto dell'errore e non ci ha ancora licenziato...), e vi annunciamo l'apertura ufficiale del nostro blog:

http://rudimatematici-lescienze.blogautore.espresso.repubblica.it/

E adesso basta, che siamo tutti rossi per l'emozione.

5.1 [110]

5.1.1 Peggio di Doc

Questo problema continua ad avere ripercussioni, dopo la sfida dello scorso numero del Capo. Il primo intervento, quello di ***FrancoZ***, è un'*errata corrige*:

> Non c'è bisogno di aspettare sino al 2216; a meno che non salti fuori che in qualche branca della matematica sia 96 x 6 = 666 (anziché 576) il risultato corretto è quello del ***Cid***!
>
> Stavolta non posso accampare scuse, vabbè che i calcoli di questo tipo li faccio sui "pizzini" evitando calcolatrici o telefonini, ma un errore sulla tabellina del 6 è veramente imperdonabile.

Noi a ***FrancoZ*** siamo disposti a perdonare tutto, anche perché abbiamo scoperto che appartiene all'*Associazione Italiana Tecnici Birrai* e ci ha invitato a visitare la più grande fabbrica di birra in quel di Aosta...

Comunque, dato che almeno in due avevano ottenuto lo stesso risultato, il Capo si stava prepararando ad accettarlo come utile e finale, ma la versione del ***Panurgo***, arrivata a puntate e di grosso spessore non poteva essere ignorata. La riportiamo qui di seguito.

> Visto che ho trovato il tempo di mettere tutto in bella copia, voglio provarmi anch'io a valutare il peso (pardon, la *massa*) di questo bicchiere.
>
> Innanzi tutto, voglio chiarire che non ho nulla contro le approssimazioni ma un'approssimazione, per essere tale, non dovrebbe avere grande influenza sul risultato e, soprattutto, *non dovrebbe contraddire le informazioni date esplicitamente e implicitamente*.
>
> Naturalmente mi riferisco all'impossibilità di trascurare lo spessore del bicchiere ed è vero che l'introduzione dello spessore complica parecchio le cose. Infatti, il testo afferma esplicitamente (sia pur in nota) che il diametro indicato è quello interno ma nulla dice su come devono essere prese le quote per l'altezza del bicchiere e per il livello dell'acqua: ciascuna delle due quote può essere presa rispetto all'interno del bicchiere o rispetto all'esterno e vi sono quindi (vedi Figura 1) quattro diverse possibilità.

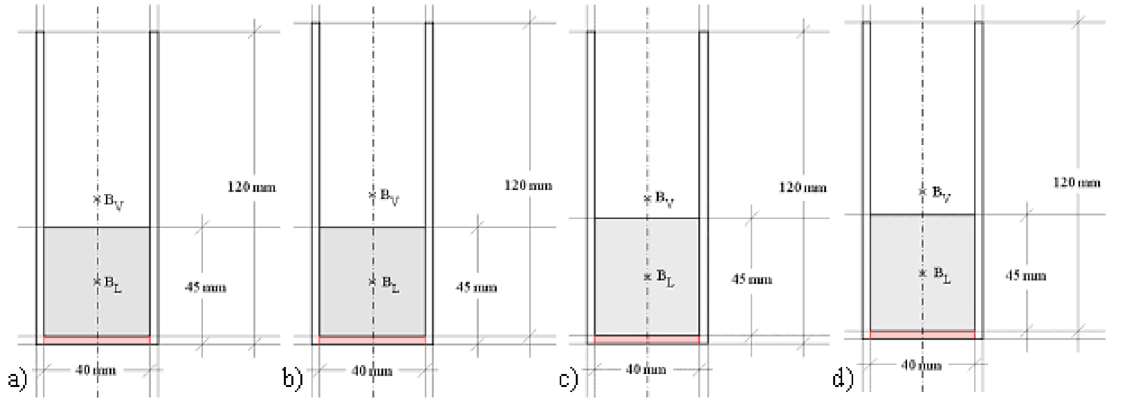


Figura 1 del ***Panurgo****: i diversi modi di fare le quote a) quote esterne, b) livello del liquido esterno, altezza del bicchiere interna, c) liquido interno, bicchiere esterno e d) quote interne; le pareti del bicchiere sono indicate in bianco, il fondo in rosso mentre il liquido è indicato in grigio.*

Data la simmetria cilindrica del sistema è sufficiente una sola coordinata per indicarne la posizione del baricentro: scegliamo un riferimento cartesiano con il piano *xz* coincidente con il piano del tavolo e l'asse *y* coincidente con l'asse del bicchiere. Il baricentro del sistema ha coordinata

$$y_{\mathrm{S}} = \frac{m_{\mathrm{V}} y_{\mathrm{V}} + m_{\mathrm{L}} y_{\mathrm{L}}}{m_{\mathrm{V}} + m_{\mathrm{L}}}$$

dove i pedici V e L stanno rispettivamente per "vetro" e "liquido". Introduciamo qui la prima approssimazione considerando per l'acqua una densità pari a 1 kg dm^{-3} di modo che la massa del liquido risulta numericamente uguale al suo volume

$$m_{\mathrm{L}} = V_{\mathrm{L}} = \begin{cases} \pi r^2 \left(h_{\mathrm{L}} - s\right) \\ \pi r^2 h_{\mathrm{L}} \end{cases}$$

dove la prima espressione si riferisce alla quota presa esternamente, la seconda alla quota presa internamente. Esprimiamo anche la coordinata del baricentro in funzione dell'altezza della colonna di liquido, h_{L}

$$y_{\mathrm{L}} = \begin{cases} s + \dfrac{h_{\mathrm{L}} - s}{2} \\ s + \dfrac{h_{\mathrm{L}}}{2} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{h_{\mathrm{L}} + s}{2} \\ \dfrac{h_{\mathrm{L}} + 2s}{2} \end{cases}$$

sempre con la convenzione suddetta (primo, esterno; secondo, interno); col che, posto per comodità $2k = \pi r^2$, abbiamo

$$y_{\mathrm{S}} = \begin{cases} \dfrac{m_{\mathrm{V}} y_{\mathrm{V}} + k\left(h_{\mathrm{L}}^2 - s^2\right)}{m_{\mathrm{V}} + 2k\left(h_{\mathrm{L}} - s\right)} \\ \dfrac{m_{\mathrm{V}} y_{\mathrm{V}} + k\left(h_{\mathrm{L}}^2 + 2sh_{\mathrm{L}}\right)}{m_{\mathrm{V}} + 2kh_{\mathrm{L}}} \end{cases}$$

Per trovare il minimo deriviamo rispetto a h_{L}

$$y'_{\mathrm{S}} \propto \begin{cases} 2kh_{\mathrm{L}}\left[m_{\mathrm{V}} + 2k\left(h_{\mathrm{L}} - s\right)\right] - 2k\left[m_{\mathrm{V}} y_{\mathrm{V}} + k\left(h_{\mathrm{L}}^2 - s^2\right)\right] \\ 2k\left(h_{\mathrm{L}} + s\right)\left(m_{\mathrm{V}} + 2kh_{\mathrm{L}}\right) - 2k\left[m_{\mathrm{V}} y_{\mathrm{V}} + k\left(h_{\mathrm{L}}^2 + 2sh_{\mathrm{L}}\right)\right] \end{cases}$$

ottenendo le equazioni di secondo grado

$$\begin{cases} kh_{\mathrm{L}}^2 + \left(m_{\mathrm{V}} - 2ks\right)h_{\mathrm{L}} - \left(m_{\mathrm{V}} y_{\mathrm{V}} - ks^2\right) = 0 \\ kh_{\mathrm{L}}^2 + m_{\mathrm{V}} h_{\mathrm{L}} - m_{\mathrm{V}}\left(y_{\mathrm{V}} - s\right) = 0 \end{cases}$$

di cui prendiamo la radice positiva e la uguagliamo al corrispondente livello dell'acqua (noto)

$$\begin{cases} \dfrac{-\left(m_{\mathrm{V}} - 2ks\right) + \sqrt{\left(m_{\mathrm{V}} - 2ks\right)^2 + 4k\left(m_{\mathrm{V}} y_{\mathrm{V}} - ks^2\right)}}{2k} = h_{\mathrm{L},0} \\ \dfrac{-m_{\mathrm{V}} + \sqrt{m_{\mathrm{V}}^2 + 4km_{\mathrm{V}}\left(y_{\mathrm{V}} - s\right)}}{2k} = h_{\mathrm{L},0} + s \end{cases}$$

Risolviamo queste equazioni in funzione di m_{V} e, tenuto conto dei valori dati, $r = 20$ mm, $h_{\mathrm{V}} = 120$ mm e $h_{\mathrm{L},0} = 45$ mm, otteniamo la massa del bicchiere in funzione del baricentro del bicchiere stesso e dello spessore del vetro

$$m_{\mathrm{V}} = \begin{cases} \dfrac{400\pi\left(45 - s\right)^2}{2\left(y_{\mathrm{V}} - 45\right)} \\ \dfrac{400\pi\left(45 + s\right)^2}{2\left[y_{\mathrm{V}} - \left(45 + 2s\right)\right]} \end{cases}$$

Per inciso, poiché ho scelto di indicare le lunghezze in millimetri, le masse risulteranno in milligrammi. Poniamo adesso attenzione al baricentro del bicchiere la cui coordinata è

$$y_{\mathrm{V}} = \frac{m_{\mathrm{F}} y_{\mathrm{F}} + m_{\mathrm{P}} y_{\mathrm{P}}}{m_{\mathrm{F}} + m_{\mathrm{P}}}$$

con i pedici F e P che indicano rispettivamente fondo e pareti. Ovviamente, se non conosciamo la massa del bicchiere tanto meno conosceremo la massa di fondo e pareti separatamente ma se assumiamo che oltre allo spessore del vetro sia uniforme anche la sua densità abbiamo che

$$y_{\mathrm{V}} = \frac{V_{\mathrm{F}} y_{\mathrm{F}} + V_{\mathrm{P}} y_{\mathrm{P}}}{V_{\mathrm{V}}}$$

con $V_{\mathrm{V}} = V_{\mathrm{F}} + V_{\mathrm{P}}$. Volumi e coordinate dei baricentri valgono

$$V_{\mathrm{F}} = \pi r^2 s \qquad y_{\mathrm{F}} = \frac{s}{2} \qquad V_{\mathrm{P}} = \begin{cases} \pi s\left(2r + s\right)h_{\mathrm{V}} \\ \pi s\left(2r + s\right)\left(h_{\mathrm{V}} + s\right) \end{cases} \qquad y_{\mathrm{P}} = \begin{cases} \dfrac{h_{\mathrm{V}}}{2} \\ \dfrac{h_{\mathrm{V}} + s}{2} \end{cases}$$

e

$$V_V = \begin{cases} \pi s\left[r^2 + (2r+s)h_V\right] \\ \pi s\left[r^2 + (2r+s)(h_V+s)\right] \end{cases} = \begin{cases} 40\pi s(130+3s) \\ \pi s\left(5200+160s+s^2\right) \end{cases}$$

e le due coordinate del baricentro del bicchiere sono

$$y_V = \begin{cases} \dfrac{r^2 s + (2r+s)h_V^2}{2\left[r^2 + (2r+s)h_V\right]} \\ \dfrac{r^2 s + (2r+s)(h_V+s)^2}{2\left[r^2 + (2r+s)(h_V+s)\right]} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{7200+185s}{130+3s} \\ \dfrac{576000+24400s+280s^2+s^3}{2\left(5200+160s+s^2\right)} \end{cases}$$

Combinando queste con le due masse del bicchiere otteniamo le masse del bicchiere in funzione dello spessore del vetro

$$m_V = \begin{cases} \dfrac{4\pi(45-s)^2(130+3s)}{27+s} & \dfrac{100\pi(45+s)^2(130+3s)}{3\left(225-35s-s^2\right)} \\ \dfrac{400\pi(45-s)^2\left(5200+160s+s^2\right)}{108000+10000s+190s^2+s^3} & \dfrac{400\pi(45+s)^2\left(5200+160s+s^2\right)}{3\left(36000-3600s-150s^2-s^3\right)} \end{cases}$$

(la prima colonna contiene le espressioni per il livello del liquido quotato all'esterno, la seconda quelle per il livello quotato all'interno). Provare per credere, per $s = 0$ si ottiene una massa in grammi pari a 39π (cfr. RM 111 §5.2.3 p. 26).

A questo punto, Doc potrebbe tagliare la testa al toro misurando lo spessore del vetro ma noi che lo ignoriamo come possiamo trarci d'impaccio? Per esempio, facendo uso dell'informazione da lui gentilmente fornita che questi bicchieri *gli sembrano più leggeri degli altri* e che *probabilmente il cristallo è "un po' meno cristallo" di quelli vecchi*.

Ecco cosa non va nel trascurare lo spessore del bicchiere: non il fatto che si ottenga una densità infinita (un buon modello può anche avere degli aspetti non realistici) ma che tale risultato è in contrasto *con quanto è indicato implicitamente tra i dati del problema* e cioè che il bicchiere è fatto di un cristallo scarso di piombo – e qui è utile ricordare che la densità del vetro comune, espressa in kg dm^{-3}, sta tra 2,4 e 2,8, laddove quella dei vetri al piombo sta fra 3 e 4 [CRC Handbook of Physics and Chemistry, 84 Ed., 2003-2004]. Ci precipitiamo quindi a calcolare le densità del nostro vetro (in funzione di s)

$$d_V = \frac{m_V}{V_V} = \begin{cases} \dfrac{(45-s)^2}{10s(27+s)} & \dfrac{5(45+s)^2}{6s\left(225-35s-s^2\right)} \\ \dfrac{400(45-s)^2}{s\left(108000+10000s+190s^2+s^3\right)} & \dfrac{400(45+s)^2}{3s\left(36000-3600s-150s^2-s^3\right)} \end{cases}$$

La densità deve essere positiva: le prime due espressioni sono formate di termini positivi e si verifica facilmente che $s < 5$ (un intervallo di valori ragionevole per bicchieri di buona qualità) è condizione sufficiente perché anche le seconde due risultino positive. La Figura 2 illustra l'andamento delle densità in funzione di s

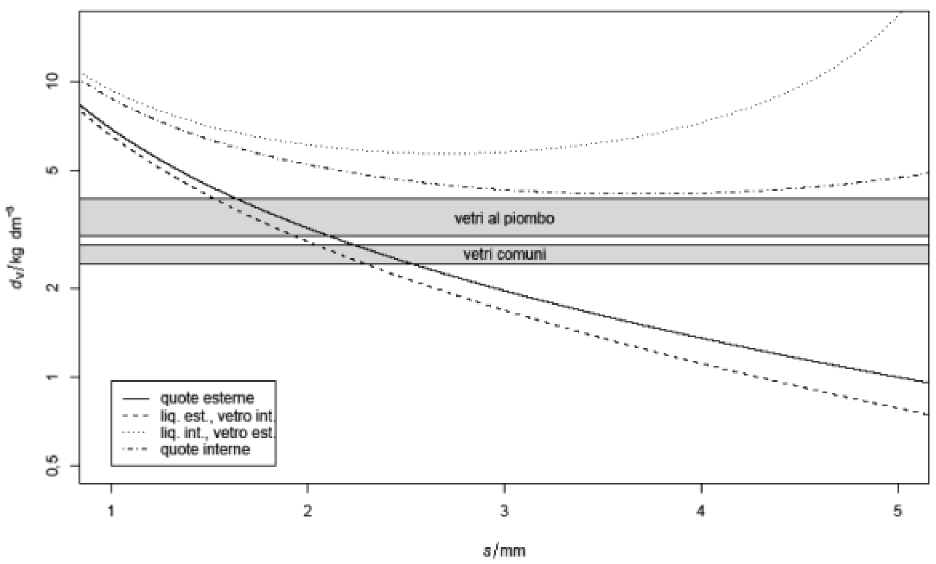


*Figura 2 del **Panurgo**: l'andamento delle densità confrontato con la densità dei diversi tipi di vetro*

Come si vede, le due espressioni in cui il livello del liquido è quotato rispetto all'interno del bicchiere corrispondo a vetri con una densità troppo elevata quindi possiamo restringere il campo alle altre due. Vogliamo ora esprimere lo spessore del vetro in funzione della densità

$$\begin{cases} \dfrac{(45-s)^2}{10s(27+s)} = d_V \\ \dfrac{400(45-s)^2}{s\left(108000+10000s+190s^2+s^3\right)} = d_V \end{cases}$$

Il primo caso è semplice e, con pochi passaggi di facile algebra, si ottiene

$$s = \frac{45}{\sqrt{9d_V^2+16d_V}+3d_V+1}$$

Con questa espressione, per valori della densità compresi tra 2 e 4 si hanno dei valori di spessore del vetro ragionevolissimi, compresi tra 1,5 mm e 3 mm.

La seconda espressione è un'equazione di quarto grado e la questione si fa spinosa: proviamo a fare qualche utile approssimazione osservando che per $1 < s < 3$ i termini di terzo e di quarto grado sono trascurabili, cioè che $108000+10000s+190s^2+s^3 \approx 108000+10000s$, e otteniamo

$$s = \frac{45}{\sqrt{9d_V^2+31d_V}+3d_V+1}$$

Con questa espressione si ottengono valori di spessore del vetro confrontabili con quelli ottenuti con l'espressione precedente.

Prima di andare a sostituire i valori dello spessore nelle espressioni della massa del vetro facciamo le opportune approssimazioni anche per la seconda espressione della massa del vetro: oltre all'approssimazione precedente, abbiamo anche $5200+160s+s^2 \approx 5200+160s$, e quindi

$$\frac{400\pi(45-s)^2(5200+160s+s^2)}{108000+10000s+190s^2+s^3}\approx\frac{4\pi(45-s)^2(260+8s)}{54+5s}$$

Nota bene che questa approssimazione è migliore della precedente in quanto la variazione del denominatore va nello stesso verso di quella del denominatore.

Effettuata finalmente la sostituzione, sempre omettendo i "pochi passaggi di facile algebra" (¡que viva siempre Mathematica!) e dopo una divisione per 1000 per riportare il peso in grammi, otteniamo

$$m_V=\begin{cases}\dfrac{9\pi d_V\left(53+78d_V+26\sqrt{9d_V^2+16d_V}\right)}{1+22d_V+18d_V^2+2(3d_V+1)\sqrt{9d_V^2+16d_V}}\\[2ex]\dfrac{18\pi d_V\left(31+39d_V+13\sqrt{9d_V^2+31d_V}\right)}{1+37d_V+18d_V^2+2(3d_V+1)\sqrt{9d_V^2+31d_V}}\end{cases}$$

Ed ecco l'andamento della massa in funzione della densità

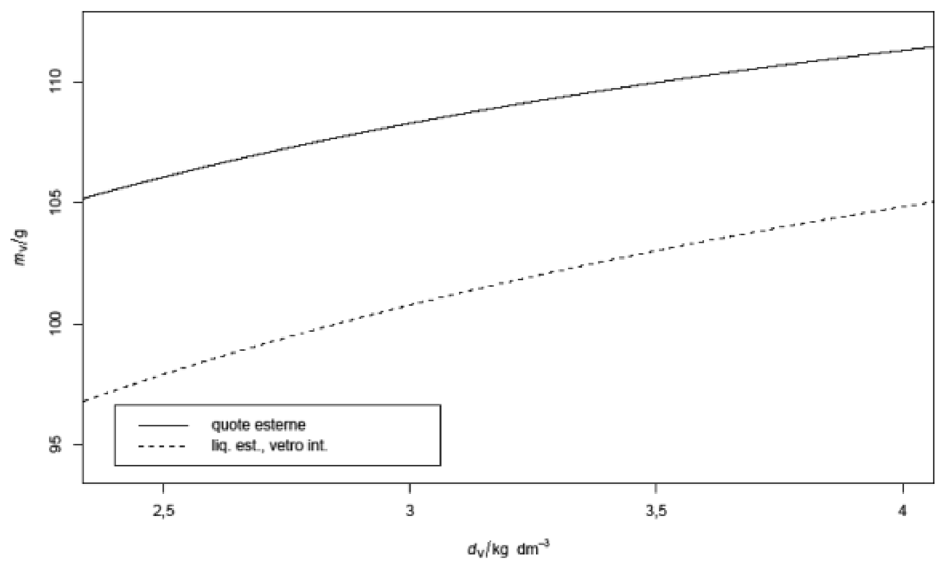


*Figura 3 del **Panurgo**: l'andamento delle masse in funzione della densità.*

Anche se siamo quasi in fondo, ora che abbiamo la dipendenza della massa dalla densità, dobbiamo affrontare il problema di rendere quantitativa la generica informazione "densità di un cristallo che sembra essere scarso di piombo" e in questo ci viene in aiuto la teoria della probabilità.

Anziché scegliere arbitrariamente un valore di densità definiamo una distribuzione che rappresenti il nostro (vago) stato di conoscenza: per prima cosa, il fatto che si tratti di un cristallo "povero" ci porta a considerare possibili le densità comprese tra 2,8 (massimo del vetro comune) e 3 (minimo del vetro al piombo); in secundis, il fatto che sia "*un po' meno cristallo*" rende meno plausibili densità elevate, salvo restando che si tratta sempre di un "*cristallo*" ciò che rende implausibili anche le densità basse. Dobbiamo perciò utilizzare una distribuzione limitata all'intervallo 2,4-4, che concentri la massa della probabilità intorno o poco sotto a 3: a tale scopo utile è una distribuzione Beta

$$B(x;\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

con la trasformata

$$x=\frac{d_{\mathrm{V}}-2,4}{4-2,4}$$

che mappa la nostra variabile nell'intervallo [0,1]. Questa distribuzione ha un massimo per

$$x=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

ed è tanto più stretta quanto più elevato è il valore dei parametri. Una buona scelta può essere $\alpha=10$ e $\beta=50/3$ che ha il massimo per $d_{\mathrm{V}}=3$ e concentra la massa della probabilità tra 2,7 e 3,3. Per trovare la distribuzione della massa si sfrutta il fatto che le funzioni che legano la massa alla densità sono trasformazioni uno a uno e quindi, e dato che l'elemento infinitesimo di massa di

probabilità delle due distribuzioni deve essere uguale, cioè

$$\left|p(m_{\mathrm{V}}\,|\,I)\,dm_{\mathrm{V}}\right|=\left|p(d_{\mathrm{V}}\,|\,I)\,d\,d_{\mathrm{V}}\right|$$

abbiamo

$$p(m_{\mathrm{V}}\,|\,I)=\left|\frac{1}{m'_{\mathrm{V}}}\right|p(d_{\mathrm{V}}\,|\,I)$$

Per calcolare le derivate delle masse ci affidiamo ancora una volta al buon Wolfram ma il risultato ve lo risparmio: ecco, invece, le distribuzioni della densità e delle masse

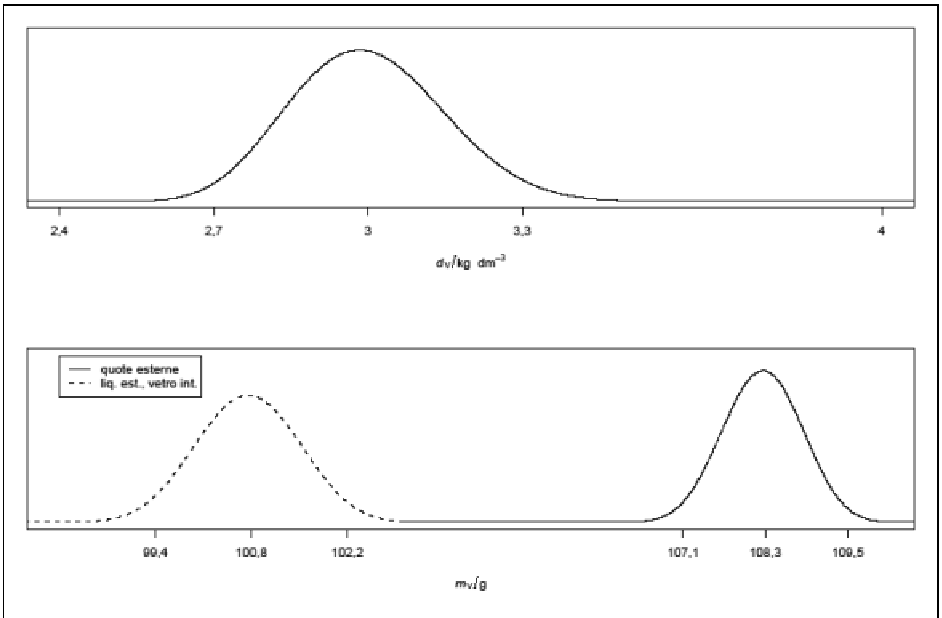


*Figura 4 del **Panurgo**: distribuzione della densità e relative distribuzioni delle masse del bicchiere.*

Calcoliamo media e scarto tipo della massa risolvendo gli integrali

$$\left\langle m_V(d)\right\rangle = \int_{m'_V(2,4)}^{m'_V(4)} dm_V \frac{m_V(d)\,\mathrm{Beta}\left[\frac{d_V-2,4}{1,6};10,\frac{50}{3}\right]}{m'_V(d)}$$

e

$$\left\langle m_V^2(d)\right\rangle = \int_{m'_V(2,4)}^{m'_V(4)} dm_V \frac{m_V^2(d)\,\mathrm{Beta}\left[\frac{d_V-2,4}{1,6};10,\frac{50}{3}\right]}{m'_V(d)}$$

(cosa che facciamo per via numerica): la varianza vale

$$s^2 = \left\langle m_V^2(d)\right\rangle - \left\langle m_V(d)\right\rangle^2$$

Possiamo quindi riassumere la nostra soluzione del problema come $m_V = 108,3 \pm 1,2$ se il livello dell'acqua è quotato rispetto all'esterno del bicchiere e $m_V = 100,8 \pm 1,4$ se la quota è fatta rispetto all'interno.

No, non abbiamo verificato nemmeno una formula, e no, non corrisponde al valore trovato da ***Cid*** e ***FrancoZ***. Ma non siamo preoccupati.

5.2 [111]

5.2.1 Ritorno al Luogo da Cui

Ebbene sì, a volte le sfide di espansione lanciate da un solutore sono colte da un altro solutore: è il caso di ***Trekker***, che ha colto al balzo il suggerimento di ***Cid***:

> Mettendo assieme la piscina di ***BR1*** e la domanda di ***Cid*** su come estendere il calcolo della massima area agli n-agoni mi è venuto in mente che forse potremmo far risolvere l'enigma alla natura.
>
> Se immaginassimo di distendere i lati/griglia su un laghetto ghiacciato "liscio", che non ci sia alcun attrito (interno ed esterno) che si "oppone" al movimento dei lati e ipotizzassimo che le griglie sul fondo fossero in grado di contenere acqua (perfetta) in modo "stagno" , beh, versando dell'acqua dentro ad un qualsiasi degli n-agoni, se è vero che la "natura" cerca un equilibrio a minima energia potenziale, "congetturo" che l'n-agono si "aggiusta" da solo in modo che il livello dell'acqua sia minimo e quindi l'area sia massima. Ma siccome viviamo nel mondo reale vediamo se riusciamo a trovare almeno una soluzione approssimata al problema, semplificando in particolare il montaggio del recinto.
>
> *Proviamo che qualsiasi n-agono con lati dati che ha area massima è inscrivibile in una opportuna circonferenza.*
>
> Sappiamo che questo è vero per il quadrilatero. Proviamo che è vero anche per il pentagono e poi per induzione lo estendiamo agli n-agoni.
>
> Sia ABCDE il pentagono di lati dati e di area massima (pentagono che sappiamo essere convesso, perché altrimenti, ribaltando i lati che formano un angolo maggiore dell'angolo piatto attorno alla diagonale esterna opposta troveremmo un pentagono di area maggiore). Tracciamo la diagonale AD dividendo il pentagono nel quadrilatero ABCD e nel triangolo ADE. Se il pentagono è di area massima allora lo è anche il quadrilatero ABCD perché se non lo fosse saremmo in grado di "stirare" questo quadrilatero, tenendo immobile il lato AD, aumentandone l'area e di conseguenza il pentagono non sarebbe di area massima, contro l'ipotesi. Il quadrilatero ABCD di area massima sappiamo che è inscrivibile in una

circonferenza che passa necessariamente per i punti A, B, C e D.
Tracciamo ora la diagonale BE e ripetendo il ragionamento espresso sopra possiamo dedurre che il quadrilatero (di massima area) BCDE è inscritto nella circonferenza passante per BCDE. Le due circonferenze trovate passano entrambe per i punti BCD che essendo non allineati individuano una e una sola circonferenza, cioè quella passante contemporaneamente per A,B,C,D,E cioè entro cui è inscritto il pentagono.

Fatto il ragionamento per il pentagono possiamo estendere le considerazioni in modo assolutamente analogo all'esagono, etc. e per induzione all'n-agono.

Mostro ora come calcolare in modo numerico l'area massima di un n-agono dati i lati.

Dato un n-agono di lati $a_1 \geq a_2 \ldots \geq a_1$ (assicuriamoci che il lato maggiore sia comunque minore della somma di tutti gli altri) e di area massima, supponiamo sia noto il raggio R della circonferenza in cui è inscrivibile. Congiungendo il centro della circonferenza, che per il momento supponiamo interno all'n-agono, con tutti i vertici A_0 A_1, A_2 , ..., $A_n = A_0$ individuiamo n triangoli isosceli aventi come base i lati dell'n-agono e come lati "obliqui" proprio R. L'area dell'n-agono pertanto è esprimibile (dopo un moderato uso del teorema di Pitagora) con:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{4} \cdot \sqrt{4R^2 - a_i^2}$$

con la condizione che la somma degli angoli al vertice dei triangoli isosceli individuati sia 2π, cioè:

$$\sum_{i=1}^{n} 2 \cdot \arcsin\left(\frac{a_i}{2R}\right) = 2\pi$$

Se invece, viceversa, il centro della circonferenza fosse esterno all'n-agono, e quindi più vicino al lato a_1 più lungo, avremmo rispettivamente:

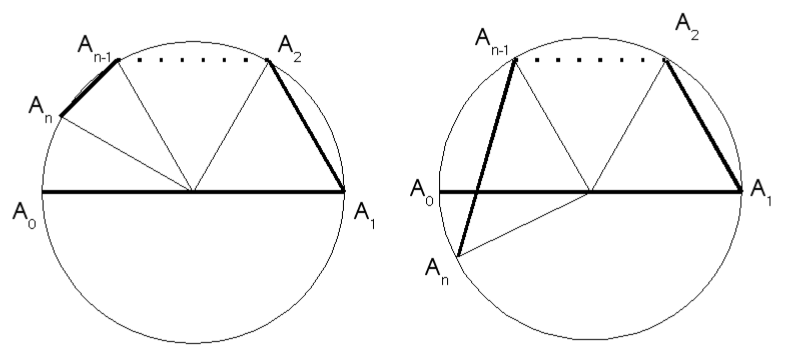
$$A = \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{4} \cdot \sqrt{4R^2 - a_i^2} - \frac{a_1}{4} \cdot \sqrt{4R^2 - a_1^2} \text{ , e}$$

$$\sum_{i=2}^{n} 2 \cdot \arcsin\left(\frac{a_i}{2R}\right) - 2 \cdot \arcsin\left(\frac{a_1}{2R}\right) = 0$$

Infine con centro nel punto medio del lato maggiore a_1 l'area sarebbe $A = \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{4} \cdot \sqrt{4R^2 - a_i^2}$.

Si noti che l'area del poligono non cambia scambiando due lati: uno scambio di lati infatti corrisponde allo scambio di due settori del cerchio (e quindi dei corrispondenti triangoli isosceli) senza che l'area della poligonale chiusa cambi. Trovato quindi R (con uno dei tanti metodi numerici di calcolo delle radici di una equazione) si è in grado di trovare l'area del poligono.

Tracciamo ora una circonferenza di diametro $2R=a_1$ e disegniamo gli altri lati consecutivamente riportandoli con il compasso fino ad intersecare la circonferenza. Se saremo fortunati (difficile) l'ultimo vertice coinciderà con il primo e quindi avremo trovato il raggio cercato ma, molto probabilmente, arriveremo "corti" o "lunghi" come nelle figure che seguono:



La figura 1 di ***Trekker***

Nel caso fossimo arrivati "corti" (figura di sinistra) dovremo aumentare il raggio spostando il lato maggiore verso l'alto in modo che il primo e l'ultimo estremo della poligonale aperta si avvicinino (ed in questo caso il centro della circonferenza sarà esterno all'n-agono), mentre nel caso fossimo arrivati "lunghi" (figura di destra) dovremo sempre aumentare il raggio ma spostando il lato maggiore verso il "basso" (ed in questo caso il centro della circonferenza sarà interno all'n-agono) in modo che i due estremi della nostra poligonale aperta si avvicinino.

Il primo caso (quando si arriva "corti") si verifica quando ovviamente $\sum_{i=2}^{n} 2\cdot\arcsin\left(\frac{a_i}{a_1}\right) < \pi$, il secondo caso (quando si arriva "lunghi") si verifica quando $\sum_{i=2}^{n} 2\cdot\arcsin\left(\frac{a_i}{a_1}\right) > \pi$.

Giusto per fare un esempio, proviamo ad applicare il metodo di risoluzione numerica al caso del quadrilatero proposto in RM111 dove i lati hanno misura rispettivamente pari a 4,3,2 e 1 metri. Il nostro test "corto o lungo" genera:

$$\sum_{i=2}^{4} 2\cdot\arcsin\left(\frac{a_i}{a_1}\right) = 2\cdot\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + 2\cdot\arcsin\left(\frac{2}{4}\right) + 2\cdot\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) \approx 3.2487 > \pi$$

Per quanto detto prima il centro della circonferenza sarà interno al quadrilatero e dovremo risolvere l'equazione $\sum_{i=1}^{n} 2\cdot\arcsin\left(\frac{a_i}{2R}\right) = 2\pi$. Si osservi ora che il raggio R è ovviamente compreso fra $a_1/2=2$ (altrimenti non riusciremmo a tracciare la corda di lato $a_1=4$) e il semiperimetro (4+3+2+1)/2 = 5 (perché in questo caso nel diametro della circonferenza ci starebbero "stesi" lungo una retta tutti i lati e quindi la poligonale dei lati non riuscirebbe a chiudersi). Il raggio cercato quindi è compreso fra 2 e 5. Prendiamo il valor medio 7/2 e calcoliamo l'angolo sotteso dalla poligonale:

$$\sum_{i=1}^{4} 2\cdot\arcsin\left(\frac{a_i}{2\cdot\frac{7}{2}}\right) = 2\cdot\arcsin\left(\frac{4}{7}\right) + 2\cdot\arcsin\left(\frac{3}{7}\right) + 2\cdot\arcsin\left(\frac{2}{7}\right) + 2\cdot\arcsin\left(\frac{1}{7}\right) \approx 2.9685 < 2\pi$$

Il raggio è quindi troppo grande. Scegliamo ora un raggio compreso fra 2 e 7/2, ad esempio il valore medio 11/4. In questo caso l'angolo sotteso dalla poligonale diventa:

$\sum_{i=1}^{4} 2 \cdot \arcsin\left(\frac{a_i}{2 \cdot \frac{11}{4}}\right) \approx 3.8925 < 2\pi$. Il raggio scelto è ancora troppo grande.

Procedendo con lo stesso algoritmo dopo n passi l'intervallo di indecisione sul valore del raggio si sarà ridotto a $\frac{5-2}{2^n} = \frac{3}{2^n}$ e se vogliamo che sia minore di un millimetro (i metri da "lavoro" hanno questa "risoluzione") bisogna che $\frac{3}{2^n} \leq \frac{1}{1000}$, cioè $n \geq 12$. La tabella che segue mostra il dettaglio dei calcoli:

N	Rmin (metri)	Rmax (metri)	Raggio Medio (metri)	Angolo (radianti) sotteso dalla poligonale	Complemento all'angolo giro (radianti)
1	2,0000	5,0000	3,5000	2,96851	3,31467
2	2,0000	3,5000	2,7500	3,89255	2,39064
3	2,0000	2,7500	2,3750	4,66296	1,62022
4	2,0000	2,3750	2,1875	5,22943	1,05375
5	2,0000	2,1875	2,0938	5,61628	0,66690
6	2,0000	2,0938	2,0469	5,87207	0,41112
7	2,0000	2,0469	2,0234	6,04017	0,24302
8	2,0000	2,0234	2,0117	6,15141	0,13178
9	2,0000	2,0117	2,0059	6,22588	0,05731
10	2,0000	2,0059	2,0029	6,27633	0,00686
11	2,0000	2,0029	2,0015	6,31087	–0,02768
12	2,0015	2,0029	**2,0022**	6,29225	–0,00906

Con raggio 2,0022 m l'area sottesa dalla poligonale è circa 4.8714 m^2, non molto lontana dal valore esatto di 2□6 metri quadrati, circa 4.8990 m^2.

Infine vorrei solo far notare che il recinto per Balto di area "quasi" (ma tanto "quasi") massima si costruisce facilmente tracciando al suolo una circonferenza con il raggio appena trovato (basta una corda ed un paio di chiodi) e "semplicemente" sistemando le griglie in modo che gli estremi stiano sulla curva tracciata.

Per cambiare esempio prendiamo il quadrilatero di lati 4, 2, 2 e 1. Il test "corto o lungo" genera:

$$\sum_{i=2}^{4} 2 \cdot \arcsin\left(\frac{a_i}{a_1}\right) = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{2}{4}\right) + 2 \cdot \arcsin\left(\frac{2}{4}\right) + 2 \cdot \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) \approx 2.5998 < \pi .$$

Stavolta il centro della circonferenza è esterno al quadrilatero di area massima e quindi dobbiamo risolvere l'equazione $\left(\sum_{i=2}^{n} 2 \cdot \arcsin\left(\frac{a_i}{2R}\right)\right) - 2 \cdot \arcsin\left(\frac{a_1}{2R}\right) = 0$.

Numericamente si ottiene che R vale circa 2.1381 m e quindi l'area vale $A=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{4}\cdot\sqrt{4R^2-a_i^2}-\frac{a_1}{4}\cdot\sqrt{4R^2-a_1^2}\approx 3.3072m^2$ invece che $A=\sqrt{\left(\frac{9}{2}-4\right)\left(\frac{9}{2}-2\right)\left(\frac{9}{2}-2\right)\left(\frac{9}{2}-1\right)}=\frac{5}{4}\sqrt{7}\approx 3.3072m^2$. Direi un buon risultato.

In sintesi: dato un n-agono di lati $a_1 \geq a_2 \dots \geq a_1$ (con il lato maggiore minore della somma di tutti gli altri)

1. Se $\sum_{i=2}^{n}2\cdot\arcsin\left(\frac{a_i}{a_1}\right)<\pi$: allora bisogna risolvere in R l'equazione:

   $$\left(\sum_{i=2}^{n}2\cdot\arcsin\left(\frac{a_i}{2R}\right)\right)-2\cdot\arcsin\left(\frac{a_1}{2R}\right)=0$$

   Si noti che la funzione continua di cui si cerca lo zero è definita per $R\geq a_1/2$, è negativa in $R=a_1/2$, dove ha derivata prima pari a $+\infty$ e, escluso questo punto, derivabile, e nell'intorno di $R=+\infty$ è sviluppabile in serie con

   $$\frac{\sum_{i=2}^{n}a_i-a_1}{R}+o\left(\frac{1}{R^3}\right)>0$$

   cioè si avvicina a zero "da sopra" (si ricordi che a_1 è minore della somma di tutti gli altri lati). Da qualche parte quindi ci deve pur essere uno zero.

   Trovato R l'area massima vale: $A=\sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{4}\cdot\sqrt{4R^2-a_i^2}-\frac{a_1}{4}\cdot\sqrt{4R^2-a_1^2}$

   Ed il centro della circonferenza è esterno all'n-agono.

2. Se $\sum_{i=2}^{n}2\cdot\arcsin\left(\frac{a_i}{a_1}\right)>\pi$: allora bisogna risolvere in R l'equazione:

   $$\sum_{i=1}^{n}2\cdot\arcsin\left(\frac{a_i}{2R}\right)-2\pi=0$$

   Si noti che la funzione continua di cui si cerca lo zero è definita per $R\geq a_1/2$, è positiva in $R=a_1/2$, dove ha derivata prima pari a $-\infty$, monotona decrescente, e, escluso questo punto, derivabile e con limite per R che tende all'infinito pari a -2π. Uno zero dovremo quindi essere in grado di trovarlo numericamente.

   Trovato R l'area massima vale: $A=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{4}\cdot\sqrt{4R^2-a_i^2}$

   Ed il centro della circonferenza è interno all'n-agono.

3. Infine se: $\sum_{i=2}^{n} 2 \cdot \arcsin\left(\frac{a_i}{a_1}\right) = \pi$ allora $R = \frac{a_1}{2}$ e l'area massima vale $A = \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{4} \cdot \sqrt{4R^2 - a_i^2}$ ed il centro della circonferenza è nel punto medio del lato maggiore.

In pratica trovando lo zero di una sola equazione in una sola variabile, il raggio della circonferenza inscritta, siamo in grado di trovare l'area massima dell'n-agono noti che siano le misure dei lati che lo compongono. E questo dovrebbe bastare per risolvere tanti problemi ... pratici (relativi ai recinti).

O sbaglio?

Il Capo ha incorniciato questa trattazione e l'ha consegnata a sua madre, non sappiamo però cosa è successo dopo, solo che Balto è comunque ancora libero di andare dove vuole.

5.3 [112]

5.3.1 Tra origami e tipografia

Diciamocelo, il problema era facile. Non perché avessimo altro da fare, come ha suggerito qualcuno, ma per altre due buone ragioni: la prima, che così anche i solutori meno esperti possono provare a cimentarsi, e la seconda che quelli più esperti pensano che ci sia sotto qualcosa... e così è stato. Molte le soluzioni: ***Sam*** (redivivo e laureato specialistico alla Normale proprio in questo giugno: complimenti!), ***Drako84***, ***Giampietro***, ***Br1***, ***FrancoZ***, ***Cid***, ***Trekker***, ***Zar***, ***GaS***, ***AlexPhys*** e i suoi amici della ***Stanza33***, ed il ***Panurgo***. Visto che le soluzioni sono tutte molto simili ve ne offriamo una sola, ma riportiamo i commenti più interessanti, per esempio l'incipit del documento word di ***BR1***:

> Buonasera, my dears DEDMG (Degni Eredi Di Martin Gardner);
>
> Ecco; se stampate queste pagine, esse dovrebbero essere formattate per poter esser ripiegate come richiesto dal quesito N°1 del RM di maggio 2008… Almeno io ci ho provato selezionando File-Imposta Pagina-Dimensioni-(Larghezza/Altezza). Poi, se non vi funziona, scrivete pure per protestare a:
>
> Bill Gates,
> Richest In the World Avenue,
> c/o Microsoft Corporation
> One Microsoft Way
> Redmond, WA 98052
> USA

... e qui il Nostro, dopo averci distratto con il saluto (le code di pavone sventagliavano ovunque e non si vedeva più niente) ci ha anche scioccato con una bella foto di Bill stesso. Poi continuava:

> Pensando che il problema fosse troppo banale, ho inizialmente ipotizzato situazioni strane con fogli di carta a 7 lati, a 12 lati, a 17 lati… Poi però ho pensato di lavorare con i fogli prescritti dal quesito, cioè quelli "a 4 lati"; ho allora attivato il mio generatore personale di numeri casuali per determinare le dimensioni del mio primo tentativo empirico: volevo tentare con dimensioni a casaccio, ed è venuto fuori randomaticamente un foglio da 29.7 cm x 21.0 cm; poiché era un foglio "a 4 lati", l'ho chiamato A4 , spero condividerete questa denominazione…

BR1 ha scoperto in questa occasione che gli A4 hanno rapporto tra i lati pari a radice due, ed ha scoperto anche valori "esoterici" di fogli con un lato infinito o nullo. Noi, che siamo vanitosi ed autoreferenziali, ne approfittiamo per ricordarvi che il Capo di tipografia parla volentieri, e che ha scritto un ottimo PM in proposito in RM084.

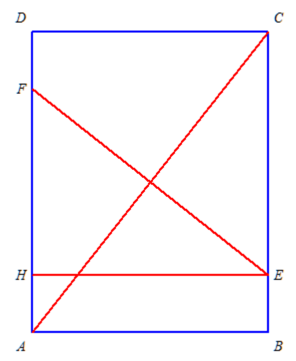
Lodevole anche l'incipit di ***GaS***, che prima di partire verifica cosa aspettarsi:

> Prima di fare i calcoli è buona abitudine cercare di immaginare il risultato che troveremo (non ho mai insegnato "ufficialmente" ma, tutte le volte che ho fatto ripetizioni ai ragazzi del liceo, questa è la prima cosa che provavo ad insegnare, purtroppo non sempre con successo):
>
> - per L=1 la piega sarà la seconda diagonale BD con una lunghezza di sqrt(2);
> - all'aumentare di L la piega MN intersecherà i lati AB e CD in punti sempre più vicini al centro diminuendo quindi la lunghezza;
> - al limite, per L–> ∞, la piega tenderà all'orizzontale e ad una lunghezza unitaria.
>
> Quello che ci aspettiamo, quindi, è una lunghezza MN strettamente decrescente al crescere di L e compresa tra 1,414+ ed 1. Abbiamo quindi già trovato una soluzione al problema: un foglio rettangolare con (almeno) una delle due dimensioni infinite avrà la proprietà cercata da Rudy! Essendo carta poco maneggevole con cui fare origami (però che belli sarebbero!) cerchiamo di trovare la seconda soluzione, quella con entrambi i lati finiti per persone banali come Rudy.

Offendiamo? Il GC è un sacco di cose, ma banale certo no. La soluzione che abbiamo scelto di proporvi è quella di ***Zar***, che tocca l'altro argomento molto caro a Rudy, l'origami:

> Le misure della pagina ideale di Rudy si ottengono piegando la carta: è quindi molto utile ripassare gli assiomi dell'arte dell'origami[17], giusto per iniziare col piede giusto. Eccoli qua, così come sono stati formulati da Humiaki Huzita (questa la versione breve, se volete quella lunga rimando il volonteroso lettore qui: http://proooof.blogspot.com/2007/04/origami.html):
>
> 1. Dati due punti, esiste un'unica piega che passa per entrambi.
> 2. Dati due punti, esiste un'unica piega che li fa sovrapporre.
> 3. Date due rette, esiste una piega che le fa sovrapporre.
> 4. Dati un punto e una retta, esiste un'unica piega perpendicolare alla retta data che passa per il punto.
> 5. Dati due punti p1 e p2 e una retta, esiste una piega che porta p1 sulla retta data e che passa per p2.
> 6. Dati due punti p1 e p2 e due rette l1 e l2, esiste una piega che fa sovrapporre p1 a l1 e p2 a l2.
>
> Ne esiste un settimo, definito da Koshiro Hatori, che dice: *Dato un punto p e due rette l1 e l2, esiste una piega che porta p su l1 ed è perpendicolare a l2.*
>
> In seguito è stato dimostrato da Robert Lang che questo sistema di assiomi è completo.
>
> Bene, a noi interessa il numero 2, che ci conferma che la costruzione di Rudy è una definizione ben posta (avremmo mai potuto dubitare?). Ora, se pieghiamo un foglio in modo da far coincidere due punti predefiniti, otteniamo una piega che è l'asse (luogo dei punti equidistanti dagli estremi di un segmento) del segmento che congiunge i due punti. Se osserviamo la figura allegata, sovrapponendo A e C si ottiene la piega FE, asse di AC.

[17] Il Capo ci riferisce di aver parlato degli assiomi nel PM di RM095, ma siamo sicuri che Zar lo sapesse..



La figura di ***Zar***

Allora il triangolo ABC, rettangolo in B, risulta simile al rettangolo FHE, rettangolo in E. Possiamo quindi scrivere la proporzione BC:HE=AC:FE. Se poniamo AB=1 e BC=x, abbiamo che AC=sqrt(x^2+1). Ora abbiamo due possibilità, dato che Rudy non ha specificato se la piega deve essere uguale al lato lungo o a quello corto del foglio: FE potrebbe essere uguale a AB oppure a BC. Vediamo che succede.

1° caso, FE=1. La proporzione si traduce nell'equazione sqrt(x^2+1)=x.

Elevando al quadrato otteniamo $x^2+1=x^2$, impossibile.

2° caso, FE=x. La proporzione diventa sqrt(x^2+1)=x^2. Elevando al quadrato otteniamo $x^4–x^2–1=0$. Risolvendo si ha la soluzione x^2 = (1–sqrt(5))/2, impossibile, e x^2 = (1+sqrt(5))/2, una nostra vecchia conoscenza (c'era da immaginarselo, quando Rudy gioca con la carta non è difficile che salti fuori la sezione aurea). Quindi, se il lato corto del foglio è lungo 1, quello lungo deve essere sqrt((1+sqrt(5))/2), cioè la radice della sezione aurea[18].

Alternativamente possiamo dire che se il lato lungo è uguale a 1, quello corto è la radice del reciproco della sezione aurea.

Un'ultima considerazione: il rettangolo centrale della figura, quello con i due lati in rosso, è simile a quello grande. Se ripetiamo il procedimento di piegatura, sovrapponendo F con E, riotteniamo la diagonale AC. In pratica con i due segmenti AC ed EF possiamo costruire una successione di rettangoli simili, uno dentro l'altro, e possiamo andare avanti quanto vogliamo. Potremmo proporre il formato all'ISO...

Come no. Una soluzione doppia (con due metodi, uno "euclideo" e l'altro "cartesiano") ci è arrivata da quelli di ***Stanza33***, che scrivono:

> Questa volta la scrittura della soluzione è a sei mani!! Non me ne sono spuntate di nuove, semplicemente ho coinvolto un paio di amici a divertirsi con Rudi, e quindi tutti insieme ci firmiamo: ***STANZA 33*** (***AlexPhys***, ***Pabell***, ***Aldidori***).
>
> Che bello il problema dell'origami! Il risultato? una bella sezione aurea rivisitata!

AlexPhys ci aveva inoltre mandato una mail precedente piena di complimenti, che noi riportiamo: Doc e Alice sono rimasti piuttosto sorpresi.

> Vi scrivo non per allegarvi la presunta soluzione del secondo problema (cosa che farò domani o al più dopodomani) ma per farvi i complimenti! e voi direte: di che? del fatto che questo mese siete stati geniali nella scelta dei problemi, nel senso che i due problemi seppure notevolmente diversi hanno comunque nella loro soluzione qualcosa in comune ed anche molto bella: La successione di Fibonacci!
>
> Infatti nel primo problema come sapete la soluzione è in fin dei conti una sezione aurea, ovvero il limite per n–>∞ del rapporto F(n)/F(n–1) essendo F(n) l'n-esimo termine della successione di Fibonacci. Invece nel secondo problema le triplette su cui scommettere per avere maggiore chance di successo (TTC,TCC,CTT,CCT) (questo è un preview, vedrete presto la soluzione) sono anch'esse legate alla successione di Fibonacci!

Il Capo si è rifiutato di dirci se si è trattato di un caso o no, come ci si poteva aspettare. Sempre per gli auto-complimenti, ***Sam***, tra le altre cose, ci scrive:

[18] Nella sua soluzione, ***FrancoZ*** arrivato a questo punto scrive "*Wow, abbiamo trovato l'oro (o almeno, la sua radice)!*".

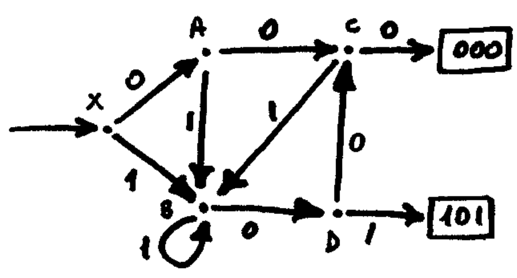
> E poi un problema sulla sezione aurea... che, come osservò uno dei 300 concorrenti a Cesenatico per le Olimpiadi di Matematica ormai 4 anni fa, è sempre una risposta sensata da tirare a caso in un problema di geometria in cui si chiede un rapporto... quanto meno se l'estensore del problema ha un minimo di buon gusto.

Non potevamo non citarlo, visto che il GC si pavoneggia per il suo gusto nello scegliere i problemi! Ed ora basta, che l'altro problema era ben più complesso.

5.3.2 Allarme rosso

Il velato suggerimento del Capo di utilizzare catene di Markov è stata colta da tutti i solutori di questo problema, e cioè ***Frank Sinapsi***, ***Trekker***, ***Cid***, ***Val316*** e ***AlexPhys*** con la ***Stanza33***. Ognuno ha però percorso cammini diversi. Cominciamo da ***Frank Sinapsi***:

> Nel seguito indicherò "testa" con 0 e "croce" con 1, perché secondo me i simboli 0 e 1 si distinguono meglio di "T" e "C". Indicando con E l'insieme di tutte le triplette (8 elementi), definisco la funzione p sull'insieme ExE a valori in [0,1] in questo modo: per ogni coppia di triplette diverse s1 e s2, p(s1,s2) è la probabilità che s1 vinca contro s2 in una serie di lanci.
>
> In effetti resterebbe da definire p(s,s), ma non ci interessa, in quanto le partite hanno senso solo tra triplette diverse.
>
> Visto che ci sono definisco anche la funzione c: E –> E nel modo seguente: per ogni tripletta s, c(s) è la tripletta ottenuta da s scambiando ogni 0 con 1 e viceversa. Ad esempio, c(001)=110.
>
> È molto semplice verificare che valgono le seguenti proprietà:
>
> - per ogni s1, s2 (s1 diversa da s2): p(s2,s1)=1–p(s1,s2)
> - per ogni s: p(s,c(s))=1/2
> - inoltre p(xy0,xy1)=1/2 (cioè, se le due triplette coincidono sui primi due elementi e differiscono solo per l'ultimo, allora la probabilità che in un incontro vinca l'una o l'altra è uguale)
> - per ogni s1, s2 (s1 diversa da s2): p(c(s1),c(s2))=p(s1,s2)
>
> Quanti sono i possibili incontri? Le triplette sono 8 e tutte le coppie (non ordinate) sono allora bin(8,2) cioè 28. Ora sorge un problema, perché, anche sfruttando tutte le proprietà di simmetria che ho elencato sopra, restano diversi casi "oscuri", in cui a me non viene facile capire quale di due triplette è avvantaggiata sull'altra.
>
> Un caso molto semplice è questo: 000 contro 100 (o il suo complementare 111 contro 011). In questo semplice caso si verifica facilmente che la probabilità che 000 vinca su 100 è soltanto 1/8. Perché, o escono tre teste nei primi tre lanci (e la probabilità che avvenga ciò è appunto 1/8) oppure vincerà sicuramente l'altra tripletta. Quindi p(000,100)=1/8.
>
> Ci sono altri casi, però, che a me risultano difficili.
>
> Ad esempio, quanto vale p(000,101)? Sinceramente non avevo mai affrontato questo tipo di calcolo e probabilmente esiste un metodo facile che però mi sfugge, oppure esiste un modo per rispondere ai quesiti del problema evitando di dover calcolare esplicitamente la funzione p.
>
> Ad ogni modo, dato che il problema mi ha affascinato, ho deciso che dovevo calcolare i valori di p per ogni coppia di tripletta. All'inizio ho tentato varie strade (tipo alberi, patterns) ma invano. Poi mi è venuta un'idea carina: per ogni caso che ancora non avevo risolto, ho costruito un automa a stati finiti che rappresenta tutti i possibili incontri tra una specifica coppia di triplette.



L'automa di ***Frank Sinapsi***

Ad esempio, supponiamo di voler calcolare p(000,101). Allora l'automa a stati finiti associato a tale coppia è quello che si vede nella figura allegata all'email (chiedo scusa per la rozzezza, ma ho pensato di risparmiare tempo disegnandolo col pennarello e passando il disegno allo scanner).

L'automa raffigurato ha uno stato iniziale (che ho indicato con X), quattro stati interni (A, B, C, D) e due nodi finali (000 e 101). Questo automa può riconoscere due cose:

1) quando la partita è finita; e
2) chi ha vinto.

Ad esempio, si può porre una monetina da 1 cent sopra lo stato iniziale X, dopodichè si procede in questo modo: si lancia la moneta; se esce testa si sposta il cent nello stato che si raggiunge seguendo la freccia etichettata 0; se esce croce si segue la freccia etichettata 1. Quando il cent finisce sopra uno dei due stati finali, la partita è finita e ha vinto quella tripletta.

Data una qualsiasi coppia di triplette (diverse) è molto facile costruire un automa corrispondente, come nel caso visto. Il bello dell'automa è che mi ha permesso di calcolare in modo esatto e semplice il valore della funzione p.

Te lo spiego nel caso di p(000,101). Innanzitutto indichiamo con x la probabilità che una serie di lanci finisca nello stato 000 a partire dallo stato iniziale x. Chiaramente x è proprio p(000,101).

Indichiamo poi con a, b, c e d le probabilità di vincita di 000 a partire però dagli stati interni A, B, C e D (rispettivamente). Allora, dalla struttura dell'automa, è evidente che devono valere le seguenti relazioni:

x=(a+b)/2
a=(b+c)/2
b=d
c=(1+b)/2
d=c/2

Abbiamo trovato in questo modo un sistema di equazioni lineari da cui si ricava facilmente che x vale 5/12. Quindi p(000,101)=7/12.

A questo punto, usando quando possibile le regole di simmetria e nei casi rimanenti il metodo che ho appena descritto, ho ottenuto i valori della funzione p per tutti i possibili incontri, ed ecco il risultato:

p(000,001)=1/2
p(000,010)=2/5
p(000,011)=2/5
p(000,100)=1/8
p(000,101)=5/12
p(000,110)=3/10
p(000,111)=1/2
p(001,010)=2/3
p(001,011)=2/3
p(001,100)=1/4
p(001,101)=5/8
p(001,110)=1/2

p(001,111)=7/10
p(010,011)=1/2
p(010,100)=1/2
p(010,101)=1/2
p(010,110)=3/8
p(010,111)=7/12
p(011,100)=1/2
p(011,101)=1/2
p(011,110)=3/4
p(011,111)=7/8
p(100,101)=1/2
p(100,110)=1/3
p(100,111)=3/5
p(101,110)=1/3
p(101,111)=3/5
p(110,111)=1/2

da questa tabella se ne ricava facilmente un'altra, che è la seguente:

000: 0.377380 (317/840) (min=1/8, max=1/2)
001: 0.558333 (67/120) (min=1/4, max=7/10)
010: 0.484523 (407/840) (min=1/3, max=3/5)
011: 0.579761 (487/840) (min=1/3, max=7/8)
100: 0.579761 (487/840) (min=1/3, max=7/8)
101: 0.484523 (407/840) (min=1/3, max=3/5)
110: 0.558333 (67/120) (min=1/4, max=7/10)
111: 0.377380 (317/840) (min=1/8, max=1/2)

in questa seconda tabella, ogni riga riassume i dati più significativi di ciascuna tripletta.

Il primo numero dopo ogni tripletta (s) è la media dei valori p(s,t); ad esempio, nel caso della prima riga (000) si tratta del numero [p(000,001) + p(000,010) + p(000,011) + p(000,100) + p(000,101) + p(000,110) + p(000,111)]/7.

Il successivo numero tra parentesi è lo stesso valore espresso in modo esatto come frazione. Gli altri valori sono il minimo e il massimo dei valori p(s,t).

Vediamo adesso di rispondere alle domande del problema.

Prima domanda.

Secondo me il primo dovrebbe scegliere una tra le seguenti triplette: 010, 011, 100, 101 (in altre parole, quelle che hanno i primi due elementi diversi) perché queste sono quelle che hanno il più alto valore del minimo (1/3), quindi, nel caso in cui il secondo scelga al meglio, garantiscono almeno una probabilità di vincita pari a 1/3.

D'altra parte il secondo è sempre avvantaggiato: anche nel caso di scelta ottimale del primo può fare una scelta che gli consente di avere una probabilità di vincita pari a 2/3 (cioè doppia dell'avversario).

Seconda domanda.

Io sceglierei la 011 oppure la sua complementare 100, perché sono quelle che si comportano meglio.

Terza domanda.

Se la tripletta dell'avversario è scelta casualmente, anche in questo caso sceglierei 011 oppure 100, perché sono quelle che, sotto queste condizioni, hanno una maggiore probabilità di vincita (quasi 58%).

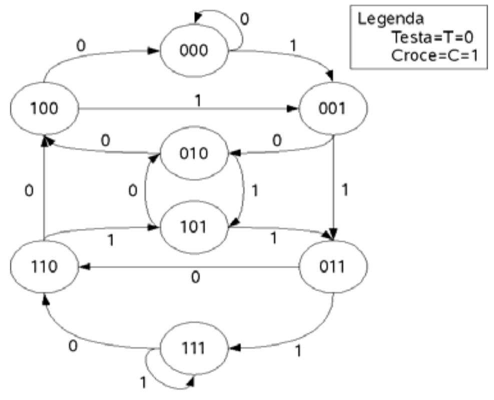
Qui si può fare una considerazione interessante: mentre la tripletta 001 ha un caso pessimo peggiore di 010 (nel caso pessimo, 010 ha una probabilità di vincita pari a 1/3, mentre 001 nel suo caso pessimo ha una probabilità di vincita pari a 1/4), nella situazione in cui la tripletta dell'avversario è scelta casualmente la 001 sarebbe da preferire alla 010; infatti, sotto queste condizioni, la probabilità di vincita della 001 è 55.8% contro 48.4% della 010.

Non so quanto sia sensato tutto questo malloppone che ho scritto; comunque sia, è stato divertente :-) .

Ed anche per noi leggerlo. Passiamo a ***Trekker***:

Visto il "richiamo" della redazione di RM a trovare un qualche uso delle "funzioni generatrici" descritte in RM111 provo a "buttarmi" in qualcosa del genere. Andiamo per gradi.

Costruiamo una catena di Markov i cui stati riproducano l'ultima tripletta Testa/Croce uscita. In particolare indicando con 0=TESTA=T e con 1=CROCE=C, la rappresentazione, ad esempio, 001 indica che nell'ultimo lancio è uscita CROCE e nei due lanci precedente TESTA. Nella figura sotto ho indicato, anche se non è comune quando si disegnano le catene di Markov, con 0 oppure 1 l'esito della moneta che fa transitare da uno stato all'altro, mentre è sottinteso che la probabilità di transizione da uno stato ad un altro (se connessi da un arco orientato) è sempre ½.



La prima catena di ***Trekker***

Indichiamo ora con S_0 lo stato 000 (=tre TESTE), con S_1 lo stato 001, e via via con la classica notazione binaria, fino a S_7 rappresentante lo stato 111 (=tre CROCI).

Indichiamo ora con $P_0(t)$, $P_1(t)$, ..., $P_7(t)$ la probabilità di essere rispettivamente negli stati S_0, S_1, ..., S_7 al tempo t. Inoltre poiché inizialmente, intendo dire dopo i primi tre lanci di "abbrivio", si è con equiprobabilità (pari ad un 1/8) in uno degli otto stati possibili, imponiamo la condizione iniziale in t=0 (contiamo il tempo da questo momento per comodità):

$$P_0(0) = P_1(0) = P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = P_5(0) = P_6(0) = P_7(0) = 1/8$$

Se il gioco continuasse all'infinito la probabilità di essere al tempo t in uno qualsiasi degli stati sarebbe descrivibile con:

$$\begin{bmatrix} P_0(t+1) \\ P_1(t+1) \\ P_2(t+1) \\ P_3(t+1) \\ P_4(t+1) \\ P_5(t+1) \\ P_6(t+1) \\ P_7(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \\ P_4(t) \\ P_5(t) \\ P_6(t) \\ P_7(t) \end{bmatrix}$$

$$\text{con} \begin{bmatrix} P_0(0) \\ P_1(0) \\ P_2(0) \\ P_3(0) \\ P_4(0) \\ P_5(0) \\ P_6(0) \\ P_7(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/8 \\ 1/8 \\ 1/8 \\ 1/8 \\ 1/8 \\ 1/8 \\ 1/8 \\ 1/8 \end{bmatrix} = P(0)$$

o sinteticamente: $P(t+1) = F \cdot P(t)$, dove F è la "matriciona" 8x8 delle transizioni e P(0) il valore iniziale (dopo i primi tre lanci di "abbrivio").

Propongo ora due metodi per procedere, entrambi illustrati con un esempio.

Metodo 1

Per spiegare il primo metodo di soluzione ipotizziamo che il gioco termini quando Alberto ha raggiunto TTT (=000 con la nostra convenzione) oppure quando Fred ha raggiunto CCC (=111 con la nostra convenzione). Data la simmetria, ovvero dato che avremmo potuto scegliere la convenzione opposta, ci aspettiamo che entrambi abbiano, con questa particolare scelta, la medesima probabilità, pari ad ½, di vincere. Vediamo se riusciamo a provarlo.

Poiché il gioco termina quando lo stato diventa S_0 oppure S_7, cancelliamo dalla nostra catena di Markov i corrispondenti archi uscenti da S_0 ed S_7, e, perciò, mettiamo degli zeri nelle colonne 0 e 7 (numeriamo, per semplicità, le colonne e le righe partendo da 0 invece che da 1) della matrice F ottenendo la matrice F_{07}. Il nostro sistema, sempre con la solita condizione iniziale, diventa: $P(t+1) = F_{07} \cdot P(t)$.

Con questa posizione $P_0(t)$ e $P_7(t)$ rappresentano la probabilità di essere arrivati proprio al tempo t (che è diverso dal dire di esserci al tempo t) rispettivamente in S_0 ed S_7.

Per trovare ora la somma delle probabilità che vinca Alberto (che ha scelto 000) dobbiamo trovare la somma delle probabilità di essere nello stato S_0 al tempo 0, poi al tempo 1, ... cioè

$$\overline{P_0} = \sum_{t=0}^{\infty} P_0(t) = P_0(0) + P_0(1) + P_0(2) + \ldots$$

e analogamente per Fred (che ha scelto 111):

$$\overline{P_7} = \sum_{t=0}^{\infty} P_7(t) = P_7(0) + P_7(1) + P_7(2) + \ldots$$

Invece di calcolare queste serie prendiamone le trasformate Z unilatera[19]. La trasformata Z unilatera (da adesso ometto la parola "unilatera") di una funzione discreta f(t)={f(0), f(1), f(2), ... } è definita come:

$$F(z) = Z[f(.), z] = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \ldots = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{f(t)}{z^t}$$

[19] Molto simile "all'aggeggio" funzione generatrice presentato in RM111 e di cui la redazione di RM chiede un qualche uso utile... Relativamente alla verifica delle condizioni di convergenza rifarsi a ... wikipedia ...

[20]Si noti in particolare che:

$$F(z)_{z=1} = F(1) = f(0) + \frac{f(1)}{1} + \frac{f(2)}{1^2} + \ldots = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{f(t)}{1^t} = \sum_{t=0}^{\infty} f(t),$$

cioè la trasformata Z valutata in z=1 ci fornisce la somma della serie. Forse è una osservazione interessante per calcolare le nostra probabilità.

Osserviamo inoltre che la trasformata Z di f(t) traslata di una posizione in anticipo, cioè $f^+(t)=f(t+1)$, dalla definizione, e con qualche semplice passaggio, è esprimibile con:

$$F^+(z) = Z\left[f^+(.), z\right] = f(1) + \frac{f(2)}{z} + \frac{f(3)}{z^2} + \ldots = z \cdot (F(z) - f(0))$$

Applicando quanto esposto al nostro caso ed indicando con P(z) la colonna delle trasformate Z delle funzioni delle singole probabilità troviamo: $z(P(z) - P(0)) = F_{07}P(z)$ cioè anche: $P(z) = z \cdot (z \cdot I - F_{07})^{-1} \cdot P(0)$ dove I è la matrice unitaria 8x8. Calcolando P(1), che come abbiamo ricordato prima fornisce il vettore colonna della somma di tutte le serie, abbiamo:

$$P(1) = 1 \cdot (1 \cdot I - F_{07})^{-1} \cdot P(0) = (I - F_{07})^{-1} \cdot P(0) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 3/4 \\ 3/4 \\ 3/4 \\ 3/4 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

In particolare quindi, come ci aspettavamo, la probabilità che vinca Alberto (con la scelta TTT=000) è ½ (il primo elemento della colonna) e, analogamente la probabilità che vinca Fred (con la scelta CCC=111) è ½ (l'ultimo elemento della colonna).

Se avessimo ridisegnato la catena di Markov togliendo gli archi di uscita di 000 e 111 questi valori di probabilità si sarebbe intuiti facilmente: i nodi 000 e 111 sarebbero stati separati fra di loro dalla "nuvola" (simmetrica) formata dai restanti 6 nodi e, perciò, raggiungibili in modo equiprobabile.

Osserviamo ora che, per simmetria, se Alberto scegliesse TTC=001 e Fred il "complemento a 7", cioè CCT=110 avremmo di nuovo equiprobabilità di vittoria, etc.

In più possiamo "scommettere" su altre simmetrie: ad esempio la scelta Alberto=CTC=101 e Fred=CCT=110 genererà la medesima coppia di probabilità delle rispettive scelte "complementari a 7", cioè Alberto=TCT=010 e Fred=TCC=001, etc.

Metodo 2

[20] Scambiando 1/z con x troviamo proprio "l'aggeggio" funzione generatrice presentato in RM111. Ma io mi trovo più a mio agio con le trasformate. Questione di gusti.

In alternativa al metodo precedente proviamo a calcolare la probabilità asintotica di S_3 e S_7 (giusto per fare un esempio diverso dal precedente basato su S_0 e S_7). Useremo ancora le trasformate Z.

Cancelliamo dalla catena di Markov gli archi uscenti da S_3 e S_7 e sostituiamoli con archi di "loopback": in questo modo evidenziamo che una volta giunti negli stati "assorbenti" ci rimaniamo. Con questa scelta $P_3(t)$ indica le probabilità di essere in S_3 al tempo t (magari essendoci arrivati negli istanti precedenti a t ma permanendovi). Analogamente per $P_7(t)$.

Si noti inoltre che essendo queste due funzioni monotone crescenti e limitate esiste il loro limite (ed è finito) per t $\to\infty$ e la loro somma, visto che conosciamo il significato "probabilistico", tende asintoticamente a 1.

Il nostro scopo ora è confrontare il limite per t $\to\infty$ di $P_3(t)$ con l'analogo limite di $P_7(t)$. Questi limiti, infatti, rappresentano le probabilità di vittoria in un qualche istante per chi fa le rispettive scelte.

La matrice di transizione H_{37} ora si ottiene dalla F sostituendo le colonne 3 e 7 (ricordo che stiamo contando da zero) con due colonne piene di "zeri" salvo un "uno" proprio nelle posizioni rispettivamente 3 e 7.

Il sistema che dobbiamo risolvere (con la solita condizione iniziale) è: $P(t+1) = H_{37} \cdot P(t)$.

Sappiamo già che la trasformata Z della soluzione è esprimibile con:

$$P(z) = z \cdot (z \cdot I - H_{37})^{-1} \cdot P(0)$$

Troviamo P(∞) ricordando il teorema del valore finale delle trasformate Z, cioè:

$$P(\infty) = \lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{z\to 1}(z-1)P(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot z \cdot (z \cdot I - H_{37})^{-1} \cdot P(0)$$

[21]Si può provare che:

(e qui abbiamo dovuto dedicare un'intera pagina al Nostro…)

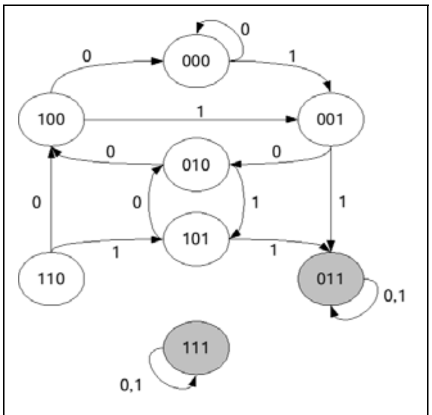
[21] Relativamente alla verifica delle condizioni di convergenza rifarsi a ... wikipedia ...

$$(z-1)\cdot P(z) = (z-1)\cdot z\cdot[z\cdot I - H_{37}(z)]^{-1}\cdot P(0) =$$

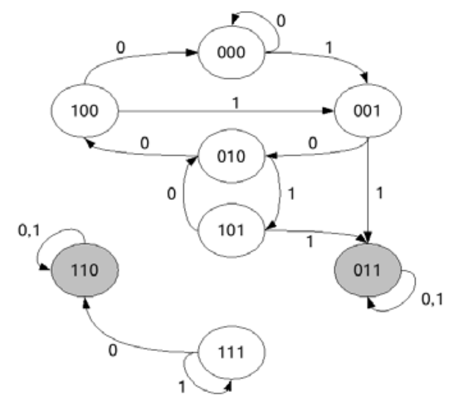
$$= (z-1)z \begin{bmatrix} \frac{8z^3-2z-1}{8z^4-4z^3-2z^2} & \frac{1}{8z^4-4z^3-2z^2} & \frac{1}{4z^3-2z^2-z} & 0 & \frac{4z^2-1}{8z^4-4z^3-2z^2} & \frac{1}{8z^4-4z^3-2z^2} & \frac{1}{4z^3-2z^2-z} & 0 \\ \frac{4z^2-1}{8z^4-4z^3-2z^2} & \frac{8z^3-4z^2-2z+1}{8z^4-4z^3-2z^2} & \frac{1}{4z^3-2z^2-z} & 0 & \frac{4z^2-1}{8z^4-4z^3-2z^2} & \frac{1}{8z^4-4z^3-2z^2} & \frac{1}{4z^3-2z^2-z} & 0 \\ \frac{1}{4z^3-2z^2-z} & \frac{2z-1}{4z^3-2z^2-z} & \frac{4z-2}{4z^2-2z-1} & 0 & \frac{1}{4z^3-2z^2-z} & \frac{2z-1}{4z^3-2z^2-z} & \frac{1}{4z^3-2z^2-z} & 0 \\ \frac{1}{4z^3-6z^2+z+1} & \frac{2z-1}{4z^3-6z^2+z+1} & \frac{1}{4z^3-6z^2+z+1} & \frac{1}{z-1} & \frac{1}{4z^3-6z^2+z+1} & \frac{2z-1}{4z^3-6z^2+z+1} & \frac{1}{4z^3-6z^2+z+1} & 0 \\ \frac{1}{8z^4-4z^3-2z^2} & \frac{2z-1}{8z^4-4z^3-2z^2} & \frac{2z-1}{4z^3-2z^2-z} & 0 & \frac{8z^3-4z^2-2z+1}{8z^4-4z^3-2z^2} & \frac{2z-1}{8z^4-4z^3-2z^2} & \frac{2z-1}{4z^3-2z^2-z} & 0 \\ \frac{1}{8z^4-4z^3-2z^2} & \frac{2z-1}{8z^4-4z^3-2z^2} & \frac{2z-1}{4z^3-2z^2-z} & 0 & \frac{1}{8z^4-4z^3-2z^2} & \frac{8z^3-4z^2-1}{8z^4-4z^3-2z^2} & \frac{2z-1}{4z^3-2z^2-z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{z-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(z-1)(4z^2+2z+1)}{8(4z^2-2z-1)} \\ \frac{(z-1)(4z^2+2z+1)}{8(4z^2-2z-1)} \\ \frac{(z-1)(4z^2+2z+1)}{8(4z^2-2z-1)} \\ \frac{z(4z^2+2z+1)}{8(4z^2-2z-1)} \\ \frac{(z-1)(4z^2+2z-1)}{8(4z^2-2z-1)} \\ \frac{(z-1)(4z^2+2z-1)}{8(4z^2-2z-1)} \\ \frac{z-1}{8} \\ \frac{z}{8} \end{bmatrix} \xrightarrow{z\to 1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{7}{8} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

cioè che $P_3(\infty)=7/8$ e $P_7(\infty)=1/8$.

Diciamo anche che questo risultato non era particolarmente difficile da intuire osservando come sarebbe diventata la catena di Markov: lo stato 111 è isolato, quindi o lo si raggiunge (e con probabilità 1/8) già alla prima tripletta o il "destino" vuole che vinca (e con probabilità 7/8), "dopo poco o tanto tempo", la scelta 011.



*La seconda catena di **Trekker***

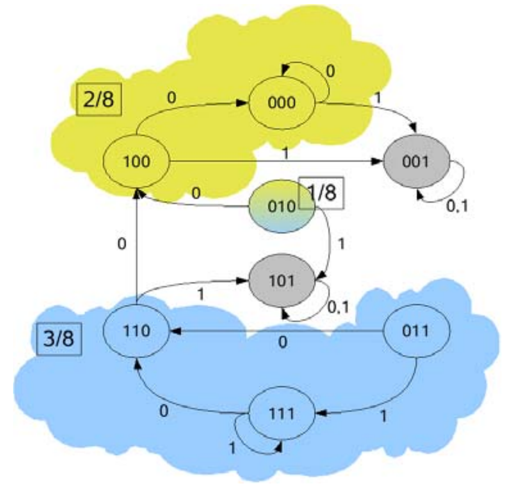


*La terza catena di **Trekker***

Ragionando sulla catena si possono fare altre intuizioni.

Ad esempio se le scelte fossero 011 e 110 il nostro "disegnetto" diventerebbe spezzandosi in due "sottografi" distinti. Se dopo la prima tripletta si è in 111 o 110 (e con probabilità 1/8+1/8=1/4) vince, prima o poi, chi ha scelto 110. Altrimenti, e con probabilità 6/8=3/4, vince, prima o poi, chi ha scelto 011.

Come ultimo esempio calcoliamo ad "occhio" le probabilità delle triplette 001 e 101 aiutandoci con il seguente grafico (a cui abbiamo tolto gli archi uscenti da 001 e 101 sostituendoli con archi di "loopback").



*L'ultimo esempio di **Trekker***

La tripletta 101 ha in "dote" la "sua" probabilità iniziale di 1/8 a cui si deve aggiungere ½ del contributo (pari a 3/8) dei nodi nella nuvola azzurra inferiore e ½ del contributo (pari a 1/8) del nodo 010, cioè

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{8}.$$

Analogamente la tripletta 001 ha in "dote" la "sua" probabilità iniziale di 1/8 a cui si deve aggiungere tutto il contributo iniziale (pari a 2/8) dei nodi nella nuvola gialla più ½ della "dote" iniziale (pari a 3/8) della nuvola azzurra e ½ del contributo (pari a 1/8) del nodo 010, cioè:

$$\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$

È "confortante" verificare che i risultati sono confermabili con i calcoli delle trasformate Z!

Le possibili coppie (non ordinate) di scelte sono 28. Sfruttando tutte le simmetrie ed eseguendo (quando "inevitabile") i calcoli con le matrici di cui sopra si trova questa tabella:

			Secondo Giocatore: Fred								Minimo del primo giocatore
	Stato		0	1	2	3	4	5	6	7	
		Binario	000	001	010	011	100	101	110	111	
Primo Giocatore: Alberto	0	000	X	1/2; 1/2;	2/5; 3/5;	2/5; 3/5;	**1/8; 7/8;**	5/12; 7/12;	3/10; 7/10;	1/2; 1/2;	1/8
	1	001	1/2; 1/2;	X	2/3; 1/3;	2/3; 1/3;	**1/4; 3/4;**	5/8; 3/8;	1/2; 1/2;	7/10; 3/10;	1/4;
	2	010	3/5; 2/5;	**1/3; 2/3;**	X	1/2; 1/2;	1/2; 1/2;	1/2; 1/2;	3/8 ; 5/8 ;	7/12; 5/12;	**1/3**
	3	011	3/5; 2/5;	**1/3; 2/3;**	1/2; 1/2;	X	1/2; 1/2;	1/2; 1/2;	3/4; 1/4;	7/8; 1/8;	**1/3**
	4	100	7/8; 1/8;	3/4; 1/4;	1/2; 1/2;	1/2; 1/2;	X	1/2; 1/2;	**1/3; 2/3;**	3/5; 2/5;	**1/3**
	5	101	7/12; 5/12;	3/8 ; 5/8 ;	1/2; 1/2;	1/2; 1/2;	1/2; 1/2;	X	**1/3; 2/3;**	3/5; 2/5;	**1/3**
	6	110	7/10; 3/10;	1/2; 1/2;	5/8; 3/8;	**1/4; 3/4;**	2/3; 1/3;	2/3; 1/3;	X	1/2; 1/2;	1/4;
	7	111	1/2; 1/2;	3/10; 7/10;	5/12 ; 7/12;	**1/8; 7/8;**	2/5 ; 3/5;	2/5 ; 3/5;	1/2; 1/2;	X	1/8
Minimo del secondo giocatore			1/8	1/4;	**1/3**	**1/3**	**1/3**	**1/3**	1/4;	1/8	

In ogni casella è indicata una coppia di probabilità: il primo numero rappresenta la probabilità di vittoria del primo giocatore qualora scegliesse la tripletta indicata all'inizio di riga e il secondo giocatore scegliesse la tripletta indicata all'inizio della colonna. Il secondo numero rappresenta la probabilità (ovviamente il complemento a uno del primo numero) di vittoria del secondo giocatore nelle medesime condizioni.

Le caselle in azzurro scuro indicano la strategia migliore per il secondo giocatore nota che gli sia la scelta fatta dal primo. In pratica se, ad esempio, Alberto, primo giocatore, annunciasse la tripletta CTT=100 allora la miglior contromisura di Fred sarebbe quella di scegliere CCT=110 poiché questo gli massimizza la probabilità di vittoria (=2/3).

La miglior strategia per Alberto, primo di mano, è quella di massimizzare il caso peggiore (vedere la colonna "Minimo del primo giocatore"): nel caso proposto si consiglia ad Alberto di scegliere fra **TCT=010 o TCC=011 o CTT=100 o CTC=101** in modo che abbia probabilità pari ad 1/3 di vincere (altrimenti possono essere "dolori"). **Ma è sicuramente Fred che con la scelta ottimale descritta dalla tabella di cui sopra ha più probabilità di vincere.** Potremmo dire che Fred parte avvantaggiato conoscendo la mossa di Alberto.

Nel caso che le triplette restino segrete reciprocamente conviene per entrambi l'ottimizzazione del caso peggiore: si suggerisce quindi ad entrambi di scegliere fra **TCT=010 o TCC=011 o CTT=100 o CTC=101.**

Immaginiamo ora che Alfredo[22] scelga la sua tripletta casualmente (ovvero con probabilità pari a 1/8=0.125) e ovviamente non la comunichi a Fred. Con la convenzione che in caso di scelta identica della tripletta si ricomincia, Fred potrebbe seguire la strategia di massimizzare il valore atteso scegliendo fra **TCC=011 e CTT=100** come si vede dalla tabella allegata ("trasposta" della precedente,"sciolte" le frazioni, e considerando solo le probabilità di vittoria del secondo giocatore) dove sono riportate le probabilità di vittoria caso per caso "pesate" con la probabilità 0.125.

			Giocatore che sceglie casualmente con equiprobabilità (=0,125) ogni tripletta								Valore atteso
	Stato		0	1	2	3	4	5	6	7	
		Binario	000	001	010	011	100	101	110	111	
Giocatore che ottimizza	0	000	0.000	0.500	0.400	0.400	0.125	0.417	0.300	0.500	0.330
	1	001	0.500	0.000	0.667	0.667	0.250	0.625	0.500	0.700	0.489
	2	010	0.600	0.333	0.000	0.500	0.500	0.500	0.375	0.583	0.424
	3	011	0.600	0.333	0.500	0.000	0.500	0.500	0.750	0.875	**0.507**
	4	100	0.875	0.750	0.500	0.500	0.000	0.500	0.333	0.600	**0.507**
	5	101	0.583	0.375	0.500	0.500	0.500	0.000	0.333	0.600	0.424
	6	110	0.700	0.500	0.625	0.250	0.667	0.667	0.000	0.500	0.489
	7	111	0.500	0.300	0.417	0.125	0.400	0.400	0.500	0.000	0.330

Per fortuna che di vie risolutive ce ne sono molte, guardate cosa fa ***Cid***:

Per trovare la strategia migliore, comincio definendo la seguente funzione:

[22] Nooo! Fred si chiama Federico, non Alfredo! [RdA]

P(A, F) = Probabilità che vinca Alberto nel caso in cui Alberto (primo giocatore) scelga la tripletta "A" e Fred (secondo giocatore) scelga la tripletta "F". Le triplette formano 8 possibili sequenze di testa e croce:

S_0=CCC, S_1=CCT, S_2=CTC, S_3=CTT, S_4=TCC, S_5=TCT, S_6=TTC, S_7=TTT

Ora definisco il concetto di tripletta complementare:

La tripletta S_c è complementare della tripletta S, se nelle posizioni in cui S ha una "testa" la tripletta S_c ha una "croce" e viceversa.

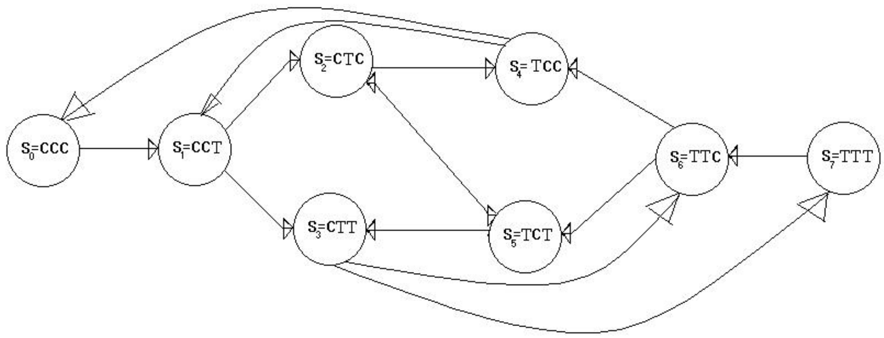
Chiaramente avremo che se $A = F$ o $A = F_c$: $P(A, F) = \frac{1}{2}$, inoltre avremo che:

$P(S_x,S_y) = 1 – P(S_y,S_x)$

Disegno ora la tabella di P(A, F) al variare di A e di F

P(A,F)	**A=S_0= CCC**	**A=S_1= CCT**	**A=S_2= CTC**	**A=S_3= CTT**	**A=S_4= TCC**	**A=S_5= TCT**	**A=S_6= TTC**	**A=S_7= TTT**
F=S_0= CCC	$\frac{1}{2}$	1 – $P(S_0,S_1)$	1 – $P(S_0,S_2)$	1 – $P(S_0,S_3)$	1 – $P(S_0,S_4)$	1 – $P(S_0,S_5)$	1 – $P(S_0,S_6)$	$\frac{1}{2}$
F=S_1= CCT		$\frac{1}{2}$	1 – $P(S_1,S_2)$	1 – $P(S_1,S_3)$	1 – $P(S_1,S_4)$	1 – $P(S_1,S_5)$	$\frac{1}{2}$	$P(S_0,S_6)$
F=S_2= CTC			$\frac{1}{2}$	1 – $P(S_2,S_3)$	1 – $P(S_2,S_4)$	$\frac{1}{2}$	$P(S_1,S_5)$	$P(S_0,S_5)$
F=S_3= CTT				$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$P(S_2,S_4)$	$P(S_1,S_4)$	$P(S_0,S_4)$
F=S_4= TCC				$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$P(S_2,S_3)$	$P(S_1,S_3)$	$P(S_0,S_3)$
F=S_5= TCT			$\frac{1}{2}$	1 – $P(S_2,S_4)$	1 – $P(S_2,S_3)$	$\frac{1}{2}$	$P(S_1,S_2)$	$P(S_0,S_2)$
F=S_6= TTC		$\frac{1}{2}$	1 – $P(S_1,S_5)$	1 – $P(S_1,S_4)$	1 – $P(S_1,S_3)$	1 – $P(S_1,S_2)$	$\frac{1}{2}$	$P(S_0,S_1)$
F=S_7= TTT	$\frac{1}{2}$	1 – $P(S_0,S_6)$	1 – $P(S_0,S_5)$	1 – $P(S_0,S_4)$	1 – $P(S_0,S_3)$	1 – $P(S_0,S_2)$	1 – $P(S_0,S_1)$	$\frac{1}{2}$

Risulta quindi sufficiente riempire le 12 caselle mancanti per trovare tutte le combinazioni possibili. Risolvo con le catene di Markov. Considero il seguente diagramma di Markov:



che rappresenta tutte le possibili transizioni da una tripletta alla tripletta successiva. Chiaramente, in queste condizioni, tutte le triplette si presentano con uguale probabilità.

Ora però dobbiamo modificare questo grafo, infatti le triplette scelte da Alberto e da Fred diventano stati "assorbenti" in quanto quando si giunge in questi stati il gioco finisce e non vi sono triplette successive. Occorre quindi eliminare i rami uscenti dagli stati "assorbenti". Inoltre occorre aggiungere uno stato iniziale, da cui si passerà ad uno degli altri 8 stati con probabilità uniforme. (Quindi con probabilità uguale a $\frac{1}{8}$ verso ciascuno degli 8 stati.)

Risolvere con il metodo delle catene di Markov i 12 casi possibili, implica la risoluzione di 12 sistemi lineari di 7 equazioni in 7 incognite [7 = (8 triplette possibili + 1 stato iniziale – 2 stati "assorbenti")]. Grazie alla soluzione di questi sistemi, è possibile completare la tabella:

P(A,F)	**A=S_0= CCC**	**A=S_1= CCT**	**A=S_2= CTC**	**A=S_3= CTT**	**A=S_4= TCC**	**A=S_5= TCT**	**A=S_6= TTC**	**A=S_7= TTT**
F=S_0= CCC	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{2}$
F=S_1= CCT	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$
F=S_2= CTC	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{12}$
F=S_3= CTT	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
F=S_4= TCC	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$
F=S_5= TCT	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$
F=S_6= TTC	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
F=S_7= TTT	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

A questo punto risulta abbastanza semplice rispondere alle domande del problema:

1)

La migliore strategia per il primo giocatore (Alberto) è: S_3 = CTT. La migliore strategia di risposta per Fred è: S_1 = CCT, $P(S_3, S_1) = \frac{1}{3}$. In caso di scelta ottimale di entrambi, la probabilità di vincere di Alberto è uguale a $\frac{1}{3}$, per cui risulta più probabile che vinca Fred.

2)

Se le triplette restano segrete, conviene scegliere con probabilità uniforme tra S_3 = CTT e S_4 = TCC (Se anche l'altro giocatore adotterà la stessa strategia o sceglierà S_2 o S_5 si avrà pari probabilità di vincere, altrimenti se l'altro giocatore sceglie S_1 o S_6 la probabilità di vincere sarà: $\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}{2}=\dfrac{13}{24}$ e se sceglie S_0 o S_7 la probabilità di vincere sarà: $\dfrac{\frac{7}{8}+\frac{3}{5}}{2}=\dfrac{59}{80}$.

3)

Con scelte casuali (e segrete), considerando una distribuzione casuale uniforme, calcolo la probabilità di vincita dell'avversario per ognuna delle possibili triplette:

Giocando la tripletta S_0 = CCC o S_7 = TTT:

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{7}{8}+\frac{7}{12}+\frac{7}{10}+\frac{1}{2}}{8}=\frac{583}{960}$$

Giocando la tripletta S_1 = CCT o S_6 = TTC:

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{2}+\frac{3}{10}}{8}=\frac{431}{960}$$

Giocando la tripletta S_2 = CTC o S_5 = TCT:

$$\frac{\frac{2}{5}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{5}{8}+\frac{5}{12}}{8}=\frac{493}{960}$$

Giocando la tripletta S_3 = CTT o S_4 = TCC:

$$\frac{\frac{2}{5}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}{8}=\frac{413}{960}$$

Da cui si deduce che in caso di scelta casuale da parte avversaria, la migliore strategia è scegliere una tra le due seguenti possibilità: S_3 = CTT o S_4 = TCC.

La soluzione di ***Val316*** è tutta scritta utilizzando la teoria dei giochi. Eccola:

Ho cercato di fornire una soluzione al problema tutta all'interno della teoria dei giochi, per quanto ovviamente mi era possibile, stante le mie conoscenze riconducibili alla lettura dell'ottimo libro "Di duelli, scacchi e dilemmi" di R.Lucchetti nonché del numero RM89 (non vorrei solleticare la suscettibilità di Rudy!)

Quindi abbiamo due giocatori che dispongono ognuno di 8 strategie possibili tante quanto sono le triplette che posso formare con le facce Testa/Croce di una moneta, ovvero con la coppia 0/1, il che è lo stesso. Ogni gioco che si rispetti ha la sua matrice dei pagamenti (payoff) che ci dice in sostanza quale siano le utilità rispettive dei due giocatori nel caso giochino le strategie a loro disposizione.

Nel problema in esame quale possono essere le utilità che un giocatore si aspetta nel giocare una delle mosse possibili?

Io mi sono risposto semplicemente dicendo che quello che ognuno dei due si aspetta è di garantirsi una probabilità di vittoria.

Se il giocatore I gioca una tripletta $T_1=a_1a_2a_3$ e il giocatore II una tripletta $T_2=b_1b_2b_3$ allora ci sarà una probabilità che T_1 esca prima di T_2, e quindi il giocatore I abbia una probabilità di vincere, e parimenti una probabilità che T_2 esca prima di T_1 che fornisce di converso una probabilità di vittoria per il secondo giocatore.

Ai fini del problema in esame lo sforzo maggiore risulta quindi quello di calcolare queste probabilità per tutte le possibili coppie di strategie (8x8 = 64).

Quella che segue è la matrice nella sua espressione puramente simbolica.

Il giocatore I gioca sulle righe e il giocatore II sulle colonne.

Ogni entry H_{ij} della matrice è per quanto ho detto sopra una coppia di valori

$H_{ij} \equiv (h_i, h_j)$

dove h_i è la probabilità che la tripla i, scelta dal giocatore I, esca prima della tripla j scelta dall'altro. In maniera analoga per h_j.

In generale

$h_i+h_j = 1$,

perché delle due una, o esce prima la tripla i oppure la tripla j.

	000	001	010	011		100	101	110	111
000	H_{00}	H_{01}	H_{02}	H_{03}		H_{04}	H_{05}	H_{06}	H_{07}
001	H_{01}^{-1}	H_{11}	H_{12}	H_{13}		H_{14}	H_{15}	H_{16}	H_{06}^{-1}
010	H_{02}^{-1}	H_{12}^{-1}	H_{22}	H_{23}		H_{24}	H_{25}	H_{15}^{-1}	H_{05}^{-1}
011	H_{03}^{-1}	H_{13}^{-1}	H_{23}^{-1}	H_{33}		H_{34}	H_{24}^{-1}	H_{14}^{-1}	H_{04}^{-1}
100	H_{04}^{-1}	H_{14}^{-1}	H_{24}^{-1}	H_{34}		H_{33}	H_{23}^{-1}	H_{13}^{-1}	H_{03}^{-1}
101	H_{05}^{-1}	H_{15}^{-1}	H_{25}	H_{24}		H_{23}	H_{22}	H_{12}^{-1}	H_{02}^{-1}
110	H_{06}^{-1}	H_{16}	H_{15}	H_{14}		H_{13}	H_{12}	H_{11}	H_{01}^{-1}
111	H_{07}	H_{06}	H_{05}	H_{04}		H_{03}	H_{02}	H_{01}	H_{00}

In generale ma non sempre. Infatti se i due giocatori giocano la stessa strategia (ovvero tripla) hanno la certezza di vincere entrambi nello stesso momento, basta solo aspettare che il caso faccio il suo corso. Quindi

$H_{ii} \equiv (1, 1)$.

Queste due considerazioni sospingono il nostro gioco fuori dal contesto piuttosto rassicurante dei giochi a somma zero, in cui l'ottimalità delle strategie è presieduta dalla regola del MAX MIN (MIN MAX).

Solleviamoci però con il fatto che ci sono delle più che *evidenti ragioni di simmetria®* (a questo punto è un trademark!) che ci semplificano il compito di calcolare i rimanenti 64-8=56 H_{ij}.

Prima simmetria. Scambiandoci le strategie ci scambiamo anche le probabilità:

$$H_{ji} \equiv (h_j, h_i) = (h_i, h_j)^{-1} = H_{ij}^{-1} \ .$$

Seconda simmetria. Una coppia di strategie è equivalente alla coppia di strategie *complementari a uno*:

$H_{ij} = H_{\bar{i}\bar{j}}$. (Esempio $(001, 101) \approx (110, 010) = (\overline{001}, \overline{101})$)

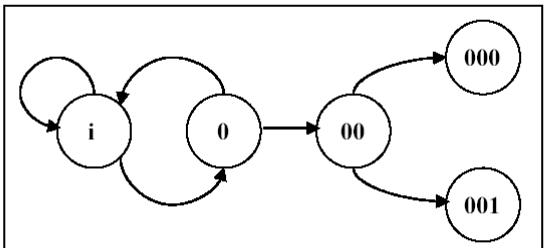
Applicando queste due simmetrie arriviamo alla matrice di cui sopra, in cui sono evidenziati con un colore di sfondo le coppie "indipendenti".

Passiamo al calcolo esplicito di queste coppie.

Ad ogni combinazione di strategie possiamo associare uno schema di Markov che cattura l'evoluzione del gioco e ci consente di valutare concretamente le probabilità di vincita del primo e del secondo giocatore.

Esaminiamo nel dettaglio una delle coppie di strategie possibili, le altre seguono secondo lo stesso ritmo. Ad esempio prendiamo la coppia (000,001), cioe supponiamo che il primo giocatore scelga di giocare la tripla 000 e il secondo la tripla 001.

Nella figura seguente ho disegnato la relativa catena di Markov. In questa e nelle successive catene le transizioni si suppongono avvengano sempre con probabilità ½ perché fanno riferimento al lancio di una moneta *fair*.



H_{01}

Il significato è abbastanza chiaro. Ad ogni lancio di moneta, partendo dallo stato iniziale (i), possiamo

- rimanere in quello stato, perché è uscito 1,

oppure

- transitare nello stato (0) perché è uscito 0, dopo di che
    - esce 1 e ritorniamo nello stato (i)

    oppure

    - esce 0 e passiamo in (00). A questo punto
        - esce 0 ed andiamo in (000): il giocatore I vince
        - esce 1 ed andiamo in (001): il giocatore II vince.

Quello che c'interessa è: come fare a calcolare la probabilità di arrivare in (000) partendo da (i)?

Per quanto mi riguarda, già in RM104, si era presentato un problema (una passeggiata nei politopi) che richiedeva un calcolo simile (a dire il vero anche nei numeri successivi ci sono stati di simili che sono stati risolti dai lettori con svariate tecniche) e in quel caso avevo adottato il concetto di *hitting time probability $h_k(A)$*. Per farla breve $h_k(A)$ è la probabilità di arrivare in uno degli stati dell'insieme A partendo dallo stato k. La versatilità di questa grandezza è che può essere determinata risolvendo un sistema lineare.

Nel caso in esame il sistema è il seguente

$$\begin{cases} h_0 = \dfrac{1}{2}h_0 + \dfrac{1}{2}h_1 \\ h_1 = \dfrac{1}{2}h_0 + \dfrac{1}{2}h_2 \\ h_2 = \dfrac{1}{2}h_3 \end{cases}$$

h_0 è la probabilità di arrivare in (000) a partire da i (è il valore che cerchiamo!)

h_1 è la probabilità di arrivare in (000) a partire da (0)

h_2 è la probabilità di arrivare in (000) a partire da (00)

h_3 è la probabilità di arrivare in (000) a partire da (000) (cioè 1!)

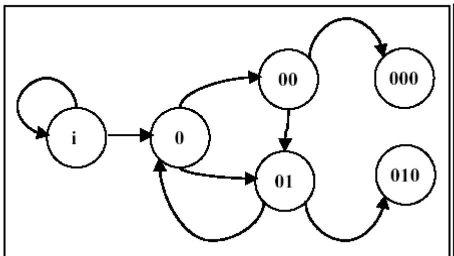
La prima equazione del sistema esprime il fatto che a partire da (i) arrivo in (000) o passando di nuovo da (i) oppure passando da (0) con eguale probabilità.

La seconda di dice che per arrivare in (000) da (0) posso passare o da (i) oppure da (00) sempre con eguale probabilità.

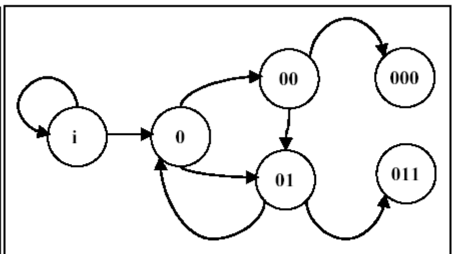
Infine la terza che per arrivare in (000) da (00) ho la metà di probabilità di arrivarci.

Risolto il sistema otteniamo che h_0 = ½ e quindi H_{01}=(1/2, 1/2).

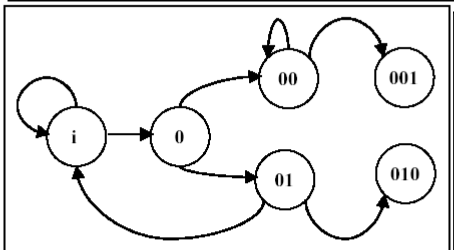
Ora per non essere troppo noioso e non dilungarmi troppo, preferisco omettere tutti i dettagli dei calcoli per le altre posizioni della matrice dei pagamenti. Tanto sono più o meno gli stessi. Faccio seguire solo gli schemi delle catene di Markov, senza commenti. Data la numerosità degli schemi spero di non essere incappato in qualche errore. Nel caso confido in ***Sand***!



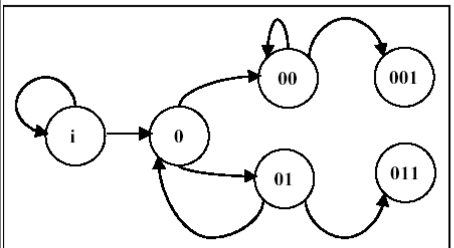
H_{02}=(2/5, 3/5)



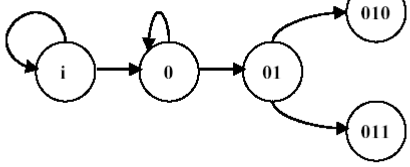
H_{03}=(2/5, 3/5)



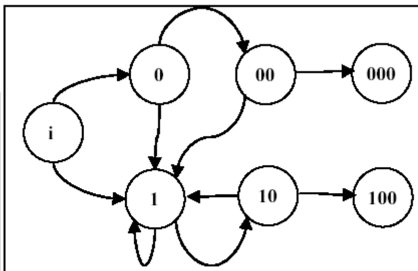
H_{12}=(2/3, 1/3)



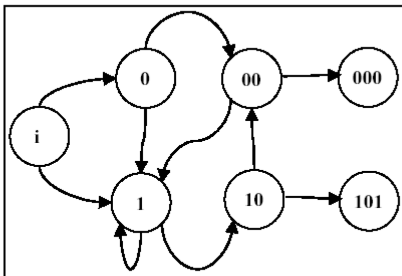
H_{13}=(2/3, 1/3)



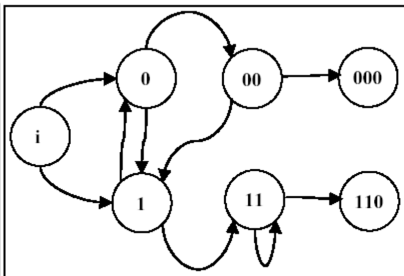
H_{23}=(1/2, 1/2)



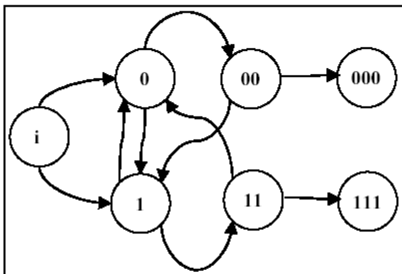
H_{04}=(1/8, 7/8)



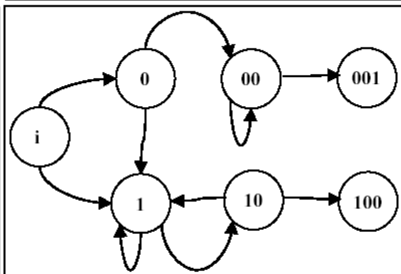
H_{05}=(5/12, 7/12)



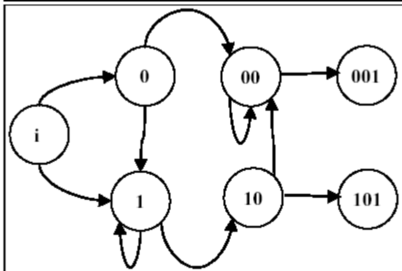
H_{06}=(3/8, 5/8)



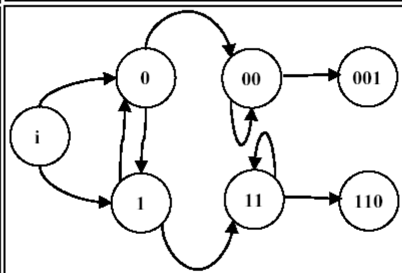
H_{07}=(1/2, 1/2)



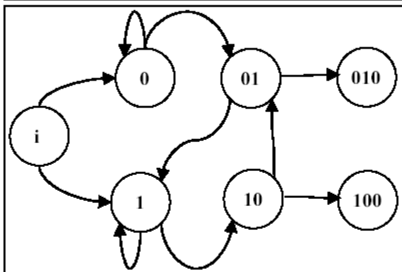
H_{14}=(1/4, 3/4)



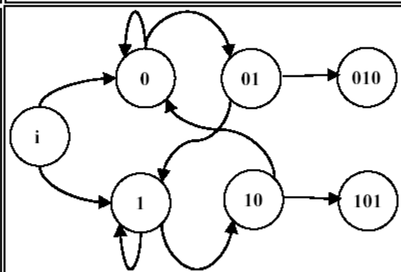
H_{15}=(5/8, 3/8)



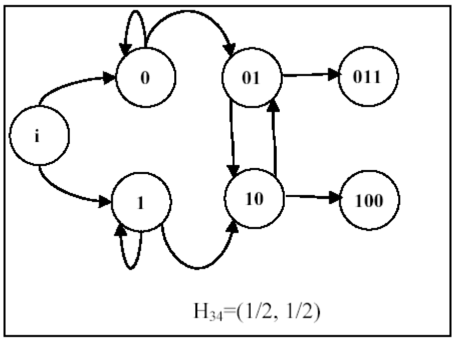
H_{16}=(1/2, 1/2)



H_{24}=(1/2, 1/2)



H_{25}=(1/2, 1/2)



(Dopo essermi sciroppato tutte questi schemi per un attimo mi è venuto in mente di cercare una clinica di disintossicazione di nome *libera nos a markov*, magari ad Aci Catena, ma ho resistito!)

Tutti questi calcoli si riflettono nella matrice dei payoff seguente. Per facilitare il colpo d'occhio sulla grandezza dei numeri coinvolti ho preferito convertire tutte le espressioni frazionarie nelle equivalenti decimali (è più veloce dire se 5/8 > 7/12 oppure se 0,62 > 0,58?).

	000	001	010	011		100	101	110	111
000	(1,1)	(0.5, 0.5)	(0.4, 0.6)	(0.4, 0.6)		(0.13, 0.87)	(0.42, 0.58)	(0.38, 0.62)	(0.5, 0.5)
001	(0.5, 0.5)	(1,1)	(0.67, 0.33)	(0.67, 0.33)		(0.25, 0.75)	(0.62, 0.38)	(0.5, 0.5)	(0.62, 0.38)
010	(0.6, 0.4)	(0.33, 0.67)	(1,1)	(0.5, 0.5)		(0.5, 0.5)	(0.5, 0.5)	(0.38, 0.62)	(0.58, 0.42)
011	(0.6, 0.4)	(0.33, 0.67)	(0.5, 0.5)	(1,1)		(0.5, 0.5)	(0.5, 0.5)	(0.75, 0.25)	(0.87, 0.13)
100	(0.87,0.13)	(0.75, 0.25)	(0.5, 0.5)	(0.5, 0.5)		(1,1)	(0.5, 0.5)	(0.33, 0.67)	(0.6, 0.4)
101	(0.58,0.42)	(0.38, 0.62)	(0.5, 0.5)	(0.5, 0.5)		(0.5, 0.5)	(1,1)	(0.33, 0.67)	(0.6, 0.4)
110	(0.62,0.38)	(0.5, 0.5)	(0.62, 0.38)	(0.25, 0.75)		(0.67, 0.33)	(0.67, 0.33)	(1,1)	(0.5, 0.5)
111	(0.5, 0.5)	(0.38, 0.62)	(0.42, 0.58)	(0.13, 0.87)		(0.4, 0.6)	(0.4, 0.6)	(0.5, 0.5)	(1,1)

Ora possiamo cercare di rispondere ai quesiti posti nel problema.

a) Il primo giocatore sceglie una tripla e la dichiara.

In una situazione come questa il secondo giocatore può sempre avvantaggiarsi rispetto al primo con un delta in più di probabilità di vincere. Infatti, si veda la tabella:

Se I gioca	Allora II gioca	$\Delta h = h_{II} - h_I$
000	100	+0,74
001	100	+0,5
010	001	+0,34
011	001	+0,34
100	110	+0,34
101	110	+0,34
110	011	+0,5
111	011	+0,74

Per I la scelta ottimale è quella di limitare le perdite scegliendo quelle strategie che restringono il delta a 0,34.

Per II la scelta ottimale è in relazione alla tripletta dichiarata da I e l'abbiamo indicata nella seconda colonna della tabella.

b) Le strategie rimangono segrete.

In questo caso lascio rispondere la teoria, la quale dice che in un gioco finito a informazione completa esiste sempre un equilibrio di Nash in termini di strategie pure e/o miste.

Ora non saprei calcolare esplicitamente le strategie miste di equilibrio (ci vorrebbe, e magari esistono già immagino, un software applicativo) ma le strategie pure invece sono facili da trovare.

E sono proprio le 8 strategie *imitative*, cioè quelle in cui il giocatore II gioca la stessa tripla del giocatore I. Infatti è facile vedere che se ci trovassimo, ad esempio, in (010, 010) con utilità (1,1) ogni giocatore avrebbe da perdere a cambiare unilateralmente la sua strategia.

c) Un giocatore sceglie casualmente le triplette.

Qui per casualmente io intendo con eguale probabilità (1/8).

Supponiamo ad esempio che il giocatore I scelga questa strategia. In maniera generale il giocatore II non può che adottare una strategia mista (al limite pura) che massimizzi la sua utilità media. Qual è la sua utilità media?

Supponiamo che II giochi con probabilità q_1 la tripla (000), q_2 (001) e così via, allora la sua utilità è data da

$$G(q_1,\ldots,q_8) = \frac{1}{8}\left(q_1 \sum_{k=1}^{8} H_{k0}^{(2)} + q_2 \sum_{k=1}^{8} H_{k1}^{(2)} + \ldots + q_8 \sum_{k=1}^{8} H_{k7}^{(2)} \right)$$

dove $H_{ij}^{(2)} \equiv h_j$ se $H_{ij} \equiv (h_i, h_j)$.

$\frac{1}{8} q_j \sum_{k=1}^{8} H_{kj}^{(2)}$ è l'utilità che il giocatore II ricava dal giocare con probabilità q_j la strategia della *j*-esima colonna.

Sostituendo i nostri valori numerici otteniamo per G :

$$G(q_1,\ldots,q_8) = \frac{1}{8}\left(3.73q_1 + 4.83q_2 + 4.39q_3 + 5.05q_4 + 5.05q_5 + 4.39q_6 + 4.83q_7 + 3.73q_8\right)$$

Si deve infine massimizzare G sotto il vincolo che $q_1+q_2+\ldots+q_8=1$ (7-simplesso)

Una funzione lineare su un simplesso ammette i suoi massimi/minimi sui vertici dello stesso.

Per cui ricaviamo che G è massima per $q5=1$ *o* $q4 = 1$ *o per* $q4+q5 = 1$. Cioè giocando la tripla (011) oppure la complementare (100) oppure un mix qualsiasi delle due e in particolare

$G_{MAX} = 5.05/8 \sim 0.63$.

L'utilità per il giocatore I invece è $3.95/8 \sim 0.49$.

Se il Capo vi aveva spaventato il mese scorso per il numero di pagine, questo numero vi farà tremare: i ragazzi della ***Stanza33*** hanno preparato una soluzione di tredici pagine, che includono una soluzione intuitiva, una verifica sperimentale ed infine la soluzione analitica... speriamo che ci perdonino se pubblichiamo solo la parte analitica.

Qui vogliamo mostrarvi come sia possibile determinare delle formule che, fissato a piacere il livello di profondità n, siano in grado di determinare il numero di occorrenze a quel livello di una data tripletta tale da non essere uscita mai nei livelli precedenti. Inoltre mostreremo come sia possibile addirittura i valori di aspettazione di prima occorrenza delle varie triplette confermando esattamente quando ottenuto nella parte B.

Vi diamo subito il risultato, dimostrandone poi una e lasciando al lettore il piacere di ricavarsi le altre sulla falsa riga del nostro ragionamento.

Indichiamo con M_n il numero totale di occorrenze al livello n-esimo (con $n \geq 3$) di una data tripletta; allora:

$$M_n^{TCC} = M_n^{TTC} = \sum_{k=1}^{n-2} N_k^{TCC-TTC}$$

$$M_n^{TCT} = \sum_{k=1}^{n-2} N_k^{TCT}$$

$$M_n^{TTT} = \sum_{k=1}^{n-2} N_k^{TTT}$$

(la presenza dello stesso tipo di sommatoria su k per tutti i casi deriva semplicemente dal fatto che partendo per tutti i casi dal considerare l'albero con radice T e contando il numero di occorrenza della tripletta scelta fino al livello n-esimo, al termine si dovrà ricordare che esiste anche l'albero con radice C che genera al livello immediatamente successivo un sottoalbero perfettamente identico a quello con radice T e un sottoalbero identico a quello con radice C. Ciò si può ripetere ad infinitum sfruttando l'autosimilarità intrinseca di tali alberi. Quindi fissato un livello n-esimo per ottenere effettivamente il numero di occorrenze della tripletta si dovranno sommare tutti i valori di occorrenza fino al livello n-esimo scelto)

I vari N_k sono definiti ricorsivamente dalle seguenti relazioni:

$$N_k^{TCC-TTC} = N_{k-1}^{TCC-TTC} + N_{k-2}^{TCC-TTC}$$

con (ovvero: {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55......})

$$N_1^{TCC-TTC} = N_2^{TCC-TTC} = 1$$

$$N_k^{TCT} = \sum_{m=1}^{k-1} N_m^{TCT} - N_{k-2}$$

con (ovvero:{1, 1, 1, 2, 4, 7, 12, 21,37,65,.......})

$$N_1^{TCT} = N_2^{TCT} = 1$$

$$N_k^{TTT} = 2\sum_{m=1}^{k-2} N_m^{TTT} - N_{k-2}$$

con (ovvero:{1, 0, 1, 2,3,6,11,20,37,68,.......})

$N_1^{TTT} = 1$ e $N_2^{TTT} = 1$

Ma se osservate bene $N_k^{TCC-TTC}$ altro non è che la successione di Fibonacci!

Ottenere le relazioni di ricorsione sopra scritte è il punto delicato in quanto la loro giusta scrittura implica il perfetto conteggio delle triplette senza dimenticarne nemmeno una, man mano che si scende di profondità nell'albero (da qui in avanti ci riferiamo all'albero con radice T). Ottenerle comunque non è difficile e spiegarlo a parole è piuttosto contorto, motivo per cui vi lasciamo il piacere di trovarle da voi (suggerimento: disegnate l'albero, a partire dalla radice contrassegnate la tripletta che vi interessa, tenete sempre a mente che tutti i rami che partono dalla coda di una tripletta vincente devono essere potati e quindi non li considerate più, cercate di vedere come una tripletta vincente generi delle teste vincenti ai livelli successivi o delle croci da cui poi si ottengono delle teste vincenti sempre a livelli più profondi, insomma dovete scrivere delle equazioni ricorsive specificando chi è figlio di chi ... giusto un consiglio, se provate a farlo per la tripletta TTC ci potreste perdere la testa ma alla fine viene comunque Fibonacci.)

Ora che il terreno è stato preparato dobbiamo quantificare il tutto, ovvero capire qual è il valor medio di prima uscita di una data tripletta. Per calcolarci questo valore di aspettazione dobbiamo eseguire il seguente calcolo:

$$E[n] = \left(\sum_{m=3}^{\infty} mM_m / 2^m \right) \Bigg/ \left(\sum_{m=3}^{\infty} M_m / 2^m \right)$$

Prima di procedere al calcolo effettivo di tale quantità per tutte le triplette (noi a titolo dimostrativo vi faremo vedere solo la TCC, ma in modo analogo si procede per le altre triplette) semplifichiamo un po' questa espressione in modo del tutto generale per ogni tripletta. Il denominatore di tale valor medio non è altro che la condizione di normalizzazione, cioè:

$$P(\infty) \equiv \left(\sum_{m=3}^{\infty} mM_m / 2^m \right) = ?$$

Usando la definizione di M_m e riscalando gli indici

$$(1/4)\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} \left(N_k / 2^m \right) = ?$$

Passaggio delicato

$$(1/4)\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \left(N_k / 2^m \right) = ?$$

riscaliamo gli indici

$$(1/4)\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \left(N_k / 2^{m+k} \right) = ?$$

la serie su m è risommabile facilmente perché è una serie geometrica

$$P(\infty) \equiv (1/2)\sum_{k=1}^{\infty} \left(N_k / 2^k \right)$$

usando trucchetti tipo quelli appena visti possiamo anche semplificare il numeratore del nostro valor medio:

$$\sum_{m=3}^{\infty} \left(m M_m / 2^m \right) = 2P(\infty) + (1/4)\sum_{k=1}^{\infty} N_k \sum_{m=k}^{\infty} \left(m / 2^m \right)$$

ma si può semplificare ulteriormente tenendo a mente i seguenti fatti sulle serie geometriche:

$$\sum_{m=k}^{\infty} x^m = \frac{x^k}{1-x} \quad \text{e} \quad \sum_{m=k}^{\infty} mx^m = x \frac{\partial}{\partial x} \sum_{m=k}^{\infty} x^m = x \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^k}{1-x} = \frac{x^k}{1-x} \cdot \frac{k+x}{1-x}$$

quindi

$$\sum_{m=3}^{\infty} \left(m M_m / 2^m \right) = 3P(\infty) + (1/2)\sum_{k=1}^{\infty} \left(kN_k / 2^k \right)$$

A questo punto non ci resta che calcolare $P(\infty)$ e $(1/2)\sum_{k=1}^{\infty} \left(kN_k / 2^k \right)$ per ogni tripletta. Lo facciamo in modo esplicito, per farvi vedere i trucchetti da usare, solo per la tripletta TCC. In tal caso allora:

$$P(\infty)^{TCC} = (1/2)\sum_{k=1}^{\infty}\left(N_k/2^k\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\sum_{k=3}^{\infty}\left(N_k/2^k\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\sum_{k=3}^{\infty}\left(N_{k-1}/2^k\right)+\sum_{k=3}^{\infty}\left(N_{k-2}/2^k\right)\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(N_k/2^k\right)+\frac{1}{4}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(N_k/2^k\right)\right)$$

guardando il primo ed ultimo termine si ha un'equazione per P(oo) da cui si ricava: $P(\infty) = 1$. Allo stesso modo, giocando sul riscalamento degli indici, sfruttando la definizione ricorsiva di N_k e sommando e sottraendo opportune quantità si può scrivere un'equazione anche per $(1/2)\sum_{k=1}^{\infty}\left(kN_k/2^k\right)$ da cui si ottiene:

$$(1/2)\sum_{k=1}^{\infty}\left(kN_k/2^k\right) = 5$$

in definitiva si ha:

$E[n]^{TCC} = (3*1+5)/1$

$E[n]^{TCC} = 8$

Che dire! esattamente quello che abbiamo ottenuto con il Montecarlo nell'esperimento numerico! Tutto torna! Ora con un po' di pazienza e attenzione si riescono a risommare, con gli stessi trucchi, anche le altre serie per le altre triplette e si ottiene perfetta conferma dei dati numerici, cioè:

$E[n]^{TTC} = 8$

$E[n]^{TCT} = 10$

$E[n]^{TTT} = 14$

E questo è il risultato intuito e tanto cercato! Volevamo sbizzarrirci a calcolare anche le varianze di tali oggetti (avrete capito che qualsiasi momento di ordine p può essere risommato grazie alla ricorsione) ma sarebbe stato troppo. Già così abbiamo snocciolato il problema molto più a fondo di quanto forse servisse per rispondere alle domande:

1- la miglior strategia per ognuno dei due giocatori è scegliere fra TTC, TCC, CTT,CCT. Nel caso di scelta ottimale da entrambe le parti il gioco è alla pari.

2- se le scelte restano segrete la strategia non cambia

3- se una tripletta è scelta casualmente, la strategia ottimale è sempre la precedente.

Comunque è stato un tour eccitante e strepitoso che ha mostrato la supremazia di Fibonacci! Grazie e scusate le lungaggini.

(***Alexphys***, ***Aldidori***, ***Pabell***) alias "***Stanza 33***"

E con questo abbiamo detto tutto per questo mese.

6. Quick & Dirty

Questa volta ci servono solo quattro carte ed un paio di monetine. Avete, giustappunto, due carte rosse e due nere. Queste carte sono mescolate e messe sul tavolo faccia in giù. Vi si chiede di mettere le due monetine su quelle che scommettete essere due carte dello stesso colore.

Quanto vi sentite fiduciosi della vostra scelta? Ossia, quali sono le probabilità che ci abbiate azzeccato?

7. Pagina 46

(1) e (2):

Consideriamo contemporaneamente le due serie; di tutte le frazioni che le compongono, scegliamo quella il cui denominatore contiene come fattore la più grande potenza di 2; si verifica facilmente che in ognuna delle serie esiste una sola frazione di questo tipo.

Se ora scriviamo ogni termine in modo tale da avere come denominatore il minimo comune multiplo di tutti i denominatori, tutti i termini tranne quello selezionato acquisiranno un fattore 2 al numeratore, mentre il numeratore del termine selezionato acquisirà solo fattori dispari.

Quindi, quando le frazioni sono sommate in questa forma, il numeratore sarà dato da *un* numero dispari sommato ai restanti numeratori pari dando quindi un valore dispari; di converso il denominatore comune, contenendo una potenza di 2, sarà sicuramente pari.

Il numeratore quindi non sarà mai divisibile per il denominatore, e quindi il risultato della somma non sarà mai un intero.

(3):

Consideriamo il termine il cui denominatore contiene la più grande potenza di 3; sia essa n. Essendo tutti i denominatori dispari, nella somma K non può apparire nessun termine nella forma $\frac{1}{2\cdot 3^n}$. Se calcoliamo il minimo comune multiplo di tutti i denominatori allora ogni termine, con l'eccezione di quello avente a denominatore la più grande potenza di 3, acquisirà un fattore 3 a numeratore. Quindi, otteniamo come valore di K una frazione il cui denominatore è divisibile per 3, mentre il numeratore non è divisibile per 3; quindi, non può essere un intero.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Sarchiaponi (simmetrici) sostanzialmente simpatici

Dunque, questa volta tocca ad un altro oggetto di quelli che non siamo sicuri a cosa servano. La cosa interessante, qui, è che trattasi di cose che hanno l'aria semplice, ma vedrete che prima della fine riusciremo a parlare di oggetti decisamente complicati.

Parliamo di *sequenze*. Cominciamo dalla definizione.

Una sequenza è una lista ordinata di oggetti, detti *termini*. Una sequenza si dice *ordinata* se i suoi termini, presi dal primo all'ultimo, sono uguali ai suoi termini presi dall'ultimo al primo.

Per intenderci, consideriamone un paio: ad esempio (8,9,11,47,11,9,8) è una sequenza simmetrica di interi; se volete complicarvi la vita, potete considerare che ({*a*,*b*},{6,22},{*a*,*b*}) è anche lei una sequenza simmetrica, ma questa volta di *insiemi*. Se vi piacciono le definizioni con gli indici, la cosa è riassumibile come:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \text{ è simmetrica} \Leftrightarrow a_i = a_{n+1-i}, 1 \le i \le n$$

Come spesso nella matematica, la complicazione è dietro l'angolo con un grosso randello, quindi attenti. La prossima domanda che possiamo porci è cosa ci facciamo con questi aggeggi; per prima cosa, definiamo le trasformate.

Una *trasformata* è una funzione che trasforma sequenze in sequenze; non solo, ma se trasforma sequenze simmetriche in sequenze simmetriche (ossia se conserva la simmetria) la trasformata si dice *simmetrica*.

Sarebbe carino riuscire a costruirli, aggeggi del genere; volendo sempre procedere per metodi teorici e di definizione, diciamo che un *generatore di sequenze simmetriche* è un costrutto in grado di generare una sequenza infinita di sequenze simmetriche, ed è composto da tre oggetti:

1. Una *sequenza simmetrica iniziale*, indicata da S_0.
2. Una *trasformata simmetrica*, indicata da T.
3. Una *sequenza infinita* $(S_1, S_2, S_3, \ldots)$ i cui termini sono generati ricorsivamente dalla $S_k = T(S_{k-1})$.

Diciamo inoltre che $a_{k,i}$ indica l'*i*-esimo termine della *k*-esima sequenza, e che le definizioni di *estremi* e di *centro* di una sequenza non ve le diamo perché speriamo che ci arriviate da soli.

Andrebbero definite anche le *subsequenze*, e di queste andrebbero definite quelle *proprie*, *contigue*, *simmetriche* e *speculari*; una volta però che abbiamo detto che una subsequenza è un insieme di pezzi di una sequenza, le definizioni degli elementi sopra dovrebbero essere immediate. Attenzione solo che, della sequenza (simmetrica) (2,8,9,15,9,8,2), potete definire la subsequenza (simmetrica anche lei) (2,8,8,2), prendendo l'inizio e la fine. Non solo, ma ad esempio potete estrarre una subsequenza (non simmetrica) (2,8,15) e la sua speculare (15,8,2). Si vede, che abbiamo saltato dei termini?

Se fin qui vi sembra di un'ovvietà e di una noia pazzesca, avete tutta la nostra comprensione. Le cose cominciano ad essere interessanti quando si comincia a parlare di *sequenze di gap*; da un punto di vista formale, una sequenza di gap è definita come una sequenza di interi con tutti i termini maggiori di zero; non solo, ma è anche dotata di un *inizio* e una *fine* e, per distinguerla dalle sequenze normali, è chiusa tra *parentesi quadre*. Per intenderci, ${}_0[6,2,6,2,6]_{22}$ è una sequenza di gap.

Aspettate la fine del prossimo paragrafo per chiedere a cosa servono.

Si definisce invece *sequenza di accumulazione* una sequenza di interi strettamente crescente, dotata di *inizio* e *fine* racchiusa tra parentesi tonde; ad esempio, ${}_0(6,8,14,16)_{22}$ è una sequenza di accumulazione.

Ora, la cosa interessante è che

$$ {}_0[6,2,6,2,6]_{22} \equiv {}_0(6,8,14,16)_{22} . $$

Ossia, abbiamo una corrispondenza tra la *rappresentazione di gap* e la *rappresentazione di accumulazione* delle due sequenze: prendete l'inizio della rappresentazione di gap, scrivetelo come inizio della rappresentazione di accumulazione, aggiungete a questo il primo termine della rappresentazione di gap e scrivetelo come primo termine della rappresentazione di accumulazione, continuate così sin quando non arrivate alla fine della rappresentazione di gap che scriverete come fine della rappresentazione di accumulazione. Più facile a farsi che a dirsi, se usate come esempio quelli che vi abbiamo dato poco sopra. Attenzione che nessuno dice che debbano cominciare da zero; ${}_{55}[1,8,1]_{65} \equiv {}_{55}(56,64)_{65}$ è ancora una corrispondenza.

Bene, giusto perché non crediate che abbiamo perso di vista le ovvietà, la regione compresa tra inizio e fine si chiama *regione*. Il concetto è importante perché se la sequenza di gap è associata ad una regione potete derivare univocamente la sequenza di accumulazione; se invece non avete associata una regione (ossia non avete un inizio e una fine), allora le sequenze di accumulazione ottenibili sono infinite.

Un ramo della matematica non è interessante se non ha qualche termine gergale, quindi giunge il momento di darsi da fare in merito. Pronti? Via.

Un *centro* di una sequenza di accumulazione è evidentemente definito come la media aritmetica tra l'inizio e la fine, mentre il suo *campo* ("range", in inglese; usate pure questo, che fa fine e non impegna) è dato dalla fine meno l'inizio e per una successione *S* si indica di solito con *R(S)*; evidentemente, entrambi i concetti possono essere applicati non solo alla sequenza, ma anche alla sua regione.

I termini speculari li abbiamo già visti (e dovreste accorgervi da soli che nelle sequenze di accumulazione non sono mai uguali: non sono simmetriche), ma la complicazione nasce dal fatto che definiamo una sequenza di accumulazione *d-simmetrica* se la sua sequenza di gap è simmetrica, ossia se i termini speculari sono uguali tra loro; non stiamo a dimostrarlo (ci pare evidente), ma *una sequenza di accumulazione è* d-simmetrica *se e solo se i termini speculari sono equidistanti tra loro*. Infatti, quella "d" sta per "distanza". È immediato, a questo punto, accorgersi che i termini speculari devono anche essere equidistanti rispettivamente dalla fine e dall'inizio e che (ma questo è più difficile) che una sequenza di accumulazione è d-simmetrica se e solo se la somma di ogni coppia di termini simmetrici è pari alla somma dell'inizio e della fine.

Adesso arriva la domanda difficile: dato un campo ("range") $r \geq 0$, quante sono le sequenze simmetriche di gap nell'intervallo? Ve lo dimostrate voi, noi ci limitiamo a darvi la risposta: ci sono 2^m sequenze simmetriche distinte; $m = \frac{r}{2}$ se *r* è pari, e $m = \frac{r-1}{2}$ se è dispari. Carino, vero?

Notate che nella risposta non abbiamo detto se si parla di sequenze di accumulazione o di gap; infatti, sovente si possono confondere, ma non sempre. La cosa è noiosa e scarsamente interessante, quindi se volete la dimostrate voi.

Si comincia ad arrampicare, come dice mio cugino, quando si parte a parlare di *trasformate simmetriche*. Tanto per cominciare, meglio se facciamo qualche esempio; i primi sono facili, poi complichiamo la cosa. I termini coinvolti sono sottolineati.

1. Cancellare uno o più termini speculari (se la lunghezza è pari la "cancellazione del termine centrale è la trasformazione identità): $[1,\underline{4,2},4,\underline{2,4},1] \rightarrow [1,4,1]$.

2. Sommare o moltiplicare per una costante uno o più gap speculari (attenti a inizio e fine, se definiti; per le accumulazioni, dovete moltiplicare tutta la sequenza): ${}_0\underline{[1,3,5,3,1]}_{13} \cdot 4 \rightarrow {}_0[4,12,5,12,4]_{52}$.

3. Raggruppare coppie di termini speculari sommandoli tra di loro o moltiplicandoli (qui, se moltiplicate, attenti alla fine): ${}_1[3,\underline{5,6},7,\underline{6,5},3]_{36} \rightarrow {}_1[3,30,7,30,3]_{74}$.

4. Unire coppie speculari di sequenze simmetriche agli estremi uguali o diverse tra loro: $[1,2,1]\,\&\,[3,4,4,3]\,\&\,[1,2,1] \rightarrow [1,2,1,3,4,4,3,1,2,1]$.

5. "Sommare" due accumulazioni (mettere assieme tutti i termini: se ci sono termini duplicati, compaiono in copia singola: attenti a inizio e fine): ${}_0(3,5,8,24,27,29)_{32} + {}_0(3,4,28,29)_{32} \rightarrow {}_0(3,4,5,8,24,27,28,29)_{32}$.

6. Cancellare un'accumulazione da un'altra (i termini non presenti non hanno influenza): ${}_0(3,\underline{5},8,24,\underline{27},29)_{32} \setminus {}_0(5,6,26,27)_{32} \rightarrow {}_0(3,8,24,29)_{32}$.

…e avanti di questo passo; non solo, ma è definita anche la trasformazione di *replica*, consistente nell'unione di copie identiche della stessa sequenza (di gap o di accumulazione) e indicata da un esponente. Qui, soprattutto per le accumulazioni, la cosa si fa complessa, quindi vi facciamo un esempio; notate che la sequenza di gap descrive la sequenza di accumulazione:

$$[1,8,1]^3 = [1,8,1]\,\&\,[1,8,1]\,\&\,[1,8,1] = [1,8,1,1,8,1,1,8,1];$$
$$ {}_0(1,9)_{10}^3 = (0\cdot 10 + {}_0(1,9)_{10})\,\&\,(1\cdot 10 + {}_0(1,9)_{10})\,\&\,(2\cdot 10 + {}_0(1,9)_{10})$$
$$= {}_0(1,9,10,11,19,20,21,29)_{30} \equiv [1,8,1,1,8,1,1,8,1].$$

Chiariamo il conto per le accumulazioni: per ottenere le tre accumulazioni da unire prendiamo il *range* (pari a fine meno inizio: attenti che qui somiglia alla fine), lo moltiplichiamo per tutti i numeri tra zero e l'esponente meno uno (qui 0, 1 e 2), gli aggiungiamo la sequenza di accumulazione originale e facciamo l'unione delle tre sequenze. Non è semplicissimo, la buona notizia è che lavorando sui gap abbiamo un calcolo decisamente più semplice e lo stesso risultato.

Questo aggeggio si indica, se S è la successione, con S^e; e la cosa non è molto bella, in quanto con lo stesso simbolo si indica anche l'*unione somma*, e i risultati sono *diversi!*

$$[1,8,1]^3 = [1,8,1+1,8,1+1,8,1] = [1,8,2,8,2,8,1];$$
$$ {}_0(1,9)_{10}^3 \equiv {}_0[1,8,1]_{10}^3 = {}_0[1,8,2,8,2,8,1]_{30} \equiv {}_0(1,9,11,19,21,29)_{30}.$$

Qui, per le accumulazioni, abbiamo usato il metodo veloce, ma potete verificare facilmente che anche con il calcolo complicato si ottiene lo stesso risultato (attenti ad applicare l'unione somma, non solo l'unione).

Adesso arriva un indizio di un possibile uso di questi aggeggi.

Tra le operazioni di cancellazione, è di particolare interesse una definita sulle successioni di cumulazione, indicata come $S \setminus_M k$ e consistente nel cancellare dalla successione S tutti i termini *multipli di k*. Seguono alcuni esempi sulla successione ${}_{30}(31,32,33,34,35)_{36} \equiv {}_{30}[1,1,1,1,1,1]_{36}$:

1. ${}_{30}(31,32,33,34,35)_{36} \setminus_M 1 = {}_{30}(\;)_{36} \equiv {}_{30}[6]_{36}$;

2. ${}_{30}(31,32,33,34,35)_{36} \setminus_M 2 = {}_{30}(31,33,35)_{36} \equiv {}_{30}[1,2,2,1]_{36}$;
3. ${}_{30}(31,32,33,34,35)_{36} \setminus_M 3 = {}_{30}(31,32,34,35)_{36} \equiv {}_{30}[1,1,2,1,1]_{36}$;
4. ${}_{30}(31,32,33,34,35)_{36} \setminus_M (2,3) = {}_{30}(31,35)_{36} \equiv {}_{30}[1,4,1]_{36}$;
5. ${}_{30}(31,32,33,34,35)_{36} \setminus_M 4 = {}_{30}(31,33,34,35)_{36} \equiv {}_{30}[1,2,1,1,1]_{36}$;
6. ${}_{30}(31,32,33,34,35)_{36} \setminus_M 5 = {}_{30}(31,32,33,34)_{36} \equiv {}_{30}[1,1,1,1,2]_{36}$;
7. ${}_{30}(31,32,33,34,35)_{36} \setminus_M 17 = {}_{30}(31,32,33,35)_{36} \equiv {}_{30}[1,1,1,2,1]_{36}$.

Se avete avuto problemi con la (4), lì si cancellano sia i multipli di 2 che di 3; comunque, vorremmo attrarre la vostra attenzione sul fatto che le sequenze di gap corrispondenti sono *simmetriche* nei primi quattro casi mentre non lo sono nei restanti tre; infatti, sussiste un interessante teorema:

> Per *k*>0, quando *k* ha dei multipli nella regione di accumulazione, $S \setminus_M k$ conserva la simmetria se e solo se $(inizio + fine) \equiv 0 \pmod k$.

Nel caso (4) visto sopra, deve evidentemente valere per tutti i *k*.

Se vi state annoiando, potreste provare a dimostrare il teorema che segue: qui l'esponente indica l'unione sommata e *k*>0

> Se per $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ è sia $(inizio + fine) \equiv 0 (\bmod k)$ e $R(S) \equiv 0 (\bmod k)$, allora per qualsiasi esponente $e \geq 1$ si ha che $(S \setminus_M k)^e = S^e \setminus_M k$ e entrambe conservano la simmetria.

Vi ricordiamo che *R(S) = fine – inizio*. Carina, vero?

Ripartiamo con le definizioni: la *lunghezza L(S)* – l'abbiamo già usata: è, intuitivamente, il numero dei termini in una sequenza – e il *range R(S)* – fine meno inizio – vi sono noti, ce ne servono ancora un paio. Definiamo la *media* (o *average*) come *A(S)=R(S)/L(S)*, e il *conto C(S)* di *a* nella sequenza *S* come il numero di volte che *a* compare in *S* (o il numero delle *istanze* di *a* in *S*: attenti che *a* può essere una sequenza, e qui il concetto si complica).

Adesso lavoriamo con i Generatori di Sequenze Simmetriche; per farci un attimo le ossa e prima di passare a quella che ci interessa (ingannevolmente semplice), cominciamo con una facile sul serio.

Il Generatore di Sequenze Semplici $GSS - 1,8,1$ è composto da:

1. La sequenza iniziale $S_0 = [1,8,1]$;
2. La trasformata S^e con $e \geq 1$ (attenzione che qui è un'unione semplice);
3. La sequenza di sequenze generata ricorsivamente da $S_k = S_{k-1}^k$.

Complicato? Meno di quanto sembri. Vi diamo le prime tre sequenze generate da $GSS - 1,8,1$:

$$S_1 = S_0^1 = [1,8,1]^1 = [1,8,1];$$
$$S_2 = S_1^2 = [1,8,1]^2 = [1,8,1,1,8,1];$$
$$S_3 = S_2^3 = [1,8,1,1,8,1]^3 = [1,8,1,1,8,1,1,8,1,1,8,1,1,8,1,1,8,1].$$

…e avanti così.

Non è difficile calcolare alcuni dei parametri che abbiamo definito precedentemente; si ricava facilmente che:

$$L(S_k) = k \cdot L(S_{k-1});$$
$$R(S_k) = k \cdot R(S_{k-1});$$
$$A(S_k) = R(S_k)/L(S_k) = R(S_0)/L(S_0) = 3,\bar{3}.$$

Il *Conto* è un guaio, soprattutto se cominciate a parlare di sequenze: infatti $C(GSS-1{,}8{,}1\,,\,i)$ è illimitato per i pari a 1 o 8, mentre vale zero per tutti gli altri interi positivi; non solo, ma $C(GSS-1{,}8{,}1\,,\,S_k)$ è illimitato per qualsiasi S_k.

Bene, adesso arriva il Mostro. E, come sempre, all'inizio ha l'aria di un innocente e innocuo coniglietto. Si definisce $GSS-1{,}1$ come:

1. La sequenza simmetrica iniziale (di gap) $S_0 = [1{,}1]$.
2. La trasformata $T(S) = S^P \setminus_M P$, dove:
   - 2.1. P è la somma dei primi due gap di S.
   - 2.2. $\setminus_M P$ cancella i multipli "cumulativi" di P da S^P;
     - 2.2.1. Assumiamo sia inizio=0, in modo tale da poter definire la corrispondenza univoca tra i gap e le accumulazioni in modo tale da poter passare alle accumulazioni, applicare $\setminus_M P$ e quindi riconvertire il tutto in gap.
     - 2.2.2. Non solo, ma possiamo eseguire la trasformazione direttamente sui gap utilizzando la congruenza cumulativa (modulo P) sui gap.
3. La sequenza infinita S_k generata applicando ricorsivamente T:
   - 3.1. $S_k = T(S_{k-1}) = S_{k-1}^P \setminus_M P$
     - 3.1.1. Useremo $p_k = P$ per meglio enfatizzare la relazione tra la somma dei primi due termini di S_{k-1} e la sequenza S_k.

Qualcuno vuole provare a fare un po' di conti? Sappiamo che non lo farete mai, quindi vi forniamo noi una tabella delle prime sequenze di $GSS-1{,}1$ e di alcune loro estensioni che forse riusciranno a farvi capire il loro significato; di seguito, trovate le sequenze generate, una sequenza estesa dei gap e la sequenza di accumulazione generata da questi gap.

Il primo passo risulta decisamente semplice:

$$S_0 = {}_0[1{,}1]_2;$$
$${}_0[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]_{30}$$
$$\equiv_0 (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,\ldots,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29)_{30}.$$

…talmente semplice da avere l'aria noiosa. Guardate il secondo:

$$S_1 =_0 [1,2,1]_4;$$
$$_0[1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,1]_{60}$$
$$\equiv_0 (1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,\ldots,41,43,45,47,49,51,53,55,57,59)_{60}.$$

….adesso dovrebbe cominciare a comparire uno schema. Il terzo risulta:

$$S_2 =_0 [1,4,1]_6;$$
$$_0[1,4,2,4,2,4,2,4,2,4,2,4,2,4,2,4,2,4,2,4,2,4,2,4,2,4,2,4,2,4,1]_{90}$$
$$\equiv_0 (1,5,7,11,13,17,19,23,\ldots,67,71,73,77,79,83,85,89)_{90}.$$

Posto che servano ulteriori indizi:

$$S_3 =_0 [1,6,4,2,4,2,4,6,1]_{30};$$
$$_0[1,6,4,2,4,2,4,6,2,6,4,2,4,2,4,6,2,6,4,4,2,4,4,4,2,4,6,2,6,4,2,4,2,4,2,4,6,1]_{120}$$
$$\equiv_0 [1,7,11,13,17,19,23,\ldots,97,101,103,107,109,113,119]_{120}.$$

A questo punto o state dormendo o dovrebbe esservi balzato alla mente il concetto di *Crivello di Eratostene*: è in grado di estrarre i primi, un passaggio alla volta.

Ed è esattamente quello che, nel campo della Teoria dei Numeri, si sta facendo: studiando le caratteristiche di questo aggeggio, si cerca di ottenere un modo generale per ricavare la struttura dei primi; è inquietante notare che alcuni complicati teoremi relativi a tale struttura diventano qui semplicissimi; ad esempio,

La struttura 2,4,6 presente in $S_3 = [1,6,4,2,4,\underline{2,4,6},1]$ si riprodurrà indefinitamente nelle successioni.	Esistono infinite coppie di primi nelle forme: (p,p+2); (p,p+4); (p,p+6).
Essendo $S_3 = [1,6,\underline{4,2},4,\underline{2,4},6,1]$, le sottosequenze [[2,4]], [[4,2]] e [[2,4,2]] si riproducono infinitamente nelle successioni.	Esistono infinite terne di primi nelle forme (p,p+2, p+6); e (p,p+4, p+6).
Ogni gap $a_{k,2}$ nella sequenza induttiva tende ad espandersi e quindi è una successione non limitata per k>2.	Esistono infiniti primi successivi con differenza p–1, dove p è un qualsiasi primo maggiore di 2.

Ora, questo è solo l'inizio e non abbiamo la minima intenzione di andare avanti; se volete ulteriori dati, chiedete.

Auguri.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms