Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 112 – Maggio 2008 - Anno Decimo

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 111 ha diffuso 1771 copie e il 30/04/2008 per Google eravamo in 4910 pagine.

Secondo la maggiore rivista italiana di divulgazione scientifica, queste sono le fisionomie dei redattori di una prestigiosa rivista di Matematica Ricreativa...

1. Lost in Translation

I matematici sono come i francesi: se si parla con loro, traducono nella loro lingua, e diventa subito qualcosa di diverso.
(Johann Wolfgang von Goethe)

Interpretare, collegare, classificare, tradurre in simboli sono tutte attività umane, attività naturali e inevitabili, che noi descriviamo genericamente e opportunamente come "pensare".
(Irving Berlin)

Spleen.

La parola deriva dal greco *splēn*, passa attraverso il latino *splen*[1] e arriva fino in Britannia: qui mantiene in inglese il significato originale di "milza", ma in francese – soprattutto in tempi non più medievali – *spleen* rappresenta la tristezza meditativa o la malinconia. Ma in realtà il significato, anziché allontanarsi dall'originale, per una volta sembra tornare alle origini: *melancolia* infatti (da cui poi arriva il termine intermedio *melanconia* e quindi il nostro *malinconia*) viene da *mèlas* (nero) e da *cholè* (bile): insomma bile nera; quella che, come insegna l'anatomia antica, trova sede nella milza. E pertanto c'è un filo direttissimo tra la concezione di *spleen* come *malinconia,* legame che deriva dalla medicina greca degli umori: la bile, prodotta dalla milza, era quella che si riteneva responsabile della *grave tristezza d'animo*[2] perché si pensava avesse effetti maiuscoli anche sulle emozioni. Del resto, ancora oggi si parla di "attacchi di bile" quando si viene selvaggiamente amareggiati da qualcosa. Comunque, nella sua forma più poetica e letteraria il termine venne reso famoso durante il Decadentismo da Baudelaire, anche se era già stato utilizzato anche precedentemente, in particolare nella letteratura del Romanticismo. Una volta separati i significati, può essere istruttivo vedere come assumono vita propria nelle diverse lingue: in Italia si insiste ad utilizzare la parola (spleen) per indicare un particolare stato d'animo: gli inglesi, invece, continuano a collegarlo direttamente quasi sempre all'elemento anatomico; e se un dizionario decidesse di riportare anche la definizione non strettamente fisiologica, inevitabilmente si preoccuperebbe di accompagnarla ad un bel "*arch.*", come a dire arcaico, desueto.

In questi anni di globalizzazione dobbiamo tutti imparare un po' di lingue straniere, se non proprio fino al punto di riuscire a parlarle, almeno quanto basta a poter capire le frasi che ci arrivano dalle varie forme di media. Ma la ripetizione ossessiva, di cui gli stessi media sono in genere protagonisti e responsabili, conduce alla corruzione prima e alla traslazione di significato poi, specialmente quanto si varcano i confini linguistici. Non dubitiamo che gli americani riescano ancora a vedere una sorta di continuità di significato tra l'*hardware* e i negozi di *ferramenta*, ma tutti quelli che non hanno l'inglese come lingua madre una simile relazione non se la sognano neppure. Oppure, tanto per fare un altro esempio qualsiasi[3], la parola "fiction" che viene dalla versione inglese di "finzione, rappresentazione", ha ormai assunto il meno nobile significato di "serie televisiva". Esempi di adozione di vocaboli stranieri con significati ridotti al minimo se ne possono trovare a bizzeffe, ed i più facili sono quelli dall'inglese, anche perché si tratta di una lingua molto meno pragmatica di quanto sembri, con verbi che possono assumere centinaia di significati diversi a seconda del contesto e di una proposizione posizionata opportunamente: per farsene un'idea direttamente non c'è niente di meglio che cercare

[1] "*Sanguis dominatur in dextero latere sub epate, colera rubea ibidem; in sinistro vero latere, scilicet in splene, colera nigra*" – Dal "Trattatello Medievale Salernitano sull'Alimentazione", messo a disposizione per gli abitanti della rete dai benemeriti di Liber Liber (www.liberliber.it). Non vogliamo mettere alla prova le vostre reminiscenze di latino, ma che si tratti della milza, situata a sinistra e sede di "colera nigra", non ci piove.

[2] Grave tristezza d'animo è esattamente la definizione di melancolia, secondo il dizionario etimologico Pianigiani del 1907 (www.etimo.it).

[3] Al solito, ma lo sapete già, non è veramente "qualsiasi", come esempio: ne parlavamo già in RM069.

sul dizionario tutti i possibili significati di "to get": sono tanti e tali che, quasi inevitabilmente, lo scolaro che incontra quella parola per la prima volta è assalito da un feroce senso di sconforto.

Non occorre però affrontare difficili escursioni nella lingua d'Albione per trovare parole che possano essere interpretate in diversi modi: per restare entro i patri confini la "pasta" è sufficiente, perché compare sia come impasto da cui si ottengono dolci o pizza, o pastasciutta, o pasta dentifricia o pasta d'acciughe… e non siamo certo andati lontano. Solo a scalfire i significati immediati si scopre che il termine è naturalmente associato al "pasto", e da qui "pastore"; ma anche, attraverso il diminutivo "pastillum", piccolo pasto, si arriva alla versione minima e femminile di "pastiglia"; o, attraverso diminutivi e peggiorativi, al "*pasticcio*". E si potrebbe risalire ancora, ma è già sufficiente pensare a questi pochi esempi per rendersi conto che non esiste un unico modo per tradurre un testo, di qualsiasi natura esso sia, e che la traduzione di un significato da una lingua ad un'altra è un processo tutt'altro che diretto. Uno degli esperimenti più divertenti per convincere chi ancora crede che si possa tradurre parola per parola una frase, è quello di utilizzare un traduttore automatico e fare un test circolare, di andata e ritorno, insomma. Il testo che abbiamo deciso di usare lo conoscono tutti:

> « Nel mezzo del cammin di nostra vita
>
> mi ritrovai per una selva oscura,
>
> ché la diritta via era smarrita. »

Lo diamo in pasto a Babelfish e lo traduciamo in inglese:

> « In means of the cammin of our life I found again myself for a dark forest, ché the straight one via smarrita. »

E poi il risultato lo riportiamo in italiano:

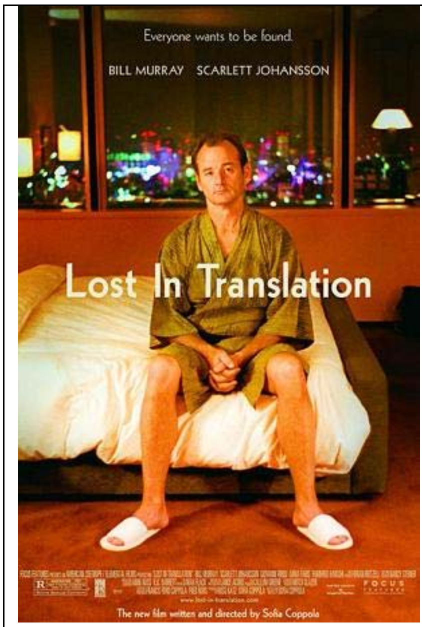
> « Nei mezzi del cammin della nostra vita ho trovato ancora io stesso per una foresta scura, ché quello diritto via lo smarrita. »

In realtà, test di questo genere sono di solito istruttivi per capire quali siano i limiti più evidenti di certi strumenti: parole non presenti in database (cammin, chè, via, smarrita) non vengono toccate, naturalmente; altre vengono tradotte secondo il significato più comune (per=for), e quando il significato è uno dei secondari, si sente il salto di significato. Per quanto riguarda poi la parte realmente poetica e letteraria, si finisce in un inevitabile gioco al massacro: spiegare ad un programma la differenza lirica tra i sinonimi "*selva*" e "*foresta*", o la necessità metrica di un "*diritta*" rispetto ad un "*dritta*" è veramente impresa (almeno per il momento) impossibile. Si può ovviamente dire che il testo non è particolarmente moderno[4] e che qualche costruzione non è ottimale, ma il risultato è comunque un'indicazione del fatto che non esiste una via univoca tra le diverse modalità espressive, perché fanno parte di culture e modi di pensare tra loro in gran parte indipendenti.

Il verbo "tradurre" viene dal latino *trans+ducere*, ovvero "condurre dall'altra parte"; in senso figurato, trasportare le frasi da un idioma ad un altro: significato che dà una certa idea del lavoro del traduttore che deve comprendere il significato e riportarlo in modo adeguato e il più corretto possibile nella lingua destinataria. La differenza principale tra un traduttore ed un interprete sta nei tempi: il primo compie il processo per così dire *off-line*, su testi scritti e senza l'angoscia dell'urgenza, mentre il secondo lo fa a voce in

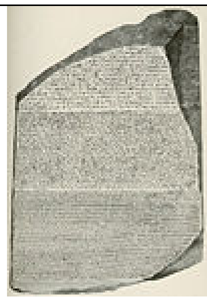
[4] Provate con "Come te la passi?", se preferite. In realtà, sui test di doppia traduzione circolano anche molti aneddoti, al punto che non si sa mai quali siano quelli veri e quelli inventati. Si narra ad esempio che, di fronte ad uno dei primi prototipi di traduttore automatico inglese-russo, quando il Muro di Berlino era ancora bello solido, fu da Terry Vinograd messo alla prova con il celebre proverbio: "*Lo spirito è forte, ma la carne è debole*". Proverbio che, dopo la doppia traduzione, si dice fosse diventato un più prosaico "*La vodka è buona ma la bistecca è marcia*".

diretta e spesso in modo simultaneo alla trasmissione del messaggio. Pur con le dovute differenze, la natura del compito è simile ed è tutta nel fatto essenziale che occorre aver compreso il messaggio che il parlante intende trasmettere, con tanto di tono ed implicazioni, ed avere sufficiente padronanza dell'altro linguaggio per poter far giungere a destinazione il messaggio con lo stesso senso dato dal mittente.



1 *Locandina di "Lost in translation - L'amore Tradotto".*

Di questo e di molto altro parla uno dei film migliori di Sofia Coppola (non solo figlia d'arte, ma ottima regista), "Lost in Translation", in italiano "L'amore tradotto": letteralmente sarebbe "perso nella traduzione", che indica non solo la perdita di significati nel processo, ma anche il perdersi vero e proprio, in un mondo alieno in cui non è solo la lingua a non essere comprensibile, ma il modo di vivere e muoversi, mangiare, bere, amare. In una delle scene in cui l'attore deve girare uno spot per un whisky locale, il regista giapponese spiega all'interprete l'importanza della traduzione, e poi descrive a lungo il modo in cui Bill Murray[5] dovrebbe dire la sua battuta; senza esitazioni l'interprete si gira verso l'attore e gli comunica semplicemente "vuole che ti giri verso la cinepresa", tutto il resto è andato "perso nella traduzione", appunto. Il fatto che i personaggi principali siano "persi" nella loro vita, giustifica anche lo slogan del film "ognuno vuole essere trovato", perché per ogni persona ci deve essere almeno un momento illuminante in cui "ci si trova" in cui si realizza finalmente chi o che cosa si vuole essere.



2 *La stele di Rosetta*

Ma non vorremmo perderci anche noi nei diversi significati della parola "*perdersi*". I mestieri dell'interprete e del traduttore esistono da secoli, e le difficoltà ad essi associate non appartengono certo al solo ventunesimo secolo. Tutte le lingue elette, in un certo momento della loro storia, al rango di lingua franca (greco, latino, spagnolo, francese, inglese) portano su loro stesse i segni dell'uso estremo, ridotto, destrutturato, e sono ben consce della grande quantità di informazione che può essere persa in una traduzione.

I greci, che furono i primi a teorizzare in merito, attuarono la distinzione tra la metafrasi (parola per parola) e la parafrasi (rendere il significato con altre parole). I loro grandi imitatori, i latini, avevano messo in guardia, tramite i consigli di Cicerone e Orazio, dalle traduzioni "verbo pro verbo". Tutti i teorici dell'argomento concordano, fin dall'antichità, che per ottenere un risultato accettabile, il traduttore o l'interprete deve avere una buona conoscenza di entrambe le due lingue ed essere esperto dell'argomento trattato; tre condizioni essenziali e non sempre facili a trovarsi nella stessa persona. Forse non è un caso che i più grandi geni di cui ci sia capitato di parlare avessero una grande abilità di comprensione ed assimilazione delle lingue, perché il fatto stesso di conoscere una lingua ha ben altre implicazioni che la semplice memorizzazione di un certo numero di regole e fonemi: significa anche poter scambiare opinioni ed informazioni con altre persone che partono da presupposti diversi, ed in questo modo ampliare sensibilmente i propri orizzonti.

[5] Che non ha recitato solo in *Ghostbusters*, ma ha un'ironia imbattibile celebrata soprattutto in *Tutte le manie di Bob* e *Ricomincio da capo*. Se li avete persi, procurateveli: valgono la pena. Nel primo l'attore improvvisò talmente tante battute che fu impossibile scrivere la sceneggiatura del film finché non fu completato.

Quando qualcuno può discutere un argomento complesso con cognizione di causa in una lingua che non è la propria, allora è possibile che attiri l'attenzione, ed è proprio il caso della protagonista di questo articolo.


3 *Maria Gaetana Agnesi*

Maria Gaetana Agnesi era nata il 16 maggio 1718 a Milano, allora parte dell'Impero Asburgico, e veniva da una famiglia molto facoltosa. Suo padre Pietro Agnesi aveva accumulato la sua fortuna grazie al commercio e la lavorazione della seta ed era un uomo illuminato ed anticonformista: quando si accorse che i figli maschi non erano delle grandi cime, mentre le figlie[6] mostravano eccezionale talento e velocità nell'apprendimento, pagò i migliori tutori disponibili affinché queste avessero la migliore educazione possibile. Maria Gaetana dissertava di filosofia in latino e greco già all'età di 9 anni, per la gioia del padre e dei suoi ospiti, e parlava fluentemente anche il francese e l'ebraico, tanto che in casa l'avevano soprannominata "*l'oracolo settelingue*".

È rimasta famosa una sua perorazione in latino per l'educazione avanzata delle donne, pronunciata proprio all'età di nove anni: si trattava in realtà di una sua traduzione dall'italiano di un articolo di uno dei suoi tutori. La recitò a memoria, con tale perizia davanti al salotto pieno di accademici organizzato dal padre, che passò alla storia come un suo primo lavoro.

Può sembrare piuttosto poco elegante il modo in cui Pietro Agnesi utilizzava la figlia per pavoneggiarsi e raccogliere studiosi e letterati nel proprio salotto, ma la pratica era piuttosto comune all'epoca[7]. Quando Maria raggiunse i vent'anni aveva già scritto una raccolta di 191 tesi filosofiche e matematiche che il padre le faceva difendere pubblicamente (naturalmente in latino, lingua dotta e franca dell'epoca); un giorno Charles de Brosses[8] visitò una di queste rappresentazioni con l'intenzione di smascherare l'impostore che riteneva sicuramente essere alla base di tanta dottrina. Scoprì invece una delle menti scientifiche più avanzate dell'epoca, capace di discutere qualsiasi tesi nella lingua dell'interlocutore con proprietà e precisione, e tutto questo in una figura femminile, modesta e gentile.

Con suo grande dispiacere, de Brosses scoprì anche che la giovane aveva sì un serio interesse per la scienza, ma accompagnato da una forte vocazione religiosa ed il desiderio di ritirarsi a vita monastica. Per il matematico la faccenda avrebbe avuto solo come conseguenza la perdita di un promettente elemento nella società culturale e scientifica, ma per Pietro Agnesi il ritiro in convento della figlia maggiore avrebbe avuto la cifra dell'autentico disastro: così la convinse a restare in casa per prendersi cura di lui, seppur

[6] Anche se questa è una rivista di matematica ricreativa e ci concentreremo solo sulla mente matematica della famiglia, non possiamo non citare il talento della sorellina Maria Teresa, che compose numerose opere liriche e riuscì a diventare direttrice d'orchestra in un'epoca in cui questo mestiere (come quasi tutti) era di esclusivo dominio maschile. Sembra che abbia conosciuto anche Mozart, e che gli abbia offerto consulenza in merito ad alcune sue opere.

[7] Basti pensare, per tornare alla nota precedente, a come venivano "esposti" i due piccoli Mozart dal padre Leopold, presso tutte le corti d'Europa. E, in tempi più recenti anche se su scala decisamente più ridotta, anche la madre di Majorana intratteneva le amiche mostrando loro le eccezionali capacità di calcolo del piccolo Ettore.

[8] Scienziato, matematico e letterato, tra i compilatori della celebre Encyclopédie di Diderot e D'alembert.

concedendo a Maria Gaetana il permesso di ritirarsi dalla vita pubblica e dai salotti e di frequentare la chiesa con la frequenza da lei desiderata. Pietro Agnesi era così dipendente dalla figlia perché, dopo la morte della seconda moglie, la ragazza aveva preso in mano la gestione della casa, e non doveva essere un compito da poco: il padre ebbe tre mogli e una ventina di figli.

L'"oracolo settelingue" ebbe quindi modo di dividere il resto della sua attenzione tra la matematica e lo studio religioso, per la prima avendo la fortuna di ottenere come insegnante l'olivetano Ramiro Rampinelli. Il monaco non solo la aiutò a districarsi tra le varie teorie e trattati che circolavano al tempo, ma la convinse a produrre il suo famoso libro "*Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*", un testo divulgativo nel quale Maria Gaetana mette ordine in tutta la teoria sul calcolo differenziale.

Stiamo parlando di una persona che, per quanto schiva e riservata, aveva potenti mezzi e connessioni grazie all'influenza e alla ricchezza del padre, per cui le fu possibile organizzare una stampa del libro a proprie spese. Maria contattò, sotto consiglio del suo insegnante, Jacopo Riccati, che corresse le bozze e contribuì con parti del proprio lavoro: l'autrice non esitò a riconoscere i meriti del collega.

"*Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*" ebbe un'enorme risonanza ed un grande successo: il primo volume fu pubblicato nel 1748 e ricevette presto commenti positivi. L'Accademia delle Scienze di Parigi ne lodò la bravura unificatrice ed il metodo; Papa Benedetto XIV, riconoscendo la fama portata dal libro all'Italia, le offrì una cattedra all'Università di Bologna; Maria Teresa d'Austria, sovrana illuminata, inviò alla suddita un cofanetto con un anello di brillanti. Nonostante le generose offerte ricevute, Maria Gaetana non insegnò mai a Bologna: non rispose mai all'invito del papa, ma il suo nome rimase ugualmente per più di quaranta anni negli elenchi ufficiali del personale dell'ateneo felsineo, e da questo probabilmente nasce l'equivoco riportato in alcune biografie.

INSTITUZIONI
ANALITICHE
AD USO
DELLA GIOVENTU' ITALIANA
DI D.NA MARIA GAETANA
AGNESI
MILANESE
Dell'Accademia delle Scienze di Bologna.
TOMO I.

IN MILANO, MDCCXLVIII.
NELLA REGIA-DUCAL CORTE.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

4 *Frontespizio delle "Istituzioni", 1748.*

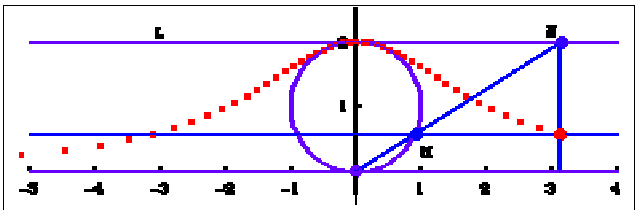
In ogni caso la nostra protagonista aveva altri piani, e lo studio della matematica non sembrava essere tra le sue maggiori aspirazioni, anzi. Con la morte del padre nel 1752 cominciò a gestire la propria vita secondo i suoi desideri più autentici, e questi si riassumevano nel potersi dedicare alla beneficenza. Maria Gaetana vendette tutte le proprietà, si ridusse a chiedere l'elemosina per i poveri ed infine, non certo sorprendentemente, si ammalò; ma prima di farlo riuscì a salvare un gran numero di disperati, fino a rendere il suo nome famoso e noto a Milano e dintorni. La benefattrice ha trovato la sua via, la scienziata sembra aver perso definitivamente la propria: è una scelta decisa e chiara, e anche i tifosi della scienza, nei quali ci riconosciamo, non dovrebbero far fatica ad accettarla. Quando nel 1762 l'Università di Torino le chiese un parere in merito ai lavori di un giovane e promettente matematico torinese, un tal Lagrange[9], rispose di non avere più interesse nella scienza.

Diventò un'ottima teologa, pur non prendendo i voti e rimanendo laica, al punto di essere frequentemente consultata su questioni filosofiche e teologiche anche da personaggi di rilievo nella società del tempo. Anche in questo si mostrò accorta e geniale, ma per gli

[9] Protagonista del primo „Compleanno", RM048.

amanti della matematica Maria Gaetana è ormai definitivamente perduta. Quasi certamente, l'unico propulsore verso la matematica per lei era suo padre, Pietro Agnesi: solo lui era probabilmente in grado di indirizzarla verso la matematica. Alla morte di Pietro, Maria Gaetana Agnesi certo sopravvive, ma la brillante mente matematica muore con lui. La benefattrice, la caritatevole e santa gentildonna vivrà invece fino alla fine del secolo (1799).

Maria Gaetana non era forse particolarmente originale, ma era riuscita a definire le basi della materia fino al diciottesimo secolo e la sua unica opera era stata tradotta in molte lingue, superando in fama e distribuzione l'analoga opera di Eulero pubblicata all'incirca nello stesso periodo. Il testo era forse per lei poco importante, dopotutto l'aveva concepito inizialmente come testo scolastico per i fratelli, eppure è quello che l'ha consegnata alla storia come una delle donne di più gran genio del diciottesimo secolo.


5 *La Versiera di Agnesi*

L'Agnesi ha legato il suo nome alla versiera, una curva che non fu scoperta da lei, ma già studiata da Fermat (1666) e da Guido Grandi (1703). Grandi l'aveva chiamata curva con seno verso (*sinus versus*) cioè inverso del seno ma pure contrario, nemico. Da qui, versiera, "avversaria", nome solitamente attribuito alle streghe, perché considerate le spose dell'Avversario per antonomasia, ovvero del Diavolo, avversario di Cristo. La cosa è comunque un altro esempio eclatante di "perdita nella traduzione": John Colson tradusse il secondo volume dell'opera di Maria Gaetana Agnesi, ma si perse nell'italiano: il *sinus versus* di Grandi veniva detto (dagli italiani) anche *versoria*, che significando "corda che gira una vela" non era del tutto impropria con la curva geometrica. Ma versoria divenne presto versiera (libera di muoversi), al punto che il termine resiste ancora in italiano. Colson, però, spostò una lettera dall'articolo al nome, mutando "la versiera" nell'erroneo "l'aversiera", e di qui all'avversaria, alla moglie del diavolo e infine alla strega. Il fatto che poi la curva, con i parametri opportuni, può assumere anche l'inconfondibile forma del cappello delle streghe, completa l'opera di ineluttabile perdizione nella traduzione: il nome della curva fu tradotto in inglese come *Witch of Agnesi* (strega di Agnesi).

Come per molti altri argomenti da lei trattati, il merito di Maria Gaetana non fu nello scoprire qualcosa in particolare, ma nel raggruppare tutti i dati su un argomento ed esporli nella maniera più completa e coerente possibile: la versiera è un luogo di punti che si può facilmente costruire con riga e compasso, a partire da una circonferenza e la retta ad essa tangente parallela all'asse delle ordinate, una curva asintotica con qualche interessante proprietà per quanto riguarda l'area sottesa.

Forse lo studio della matematica aveva distratto troppo a lungo la modesta e pia figlia di Pietro Agnesi, forse era una vera "avversaria" alla vocazione della nostra eroina: ma resta il fatto che per gli inglesi il nome di una donna particolarmente pia e generosa è legato a quello di una strega. A noi questo mette un po' di malinconia, un certo spleen, veramente: un genio nostrano perso nella traduzione.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Tra origami e tipografia			
Allarme rosso			

2.1 Tra origami e tipografia

Nel senso che a Rudy è tornata la mania in merito. Adesso si sta concentrando *[Non è vero: quando si concentra sta zitto. Adesso sta rompendo le scatole (AR & PRS)]* sui formati di pagina. Ha deciso che deve essere lui il primo a trovare quello dettato da regole matematicamente valide – secondo il suo insindacabile giudizio ovviamente.

L'ultima idea che gli è venuta, probabilmente sbagliando la prima piegatura di un origami mentre pensava ad altro, lo sta tormentando da qualche giorno; infatti, ha deciso che per ottenere le "misure del foglio perfetto e ideale" deve poter essere soddisfatta questa costruzione geometrico-origamica: si prende il foglio, che sarà certo comunque rettangolare, e lo si piega facendo coincidere due angoli opposti, ad esempio quello in alto a destra con quello in basso a sinistra. Ne risulterà una piega che non sarà certo una diagonale, ma comunque di una certa lunghezza: nel caso della pagina ideale tale lunghezza deve essere pari a uno dei lati del foglio originale.

L'improvvida domanda "Pari a quale dei due?" lo ha portato a uno stato di isteria tale non solo da non riuscire a parlare, ma addirittura da non riuscire a dirci quale debba essere in questo caso il rapporto tra i lati.

Qualcuno vuole darci una mano? Quanto deve essere il rapporto tra i due lati per ottenere questa relazione? Rispondete con calma, che sino ad allora si ritira in sdegnato silenzio.

2.2 Allarme rosso

Nel senso che la moglie di Rudy sta imperversando nella camera dei Validi Assistenti di Laboratorio: si è accorta che tutta quella che lei definisce "immondizia" era stata imboscata in posti improbabili (al di sopra del metro e sessantacinque di altezza: non è propriamente una stangona, quindi "occhio non vede…" con quel che segue. Peccato che in assenza di Rudy abbia dovuto cambiare una lampadina, e quindi abbia preso una scala, con conseguente immediata panoramica sulle discariche abusive).

Ormai la situazione in camera dei VAdLdRM è talmente critica che a malapena riescono a tirare una moneta e a guardare il risultato; quindi, a giochi sono decisamente malmessi. L'ultimo che hanno trovato prevede l'utilizzo di una moneta "onesta" (non di Rudy, quindi); le regole sono semplicissime:

1. Il primo giocatore (Alberto) sceglie una tripletta Testa/Croce e la annuncia (TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC: grande cosa, la numerazione binaria) come suo risultato vincente da tre tiri successivi.
2. Il secondo giocatore (Fred) sceglie una tripletta tra quelle restanti.
3. La moneta viene tirata sin quando compare una delle successioni scelte.

Notate che le triplette scelte possono comparire in tre tiri successivi qualunque: primo-secondo-terzo, secondo-terzo-quarto, terzo-quarto-quinto… insomma, avete capito.

A questo punto ci poniamo tre domande:

1. Qual è la migliore strategia per ognuno dei giocatori? E, nel caso di scelta ottimale da entrambe le parti, chi è più probabile che vinca?
2. Nel caso le triplette scelte restino segrete, quali sono le strategie ottimali?
3. E se la tripletta di un giocatore fosse scelta casualmente, quale sarebbe la migliore strategia per contrastarla?

Sì, va bene, sono più di tre. Ma per *evidenti ragioni di simmetria* ci serviva quel numero. Sono triplette, no?

3. Bungee Jumpers

a) Dati quattro numeri $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, metteteli nell'ordine $a_{i1_1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}$ (essendo i_1, i_2, i_3, i_4 un riarrangiamento di 1,2,3,4) tale che la somma

$$\Phi = (a_{i1} - a_{i2})^2 + (a_{i2} - a_{i3})^2 + (a_{i3} - a_{i4})^2 + (a_{i4} - a_{i1})^2$$

assuma il minimo valore possibile.

b) Dati *n* numeri reali distinti $a_1, a_2, \ldots, a_n$, metteteli nell'ordine $a_{i1_1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ tale che la somma

$$\Phi = (a_{i1} - a_{i2})^2 + (a_{i2} - a_{i3})^2 + \ldots + (a_{i(n-1)} - a_{in})^2 + (a_{in} - a_{i1})^2$$

Assuma il minimo valore possibile.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

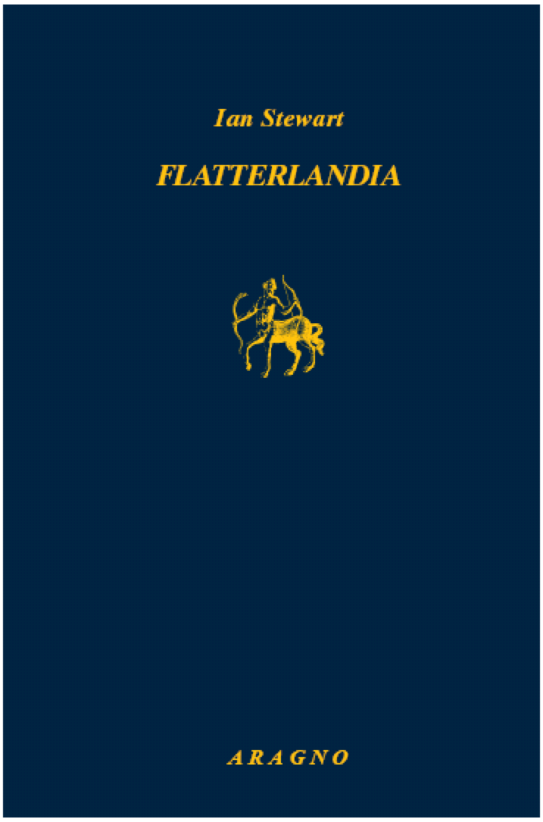
Sì, è vero: avevamo detto che questa rubrica non è a cadenza mensile, anzi non è neppure vagamente periodica. E infatti è così: anche se torna a comparire per la seconda volta consecutiva nel mese successivo alla sua nascita, non significa per questo che sia diventata un appuntamento fisso. Quando si gioca a dadi, possono ben uscire due sei di fila, no? Perfino con i dadi non truccati, succede.

4.1 Flatterlandia

Se volessimo iniziare con una banalità, potremmo dire che i libri contengono storie. Come banalità non è davvero male, visto che anche i bambini in età prescolare e il signor Lapalisse[10] sono pronti a sottoscriverla: però le banalità sono quasi sempre vere, e talvolta non fa male ripeterle. Anche perché spesso all'interno di un libro non c'è una sola storia, ma tante: e, soprattutto, perché talvolta le storie non sono solo all'interno del libro, ma anche subito fuori, nei suoi immediati dintorni. Meglio ancora, capita talvolta che abitino il processo stesso della sua creazione, insomma che perfino la realizzazione di un libro sia una storia notevole essa stessa.

Il libro di questo mese, ad esempio, quante storie contiene? Tanto per cominciare ce n'è una, piccola ma significativa, già nel leggere il nome dell'editore, in basso sulla copertina.

[10] Sì, lo sappiamo: più che "signor Lapalisse" dovremmo dire "il nobile Jacques II de Chabannes de La Palice, maresciallo di Francia", ma in questo caso non stavamo citando tanto un personaggio storico, ma piuttosto un luogo dello spirito.



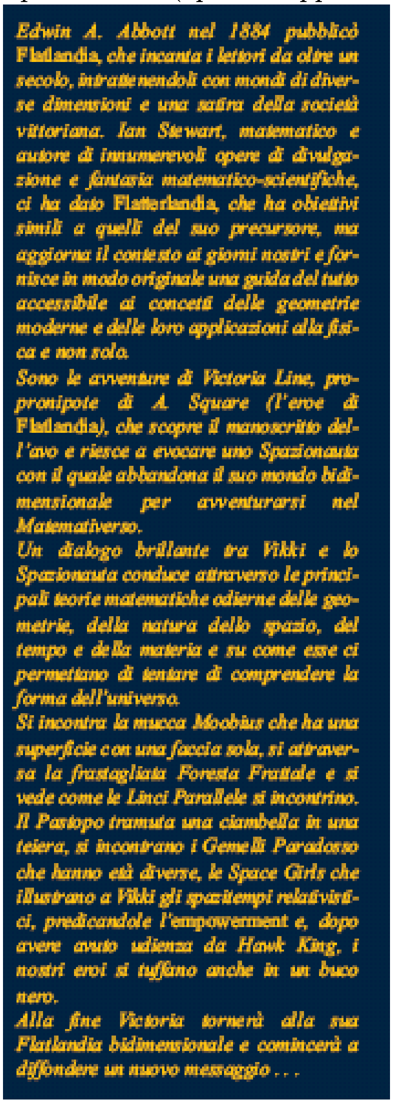
In tutto il catalogo della Nino Aragno, casa editrice in Torino con profonde radici nel Cuneese, si ritrovava, prima di questo, solo un altro titolo di matematica. Ma che titolo! Come primo titolo della *Biblioteca Aragno* figurano gli *Arithmetices Principia* di Giuseppe Peano. Deve esserci una storia, o quantomeno una buona forza di convincimento, un merito palese, se il libro che stiamo esaminando è stato giudicato degno di figurare in un così esclusivo catalogo accanto ad un tale capolavoro.

Naturalmente, poi, il nome stesso dell'autore provvede a raccontare altre storie. Ian Stewart è uno degli autori più noti, tra gli appassionati di matematica ricreativa. Se ci si volesse accontentare di quanto racconta il risvolto di copertina, troveremmo queste informazioni:

Nato a Folkestone nel 1945, è professore di matematica all'Università di Warwick (Gran Bretagna) e ivi direttore del *Mathematics Awareness Centre*. Ha pubblicato oltre 140 lavori di ricerca relativi a problemi di simmetria dinamica, formazione di pattern, teoria del caos e biologia matematica. È autore di articoli su «*Nature*», «*NewScientist*» e «*Scientific American*», nonché di numerosi libri di divulgazione matematico-scientifica e fantascienza, tra i quali (pubblicati in italiano): *Dio gioca a dadi?* (1993), *Terribili Simmetrie: Dio è un geometra?* (con M. Golubinski, 1995), *Che forma ha un fiocco di neve?* (2003) e *Com'è bella la matematica* (2006), presso Bollati Boringhieri; *L'altro segreto della vita* (2002) e *L'assassino dalle calze verdi e altri enigmi matematici* (2006), presso Longanesi. Le sue opere sono state tradotte in 19 lingue. Nel 1995 ha ricevuto la Medaglia Michael Faraday della Royal Society per eccezionali contributi alla pubblica comprensione della scienza. Nel 2001 è stato eletto Fellow della Royal Society.

E, come sempre quando i curriculum sono troppo ricchi, rimangono fuori dei particolari interessanti: ad esempio, che un altro suo libro è uscito proprio quest'anno in italiano, (*Come tagliare una torta e altri rompicapo matematici*, a cura di Stefano Bartezzaghi, per Einaudi); o la precisazione che i citati articoli apparsi su *Scientific American* sono stati pubblicati anche dall'edizione italiana della rivista, *Le Scienze*; e soprattutto che gran parte di essi, più che articoli slegati, formavano la storica rubrica di matematica ricreativa del giornale, ereditata da Martin Gardner prima e da Douglas Hofstadter poi. Un breve riassunto biografico è, per definizione, un gran contenitore di storie.

Ma, diamine, il veicolo essenziale per le storie di un libro è il contenuto del libro stesso: e questo vale soprattutto se il volume ha l'intenzione di essere ad un tempo un diario di viaggio, una guida per esploratori, un raccontare mondi nuovi e imprevedibili; e soprattutto se intende essere il prosieguo di una storia antica e famosa. A questo proposito, vi suggeriamo un piccolo esperimento di divinazione: se, entrando in una casa, vedete un bel numero di libri sugli scaffali; se, guardando meglio, notate che sono allineati non secondo il formato e collana, come ogni designer d'interni imporrebbe, ma in ordine alfabetico per autore, come ogni bibliofilo e bibliotecario auspicherebbe; se, infine, sapete che il proprietario dei libri e degli scaffali è (anche solo un poco) interessato alla matematica, o alla storia della matematica, o alla matematica ricreativa, potete fare una scommessa ed essere quasi certi di vincerla. Con ogni probabilità[11], il primo libro di tutta la biblioteca sarà *Flatlandia: racconto fantastico a più dimensioni*, di Edwin Abbott Abbott. Flatlandia è così noto da essere uno dei pochi libri di matematica ad aver superato la cerchia degli appassionati ed essere diventato abbastanza famoso anche tra il pubblico non specialistico. Le avventure del quadrato protagonista (l'esimio *A. Square*) sono state spesso fonte di ispirazione per saggi, opere d'arte e di fantasia, e anche di film[12]. Ebbene, il *Flatterlandia* di Stewart è l'ideale seguito del *Flatlandia* di Abbott, e comincia laddove *Flatlandia* finisce. La protagonista del racconto è la pro-pronipote di A.Square, Victoria Line, e un veloce e incompleto accenno alle molte su avventure le potete trovare nel risvolto riprodotto qua a fianco. Così come *Flatlandia* aveva l'intenzione, scherzando, di far comprendere al lettore il grande salto concettuale di un universo dotato di un numero di dimensioni diverso da quello cui siamo abituati, *Flatterlandia* ha l'obiettivo tutt'altro che recondito di mostrare, sempre giocando, quanti molteplici significati ha ormai raggiunto la parola "geometria" nella matematica contemporanea: ogni mondo visitato da Vikki (diminutivo di Victoria) sotto la guida dello Spazionauta (*Space Hopper* nell'originale) è un universo fantastico e fantasticamente popolato, ma sempre dotato di una sua reale consistenza matematica.


Edwin A. Abbott nel 1884 pubblicò Flatlandia, che incanta i lettori da oltre un secolo, intrattenendoli con mondi di diverse dimensioni e una satira della società vittoriana. Ian Stewart, matematico e autore di innumerevoli opere di divulgazione e fantasia matematico-scientifiche, ci ha dato Flatterlandia, che ha obiettivi simili a quelli del suo precursore, ma aggiorna il contesto ai giorni nostri e fornisce in modo originale una guida del tutto accessibile ai concetti delle geometrie moderne e delle loro applicazioni alla fisica e non solo.

Sono le avventure di Victoria Line, pro-pronipote di A. Square (l'eroe di Flatlandia), che scopre il manoscritto dell'avo e riesce a evocare uno Spazionauta con il quale abbandona il suo mondo bidimensionale per avventurarsi nel Matemativerso.

Un dialogo brillante tra Vikki e lo Spazionauta conduce attraverso le principali teorie matematiche odierne delle geometrie, della natura dello spazio, del tempo e della materia e su come esse ci permettano di tentare di comprendere la forma dell'universo.

Si incontra la mucca Moebius che ha una superficie con una faccia sola, si attraversa la frastagliata Foresta Frattale e si vede come le Linee Parallele si incontrino. Il Pastopo tramuta una ciambella in una teiera, si incontrano i Gemelli Paradosso che hanno età diverse, le Space Girls che illustrano a Vikki gli spaziotempi relativistici, predicandole l'empowerment e, dopo avere avuto udienza da Hawk King, i nostri eroi si tuffano anche in un buco nero.

Alla fine Victoria tornerà alla sua Flatlandia bidimensionale e comincerà a diffondere un nuovo messaggio . . .

E questa, appena appena accennata, è *la storia* vera e propria, quella che sta dentro il libro di Stewart e che l'autore ha scritto. Ma un libro non termina dove il suo autore scrive la parola fine. I lettori italiani hanno conosciuto Flatlandia (non più *Flatland*) grazie alla traduzione di Masolino d'Amico, che è quella tuttora presente nelle ristampe del volume fatte da Adelphi. Se i lettori italiani avranno la possibilità di conoscere Flatterlandia (non più *Flatterland*) sarà invece per merito di Filippo Demonte-Barbera, che i lettori di RM hanno già più volte incontrato sulle pagine del nostro giornale con l'allonimo di *Gavrilo*. Filippo si è sobbarcato l'onere della traduzione di Flatterland, e chiunque abbia assaggiato anche solo per sbaglio, solo per esercizio, le asperità delle traduzioni, avrà idea di che cosa voglia tradurre un libro di quattrocento e passa pagine. Ma non avrà ancora idea di cosa voglia davvero dire tradurre *questo* libro. Esistono grandi romanzi che resistono ancora alla traduzione: non solo moltissime poesie che, legate come sono alla forma e ai suoni della lingua, spesso non possono semplicemente essere convertite in un linguaggio diverso dall'originale, ma proprio storie, racconti, romanzi. Il *Finnegans Wake* di Joyce, ad esempio, per molto tempo è stato considerato del tutto intraducibile, anche se poi Luigi Schenoni si è avventurato in un controverso tentativo di versione italiana; del resto, già il titolo nasconde secondo alcuni un messaggio trilingue, [*Fin Negans Wake*, la Veglia (*wake*, inglese) di colui che nega (*negans*, latino) la fine (*fin*, francese)]. Difficile anche solo trovare il coraggio di

---

[11] Un minimo di cautela è sempre necessaria: il vostro ospite potrebbe essere un estimatore di Alvar Aalto o un accanito lettore dell'autobiografia degli Abba, ma in genere la previsione si avvera..

[12] Il più recente e costoso è *Flatland: the movie* di Jeffrey Travis, del 2007. Noi continuiamo a preferire il *Flatlandia* di Michele Emmer, fatto con molti meno mezzi ma con molta più passione.

provare una traduzione: non per niente Murray Gell-Mann, dentro quel romanzo, ha trovato la parola *quark* e l'ha estratta e riciclata per darle il significato che voleva, quasi a mostrare quanto sia alto e incontrollabile l'arbitrio che corre attraverso le parole tra scrittore, lettore, traduttore.

Gavrilo non è un traduttore di professione; in compenso, ha forte il senso della sfida. Parla l'inglese da così tanto tempo ormai che verosimilmente non si accorgerà quasi più di usarlo, quando lo fa, così come un falegname liscia una tavola senza più rendersi conto di star manovrando una pialla. La sua passione è sempre stata la geometria, e nel leggere il libro di Stewart, pieno zeppo di geometrie, di giochi di parole e di locuzioni intraducibili, deve aver sentito quello che sentono gli alpinisti quando guardano una vetta ancora inviolata: il desiderio di domarla, di arrivarci, per l'unica e molto buona ragione che è molto difficile riuscire a farlo.

Le prime trenta pagine di Flatterlandia hanno i numeri di pagina in cifre romane. In quelle prime trenta pagine, che esistono solo nella versione italiana[13], sotto il titolo dimesso "*Come è questa traduzione*" c'è una storia forse ancora più affascinante delle avventure di Vikki Line narrate da Stewart. È una storia solo in parte di traduzione, che inizia da lontano ma che stupisce fin dall'inizio; come stupisce Filippo bambino la constatazione che il *rombo* (figura geometrica) abbia lo stesso nome del *rombo* dell'aeroplano. Il sorriso di sufficienza verso la domanda infantile cade in fretta, quando si scopre che i termini hanno in comune non solo suono e grafia, ma anche – imprevedibilmente – l'etimologia e una strana parentela che passa per un giocattolo antico. Si rimane stupiti non meno del bambino del racconto, e la curiosità poi cresce, si articola, si sviluppa in parallelo tra i narrati interessi di Gavrilo e l'evoluzione tecnologica di tutta la seconda metà del Novecento. In quelle prime trenta pagine di introduzione vengono raccontate – anzi no: vengono solo accennate, enumerate, elencate – centinaia di altre storie non scritte; e se ne sente quasi la mancanza, quando infine Filippo passa a raccontare, con esempi e spiegazioni, i molti trabocchetti e le innumerevoli difficoltà della traduzione dei capitoli del libro di Stewart.

Circa un anno fa, Filippo ci scrisse raccontandoci d'aver tradotto *Flatterland*; ci chiedeva se eravamo interessati a dare uno sguardo alla traduzione, anche per avere un riscontro di massima da parte di lettori, se non proprio esperti, quantomeno affezionati alla matematica ricreativa. La lettura si rivelò così interessante che nei mesi successivi ci siamo davvero divertiti a legger e rileggere, a dare consigli, cercare errori, suggerire interpretazioni. Un contributo in realtà minimo, visto che il prodotto era praticamente già finito quando abbiamo avuto occasione di vederlo per la prima volta, ma che ci ha comunque davvero appassionato. Ci siamo così immeritatamente guadagnati ampie citazioni nelle pagine introduttive – Gavrilo riporta integralmente anche la storia della sua ricerca sul tessaratto, a suo tempo pubblicata su RM085 – e perfino ampi ringraziamenti. Non sappiamo se ce li siamo meritati davvero, ma sappiamo di esserne davvero orgogliosi.

Ma comunque, la traduzione è solo un pezzo, solo una parte dell'opera fatta da Filippo per il *Flatterlandia* di Ian Stewart: oltre all'operazione puntuale di resa parola per parola dei concetti del testo, Gavrilo ha preso i contatti con l'editore, lo ha convinto – anche se crediamo senza troppa fatica – dell'opportunità di dare alla luce questo divertente libro di matematica. Ha preso contatti con l'autore, ha organizzato gli incontri, convinto Michele Emmer ad impreziosire il libro con una sua post-fazione, e reso di fatto possibile l'edizione italiana di *Flatterland*. In questi giorni, ai primi di maggio 2008, ci sarà il Salone del Libro di Torino, e in questa occasione si vedranno le prime copie del libro dalla

[13] Di *Flatterland* esistono già le traduzioni tedesca, portoghese, giapponese e coreana. Quella tedesca è davvero affrettata, non fa alcuno sforzo per cercare di ricondurre gli infiniti giochi di parole, lasciandoli invisibili o non tradotti. Quella portoghese è più accurata, ma sempre molto lontana dal livello di quella italiana.

copertina blu che vi abbiamo presentato ad inizio articolo, ancora non in vendita. Il libro sarà normalmente distribuito alle librerie poco dopo, verso la metà del mese.

Lo scorso Novembre, Ian Stewart era a Torino, per ritirare il Premio Peano 2006 organizzato dall'Associazione Subalpina Mathesis. Lo aveva vinto con il suo libretto "*Com'è bella la matematica*". In platea, Filippo e uno di noi pensavano, non senza un po' di orgoglio, che questo *Flatterlandia* avrebbe meritato ancora di più il prestigioso premio. Chissà, ci si potrebbe rincontrare nella stessa platea, nel 2009; e in quel caso, il merito non sarebbe certo solo di Ian Stewart.

Titolo	Flatterlandia come Flatlandia, ma ancora di più ovvero Victoria nel Paese delle Meraviglie (geometriche)
Titolo Originale	Flatterland like Flatland, only more so
Autore	Ian Stewart
Traduzione e Cura dell'Edizione Italiana	Filippo Demonte-Barbera (***Gavrilo***)
Editore	Nino Aragno Editore
Collana	Biblioteca Aragno
Data di Pubblicazione	2008
Prezzo	18,00 Euro
ISBN	978-88-8419-360-5
Pagine	XXXI + 423

5. Soluzioni e Note

Per fare il bagno a un gatto occorrono una buona dose di perseveranza, coraggio, convinzione e un gatto. L'ultimo ingrediente di solito è il più difficile da reperire.

Stephen Bakerr

Terribile.

Fate voi a cosa associare il suddetto termine, nel nostro piccolo ci limitiamo ai risultati scolastici del maggiore dei Validi Assistenti di Laboratorio e al fatto che all'ultimo minuto (secondo Rudy: quindi ci si riferisce ai primi del mese) è stato gentilmente richiesto di compilare le Soluzioni & Note[14]. Siccome non c'è due senza tre, Rudy si è anche accorto di aver commesso un clamoroso errore, sostenendo che quella di quest'anno era la Pasqua "più bassa" del millennio; sbagliato, come chiunque di voi si accorgerà facilmente il 22 marzo del 2285.

FrancoZ ci comunica (testuali parole) che se siamo intenzionati a "tenere aggiornato il globo con le bandierine della residenza degli appartenenti alla setta" allora bisogna spostarne una dalla Puglia alla Valle d'Aosta. Il fatto non può che farci piacere, anche perché a questo punto, a spese di un lieve calo in Puglia, registriamo un deciso incremento in Valle; potenza delle percentuali su base regionale…

[14] Quindi questa volta, se manca qualcosa, è come al solito colpa di Alice e di Doc, che non hanno controllato. Altrimenti avrebbero almeno cancellato questa nota. [RdA]. No, la colpa è certo del Capo, che al solito ha finito troppo in anticipo il lavoro e perso probabilmente le ultime mail… [AR&PRS]

5.1 [108]

Largo agli archeologi.

5.1.1 Il contratto di Sky

Sand, scavando nel passato (e con quell'allonimo ha grandi potenzialità), inizia un'interessante dibattito:

> Quando ho visto che per la soluzione del problema "il contratto di Sky", oltre alla mia, erano state proposte altre due soluzioni, dapprima ero convintissimo del voler andare a fondo della questione, dato che i numeri finali sembravano non collimare. Poi, complice la cronica mancanza di tempo (ne sapete qualcosa?) mi sono cullato nell'idea che su RM111 qualcun altro avrebbe svelato il busillis levando a me e a tutti i lettori ogni dubbio. Invece...nisba! Allora ieri notte mi sono rimboccato le maniche, e credo di potervi dare ora buone notizie.
>
> ***Val316*** e ***FrancoZ*** trovano per il primo quesito il medesimo risultato: 1/2 per entrambi i prezzi. Io trovo invece numeri diversi fra loro e da loro, 0,541 e 0,385. Così il guadagno medio vale 0,5 per loro e 0,51 per me. Chi sbaglia? Nessuno, a quanto pare (a me). Il fatto è che il problema, così come è stato posto, si prestava a due interpretazioni diverse, entrambe consistenti: chiamiamo i canali c1 e c2, il problema chiede quale dovrebbe essere il prezzo dei canali per massimizzare il guadagno. ***Val316*** e ***FrancoZ*** hanno inteso quale prezzo attribuire a c1 e c2, io invece ho inteso quale prezzo dare al primo canale venduto (scelto a piacere dal cliente) e quale dare al secondo. Solo in base a questa interpretazione ha senso dare un valore diverso ai due canali, dato che – per ipotesi – i due canali hanno mediamente il medesimo valore per la clientela.
>
> Sarà poco quello 0,01 in più, ma basta a dimostrare (piccola soddisfazione personale) che la mia interpretazione equivale ad un'intuizione commerciale: in questa situazione conviene non prezzare in maniera fissa i due canali, ma lasciar scegliere il singolo cliente.
>
> Quanto al secondo quesito, la differenza tra il valore trovato da ***Val316*** e quello trovato da ***FrancoZ*** e me per il prezzo è frutto di un banale errore nella scrittura del risultato da parte di ***Val316***, prova ne sia che la formula di partenza, e anche il valore trovato per il guadagno medio, è lo stesso.

Come diciamo sempre, le analisi del passato sono sempre le benvenute, anche perché di solito mostrano approfondimenti inattesi. Verso il fondo ve ne proponiamo una (lo ripeteremo ancora un mucchio di volte. Sì, stiamo facendo convinzione neanche troppo subliminale).

5.2 [110]

5.2.1 Peggio di Doc

Cid e ***FrancoZ*** non demordono.

Da un punto di vista epistemologico, ***Cid*** ha deciso di verificare se fosse possibile o no risolvere il problema senza utilizzare il concetto di derivata, come fatto da ***FrancoZ***; a noi le derivate stanno simpatiche (sicuramente più di un integrale) ma comprendiamo che qualcuno possa non essere d'accordo. Come attenuante (l'abbiamo scoperto poco sopra) possiamo solo portare il fatto che ***FrancoZ*** era impegnato a trasferirsi più vicino ai Redattori di RM e quindi (come diceva Mersenne quando allenava in oratorio) "derivate avanti, e correre!".

> Considerato che nel problema non viene specificato lo spessore del bicchiere, ipotizzo che tale spessore possa essere considerato trascurabile rispetto al diametro del bicchiere.

L'area della base del bicchiere è: $R^2 * \pi = 16 * \pi$.

La superficie laterale del bicchiere ha area uguale a: $2 * R * \pi * H = 8 * \pi * 12 = 96 * \pi$.

Finché l'acqua si trova sotto il baricentro, ogni goccia d'acqua che viene aggiunta abbassa il baricentro; appena l'acqua arriva all'altezza del baricentro, ogni ulteriore goccia d'acqua che viene aggiunta alza il baricentro. Pertanto se ne deduce che l'altezza del baricentro è uguale a 4,5 cm dalla base del bicchiere.

Chiamando *x* lo spessore del bicchiere, il volume di bicchiere situato sopra il baricentro è approssimativamente uguale a:

$$(2 * R * \pi) * (H - 4{,}5) * x = 8 * \pi * 7{,}5 * x = 60 * \pi * x .$$

Il volume di bicchiere situato sotto il baricentro è approssimativamente uguale a:

$$\begin{aligned}(2 * R * \pi) * 4{,}5 * x + (16 * \pi * x) &= 8 * \pi * 4{,}5 * x + (16 * \pi * x) \\ &= 36 * \pi * x + 16 * \pi * x = 52 * \pi * x\end{aligned}$$

Il volume complessivo del bicchiere è uguale a: $60 * \pi * x + 52 * \pi * x = 112 * \pi * x$.

Il peso dell'acqua contenuta nel bicchiere è uguale a: $4{,}5 * 16 * \pi = 72 * \pi$ grammi.

Chiamando P il peso in grammi del bicchiere abbiamo la seguente equazione:

$$\frac{16}{112} P * \frac{9}{2} + \frac{36}{112} P * \frac{9}{4} + 72 * \pi * \frac{9}{4} = \frac{60}{112} P * \frac{15}{4}$$

(Corretto il calcolo del baricentro: il peso di ogni singola parte deve essere moltiplicato per la distanza del suo baricentro dal baricentro del bicchiere)

$$\frac{72}{112} P + \frac{81}{112} P + 162 * \pi = \frac{225}{112} P$$

$$162 * \pi = \frac{72}{112} P$$

$$18 * \pi = \frac{1}{14} P$$

$$P = 18 * 14 * \pi = 252 * \pi \qquad \text{(grammi)}$$

Quindi il peso del bicchiere è circa uguale a 792 grammi.

A completa insaputa di ***Cid***, anche ***FrancoZ*** ha rifatto i calcoli, presumibilmente durante un ingorgo sull'Autostrada del Sole; da questo si deduce che, esattamente come Rudy (che riesce finalmente a parlarne un'altra volta) durante i traslochi i libri di matematica se li sposta lui. Il nostro invoca tutte le attenuanti (quelle del trasloco erano specifiche, il confondere raggio con diametro è generica: il nostro Avvocato preferito dice che si possono invocare entrambe) e parte (dalla Puglia), armato delle sue derivate e pronto a sfidare i "lavori in corso tra Roncobilaccio e Barberino del Mugello".

Rifaccio i conti con i dati corretti:

$$p_f = a\pi r^2 = 16\pi a \qquad y_f = 0$$

$$p_p = 2a\pi rh = 96\pi a \qquad y_p = h/2 = 6$$

$$p_a = x\pi r^2 = 16\pi x \qquad y_a = x/2$$

Il baricentro del bicchiere è all'altezza y tale che:

$$y\,(p_f + p_p + p_a) = y_f p_f + y_p p_p + y_a p_a$$

ossia:

$$y = (333a + 4x^2) / (56a + 8x)$$

Derivo ed uguaglio a zero:

$$y' = 8x\,(56 + 8x)^{-1} - 8\,(333a + 4x^2)\,(56a + 8x)^{-2} = 0$$

$$8x\,(56 + 8x) - 8\,(333a + 4x^2) = 0$$

$$4x^2 + 56\,x - 333a = 0$$

Sostituisco quindi il valore noto $x = 9/2$ e ottengo $a = 1$ e quindi:

$$p_b = p_f + p_p = 112\pi a = 112\pi = 352\ g$$ (circa)

Oh! Cominciavamo a preoccuparci! Bene, qualcuno vuole provare ad ottenere qualche altro numero? Come aiutino, vi diciamo che il tumbler pesa meno di cinque chili, ossia a due valori (in grammi) per volta dovremmo ottenere tutti i risultati possibili entro il numero del 2 maggio 2216 (o del 4: il primo maggio è un mercoledì, quindi forse facciamo il ponte).

Bene, lasciamo questo affascinante duello ai prossimi numeri.

5.3 [111]

Qui, abbiamo un dilemma; poche soluzioni sul primo problema, con analisi ben diversificate e uso di aggeggi che ci stanno simpatici; molta roba sul secondo, ma attraverso linee risolutorie piuttosto comuni; non solo, ma a Rudy avrebbe fatto piacere vedere "una certa cosa"… Ne parliamo dopo, verso il fondo.

5.3.1 Pulizie di Primavera

La prima soluzione ricevuta è stata quella di ***Frank Sinapsi***; non si è sforzato moltissimo (soprattutto verso la fine), ma consideriamo decisamente apprezzabile il tentativo di spiegare tutto con meno formule possibili.

> Ancora non ho risolto i problemi, ma ieri sera ho letto e riflettuto un po' sul primo (Pulizie di primavera). Forse ci ritornerò su e farò qualche calcolo. Nel caso dovessi dimenticarmi *[come sembra sia successo, o io mi sono perso qualcosa (RdA)]*, ti mando il mio semplice ragionamento.
>
> Alberto è avvantaggiato. La probabilità del 12 è 1/36, quella del 7 è 1/6.
>
> Sembra che la probabilità di una coppia di 7 sia 1/36 e potrebbe essere un trabocchetto di chi ha proposto il gioco... però Alberto, in media, arriva a 20 punti in 720 lanci, mentre l'altro ci arriva, in media, con un numero superiore di lanci. Vediamo perché.
>
> Basta immaginare una sequenza di 720 lanci come DUE sequenze di 360 COPPIE di lanci, traslate di un lancio (la seconda ne avrebbe in realtà 359). Ora, quanti elementi "coppia di 7" dobbiamo aspettarci in ciascuna delle due sequenze? Ce ne dobbiamo aspettare 10 per ciascuna.
>
> Tuttavia queste non si traducono certamente in punti per il giocatore Fred, perché esiste la possibilità che si sovrappongano.
>
> Vediamo degli esempi per chiarire cosa intendo:
>
> Nella sequenza normale potremmo avere una situazione come questa:
>
> `... 5 10 7 2 3 7 7 7 7 7 9 4 ...`
>
> qui abbiamo cinque sette in fila: in ciascuna delle due sequenze di coppie abbiamo due risultati buoni, ma i punti assegnati a Fred sono solo due.

> Altra situazione:
>
> `... 5 10 7 2 3 7 7 11 7 7 9 4 ...`
>
> Adesso in ciascuna delle due sequenze di coppie abbiamo un solo risultato buono, e i punti assegnati sono proprio due. Quindi, su 720 lanci dobbiamo aspettarci che il secondo giocatore (Fred) totalizzerà meno di 20 punti, e quindi Alberto è avvantaggiato. Calcolando il numero medio di punti non validi (delle 20 "coppie di 7" attese sulle due sequenze traslate) si ricava il numero di punti medi totalizzati da Fred in 720 lanci, e quindi anche il numero medio di lanci necessario per arrivare a 20 punti (sarà sicuramente superiore a 720).
>
> Però non l'ho calcolato, mi sono fermato a questo semplice ragionamento.

Altro tentativo "ragionatorio" da parte di ***FrancoZ*** che (con l'aria tranquilla e rilassata di chi ormai comincia ad intravedere improbabili offerte di Nebbiolo da Autogrill) spiega al perplesso casellante:

> La probabilità di fare 12 lanciando una coppia di dadi (1/36) è pari a quella di fare 7 per due volte consecutive (1/6^2=1/36). Però i possibili eventi assoggettati alle probabilità sono diversi: per il 12 ho N (numero dei lanci) chances mentre per il doppio sette le possibilità sono solo N–1 (numero delle consecutività).
>
> Alberto sarà quindi sempre favorito rispetto a Fred (anche se all'aumentare del numero di lanci il vantaggio si ridurrà sempre più ed è lecito attendersi che per arrivare a 20 punti i lanci siano tanti, magari 720!).

Col che, ***FrancoZ*** ci dischiude il segreto della sua regione d'origine: né i Pugliesi né i Valdostani sono mai stati famosi per la laconicità delle loro dichiarazioni.

Poteva ***Cid*** rinunciare a questa sfida? È una domanda retorica, quindi non aspettavi risposta (e poi un "No!" avrebbe occupato meno spazio, considerato che Rudy ha deciso di far pesare il fatto che per questo numero ha fatto un mucchio di lavoro aumentando artatamente il volume delle parti scritte da lui medesimo).

> Il gioco risulta vantaggioso per Alberto.
>
> Per avere un gioco equo si dovrebbe aggiungere la regola che al primo tiro dei dadi non sia possibile fare punti (nemmeno se esce un 12). Ad ogni tiro dei dadi Alberto con una probabilità pari a: $\frac{1}{36}$ realizza un punto. Fred, invece, realizza un punto se viene 7 sia nel tiro attuale che in quello precedente. La probabilità che al tiro attuale venga 7 è pari a: $\frac{1}{6}$, se c'è stato un tiro precedente, la probabilità che sia venuto 7 è pari a: $\frac{1}{6}$. Essendo i due eventi indipendenti tra loro, la probabilità che si verifichino entrambi è pari al prodotto delle probabilità: $\frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Quindi Alberto dal secondo lancio dei dadi ha la stessa probabilità di Fred di realizzare un punto; per cui risulta avvantaggiato dal fatto che al primo lancio dei dadi ha la possibilità di realizzare un punto, mentre Fred non ha questa possibilità, non esistendo un tiro precedente.
>
> Con la regola che al primo tiro dei dadi non sia possibile fare punti il gioco diventerebbe equo.

Alexphys (benvenuto!) ci manda due soluzioni: la prima perfettamente impaginata in PDF, la seconda che ha fatto tirare un sospiro di sollievo a Rudy; infatti come tutti (tranne le new entry, tra cui è annoverato il Nostro: approfittiamo dell'occasione per rispiegarlo) sanno, il PDF non riusciamo a trattarlo e dobbiamo riscriverlo passo passo;

molto meglio il modo testo, come per la seconda, dove dobbiamo solo fare gli amanuensi con le formule usando per il resto il Copia&Incolla&Riformatta. Stesso problema con la soluzione di ***Daniele*** (benvenuto!); viene da pensare che abbiano utilizzato addirittura lo stesso template. Reiteriamo l'invito, prima o poi lo piazzeremmo in bugiardino: Word lo leggiamo tutti, OpenOffice Rudy lo può tradurre (anche le formule), il modo testo richiede una riscrittura delle formule, il PDF implica andare avanti un carattere alla volta.

Caso mai vi interessasse, la correzione di ***Alexphys*** riguarda il fatto che nel PDF veniva utilizzata la distribuzione binomiale; spiace un po' il fatto che quella durasse tre pagine, mentre in modo testo se la cava con meno. Comunque, il risultato è uguale.

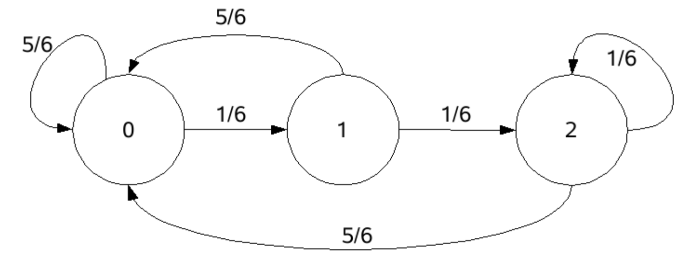
> $p_{12} = \frac{1}{36}$ (probabilità che su un singolo lancio di dadi si abbia un 12)
>
> $p_7 = \frac{1}{6}$ (probabilità che su un singolo lancio di dadi si abbia un 7)
>
> La probabilità di ottenere un 12 solo e soltanto all' n-esimo lancio è :
>
> $$A = p_{12}(1 - p_{12})^{n-1}$$
>
> invece la probabilità di ottenere un doppio 7 solo e soltanto all' n-esimo lancio è :
>
> $$B = p_7^{\,2}(1 - p_7)^{n-2}$$
>
> osservando che $p_{12} = p_7^{\,2}$, dobbiamo allora capire se $B < A$ per ogni n oppure no, quindi
>
> $$\begin{aligned} &p_7^{\,2}(1-p_7)^{n-2} < p_{12}(1-p_{12})^{n-1} \Rightarrow \\ &p_7^{\,2}(1-p_7)^{n-2} < p_7^{\,2}\left(1-p_7^{\,2}\right)^{n-1} \Rightarrow \\ &(1-p_7)^{n-2} < \left(1-p_7^{\,2}\right)^{n-1} \Rightarrow \\ &(1-p_7)^{n-2} < (1-p_7)^{n-1}(1+p_7)^{n-1} \Rightarrow \\ &(1-p_7)^{-1} < (1+p_7)^{n-1} \end{aligned}$$
>
> A questo punto osserviamo che all'inizio del gioco (e dopo ogni punto messo a segno da uno dei due giocatori) per fare un doppio sette servono almeno due lanci, mentre ne basta uno solo per fare un dodici. Puntualizzo questo perché la disuguaglianza precedente va studiata per n >= 2.
>
> Per n=2 la probabilità di ottenere un doppio 7 è maggiore di quella di ottenere un 12 al secondo lancio per n >=3 la probabilità di ottenere un doppio 7 è sempre minore di quella di ottenere un 12 all' n-esimo lancio. Anche se per n=2 è favorevole il doppio 7, in generale resta più probabile che vinca il 12.

Su questo problema si è lanciato anche ***Trekker***, che riceve inoltre i calorosi auguri da parte di Rudy, visto che anche per lui quest'anno sono Nozze di Porcellana. Il Nostro non specifica il mese, ma Rudy ricorda che quell'anno, a parte un certo week-end di marzo[15], è piovuto tutti i fine settimana sino a giugno inoltrato.

> La probabilità che esca un 12 da una coppia di dadi è pari ad 1/36, che è anche la probabilità che Alberto ha di fare un punto nel prossimo lancio, mentre la probabilità che esca 7 da una coppia di dadi è 1/6, precisamente il sette è ottenibile

[15] Se volete ulteriori dettagli: Rudy ha sempre sostenuto che lui e sua moglie si sono sposati *in stagioni diverse.*

in 6 (su 36) modi (1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2 e 6+1). Poiché per fare un punto Fred deve ottenere due volte consecutive 7 e 1/6*1/6=1/36 sembra che il gioco sia equo. Ma in realtà Fred ha un piccolo svantaggio.



1 *Il diagramma di Markov di* ***Trekker***.

Proviamo a calcolare la probabilità che ha Fred di fare un punto costruendo una catena di Markov di tre stati, precisamente: Fred si "trova" nello stato 2 se è "reduce" da una sequenza di due (o più) sette consecutivi (eh, già, se uscissero, ad esempio, tre sette consecutivi Fred farebbe 2 punti: il punto della prima coppia di sette ed il punto ottenuto con il secondo e terzo sette); Fred si "trova" nello stato 1 se è "reduce" da una sequenza di uno (e uno solo) sette; Fred si "trova" nello stato 0 negli altri casi, cioè quando il risultato precedente non era sette o si è all'inizio del gioco. Poiché si ha probabilità pari ad 1/6 di fare sette con una coppia di dadi e 5/6 di non fare sette, si può costruire il diagramma di Markov in figura 1.

Indichiamo ora con $P_0(t)$, $P_1(t)$ e $P_2(t)$ rispettivamente la probabilità di essere al tempo t nello stato *0* (il tiro precedente non ha dato un sette oppure siamo all'inizio), nello stato *1* (il tiro precedente ha dato un sette ed il tiro precedente del precedente non aveva dato sette) e nello stato *2* (almeno due tiri consecutivi precedenti hanno dato come risultato dei sette). Possiamo quindi scrivere:

$$P_0(t+1)=\frac{5}{6}P_0(t)+\frac{5}{6}P_1(t)+\frac{5}{6}P_2(t)$$

$$P_1(t+1)=\frac{1}{6}P_0(t)$$

$$P_2(t+1)=\frac{1}{6}P_1(t)+\frac{1}{6}P_2(t)$$

$$P_0(0)=1, P_1(0)=P_2(0)=0$$

La soluzione di questo sistema è:

	t=0	t=1	t=2	t=3	t=...
$P_0(t)$	1	5/6	5/6	5/6	...
$P_1(t)$	0	1/6	5/36	5/36	...
$P_2(t)$	0	0	1/36	1/36	...

Si vede quindi che Fred solo a partire dal secondo tiro in poi ha la medesima probabilità (=1/36) di Alberto di fare punto (con due sette consecutivi Fred, con un dodici Alberto). Il gioco quindi è "leggermente" a vantaggio di Alberto. Per renderlo equo il risultato del primo tiro non andrebbe considerato ai fini dei punti ma andrebbe conteggiato per Fred l'eventuale sette uscito.

Come abbiamo[16] sempre sostenuto, le Catene di Markov necessitano di una rivalutazione, nell'ambito della matematica ricreativa. Un mucchio di gente le usa senza sapere neanche come si chiamano (no, non parliamo di voi: sin dal quindicesimo PM Rudy sfrutta ogni momento per usarle).

[16] Plurale Maiestatis di Rudy *[Il Resto della Redazione]*

5.3.2 Ritorno al Luogo da Cui

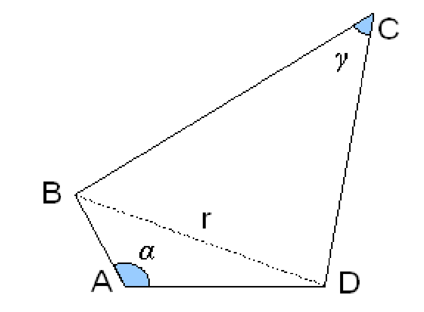
Qui ci limitiamo a statuire tre concetti di cui siamo profondamente convinti:

1. Era facile
2. Non era facile
3. Non siamo d'accordo

Giustificazione dopo le soluzioni, fermo restando che come al solito intendiamo scatenare la rissa. Citiamo, per dovere di cronaca, la soluzione formalmente correttissima di ***Randy*** (benvenuto!). Certifichiamo che il risultato finale è esatto, ma in un paio di passaggi verso il centro della seconda parte qualche Equation Editor deve aver avuto un attacco di mal di pancia, e ci sono due formulacce decisamente illeggibili.

Prima, seconda e terza soluzione quella (no, non è un typo) di ***RM²***: e siamo (quasi: non del tutto) d'accordo.

> Ci sono tre differenti disposizioni dei quattro lati del quadrilatero: fissato un lato di base, per esempio quello di lunghezza 1, le disposizioni sono:
>
> a) quella con i lati adiacenti alla base rispettivamente 2 e 3;
>
> b) quella con i lati adiacenti alla base rispettivamente 2 e 4;
>
> c) quella con i lati adiacenti alla base rispettivamente 3 e 4;
>
> il quarto lato è sempre il lato rimanente.
>
> Oppure, forse ancora più semplice, il lato opposto a quello lungo 1 può essere alternativamente 2, 3 o 4.
>
> Noti i lati del quadrilatero, per il calcolo dell'area utilizziamo la *Formula di Brahmagupta* (http://it.wikipedia.org/wiki/Formula_di_Brahmagupta) che ci dice che l'area di un quadrilatero, noti i lati e due angoli opposti è:
>
> $$A=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\theta}$$
>
> dove p è il semiperimetro, e θ è la semisomma di due angoli opposti.
>
> Sostituendo nella formula le lunghezze dei lati assegnate si ottiene:
>
> $$A=\sqrt{24}\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
>
> che per la ben nota relazione trigonometrica $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ può essere scritto come:
>
> $$A=\sqrt{24}\sin\theta$$
>
> Ora rispondere alla domanda del problema, quando l'area è massima, diventa banale.
>
> L'area è massima quando $\sin\theta$ è massimo, ovvero quando $\theta=\pi/2$.
>
> Ma θ era la semisomma di due angoli opposti del quadrilatero, quindi l'area del quadrilatero è massima quando la somma di due angoli opposti è π.
>
> A questo punto, per determinare completamente il quadrilatero di area massima, occorre trovare quelli la cui somma di due angoli opposti sia π.



2 *La figura di **RM²**.*

Indicati con A,B,C,D i vertici del quadrilatero, α e γ le ampiezze degli angoli nei vertici A e C, sia r la lunghezza della diagonale BD.

Per il teorema del coseno:

$$r^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AB}\,\overline{AD}\cos\alpha$$

$$r^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2\overline{BC}\,\overline{CD}\cos\gamma$$

da cui segue che:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AB}\,\overline{AD}\cos\alpha = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2\overline{BC}\,\overline{CD}\cos\gamma$$

Sostituendo tutte le possibili combinazioni di lunghezze dei lati e ricordando che $\gamma=\pi-\alpha$ per la precedente dimostrazione, e che $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ si ha:

per AB=1, BC=2, CD=3, DA=4:

$1^2 + 4^2 - 2\bullet 1\bullet 4 \cos\alpha = 2^2 + 3^2 - 2\bullet 2\bullet 3 \cos(\pi-\alpha)$

$17 - 8\cos\alpha = 13 + 12\cos\alpha$

$4 = 20\cos\alpha$

$\cos\alpha = 1/5$ => $\alpha = \arccos(1/5) \approx 78° 30'$

per AB=1, BC=3, CD=4, DA=2:

$1^2 + 2^2 - 2\bullet 1\bullet 2 \cos\alpha = 3^2 + 4^2 - 2\bullet 3\bullet 4 \cos(\pi-\alpha)$

$5 - 4\cos\alpha = 25 + 24\cos\alpha$

$-20 = 28\cos\alpha$

$\cos\alpha = -5/7$ => $\alpha = \arccos(-5/7) \approx 135° 30'$

per AB=1, BC=4, CD=2, DA=3:

$1^2 + 3^2 - 2\bullet 1\bullet 3 \cos\alpha = 2^2 + 4^2 - 2\bullet 2\bullet 4 \cos(\pi-\alpha)$

$10 - 6\cos\alpha = 20 + 16\cos\alpha$

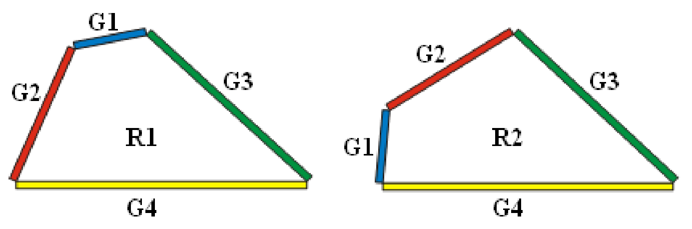
$-10 = 22\cos\alpha$

$\cos\alpha = -5/11$ => $\alpha = \arccos(-5/11) \approx 117°$

Siamo d'accordo invece con il metodo usato da ***BR1***; dissentiamo rispetto all'impaginazione, ma brontoliamo e tentiamo eroicamente di riportare; anche perché comincia lisciando il pelo a Balto (e presentandogli una squinzia… segue foto) con la frase "*il problema del recinto era davvero carino ed elegante, pieno di simmetrie geometriche ed algebriche, e non ho saputo resistere…*". Neanche Rudy, ai complimenti. Tant'è che, nonostante i disegni del Nostro siano fatti in modo strano, un esagerato uso del *PrintScreen* ci permette di riportarli.

Adesso sappiamo che il quesito ha tre soluzioni; anzi no, due… O meglio, una sola… Ma procediamo con ordine…

Per prima cosa ho grattato via la ruggine da ganci e griglie, ed ho riverniciato quest'ultime colorandole in modo da mettere in piedi una cosa che fosse almeno decente; poi, dopo circa 24 tentativi di composizione di quadrilateri, mi sono reso conto che in realtà solo tre di essi erano topologicamente distinti fra loro. In effetti, *di fronte* ad una qualsiasi griglia (poniamo quella da 4 metri, che chiamerò **G4**), si può scegliere di piazzare una delle altre tre (**G1**, **G2** o **G3**), utilizzando le due restanti (rispettivamente **G2** e **G3**, o **G1** e **G3**, o **G1** e **G2**) per i rimanenti due lati del quadrilatero. Tutte le altre possibili costruzioni si ricavano da queste tre, per rotazione o riflessione:



3 *I tre recinti non ottimizzati.*

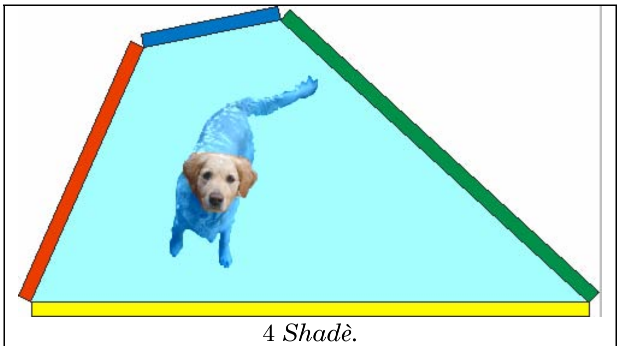
Per i tre recinti così ottenuti, chiamiamoli **R1**, **R2** ed **R3**, c'era allora da scoprire quale fosse la massima area ricopribile… Ho cominciato con **R1**, tentando con l'approccio trigonometrico, andando cioè a cercar di calcolare il valore dell'area in funzione dell'angolo formato da **G2** e **G4**. Dopo aver prodotto una considerevole quantità di carta da macero piena di seni, coseni, scarabocchi e cancellature, ho deciso di prendermi una pausa e di tentar qualcos'altro…

Poi l'insopprimibile indole dell'ingegnere mi ha portato a concepire il metodo empirico qui sotto descritto:

- In primis, ho tappato tutti i buchi delle quattro griglie con pannelli impermeabili, ho aggiunto un fondo elastico alla struttura sigillando ben bene gli orli con adeguate quantità di silicone, e piazzato il tutto in giardino…
- Poi ho incollato, internamente a **G4**, un metro da sarta di spessore infinitesimo in posizione perfettamente verticale
- Quindi ho distorto la struttura fin quando la superficie coperta non appariva *ad occhio* la massima percepibile (regolazione *grossolana*)
- Allora ho versato 5000 litri d'acqua[17] esatti in quella specie di piscina che avevo costruito; le griglie sapete bene che sono alte 1,20 m, e l'acqua riempiva il recinto fino ad una ventina di centimetri dal bordo superiore
- Poi ho pian piano deformato la struttura, stringendola ed allargandola, contemporaneamente osservando con attenzione il livello dell'acqua sul metro e cercando la condizione di altezza minima (regolazione *fine*)
- La misura stimata è stata pari a 1,021 m. Meno di un millimetro di tolleranza, col metro da sarta, non mi sentivo di azzardare…

Quindi, un volume di 5000 litri (5 m^3), diviso per la suddetta altezza fornisce l'ambito risultato:

Massima area possibile per R1: $5/1{,}021\ m^3/m = 4{,}897\ m^2$



4 *Shadè.*

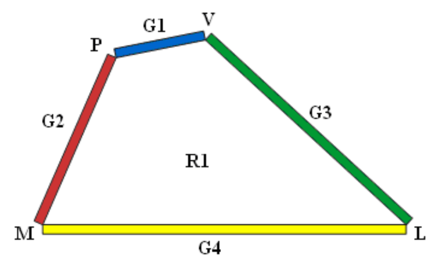
Ero però dubbioso… Vuoi vedere, mi dicevo, che a quei pignoli di Rudy, Piotr ed Alice non bastano tre cifre significative? Caso mai me la menano con la solita solfa della inattendibilità matematica delle valutazioni ingegneristiche… Sono allora rientrato in casa per prendere il metro elettronico laser, con l'idea di migliorare la precisione di almeno un ordine di grandezza ma, al mio ritorno in giardino, sgradita sorpresa… Shadè, la cagnetta, approfittando della mia momentanea

[17] Naturalmente distillata, per garantire la massima precisione possibile nel corso della misurazione

assenza e seguendo l'indole innata del Golden Retriever, era saltata nel recinto per farsi un bagno, e adesso mi guardava in modo colpevole.

Non sapevo quanta acqua distillata fosse schizzata fuori al momento del tuffo, e avevo quasi esaurita la scorta che conservo in cantina per casi simili a questo… Per cui, sconsolato, sono tornato in casa ed ho ripreso carta e penna, mentre Shadè, rassicurata, se la sguazzava beata…

Pazienza… Ho ricominciato ancora da **R1**, denominando i vertici del *quadrilatero* come segue[18]:

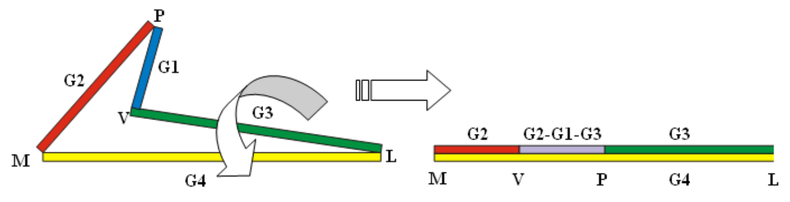


5 *R1 e i suoi vertici*

Poi mi sono concentrato sui possibili movimenti di **G3**: questa griglia, partendo da una condizione simile a quella della figura 6, può essere ruotata in senso antiorario fino a toccare **G4**, come indicato in figura 6.

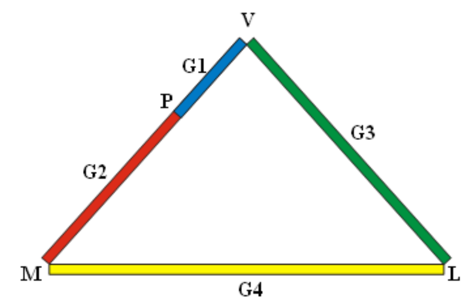
La parte grigia nel lato destro della figura rappresenta la sovrapposizione di **G1** con la metà destra di **G2** ed il terzo sinistro di **G3**.

In astratto, **G3** potrebbe ruotare ulteriormente in modo antiorario; tale casistica, da trattarsi nella quarta dimensione, viene lasciata ai volenterosi lettori come esercizio.



6 *Compressione di R1*

Partendo di nuovo dalla figura 5, e facendo ruotare **G3** in senso orario, la situazione limite è stavolta la seguente:



7 *Rotazione di G3 in senso orario*

Anche adesso, si potrebbe tentare di far ruotare ancora **G3**, ma solo con grave nocumento ai ganci…

Nella prima situazione limite, la distanza **MV** è pari ad 1, come si deduce facilmente osservando la parte destra della figura 7; partendo da questa condizione e facendo ruotare **G3**, la lunghezza del tratto **MV** aumenta di valore sino alla situazione di figura 8, quando il suo valore è pari a 3.

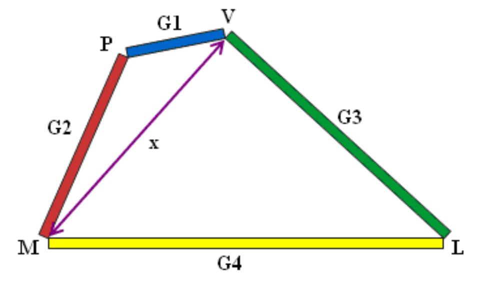
E allora si è scelto **MV** come variabile del problema[19], indicandola con x (tanto per fornire una denominazione originale ad un'incognita… Riportato in figura 8):

[18] Il criterio di scelta per le lettere utilizzate deriva da qui…:

[19] Si sarebbe potuto scegliere, con analoghe considerazioni, il segmento congiungente i punti **L** e **P**.

La congiungente i punti **M** e **V**, la cui lunghezza è x, bipartisce il quadrilatero in due triangoli, **MPV** e **VLM**; di ciascuno di essi sono noti due lati, ed il terzo, comune, è rappresentato dalla nostra incognita.

Ed allora l'area complessiva del quadrilatero **R1** si può esprimere come segue:



8 *R1 bipartito*

$$1)\quad A_{R1} = A_{MPV} + A_{VLM}$$

Esprimendo le aree dei due triangoli tramite la formula di Erone:

$$2)\quad A_{R1} = \sqrt{\frac{1+2+x}{2}\cdot\left(\frac{1+2+x}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1+2+x}{2}-2\right)\cdot\left(\frac{1+2+x}{2}-x\right)} + \\ + \sqrt{\frac{3+4+x}{2}\cdot\left(\frac{3+4+x}{2}-3\right)\cdot\left(\frac{3+4+x}{2}-4\right)\cdot\left(\frac{3+4+x}{2}-x\right)}$$

Dopo qualche passaggio algebrico:

$$3)\quad A_{R1} = \frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{(9-x^2)\cdot(x^2-1)} + \sqrt{(49-x^2)\cdot(x^2-1)}\right)$$

Posto adesso (tanto per semplificarci la vita…):

$$4)\quad x^2 = y$$

La 3) diviene:

$$5)\quad A_{R1} = \frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{(9-y)\cdot(y-1)} + \sqrt{(49-y)\cdot(y-1)}\right)$$

Dalle condizioni di consistenza della 5) (argomenti delle radici quadrate non negativi), si ha poi che debba essere:

$$6)\ 1 \le y \le 9$$

Per trovare il valor massimo della nostra area, occorre derivare la 5) sperando che la derivata si annulli per qualche valore di y (e quindi di x…):

$$7)\quad \frac{dA_{R1}}{dy} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{-(y-1)+(9-y)}{2\cdot\sqrt{(9-y)\cdot(y-1)}} + \frac{-(y-1)+(49-y)}{2\cdot\sqrt{(49-y)\cdot(y-1)}}\right) = 0$$

Da cui, dopo qualche calcolo:

$$8)\quad (5-y)^2\cdot\left(-y^2+50y-49\right) = (y-25)^2\cdot\left(-y^2+10y-9\right)$$

Proseguendo ancora nei calcoli, e ringraziando la buona sorte grazie alla quale tutti i fattori in y alla terza e quarta potenza si elidono gentilmente a vicenda, si arriva all'equazione risolvente:

$$9)\quad 7y^2 - 62y + 55 = 0$$

Da cui:

$$10)\ \ y_{1,2}=\frac{31\pm\sqrt{31^2-7\cdot55}}{7}=\frac{55}{7}$$

E quindi, in base alla 4) e tralasciando i valori negativi per x:

$$11)\ \ \begin{aligned}x_1&=\sqrt{55/7}\approx2{,}803\\ x_2&=1\end{aligned}$$

I corrispondenti valori per l'area del quadrilatero si possono ricavare dalla 5), sostituendo in essa i valori trovati per y:

$$12)\ \ A_{R11}=\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{\left(9-\frac{55}{7}\right)\cdot\left(\frac{55}{7}-1\right)}+\sqrt{\left(49-\frac{55}{7}\right)\cdot\left(\frac{55}{7}-1\right)}\right)=2\cdot\sqrt{6}\approx4{,}899$$ [20]

$$13)\ \ A_{R12}=\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{(9-1)\cdot(1-1)}+\sqrt{(49-1)\cdot(1-1)}\right)=0$$

Evidentemente, il valore fornito dalla 13) rappresenta il minimo per l'area cercata (corrispondente alla parte destra di figura 6), mentre quello della 12) è invece quanto richiesto dal problema. La prima delle tre soluzioni è quindi:

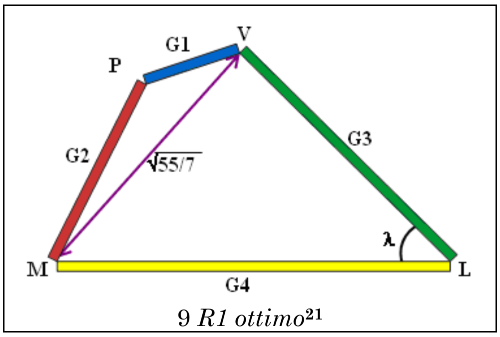
$$14)\ \ A_{R1_{MAX}}=2\cdot\sqrt{6}$$

Per poter rappresentare graficamente il quadrilatero d'area massima, si può ad esempio utilizzare il teorema di Carnot e ricavare l'angolo compreso fra **G3** e **G4**:

$$15)\ \ \cos(\lambda)=\frac{3^2+4^2-55/7}{2\cdot3\cdot4}=5/7$$

$$16)\ \ \lambda=\arccos\left(5/7\right)\approx44{,}42°,$$

per cui il nostro primo recinto avrà l'aspetto mostrato in figura 9.



9 *R1 ottimo*[21]

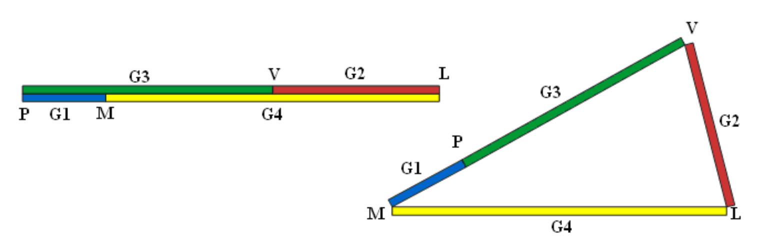
Bene… adesso passiamo al secondo caso, **R2**. Ma basta un'occhiata alla figura 3 ed alla formula 2) per rendersi conto che quest'ultima, applicando lo stesso procedimento utilizzato per **R1**, non cambia affatto! Si invertono semplicemente le posizioni fisiche di **G1** e **G2**, ma il resto del procedimento di calcolo resta inalterato, e di conseguenza i risultati… Quindi, in termini di valori dell'area massima cercata, le soluzioni si riducono al più a due… In ogni caso la forma del recinto viene fuori un po' diversa, cioè come mostrato in figura 10.

[20] Quindi, la soluzione empirica con la piscina era errata dello 0,4 ‰… Tutti 'sti calcoli per 20 cm²…

[21] Il quadrilatero ottimo di figura 8 è solo apparentemente uguale a quelli delle figure 1, 2, 3 e 7, che erano stati ottenuti per regolazione *grossolana* durante l'esperimento con l'acqua… In realtà gli angoli sono un po' diversi…

E infine, **R3**. Stavolta non è così semplice come per **R2**, ma il procedimento adottato per **R1** è di nuovo applicabile senza varianti significative. I due casi limite illustrati dalle figure 7 e 9 per **R1** assumono adesso il seguente aspetto, facendo ruotare però **G2** anziché **G3**.

Osservando le figure in 10, si deriva che il campo di variabilità dell'incognita (distanza fra **M** e **V**) copre stavolta l'intervallo fra i valori 2 e 4.



10 *Casi limite per R3*

Con qualche calcolo, si verifica che le equivalenti delle 5) e 6) sono, in questo caso:

$$17)\ A_{R3} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{(16-y)\cdot(y-4)} + \sqrt{(36-y)\cdot(y-4)}\right)$$

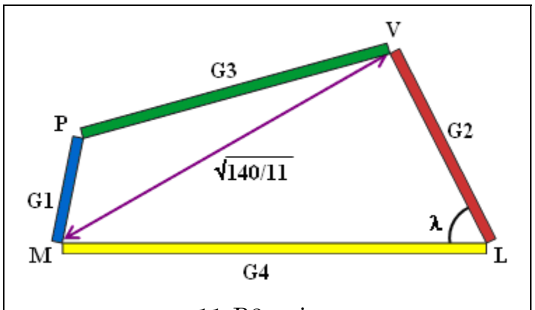
$$18)\ 4 \le y \le 16$$

E poi, ecco le equivalenti delle 9), 10) ed 11):

$$18)\ 11y^2 - 184y + 560 = 0$$

$$19)^{22}\ y_{3,4} = {}^{140}\!\!/_{11}$$

$$20)\ x_3 = \sqrt{{}^{140}\!\!/_{11}} \approx 3{,}568 \quad x_4 = 2$$



11 *R3 ottimo*

Ancora, una delle soluzioni porta ad area nulla; per cui l'unica significativa è l'altra: piazzando 140/11 in vece di y nella 17) si ricava:

$$21)\ A_{R3_{MAX}} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\left(16-\frac{140}{11}\right)\cdot\left(\frac{140}{11}-4\right)} + \sqrt{\left(36-\frac{140}{11}\right)\cdot\left(\frac{140}{11}-4\right)}\right) = 2\cdot\sqrt{6}$$

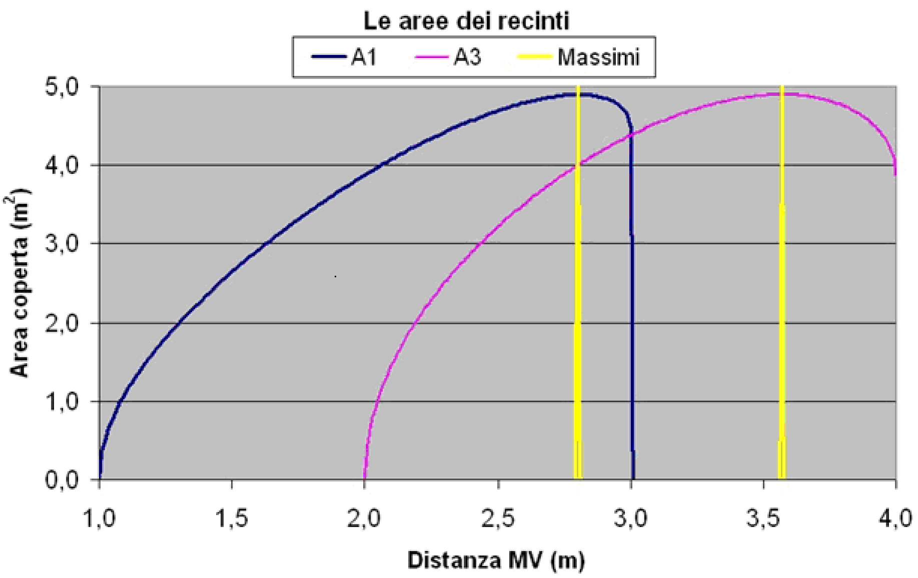
Ed allora, l'area massima per **R3** è la stessa di quelle per **R1** ed **R2**! E quindi, in termini di aree, la soluzione è unica!

Infine, l'angolo in **L** e l'immagine dell'ottimo di **R3** sono quelli che seguono:

[22] Se si rivede adesso un attimo la 10), e la equipara alla corrispondente 19) qui commentata, si può osservare che numeratore e denominatore delle frazioni che costituiscono le soluzioni non banali (55/7 e 140/11) hanno parecchio in comune… Peccato che ho già fatto e rifatto tutti i disegnini e non me la sento ora di ribaltarli daccapo… Però avevo eseguito in precedenza i calcoli considerando la congiungente **LP** come incognita invece della congiungente **MV**, e giuro che con quell'approccio (provare per credere…), veniva fuori 77/5 come soluzione non banale. Cioè i recinti più significativi per questo problema si reggono sulle frazioni 55/7 e 77/5… Meraviglioso… Le simmetrie di questo quesito sono a dir poco stupefacenti… Corrispondenze, giochi di specchi… Cubi e quarte potenze che scompaiono d'incanto, intimidite; equazioni che collassano in soluzioni semplici, discriminanti che fan di tutto per esser quadrati perfetti… Davvero un prodigio di concezione; complimenti vivissimi a Rudi, Piotr ed Alice se è farina del loro sacco, e complimenti anche se non lo è, per averlo saputo scovare… *[Ringraziamo sentitamente, ma non è farina del nostro sacco; ringrazia anche il tipo che lo ha inventato: nessuno di noi (lui incluso) supponeva la si potesse tirare così lunga in modo interessante su un problema del genere. E Balto vuole il numero di cellulare di Shadè]*

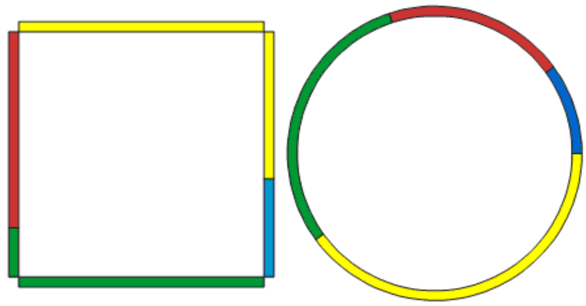
$$22)\ \lambda = \arccos\left(\frac{2^2+4^2-{}^{140}\!/_{11}}{2\cdot 2\cdot 4}\right) = \arccos\left({}^{5}\!/_{11}\right) \approx 62{,}94°$$

Per concludere, non poteva mancare un bel grafico Excel, a mostrar l'andamento delle aree al variare della distanza fra **M** e **V**:



12 *Il grafico in Excel (puro PrintScreen, purtroppo)*

E comunque, la prossima volta chiamate un ingegnere, o almeno un fabbro... Ripiegando opportunamente **G3** e **G4**, potrebbe facilmente realizzarvi un recinto di 6,25 m² o, con un po' di spesa in più e riutilizzando lo stesso materiale, uno di 7,958 m², come si vede dall'ultima figura: un guadagno di spazio del 27,6% e del 62,4% rispettivamente...



13 *Una cosa su cui pensare*

Ecco, potremmo anche essere d'accordo. Ma la seconda figura ci lascia pensierosi; andiamo avanti. Comunque ci pare ben supportato il punto (2), ossia che non era facile.

Adesso vediamo un caso di punti (1) e (3). Con ***Zar***, al quale il problema sembra sia piaciuto.

Esistono tre possibilità per sistemare le quattro griglie: (1,2,3,4), (1,3,2,4), (1,2,4,3). Cominciamo dalla prima, e tracciamo la diagonale x che divide il quadrilatero (1,2,3,4) in due triangoli: (1,x,4) e (2,3,x). Applichiamo una delle formule più inutili della matematica, la formula di Erone per il calcolo dell'area dei triangoli. L'area del primo triangolo risulta uguale (saltando noiosi passaggi e semplificando l'espressione il più possibile) a:

$$\frac{\sqrt{(25-x^2)(x^2-9)}}{4}$$

Analogamente l'area dell'altro triangolo risulta uguale a:

$$\frac{\sqrt{(25-x^2)(x^2-1)}}{4}$$

Se indichiamo con f(x) il quadruplo della somma delle aree (per eliminare il denominatore 4, inutile ai fini del calcolo dell'area massima), il problema si traduce nella ricerca del massimo della funzione f(x) quando x è compreso tra 3 e 5 (ricordiamo che in un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza).

Con noiosi calcoli arriviamo a trovare la derivata[23]

$$f'(x)=\frac{-\left(\sqrt{(x^2-9)}+\sqrt{(x^2-1)}\right)\sqrt{(x^2-9)}\sqrt{(x^2-1)}+\sqrt{(25-x^2)}\left(\sqrt{(x^2-1)}+\sqrt{(x^2-9)}\right)}{\sqrt{(25-x^2)}\sqrt{(x^2-9)}\sqrt{(x^2-1)}}$$

Uno studio preliminare ci fa capire che la funzione ha la concavità rivolta verso il basso, e che l'unico punto in cui la derivata si annulla è effettivamente un massimo. Ponendo quindi f'(x)=0, eliminando il denominatore sempre positivo, elevando arditamente al quadrato e semplificando, si arriva a

$$(x^2-1)(17-x^2)^2-(x^2-9)(13-x^2)^2=0$$

che si riduce a

$$1232-80x^2=0$$

Otteniamo quindi il massimo in corrispondenza di $x=\sqrt{\frac{77}{5}}$ (valore accettabile perché compreso tra 3 e 5, ricordiamoci che va controllato, dato che abbiamo elevato al quadrato senza tante preoccupazioni).

Sostituendo il valore di x appena trovato nella formula dell'area otteniamo che l'area massima del quadrilatero è pari a $2\sqrt{6}$.

Se consideriamo ora il secondo quadrilatero, quello indicato con (1,3,2,4), e tracciamo la diagonale che lo taglia nei due triangoli (1,x,4) e (3,2,x), ci accorgiamo che i calcoli sono identici a quelli fatti precedentemente. Ma allora otterremmo lo stesso risultato se noi lo dividessimo negli altri due triangoli, (1,3,x) e (2,4,x). Se, quindi, consideriamo il terzo quadrilatero, (1,2,4,3), osserviamo che esso può essere suddiviso nei due triangoli (1,x,3) e (2,4,x), gli stessi del quadrilatero precedente. Dunque l'area massima dei tre tipi di quadrilateri sarà sempre la stessa, $2\sqrt{6}$.

Andiamo ora a ragionare sugli angoli del quadrilatero (consideriamo il primo dei tre, (1,2,3,4)). Indicando con a l'angolo compreso tra i lati 1 e 4, e con b l'angolo compreso tra i lati 2 e 3, e applicando il teorema del coseno, detto anche teorema di Carnot, simpatica generalizzazione del teorema di Pitagora, otteniamo:

[23] La soluzione di ***Zar*** era in modo testo; abbiamo la matematica certezza di aver sbagliato a riscriverla.

$$1+16-8\cos a=\frac{77}{5};$$
$$4+9-12\cos b=\frac{77}{5}.$$

Da cui otteniamo

$$\cos a=\frac{1}{5};$$
$$\cos b=-\frac{1}{5}.$$

Dunque gli angoli a e b sono supplementari.

Analogamente risultano supplementari anche gli altri due angoli, e questo significa che il quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza, proprietà che potevamo immaginare anche all'inizio se fossimo stati un pochino più attenti. Googlando un po' per cercare questo risultato ho trovato che, per un quadrilatero inscrivibile in una circonferenza, vale la formula di Brahmagupta: l'area è uguale a

$$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

dove con p è stato indicato il semiperimetro, come nella formula di Erone di cui questa è una generalizzazione. Da qua si vede anche che non importa l'ordine in cui sono disposti i quattro lati, come avevamo notato sopra in maniera meno "naturale".

Zar, con te ci discuto dopo. Adesso vediamo qualche altra soluzione.

Molto interessante quella di ***Trekker***, anche perché ci risolve un dubbio del quale discuteremo in seguito:

> Osserviamo che da un quadrilatero non convesso (e che quindi ha un angolo maggiore di un angolo piatto) ne possiamo sempre costruire un altro convesso e di area maggiore semplicemente "ribaltando" intorno alla diagonale esterna al quadrilatero i due lati che concorrono a formare l'angolo maggiore dell'angolo piatto. Cerchiamo quindi il quadrilatero di area massima fra tutti i quadrilateri convessi, cioè che hanno angoli interni φ tali che $0 < \varphi \le \pi$ noti che siamo i lati a,b,c,d (con a maggiore di tutti gli altri) e gli angoli α e β formati rispettivamente dai lati a,b e c,d.
>
> Poiché, nell'esempio proposto da RM, ogni lato è minore della somma di tutti gli altri dovremmo essere in gradi di costruire dei quadrilateri.
>
> A questo proposito mi sovviene che esiste una generalizzazione[24] della formula di *Brahmagupta* per il calcolo dell'area di quadrilateri ciclici (=inscrivibili in una circonferenza, ovvero con angoli opposti supplementari) al caso di quadrilateri generici, precisamente :
>
> $$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$
>
> dove S è l'area del quadrilatero, p il semiperimetro, α e β una coppia di angoli opposti.

[24] Giusto per aumentare il climax: questa è la parola chiave relativa alla risoluzione del dubbio.

Si vede subito che l'area è massima quando $\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$, cioè per angoli α e β supplementari.

In questo caso l'area diventa (secondo anche Brahmagupta):

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}=\sqrt{(5-4)(5-3)(5-2)(5-1)}=\sqrt{24}=\mathbf{2\sqrt{6}}m^2$$

essendo $p=\frac{5+4+3+1}{2}=5m$

Proviamo ad ottenerla in altro modo.

Utilizzando il teorema di Carnot possiamo esprimere il quadrato della diagonale opposta ai due angoli α e β in due modi distinti, precisamente:

$$a^2+b^2-2\mathrm{abcos}(\alpha)=c^2+d^2-2\mathrm{cdcos}(\beta)$$

e differenziando rispetto ad α e β otteniamo, dopo qualche semplificazione:

$$ab\sin(\alpha)d\alpha=cd\sin(\beta)d\beta$$

Poniamo ora sin(β) ≠ 0, cioè β ≠ π (questo caso, in cui il quadrilatero "degenera" in un triangolo, dal punto di vista del calcolo dell'area, lo tratteremo dopo), ottenendo:

$$d\beta=\frac{ab\sin(\alpha)}{cd\sin(\beta)}d\alpha$$

L'area S del quadrilatero si può esprimere con:

$$S=\frac{1}{2}(ab\sin(\alpha)+cd\sin(\beta))$$

Differenziando rispetto ad α e β otteniamo:

$$dS=\frac{1}{2}(ab\cos(\alpha)d\alpha+cd\cos(\beta)d\beta)$$

e sostituendo l'espressione di dβ e sfruttando le formule di addizione trigonometriche otteniamo:

$$dS=\frac{ab}{2\sin(\beta)}\sin(\alpha+\beta)d\alpha$$

che vale zero per sin(α+β)=0, cioè per α e β supplementari (perciò sin(α)=sin(β) e cos(α)=–cos(β)). Con questa condizione siamo in grado di scrivere:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\alpha)&=\frac{(a^2+b^2)-(c^2+d^2)}{2(ab+cd)}\\ S&=\frac{ab+cd}{2}\sin(\alpha)\end{aligned}}$$

Prima di procedere accertiamoci che –1≤cos(α)≤1. Infatti svolgendo i calcoli si trova che questa condizione (nell'ipotesi che a sia il maggiore dei lati e che d≤c) è verificata qualora: a≤b+c+d e c≤a+b+d, cioè quando i lati sono minori della somma degli altri tre. E questo è il nostro caso.

Armandoci di pazienza e sfruttando la relazione $\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$ si trova, dopo qualche scomposizione ripetuta del tipo $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$, proprio

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Dobbiamo ora solo "sciogliere il dubbio" su quel sin(β) ≠ 0, cioè $\beta \neq \pi$. Ipotizziamo quindi che $\beta = \pi$. In questo caso il quadrilatero si riduce ad un triangolo di lati a, b, (c+d) la cui area T, secondo la formula di Erone, vale:

$$T=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c-d)}$$

Si osservi che:

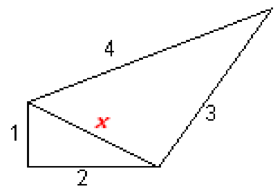
$$\frac{S^2}{T^2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{p(p-a)(p-b)(p-c-d)}=\frac{(p-c)(p-d)}{p(p-c-d)}=\frac{p^2-pc-pd+cd}{p^2-pc-pd}=1+\frac{cd}{p^2-pc-pd}>1$$

quindi anche questo quadrilatero "degenere" in triangolo ha un'area inferiore al quadrilatero ciclico. Come ultima osservazione si ricorda che esistono *6 quadrilateri ciclici di area massima*, precisamente i due che hanno come lati opposti le coppie (4,1) e (2,3), i due che hanno come lati opposti le coppie (4,2) e (1,3) ed i due che hanno come lati opposti le coppie (4,3) e (1,2). *L'area minima invece è zero*, ed esistono 6 modi diversi di ottenerla "appiattendo" il quadrilatero ad essere praticamente un segmento: ad esempio si prolunghi il lato di 4 m con quello da 1 metro e si "ritorni" indietro con i lati da 3m e da 2m, uno come prolungamento dell'altro.

Ottimo, come sempre.

FrancoZ taglia decisamente per i campi, usando Excel in modo decisamente brutale; supponiamo in quanto tutta la carta sulla quale far di conto era ancora negli scatoloni e si trovava a disposizione solo qualche testo di matematica e un computer. Vale comunque la pena di seguirlo, soprattutto quando si occupa dei "malfidanti".

Prendo un'arbitraria sequenza dei lati (1, 2, 3, 4) e mi calcolo l'area massima ottenibile:



1. Chiamo x la diagonale così come indicata nel disegno: si vede immediatamente che sarà $1 \le x \le 3$

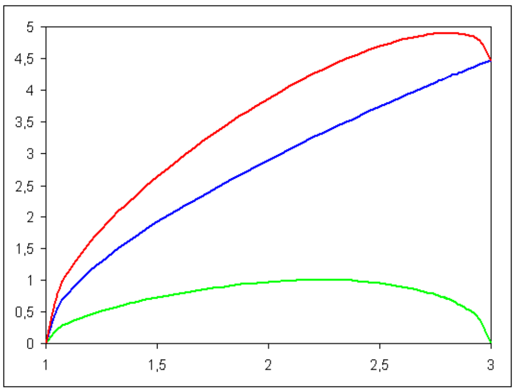
2. Calcolo le aree dei due triangoli con la formula di Erone; la superficie totale sarà:

$$S=\frac{\sqrt{\left(1^2+2^2+x^2\right)^2-2\left(1^4+2^4+x^4\right)}+\sqrt{\left(3^2+4^2+x^2\right)^2-2\left(3^4+4^4+x^4\right)}}{4}$$

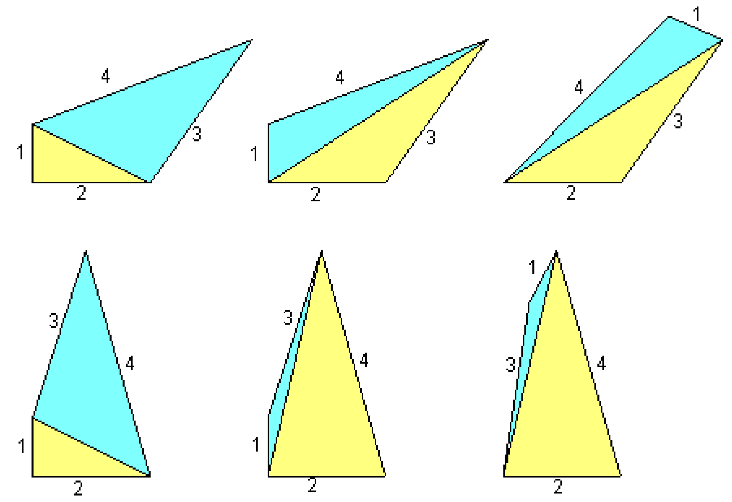
3. Riduco un pochino l'equazione poi derivo ed uguaglio a zero...

Facile a dirsi!

Molto più veloce analizzare il valore della superficie con metodi "discreti": con Excel si fa questo bel grafico (area dei due triangoli e totale) e si verifica che il massimo si ottiene quando x≈2,803 e risulta essere S≈4,899.



Per i malfidenti che pensassero di ottenere risultati diversi con sequenze differenti dei lati ho preparato quest'ultimo disegno che credo sia autoesplicativo: tutti i quadrilateri disegnati hanno ovviamente la stessa superficie!



14 *Il disegno autoesplicativo di **FrancoZ***

L'ultimo disegno ci piace da matti.

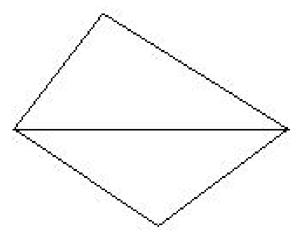
Va citata (ma non riportiamo causa nullafacenza del sabato pomeriggio) la soluzione di ***Alexphys***: il ragazzo promette bene e comparirà sovente, soprattutto se riusciamo a rifilargli un virus che gli cancelli Acrobat. Parte dal "Meccano", che come tutti voi ricorderanno è stato uno dei grandi amori di gioventù di Rudy.

E qui rifacciamo la domanda retorica: poteva mancare ***Cid***? Per la risposta, si veda sopra. Arriva la soluzione, aprite l'allegato e, come sempre, la prima riga è la risposta. E va bene. Poi, di solito, seguono delle considerazioni che verranno dimostrate in seguito e qui, anche se a noi mettere il risultato finale all'inizio non piace mai molto, vale decisamente la citazione:

> In generale, un quadrilatero di lati: a, b, c, d ha area massima pari a:
>
> $$\frac{\sqrt{8abcd+2a^2b^2+2a^2c^2+2a^2d^2+2b^2c^2+2b^2d^2+2c^2d^2-a^4-b^4-c^4-d^4}}{4}$$
>
> e nel caso particolare in cui: $a-b=c-d$ l'area massima risulta uguale a: $\sqrt{abcd}$

Indi, per chi è sopravvissuto a quest'affermazione, si inizia la demolizione del problema.

> Per cominciare, dimostro che l'area del quadrilatero non dipende dall'ordine in cui sono disposti i lati.
>
> Infatti, con riferimento alla figura a fianco, in cui è rappresentato un quadrilatero ed una delle sue diagonali, l'area del quadrilatero è uguale alla somma dell'area dei due triangoli che si trovano sopra e sotto la diagonale e per la formula di Erone, l'area dei triangoli dipende solo dai lati che li compongono. Pertanto, se si scambiano di posto due lati adiacenti del quadrilatero la sua area non muta. Siccome lo scambio di posto di due lati opposti si può ottenere



15 *Prima figura di **Cid***

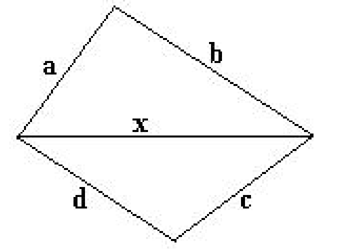
con tre scambi di posto di due lati adiacenti, si deduce che anche cambiare di posto due lati opposti non muta l'area del quadrilatero.

In tal modo ho ottenuto il primo risultato, l'area massima di un quadrilatero non dipende dall'ordine in cui sono disposti i lati.

Considero ora un poligono avente come dati i lati di lunghezza: a, b, c, d**,**

e come variabile la lunghezza della diagonale che considereremo uguale a ***x***

Essendo il perimetro del triangolo superiore uguale ad (a + b + x) ed il perimetro del triangolo inferiore uguale a (c + d + x), per la formula di Erone l'area del quadrilatero è uguale a:



16 *Seconda figura di* ***Cid***

$$\sqrt{\frac{(a+b+x)}{2}*\frac{(a+b-x)}{2}*\frac{(a-b+x)}{2}*\frac{(-a+b+x)}{2}}+$$
$$+\sqrt{\frac{(c+d+x)}{2}*\frac{(c+d-x)}{2}*\frac{(c-d+x)}{2}*\frac{(-c+d+x)}{2}}$$

che semplificata diviene:

$$f(x)=\frac{1}{4}*\sqrt{2a^2b^2+2a^2x^2+2b^2x^2-a^4-b^4-x^4}+$$
$$\frac{1}{4}*\sqrt{2c^2d^2+2c^2x^2+2d^2x^2-c^4-d^4-x^4}$$

Il valore massimo dell'area si trova per il valore di x per il quale la derivata di $f(x)$ è uguale a zero.

$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{1}{2}*\left(\frac{a^2x+b^2x-x^3}{\sqrt{2a^2b^2+2a^2x^2+2b^2x^2-a^4-b^4-x^4}}+\frac{c^2x+d^2x-x^3}{\sqrt{2c^2d^2+2c^2x^2+2d^2x^2-c^4-d^4-x^4}}\right)$$

Eliminando la soluzione $x=0$ che rappresenta un punto di minimo, si ottiene:

$$(a^2x+b^2x-x^3)*\sqrt{2c^2d^2+2c^2x^2+2d^2x^2-c^4-d^4-x^4}=$$
$$(x^3-c^2x-d^2x)*\sqrt{2a^2b^2+2a^2x^2+2b^2x^2-a^4-b^4-x^4}$$

che risolto porta al seguente risultato:

$$x=\frac{\sqrt{(ab+cd)*(abc^2+abd^2+a^2cd+b^2cd)}}{ab+cd} \qquad [\,1\,]$$

Questo è il valore di x per il quale l'area risulta essere massima.

Sostituendo questo valore di x in $f(x)$ si ottiene il valore dell'area massima.

Dopo alcuni passaggi si arriva al seguente risultato:

$$Area\_massima=\frac{\sqrt{8abcd+2a^2b^2+2a^2c^2+2a^2d^2+2b^2c^2+2b^2d^2+2c^2d^2-a^4-b^4-c^4-d^4}}{4}$$

Ora, siccome l'area massima non dipende dall'ordine in cui sono disposti i lati, posso considerare che il lato a sia il più grande ed il lato d sia il più piccolo.

Consideriamo il caso in cui: $a+d=b+c$, in tal caso si ha. $a-b=c-d$, cioè: $a=b+c-d$

Sostituendo il valore di **a** nella formula dell'area massima si ottiene:

$$\frac{\sqrt{8*(b+c-d)*bcd+2*(b+c-d)^2*(b^2+c^2+d^2)+2b^2c^2+2b^2d^2+2c^2d^2-(b+c-d)^4-b^4-c^4-d^4}}{4}$$

Dopo alcuni passaggi si arriva al seguente risultato:

Per $a=b+c-d$ $\quad Area\_massima=\sqrt{abcd}$ [2]

Nel caso proposto nel problema, abbiamo **a** = 4, **d** = 1 e quindi essendo 4=(2+3)–1 posso applicare la formula appena trovata.

$$Area\_massima=\sqrt{abcd}=\sqrt{1*2*3*4}=\sqrt{24}=2*\sqrt{6}$$

Conclusioni:

Per quanto riguarda la forma del quadrilatero di area massima, esistono 3 forme possibili:

– Quadrilatero avente il lato di lunghezza 1 non adiacente al lato di lunghezza 2

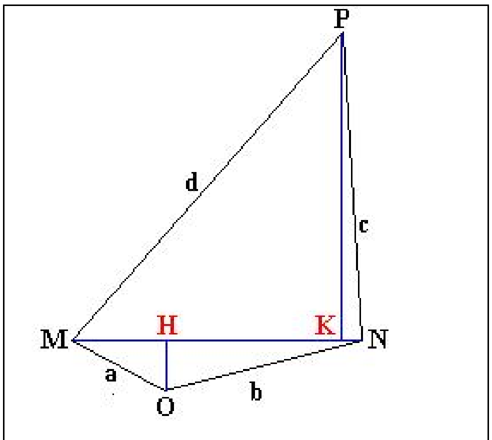
– Quadrilatero avente il lato di lunghezza 1 non adiacente al lato di lunghezza 3

– Quadrilatero avente il lato di lunghezza 1 non adiacente al lato di lunghezza 4

Proviamo ora a disegnare il quadrilatero di area massima.

Consideriamo, ad esempio, il caso di un quadrilatero avente il lato di lunghezza 1 non adiacente al lato di lunghezza 3, con a = 1, b = 2, c = 3, d = 4.

(Vedere figura 17)



17 *Terza figura di* ***Cid***

Dall'equazione [1], sappiamo che il valore della diagonale **MN** che rende l'area massima è:

$$MN=\frac{\sqrt{(ab+cd)*\left(abc^2+abd^2+a^2cd+b^2cd\right)}}{ab+cd}$$

$$=\frac{\sqrt{(2+12)*(18+32+12+48)}}{2+12}$$

$$=\frac{\sqrt{1540}}{14}=\frac{\sqrt{385}}{7}$$

Definendo x = **MN**, dalla formula di Erone sappiamo che l'area del triangolo **MNO** è uguale a:

$$\sqrt{\frac{(a+b+x)}{2}*\frac{(a+b-x)}{2}*\frac{(a-b+x)}{2}*\frac{(-a+b+x)}{2}}=$$

$$\frac{1}{4}*\sqrt{2a^2b^2+2a^2x^2+2b^2x^2-a^4-b^4-x^4}$$

$$\frac{1}{4}*\sqrt{8+\frac{770}{49}+\frac{3080}{49}-1-16-\frac{148225}{2401}}=$$

$$\frac{1}{4}*\sqrt{\frac{3850*49}{2401}-9*2401-\frac{148225}{2401}}=\frac{1}{7}*\sqrt{24}$$

mentre l'area del triangolo **MPN** è uguale a: $\sqrt{24}-\frac{\sqrt{24}}{7}=\frac{6}{7}*\sqrt{24}$

L'altezza **HO** del triangolo **MNO** è uguale a:

$$\frac{2*\left(\frac{1}{7}*\sqrt{24}\right)}{\frac{\sqrt{385}}{7}}=\frac{2*\sqrt{24}}{\sqrt{385}}=\frac{2*\sqrt{24*385}}{385}=\frac{4}{385}*\sqrt{2310}$$

Il tratto **MH** è uguale a:

$$\sqrt{a^2-(HO)^2}=\sqrt{1-\frac{96}{385}}=\sqrt{\frac{289}{385}}=\frac{17}{\sqrt{385}}=\frac{17}{385}*\sqrt{385}$$

Il tratto **NH** è uguale a: $\frac{1}{7}*\sqrt{385}-\frac{17}{385}*\sqrt{385}=\frac{38}{385}*\sqrt{385}$

Il tratto **NH** si poteva ricavare anche cosi:

$$\sqrt{b^2-(HO)^2}=\sqrt{4-\frac{96}{385}}=\sqrt{\frac{1444}{385}}=\frac{38}{\sqrt{385}}=\frac{38}{385}*\sqrt{385}$$

L'altezza **PK** del triangolo **MNP** è uguale a:

$$\frac{2*\left(\frac{6}{7}*\sqrt{24}\right)}{\frac{\sqrt{385}}{7}}=\frac{12*\sqrt{24}}{\sqrt{385}}=\frac{12*\sqrt{24*385}}{385}=\frac{24}{385}*\sqrt{2310}$$

Il tratto **MK** è uguale a:

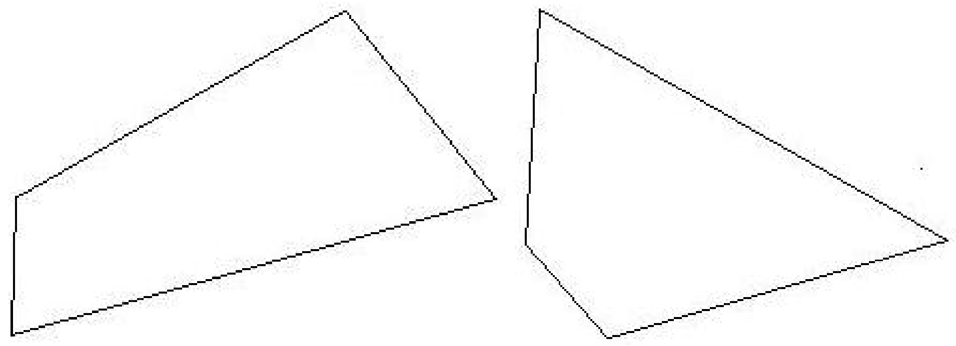
$$\sqrt{d^2-(PK)^2}=\sqrt{16-\frac{3456}{385}}=\sqrt{\frac{2704}{385}}=\frac{52}{\sqrt{385}}=\frac{52}{385}*\sqrt{385}$$

Il tratto **NK** è uguale a: $\frac{1}{7}*\sqrt{385}-\frac{52}{385}*\sqrt{385}=\frac{3}{385}*\sqrt{385}$

Il tratto **NK** si poteva ricavare anche cosi:

$$\sqrt{c^2-(PK)^2}=\sqrt{9-\frac{3456}{385}}=\sqrt{\frac{9}{385}}=\frac{3}{\sqrt{385}}=\frac{3}{385}*\sqrt{385}$$

In modo analogo, si possono disegnare gli altri due quadrilateri aventi la stessa area massima, ottenendo le due seguenti figure:



18 *L'ultima figura di* ***Cid***

Casi particolari di quadrilateri per i quali risulta possibile applicare la formula [2] per il calcolo dell'area massima sono il quadrato e il rettangolo.

Per il quadrato: essendo L = (L + L) – L si avrà: $Area\_massima=\sqrt{L^4}=L^2$

Per il rettangolo: essendo A = (A + B) – B si avrà:

$$Area\_massima=\sqrt{A^2B^2}=A*B$$

Infine, si potrebbe utilizzare la Formula di Erone anche per trovare la formula dell'area massima in funzione dei lati per poligoni aventi un numero maggiore di lati; (ma preferisco non farlo).

Non si sa mai, potreste trovare qualche altra griglia di forma rettangolare e costruire un poligono più resistente nel quale rinchiudere il povero Balto.

Il Nostro segue lamentandosi per il fatto che costringiamo in meno di cinque metri quadrati un *soi-disant* cucciolotto della massa di un ippopotamo; come dimostrava la conclusione del problema, Balto ha agilmente risolto il dilemma.

Bene, e adesso finalmente vi sveliamo l'arcano dei tre punti iniziali.

Era facile.

Come ebbe a tagliare per i campi Rudy, "Dividi in due triangoli, applichi Erone, derivi e cerchi il massimo". Frottole, per dirla con una parola gentile: infatti:

Non era facile.

Quando un addetto ai lavori come ***Zar*** definisce "insulsa" la formula di Erone, deve esserci sotto qualcosa. In effetti, non è mai stata simpatica neanche a Rudy, il quale ritiene, grazie ad un'improvvida dichiarazione del Valido Assistente più grande (che, almeno in matematica, ha dei risultati decenti – per il momento), di averne capito il motivo. Cercate di immaginarvi la situazione.

Avete appena finito di sudare come dei matti per capire cosa diavolo ci fanno delle lettere al posto dei numeri nei conti, e avete raggiunto alcune certezze tipo il fatto che "s" sia un'area e "c" sia una circonferenza quando salta fuori un tizio a sostenere che "p", a voi sempre noto come perimetro, all'improvviso e solo in quel caso lì diventa il *semi*perimetro. Certo che ve la dimenticate! O, nella migliore delle ipotesi, vi sta antipatica e la usate solo come *ultima ratio*.

Non siamo d'accordo.

E qui i punti si sprecano.

Tanto per cominciare, siamo andati a riprendere il nostro fidato "Forti"[25] e abbiamo scoperto che il Teorema del Coseno, *impropriamente attribuito a Carnot*, è stato in realtà ricavato per la prima volta da *Viète*, autore di un'altra bellissima formula che tutti si dimenticano (quella di somma e prodotto delle radici di un'equazione quadratica). E siccome Viète è l'autore dell'unica frase che consideriamo un valido sostituto dell'"Hanc Marginis", capite che questo misconoscimento non lo digeriamo.

Secondariamente, non siamo d'accordo per il fatto che tutti siate dovuti andare a Googlare per ritrovare il Teorema di *Brahmagupta*, rimarchevole soprattutto per (nelle immortali parole di un prof di mate del liceo che ha tollerato Rudy per ben tre anni) "essere l'unico teorema per il quale è più facile ricordarsi l'enunciato che il nome".

Infine, con scarsissime eccezioni, lo avete bellamente applicato dimenticando che vale solo *per i quadrilateri inscrivibili*: va bene, "a occhio si vede" (correte a vedervi la stupenda animazione in merito sul blog di ***Zar*** (http://proooof.blogspot.com/), che ha anche disegnato il cerchio!), ma una dimostrazione formale che il Quadrilatero di Brahmagupta ha area massima avrebbe fatto piacere.

Tranquilli, gli è già passata. In realtà è contento che vi sia piaciuto, piaceva molto anche a lui. [Il Resto della Redazione].

6. Quick & Dirty

Abbiamo parlato di mazzi da cinquantadue che contenevano più carte, adesso cerchiamo di essere onesti. Mazzo da cinquantadue con (oh, stupore!) 52 carte. Mescolato e piazzato faccia in giù sul tavolo. Quello che vi si chiede è di scommettere su quale sia la distanza dalla cima del mazzo del *primo asso nero*.

Come gioco non sembra un gran che, ma il bello è che viene reiterato, e si vogliono ottenere il massimo delle probabilità (che, siamo d'accordo, restano piuttosto sul "loffio") sul lungo periodo.

Su che posizione scommettete?

> *Contrariamente a quanto si potrebbe pensare, la miglior scommessa è che il primo asso nero sia la prima carta. Per verificarlo, consideriamo un caso semplice: un mazzo formato da due assi neri e da (poniamo) un re.*
>
> *In questo caso, avete le possibilità* AAK, AKA *e* KAA*; è evidente che vi conviene scommettere sulla prima carta.*
>
> *Se espandete a* 52 *carte, avete, per ogni posizione, le probabilità:*
>
> $$\frac{51}{1.326},\frac{50}{1.326},\dots,\frac{1}{1326},0.$$
>
> *...dove l'ultimo zero nasce dal fatto che il* primo *asso nero non può essere* l'ultima *carta del mazzo.*
>
> *È interessante notare che la probabilità di posizione del* secondo *asso nero procede nello stesso modo dal fondo del mazzo, visto che tra le altre cose il secondo asso nero non può essere la prima carta del mazzo.*

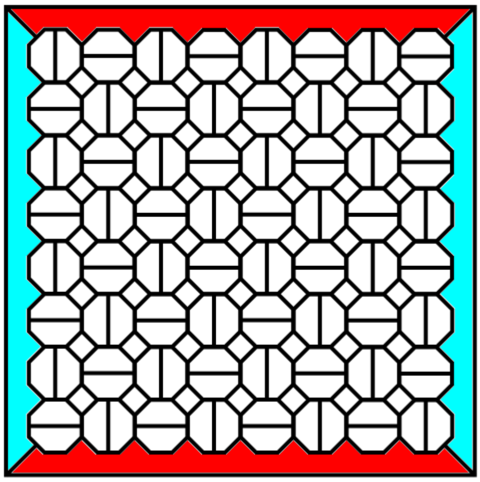
[25] Umberto Forti, "Trigonometria". Zanichelli (BO), XI Ed. – 1974 (I Ed: 1959)

7. Zugzwang!

7.1 Octagons

Prima una piccola nota: tra i Redattori, Doc è un fanatico di "Hex" dalla più tenera età (il che questo mese fa un mucchio di tempo); scopo specifico di questo pezzo è trovare qualcosa che lo tenga buono per un po'. Vi diciamo subito che l'inventore è un esperto di giochi di scacchiera rispondente all'improbabile nome di R. Wayne Schmittberger, e per quanto ci risulta il gioco risale al 1992.

Il guaio principale di questo gioco è che vi serve ogni volta una scacchiera apposta; infatti (oltre alla scacchiera indicata in figura), vi tocca procurarvi due matite di colore diverso per scarabocchiarci sopra: l'inventore consiglia il rosso e il blu, ma non ci risulta la cosa sia obbligatoria. Per facilitare la visualizzazione anche agli amanti del bianco e nero (e a Rudy, che come ***Zar*** stampa la sua copia di RM su una stampante economica e antidiluviana) abbiamo messo al posto del blu un azzurrino smorto.



19 *La scacchiera!*

Bene, cominciamo con le stranezze. Secondo voi, da quant'è la scacchiera? Da dodici; il tutto grazie alla divisione piuttosto bislacca degli ottagoni: se per esempio prendete la prima riga, siccome quattro degli ottagoni sono divisi in verticale, contano per due.

Adesso mano alle matite. Scopo del gioco è, esattamente come nell'Hex, connettere due bordi della scacchiera avente medesimo colore; ancora come nell'Hex, le caselle d'angolo appartengono a entrambi i lati contigui. Non solo ma, sempre come nell'Hex, prima o poi uno dei due vince, nel senso che non esiste il pari.

"…potremmo giocare a Hex…" No, qui secondo noi è più divertente. Soprattutto perché c'è una regola strana.

Infatti, ad ogni mossa potete colorare un mezzo ottagono o, a scelta, *due quadrati*. Questo fatto del poterne colorare due o uno rende il gioco decisamente più vario e questa tipologia di mossa, soprattutto all'inizio, è in grado di complicare il tutto; un mezzo ottagono, infatti, ha sette zone contigue colorabili; due quadrati ne hanno sette solo se sono abbastanza vicini, altrimenti presentano una zona colorabile in più.

Fate almeno qualche partita: potrebbe servire, prima o poi…

8. Pagina 46

Per garantire la visibilità degli indici, li abbiamo mantenuti della stessa grandezza; quindi, a_{i1} è da leggersi a_{i_1}; ove necessario, abbiamo posto delle parentesi ad evidenziare il secondo indice onde evitare ambiguità.

a) Per quanto riguarda Φ, abbiamo *tre* successioni possibili:

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \Rightarrow \quad \Phi_1 = (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_4)^2 + (a_4 - a_1)^2$$
$$a_1, a_3, a_2, a_4 \Rightarrow \quad \Phi_1 = (a_1 - a_3)^2 + (a_3 - a_2)^2 + (a_2 - a_4)^2 + (a_4 - a_1)^2$$
$$a_1, a_2, a_4, a_3 \Rightarrow \quad \Phi_1 = (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_4)^2 + (a_4 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2$$

Si vede facilmente che è:

$$\begin{aligned}\Phi_3 - \Phi_1 &= -2a_2a_4 - 2a_1a_3 + 2a_2a_3 + 2a_1a_4 \\ &= 2(a_2 - a_1)(a_2 - a_4) < 0; \\ \Phi_3 - \Phi_2 &= -2a_1a_2 - 2a_3a_4 + 2a_2a_3 + 2a_1a_4 \\ &= 2(a_3 - a_1)(a_2 - a_4) < 0.\end{aligned}$$

Quindi, la successione cercata è a_1, a_2, a_4, a_3.

b) Consideriamo l'espressione:

$$\Phi = (a_{i1} - a_{i2})^2 + (a_{i2} - a_{i3})^2 + \ldots + (a_{i(n-1)} - a_{in})^2 + (a_{in} - a_{i1})^2,$$

Dove le $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ sono i numeri dati nell'ordine richiesto.

Siano due di questi numeri $a_{i\alpha}$ e $a_{i\beta}$, per cui $\alpha < \beta$; intendiamo dimostrare che se $a_{i\alpha}$ è maggiore (o, rispettivamente, minore) di $a_{i\beta}$, allora $a_{i(\alpha-1)}$ è maggiore (o, rispettivamente, minore) di $a_{i(\beta-1)}$, supponendo $a_{i0} = a_{in}$.

Procediamo per assurdo; ossia supponiamo che, se $(a_{i\alpha} - a_{i\beta})(a_{i(\alpha-1)} - a_{i(\beta-1)}) < 0$, allora la permutazione che inverte l'ordine $a_{i\alpha}, a_{i(\alpha+1)}, a_{i(\alpha+2)}, \ldots, a_{i\beta}$ decrementerà il valore della somma Φ, in quanto la differenza tra la nuova somma Φ' e la somma iniziale dovrebbe allora essere:

$$\begin{aligned}\Phi' - \Phi &= -2a_{i(\alpha-1)}a_{i\beta} - 2a_{i\alpha}a_{i(\beta+1)} + 2a_{i(\alpha-1)}a_{i\alpha} + 2a_{i\beta}a_{i(\beta+1)} \\ &= 2(a_{i\alpha} - a_{i\beta})(a_{i(\alpha-1)} - a_{i(\beta+1)}).\end{aligned}$$

Questa osservazione ci permette di ricavare la soluzione completa del problema.

Per prima cosa, dato che una permutazione *ciclica* (e la nostra lo è) dei termini non cambia il valore di Φ, possiamo assumere che a_{i1} sia il minore dei numeri dati, ossia tale che $i_1 = 1$.

Possiamo allora assumere che a_{i2} e a_{in} seguano in ordine di grandezza; se ad esempio abbiamo $a_{i\beta} < a_{i2}$ $(\beta \neq n)$, allora avremo $(a_{i2} - a_{i\beta})(a_{i1} - a_{i(\beta+1)}) < 0$ e, se $a_{i\beta} < a_{in}$ $(\beta \neq 2)$, allora avremo $(a_{i1} - a_{i(\beta-1)})(a_{in} - a_{i\beta}) < 0$.

Essendo possibile cambiare l'ordine delle "contiguità" tra i membri della catena da $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}, a_{i1}$ all'ordine inverso senza cambiare il valore di Φ, possiamo assumere $a_{i2} < a_{in}$, $i_2 = 2$ e $i_n = 3$.

Possiamo inoltre asserire che i numeri $a_{i3}, a_{i(n-1)}$ sono in questo ordine all'interno della catena a_{i1}, a_{i2}, a_{in} giustappunto considerata; se, ad esempio, fosse $a_{i3} > a_{i\beta}$ $(\beta \neq \{1, 2, n-1, n\})$ allora avremmo $(a_{i3} - a_{i\beta})(a_{i2} - a_{i(\beta+1)}) < 0$. Ma avendo, da quanto sopra, $(a_{i3} - a_{i(n-1)})(a_{i2} - a_{in}) < 0$,segue che $a_{i3} < a_{i(n-1)}$, ovverosia $a_{i3} = a_4$ e $a_{i(n-1)} = a_5$.

Nello stesso modo si dimostra che $a_{i4} < a_{i(n-3)}$ e che $a_4 < a_{i(n-2)}$ $(i_4 = 6, i_{n-2} = 7)$, ossia che i numeri a_{i5} e $a_{i(n-3)}$ seguono in grandezza i precedentemente determinati numeri $a_{i5} < a_{i(n-3)}$ $i_5 = 8, i_{n-3} = 9$, e avanti così. Infine, possiamo definire il seguente schema:

Se $n = 2k$, allora:

Per $n = 2k$, la sequenza sarà del tipo $a_1, a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{n-2}, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_7, a_5, a_3$.

Per $n = 2k+1$, la sequenza sarà del tipo $a_1, a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n-2}, \ldots, a_7, a_5, a_3$.

9. Paraphernalia Mathematica

9.1 Votantonio, Votantonio?

Nella nostra tranquilla e beata ignoranza avevamo una convinzione: l'unica volta che i matematici sono venuti alle mani è stato ai tempi di Newton e Leibnitz, in merito a come scrivere le derivate[26].

Niente di più sbagliato. Oggi siamo esattamente nella stessa situazione e anche se sembra esserci un certo accordo su quale sia il metodo peggiore, per quanto riguarda il metodo migliore si è giunti alle decisioni di non discuterne più pubblicamente con i propri amici (Saari e Brams) o alla rottura di amicizie decennali (Smith e Richie).

Stiamo parlando di sistemi elettorali.

Della cosa avremmo dovuto accorgercene prima: sin dalla preistoria di questa rivista (RM 31, 33, 35 e 37) avevamo analizzato alcuni paradossi che possono presentarsi in questo ambito. La coincidenza delle elezioni (o meglio dei *caucus*) in America e in Italia con il tema del *Mathematical Awareness Month* ha creato una miscela esplosiva e il rumore si è sentito anche nella nostra Redazione virtuale: siamo stati indecisi sino all'ultimo su quale delle parti di questo pezzo inserire per prima e solo la nostra innata pigrizia ha fatto sì che non si cambiasse la struttura originale.

Prima, semplifichiamoci la vita, progettando la scheda elettorale generica[27]: quello che ci serve è un qualcosa in grado di raccogliere in un qualche modo le preferenze degli elettori, e quindi di applicare questi risultati ai diversi sistemi elettorali. Per intenderci, supponiamo di chiedere ad un elettore di mettere tutti i candidati premier in ordine di preferenza e supponiamo lui ci abbia detto $A \succ B \succ C$. Se usiamo il metodo "italiano", contiamo il suo voto come per "A" e ignoriamo il seguito; se volessimo ad esempio utilizzare il metodo "francese", dopo aver contato il suo voto per "A" al primo giro, se al ballottaggio "A" fosse escluso, sapremmo che il nostro elettore voterebbe per "B" e quindi potremmo sapere i risultati del ballottaggio senza farlo tornare alle urne.

Bene, cominciamo dal caso facile, quello che gli americani chiamano *Plurality Method*: chi prende più voti ha vinto.

Facile, vero? Ad esempio, su un sistema a quattro candidati, potremmo supporre un risultato del tipo indicato in Figura 20.

Preferenza	Voti
$A \succ B \succ C \succ D$	14
$B \succ D \succ A \succ C$	10
$D \succ A \succ C \succ B$	7

20 *Si è votato*

Con il metodo in esame, non c'è storia: "A" si aggiudica le elezioni e tutto è finito. Ma…

Ma alla "maggioranza" dei votanti "A" sta decisamente antipatico. Infatti, solo sette persone lo piazzano al secondo posto. "B", di converso, ha quattordici persone che lo valutano secondo, oltre ai dieci che lo hanno piazzato al primo posto; questo significa che "B" è comunque preferito a "C" e a "D", e se fossero stati in gara solo lui e "A" avrebbe facilmente vinto.

Siamo d'accordo che con i condizionali si può fare tutto, ma qui il problema è decisamente più grave; infatti il grande sostenitore di questo metodo è stato Condorcet, il quale sosteneva che un metodo elettorale deve rispettare il *Criterio di Condorcet* (egoista!):

[26] Per una narrazione piuttosto chiara ma abbastanza annacquata, vedasi *Boyer*, "Storia della Matematica". Per capire come questo si legasse alle lotte di potere nelle università inglesi, *Bartocci-Odifreddi,* "La Matematica, vol.1: I luoghi e i tempi". Per una visione di parte ma filosoficamente e matematicamente molto supportata, *Karl Marx*, "Manoscritti matematici".

[27] Giusto per farvi capire quando è stato scritto questo pezzo: è di oggi la notizia che la scheda italiana a qualcuno non piace.

un'elezione deve dare lo stesso risultato anche in un qualsiasi confronto testa a testa. E qui non ci siamo, infatti "B" vincerebbe alla grande in ogni testa a testa, ma il metodo che stiamo esaminando dà comunque vincitore "A".

I litigi, effettivamente, sono cominciati all'epoca: il grande avversario del metodo di Condorcet era Jean Charles De Borda[28], il quale aveva sviluppato un interessante metodo. L'idea di base del *Borda Count Method* è quella di assegnare un certo numero di punti alla prima scelta di ogni elettore, un po' meno alla seconda, ancora meno alla terza e così via; nonostante sia il preferito in Redazione[29], anche lui riesce a mostrare qualche pecca.

Sempre nell'esempio di Figura 1, infatti, se assegniamo 4 punti alla prima scelta, 3 alla seconda, 2 alla terza e 1 alla quarta abbiamo il seguente risultato:

$$\begin{aligned} A &: (14\cdot 4)+(7\cdot 3)+(10\cdot 2)+(0\cdot 1)=97, \\ B &: (10\cdot 4)+(14\cdot 3)+(0\cdot 2)+(7\cdot 1)=89, \\ C &: (0\cdot 4)+(0\cdot 3)+(21\cdot 2)+(10\cdot 1)=52, \\ D &: (7\cdot 4)+(10\cdot 3)+(0\cdot 2)+(14\cdot 1)=72. \end{aligned}$$

Confessione: ci siamo semplificati la vita. Infatti il metodo di Borda richiede unicamente che le assegnazioni sulle scelte siano in ordine *non crescente*; avremmo potuto assegnare formule decisamente più bislacche (e qualcuno l'ha fatto) alla classifica di scelta, ma qualche problema, per quanto piccolo, sarebbe comunque rimasto.

Infatti, anche con il Borda Count Method, è sempre possibile trovare un inghippo; non facilissimo, ma possibile. Supponiamo, ad esempio, che un numero risibile (due) di elettori del gruppo di assoluta minoranza cambino idea rispetto alla loro seconda e quarta scelta: in pratica, questi due tizi che non contavano assolutamente nulla in tutti i conteggi sin qui svolti, cambiano la loro opinione da $D \succ A \succ C \succ B$ a $D \succ B \succ C \succ A$: se fate i conti, il risultato diventa:

$$\begin{aligned} A &: (14\cdot 4)+(0\cdot 3)+(10\cdot 2)+(7\cdot 1)=83, \\ B &: (10\cdot 4)+(21\cdot 3)+(0\cdot 2)+(0\cdot 1)=103, \\ C &: (0\cdot 4)+(0\cdot 3)+(21\cdot 2)+(10\cdot 1)=52, \\ D &: (7\cdot 4)+(10\cdot 3)+(0\cdot 2)+(14\cdot 1)=72. \end{aligned}$$

…e vince bellamente "B". Ossia, viene violato il *Criterio di Maggioranza* (nel senso americano del termine), sostenente che chi ha la maggioranza dei primi posti dovrebbe vincere.

L'alternativa sembra essere quella di trovare altri metodi ma (ve lo diciamo subito) la cosa sembra andare ancora peggio.

Con il prossimo abbiamo dei problemi di traduzione e non siamo riusciti a trovare nessun dato: secondo voi, un metodo noto come *Hare Method*, si riferisce a qualcuno che fa la "lepre" (nel senso podistico del termine) o il Carneade che lo ha inventato si chiamava Hare? Fortunatamente, è anche noto come *Instant Runoff Voting* (IRV) o, nella nostra personale traduzione, "Fuori dai Piedi Prima di Subito".

L'idea è di organizzare una serie di elezioni virtuali, visto che abbiamo le scelte ordinate dei votanti. Alla prima tornata, "A" riceve 14 voti, "B" 10, "C" 0 e "D" 7; a questo punto,

[28] Non presente nel calendario di RM: provvederemo al più presto

[29] È il metodo che utilizziamo, quando ci sono delle decisioni da prendere con la dittatoriale aggiunta che, in caso di parità, sceglie il GC tra le opzioni che sono arrivate ex aequo. Per piccoli numeri (e anche per il GC), è una meraviglia.

eliminiamo “C”: se qualcuno avesse votato “C” come prima scelta, piazzeremo come sua prima scelta la seconda, ma non è il caso e quindi andiamo avanti; se la cosa non è chiara procedete tranquilli, a breve la risolveremo con un esempio.

Alla seconda tornata (che è *virtuale*: ci basiamo sulle scelte precedenti, quindi gli elettori continuano a starsene a casa tranquilli) abbiamo gli stessi voti di prima per “A”(14), “B”(10) e “D”(7); questo significa che “D” salta e tutti quelli che avevano “D” come prima scelta (il gruppo da sette) si ritrovano come prima scelta la loro seconda scelta, ossia “A”; quindi, i voti di “A” aumentano di 7 e la situazione è “A”(14+7), “B”(10). Vince “A”.

Opinione personale: ci sembra piuttosto brutale. Comunque, Irlanda e Australia (sarà per quest’ultima che si chiama “Hare”?) lo hanno usato e lo hanno trovato ragionevole.

Qui, il guaio è che non è possibile cambiare idea per strada: un sondaggio che dia vincente un candidato potrebbe spostare qualche opportunista sul carro del vincitore, e questo (anche se “cucinare i numeri” in questo caso non è facile) potrebbe portare addirittura a far perdere le elezioni a “A”.

Se pensate di aver toccato il fondo, tranquilli: potete sempre cominciare a scavare. Il *Copland’s Method* prevede di fare degli scontri faccia a faccia tra tutti i candidati[30]: il vincitore di ogni round riceve un punto. Qui il problema del conto è che per ogni gruppo di elettori dovete trovare quale votano tra i due in lizza, esaminando le rispettive preferenze. Pronti? Via.

“A” contro “B”: 21 a 10. “A” vince un punto.

“A” contro “C”: 31 a 0. “A” vince un punto.

“A” contro “D”: 14 a 17. “D” vince un punto.

“B” contro “C”: 24 a 7. “B” vince un punto.

“B” contro “D”: 24 a 7. “B” vince un punto.

“C” contro “D”: 14 a 17. “D” vince un punto.

Insomma, “A”, “B” e “D” sono completamente pari… non solo, ordinando opportunamente le singole sfide, potete far vincere quasi chiunque (il “quasi” nasce da quel disastro di “C”, che nessuno lo vuole per primo e perde comunque. Lo abbiamo messo apposta).

Un altro sistema che sembra ragionevole (ma, ve lo diciamo subito, fa acqua da tutte le parti anche lui) potrebbe essere l’*Approval Method* o, se preferite, delle *preferenze*: i meno giovani tra di voi dovrebbero conoscerlo, visto che anni fa una sua versione ristretta era applicata in Italia. Votate per quanti vi pare: quelli riceveranno un voto a testa. In Italia si limitava la cosa all’interno del partito e al massimo potevate esprimere tre voti, ma la logica era quella.

A questo punto, la sensazione potrebbe essere quella che, cucinando (pochissimo) i numeri, sia possibile dimostrare il malfunzionamento di qualsiasi sistema (ed è vero: lo ha dimostrato *Arrows*) o che chiunque possa dire “ho vinto io!” (e, anche se più difficile, si può fare). Come se non bastasse, arrivano i cinesi.

Quello che ci interesserebbe è un modo per visualizzare gli errori di ogni sistema; ossia, senza andare sul caso particolare, quando il sistema prescelto mostra dei guai? È quello che ha studiato *Yee*. Infatti, il Nostro ha trovato un grazioso metodo per analizzare i programmi di ogni partito; dovremo fare delle grosse semplificazioni, quindi supponiamo i nostri concorrenti si scontrino su *due sole opinioni* che siano *rappresentabili su assi*

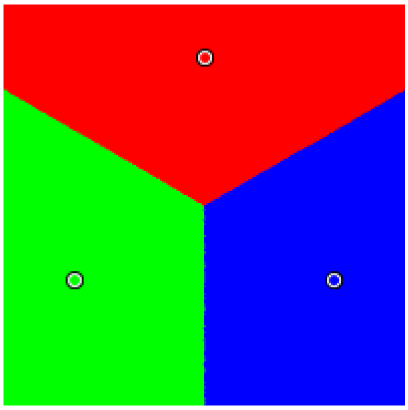
[30] Hahem… Notazione di parte, segnalataci da ***Mariano Tomatis***. Un candidato premier alle elezioni italiane ha sostenuto l’impossibilità di fare i “Faccia a Faccia” tra i candidati premier in quanto, essendoci *otto* candidati, sarebbero stati necessari *sessantaquattro* incontri. Politica a parte, non siamo d’accordo. Bastano *ventotto*. Esattamente come in questo caso, in cui non sono necessari i calcoli di *sedici* scontri ma ne bastano *sei*.

cartesiani nelle loro diverse gradazioni. Supponendo di avere tre candidati, li potremmo situare in qualche punto del quadrato rappresentante le diverse coppie di opinioni e quindi, nota la *distribuzione delle opinioni dei votanti* (attenzione! Qui si va sulle opinioni, non sui candidati!) potremmo determinare il vincitore.

Insomma, quello che si cerca di fare è capire, in funzione del sistema di voto, come si distribuiranno i voti sui candidati; sovrapponendo a questa una distribuzione delle opinioni degli elettori, potremmo vedere chi vince.

Bene, anche qui guai a non finire. Per fare chiarezza, cominciamo da un caso semplice in cui tutto va bene: lo trovate nella figura 21.

Abbiamo tre candidati con posizioni tutte loro sui due problemi in gioco: il fatto che formino un triangolo equilatero non deve trarre in inganno e far supporre che sia una situazione "bilanciata": per fare un esempio americano, i due in basso potrebbero essere Repubblicani e Democratici, il puntino rosso un rappresentante di un'opinione estremamente impopolare che non si pronuncia su quello che differenzia i due candidati precedenti: ad esempio, il rosso potrebbe rappresentare il Supremo Dragone del Ku Klux Klan.



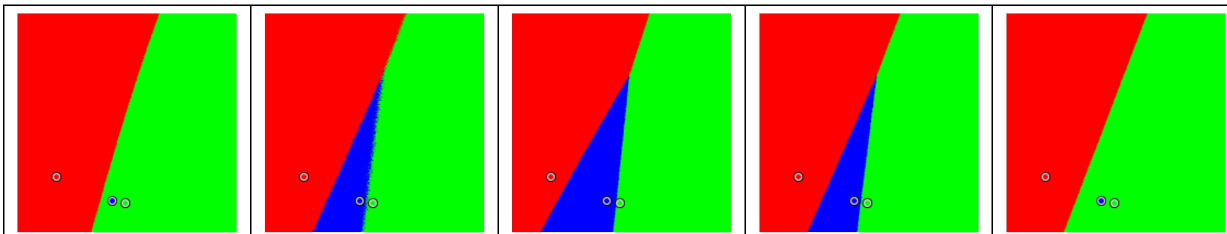
21 *Don't worry*

Bene, la situazione non rappresenta un problema: se ci spiccicate sopra la distribuzione delle opinioni degli elettori (Yee usa una gaussiana tridimensionale, ma se non vi piace fate voi), potete calcolare quanti voti vanno ad ognuno dei candidati; ma a noi, quello che interessa è una rappresentazione grafica di *quali* voti vanno ad un candidato.

La buona notizia è che, per tutti i metodi elettorali, il disegno è lo stesso.

La cattiva notizia è che questo è un caso molto particolare.

Vediamone altri. Supponiamo i tre candidati non abbiano posizioni così distinte, ma uno di questi rappresenti un sostanziale *clone* di un altro; l'unica differenza potrebbe essere quella di avere più capelli, un sorriso smagliante, un passato più pulito dal punto di vista giudiziario… Fate voi. Qui dobbiamo cominciare a vedere tutti i metodi, quindi la figura si complica. La trovate qui sotto.

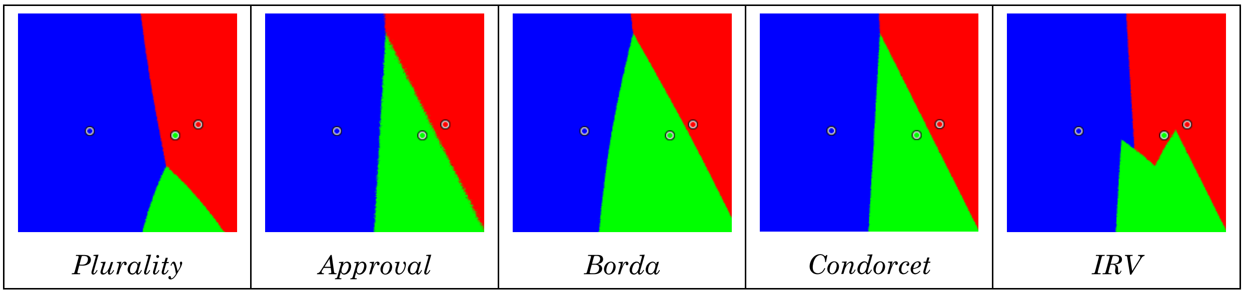


Plurality | *Approval* | *Borda* | *Condorcet* | *IRV*

Siccome siamo sempre interessati ai casi strani, ignoriamo il primo e l'ultimo sistema; gli altri casi garantiscono una rappresentanza al candidato blu.

Non solo, ma se vi ricordate su questo dobbiamo poi sovrapporre la distribuzione delle opinioni degli elettori; a questo punto con i tre metodi centrali non è difficile trasformare una vittoria del candidato verde in una vittoria del candidato rosso: anche supponendo una distribuzione uniforme dei votanti, nel primo e nell'ultimo caso vince il verde (con un maggior numero di voti nel caso del sistema IRV), in quelli centrali la situazione è quantomeno dubbia.

Posizioniamo in modo un po' diverso i nostri candidati e stiamo a vedere cosa succede.

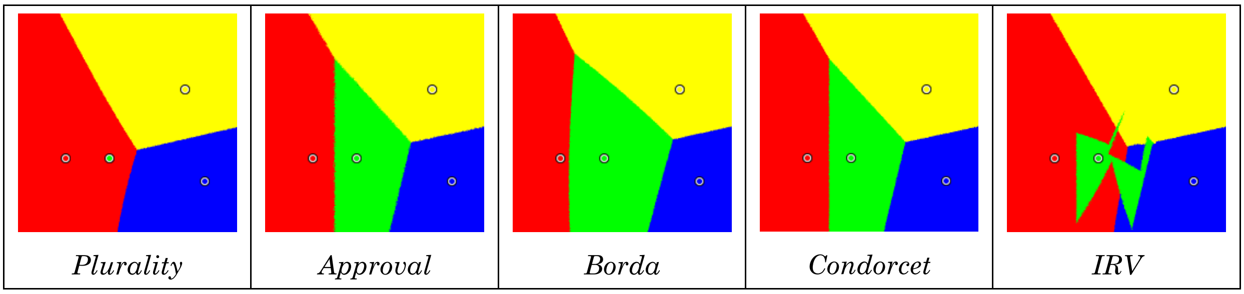


Nel primo caso, già la cosa si fa strana: i votanti che hanno *esattamente* la stessa posizione del candidato verde non votano per lui.

Quello che lascia perplessi è, nel caso IRV, la strana zona a forma di "M" in basso a destra; questo caso richiede un'analisi più accurata. Supponiamo di avere tre candidati: *A*, con il 39% dei voti, *B* con il 31% e *C* con il 30%; i votanti di *C* piazzano *B* al secondo posto e *A* al terzo, mentre i votanti di *B* si dividono equamente per piazzare gli altri due al secondo o terzo posto. Con il metodo IRV, siccome nessun candidato si ritrova come prima preferenza la maggioranza assoluta, *C* viene eliminato al primo turno e i suoi voti vanno a *B*, che diventa forte del 61% dei voti contro il 39%. Non c'è storia.

Ora introduciamo il concetto di *alternativa irrilevante*: in un paesino di grande potenza di *A* il candidato *C* riesce a fare un grande discorso (o si tinge i capelli e convince l'elettorato giovane, fate voi) e sposta il 2% dei voti di *A*: questi, anziché votare *C* ultimo, lo piazzano al primo posto: risultato, quindi, *A* 37%, *B* 31% e *C* 32%. Ossia alla prima tornata eliminiamo *B*, alla seconda come dicevamo i *B* si dividono equamente tra gli altri due e ci ritroviamo *A* al 52,5% e *C* al 47,5%. Insomma, rispetto al primo scenario, *per far vincere* A *qualche suo sostenitore dovrebbe in prima istanza votare* C, ossia quello che gli sta più antipatico...

Indovinate cosa succede quando introduciamo un quarto candidato? Sì, succede proprio quello. Ci limitiamo a supporre compaia un candidato ragionevolmente "di compromesso", situato dalle parti del centro; caso molto semplice che si genera sovente.



Lasciamo perdere il fatto che il candidato neanche rappresentato nel primo caso ha un'area di tutto rispetto con il metodo Borda; vorremmo attrarre la vostra attenzione su quella che Yee stesso definisce "lattina vuota molto maltrattata", ossia l'area verde del sistema IRV. Qui, i paradossi si sprecano: nel caso venga deciso di cambiare il sistema elettorale, se qualcuno riesce a scriverci un programmino che analizzi queste situazioni è il benvenuto[31].

Una volta che le elezioni sono passate si tratta di mettere insieme il governo, ossia di organizzare le coalizioni in funzione del sistema di voto prescelto; qui, servirebbe un modo per analizzare alla svelta la situazione politica. Cominciamo, tanto per cambiare,

[31] Come dicono le cartine del Touring per le città scritte su fondo verde: vale il viaggio. Ci riferiamo al blog di *PuntoMauPunto*, nel quale i possibili paradossi del sistema elettorale italiano sono stati acutamente analizzati attraverso una serie di casi particolari: un aggeggino in grado di analizzare i casi generali probabilmente piacerebbe molto anche a lui.

da un caso semplice: c'è una proposta, va votata, serve una certa maggioranza e o passa o non passa.

Per prima cosa, meglio introdurre una notazione: ne abbiamo già parlato, ma ci vuole un attimo. L'espressione

$$[q; w_1, w_2, \ldots, w_n]$$

indica che abbiamo un sistema in cui affinché la mozione passi sono necessari q voti; di n votanti: il primo ha la possibilità di esprimere un voto di peso w_1, eccetera. Immediata l'estensione al caso in cui, anziché un peso w_1, si abbiano a disposizione w_1 votanti molto fedeli alla linea del partito che rappresentano, ma per semplicità vediamo il tutto come se fossero persone singole; la cosa ha un riflesso nei termini utilizzati. Infatti, dall'ultima volta che ne abbiamo parlato in modo eminentemente pratico, la teoria si è evoluta.

Ci sono alcune regole dettate dal buon senso: deve essere possibile, tanto per cominciare, far passare o bocciare una mozione, ma non tutte e due le cose. E questo significa che deve essere:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \geq q .$$

Sembra ragionevole, e infatti i sistemi che non la rispettano sono detti *irragionevoli*; tant'è che in buona parte di essi esiste il concetto di *quorum* necessario per votare[32].

Altra regola è che non sono permesse astensioni (o si vota a favore o si vota contro) e una mozione o passa o viene bocciata; questo significa semplicemente che:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{2} < q ,$$

ossia non si può andare pari.

Probabilmente lo avete già visto, ma ve lo diciamo lo stesso: le due regole si possono mettere assieme ottenendo la disuguaglianza fondamentale,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{2} < q \leq \sum_{i=1}^{n} w_i ;$$

e questa regola è la base della democrazia; vediamo alcuni esempi.

[7;5,4,4,2], se applichiamo la nostra disuguaglianza, 7 è inferiore a 7,5; il sistema permette i blocchi con una legge contemporaneamente approvata e rifiutata.

Anche [17;5,4,4,2] è una stupidaggine; infatti 17 è maggiore di 15 e quindi in un sistema del genere non passerà mai nessuna legge. A questo punto non dovreste avere problemi a risolvere il seguente problemino; dato il sistema $[q;5,4,4,2]$, per $5 < q < 18$, per quali valori di q è ragionevole?

Una cosa complicata, con questi sistemi, è trovare i sistemi cosiddetti *equivalenti*; ad esempio, il sistema (che ha già l'aria ridicola solo a scriverlo) [11;4,4,4,4,4] è ragionevole, ma potremmo esprimerlo con numeri più piccoli (ossia, potremmo mandare a casa alcuni scaldapanche); infatti avete esattamente gli stessi risultati con il sistema [3;1,1,1,1,1].

[32] Se non ricordiamo male, il record in questo caso è detenuto dalla Camera dei Lord: tre, almeno uno dei quali deve avere una certa anzianità di carica.

Inoltre bisogna fare attenzione anche ad un altro fattore: qualche anno (decennio) fa, un piccolo partito si autodefinì "ago della bilancia", nonostante il suo Segretario fosse di taglia non propriamente paragonabile ad un ago; situazioni del genere sono evidenziate nel nostro sistema da strutture del tipo [101;99,98,3]; con i grossi numeri la cosa si vede meglio, ma vi facciamo notare che la situazione è perfettamente equivalente a [2;1,1,1], con indubbia semplificazione del sistema.

Il bello di questa notazione è che possiamo definire alcuni concetti – in termini strettamente matematici, vorremmo sottolinearlo – che semplificano il calcolo; ad esempio, cosa pensate del primo personaggio in un sistema definito come [11;12,5,4]? È evidente che senza il suo accordo non passa nulla, e quindi in casi del genere il personaggio viene definito *dittatore*; matematicamente parlando, basta che il suo valore sia maggiore e la somma dei restanti sia minore della maggioranza richiesta; l'inutilità di ogni altro votante è ben espressa dal termine inglese che li definisce: *dummy*.

Un sistema leggermente più democratico può essere rappresentato da uno schema come [12;11,5,4,2]: in questo caso, il primo giocatore ha la possibilità di bloccare qualsiasi mozione, ma non ha la capacità di farla passare se tutti gli altri sono contrari; tecnicamente, questo viene definito *diritto di veto*.

Bene, se volete esercitarvi, potete provare a fare un po' di conti con due sistemi abbastanza pericolosi: $[q;6,4,1]$ e $[6;w,4,1]$; per quali valori rispettivamente di q e w avete un dittatore, dei dummy o giocatori (nessuno dice che debba essercene uno solo) con diritto di veto?

Adesso, visto che gli elenchi dovrebbero essere pubblici, vi scrivete la rappresentazione di Camera dei Deputati e Senato della Repubblica, e provate a fare l'analisi. Giacché ci siete, visto che da tempo si parla di riduzione del numero dei rappresentanti, potreste anche cercare quali siano i valori minimi che porterebbero alla stessa situazione; prima della fine potrebbe venire utile.

[4;3,2,1]		
Coalizione	**Peso**	**V/P**
$\{P_1\}$	3	P
$\{P_2\}$	2	P
$\{P_3\}$	1	P
$\{P_1, P_2\}$	5	V
$\{P_1, P_3\}$	4	V
$\{P_2, P_3\}$	3	P
$\{P_1, P_2, P_3\}$	6	V

Comunque, storia comune in tutte le democrazie è la tendenza a formare *coalizioni*, e fortunatamente esiste una notazione anche per questo; ad esempio, nel sistema $[4;3,2,1]$ possiamo indicare la coalizione del primo e del terzo come[33] $\{P_1, P_3\}$ o il governo monocolore del solo primo come $\{P_1\}$; se riguardate il sistema, vi accorgete che la prima è una coalizione *vincente* (la somma dei suoi voti supera la maggioranza richiesta), mentre la seconda è *perdente*, visto che non raggiunge la maggioranza.

Per fare conti in merito serve un po' di olio di gomito; prendiamo una situazione ragionevolmente semplice, quale [4;3,2,1] e esaminiamo tutte le possibili coalizioni che si possono formare: trovate il risultato nella tabella a fianco, dove abbiamo indicato in ultima colonna se la coalizione è vincente o perdente; vedete subito che per n partiti le coalizioni[34] possibili sono $2^n - 1$ e a questo punto si comincia a capire qualche ragione delle instabilità politiche

[33] Utilizziamo la lettera *P* non solo come scopiazzatura dell'inglese *player*, ma anche come iniziale dell'italiano *partito*.

[34] Guarda caso, pari al numero dei vertici di un (iper)cubo n-dimensionale, e gli spigoli rappresentano le possibili transazioni da una coalizione all'altra. Ne avevamo accennato vagamente, ma qui la cosa diventa più chiara e ve la lasciamo come esercizio.

legate al numero dei partiti e alla creatività dei Primi Ministri nell'organizzazione delle coalizioni[35].

Data la presunta litigiosità (verso l'esterno: all'interno li consideriamo come monolitici) dei partiti, diventa importante stabilire quando qualcuno di loro sia *critico*, ossia quando la sua uscita causi la caduta di una coalizione altrimenti vincente. Il semplice esempio in tabella mostra che, nelle tre coalizioni vincenti, nelle prime due sono critici tutti i partiti, mentre nell'ultima lo è solo il primo.

Sempre nella stessa tabella, a stima si direbbe che il primo partito abbia un notevole potere; per misurare la cosa matematicamente si procede per passi:

1. Definiamo tutte le possibili coalizioni
2. Determiniamo le coalizioni vincenti
3. Determiniamo i partiti critici in ogni coalizione vincente
4. Per un particolare partito P_i, calcoliamo il numero delle volte che è critico; sia questo numero B_i
5. Contiamo il numero delle volte che un qualche partito è critico e sia questo numero *T*. Si noti che è $T = \sum_{i=1}^{n} B_i$.

Bene, secondo *Banzhaf* l'*indice di potere* del partito P_i è pari a $\frac{B_i}{T}$; quindi nel nostro schema sopra, visto che in totale ci sono 5 partiti critici (due nelle prime due coalizioni vincenti e uno nella terza), abbiamo:

$$\frac{B_1}{T} = \frac{3}{5}; \quad \frac{B_2}{T} = \frac{1}{5}; \quad \frac{B_3}{T} = \frac{1}{5}..$$

La cosa è talmente evidente da passare inosservata, quindi ve la diciamo: la somma degli indici di potere su tutti i partiti è sempre pari a 1.

Adesso calcolatevelo per la Camera e il Senato; e, se vi sentite critici nei confronti del sistema elettorale, fate lo stesso basandovi sulle percentuali di voto nazionali o della vostra regione.

Per quanto riguarda l'indice vi lasciamo l'analisi come esercizio; se volete un paio di esempi di come possano cambiare le cose, considerate i due grossi partiti in questo paio di esempi: [7;3,3,1,1,1] e [6;3,3,1,1,1]. Nel primo caso, se fate i conti, ottenete che i due "pesi massimi" hanno un indice di potere del 41%; nel secondo l'indice si riduce al 36%; quindi, anche a parità di "potere" (nel senso di influenza), il potere (nel senso di criticità) può ridursi abbassando la maggioranza.

Non vorremmo vi focalizzaste troppo sul concetto di partiti; regole strane possono comparire anche in situazioni in cui si parla di singole persone: vi diamo un paio di esempi piuttosto complicati:

> *Comitato Kissinger*: il comitato è formato da cinque membri, *A*, *B*, *C*, *D* e *K* che è il Presidente del comitato; vige la regola della maggioranza, con la nota che il Presidente vota *solo* in caso di parità (indovinate perché il presidente è indicato da quella lettera…).

[35] Giusto per andare a ficcare il naso in casa degli altri: il Sudafrica ha una rappresentanza parlamentare di trentatrè partiti, uno dei quali propone l'obbligatorietà del gioco del calcio nelle scuole di ogni ordine e grado e un altro insiste sull'abrogazione delle tasse e la gratuità della birra. A nessuno dei Redattori piace il calcio.

Comitato Senatoriale: il comitato è formato da quattro membri *A*, *B*, *C*, *D* con *A* come Presidente; il Presidente vota sempre, vige la regola della maggioranza tranne nel caso di parità in cui vince la coalizione contenente il Presidente.

John Banzhaf (III) era un avvocato, e la prima domanda che sorge è cosa l'abbia spinto ad occuparsi di matematica associata alla politica: il motivo è semplice, abitava in una regione americana particolare. Nel 1964, la Contea di Nassau (New York), aveva un Consiglio dei Supervisori in cui i sei distretti erano rappresentati come [58;31,31,28,21,2,2]. Nel 1965, *JBIII* sostenne che i tre distretti maggiori detenevano tutto il potere e che i tre distretti minori non contavano nulla, ossia erano dei *dummy*. Con l'uso dell'Indice che ha preso il suo nome, riuscì a dimostrare la ragionevolezza delle sue affermazioni e oggi la rappresentanza della contea è proporzionale alla popolazione.

Certi casi possono essere complicati da esaminare, quindi meglio provare con un esempio (complicato) e fare il conto. Proviamo con il Consiglio di Sicurezza delle Nazioni Unite; le regole sono decisamente strane.

- Esistono 5 membri permanenti, ciascuno dei quali ha diritto di veto
- A questi si aggiungono 10 membri non permanenti
- Per far passare una mozione, si devono avere i voti di tutti e cinque i membri permanenti più almeno 4 membri non permanenti.

…e se vi pare balordo, preoccupatevi. Il mondo si basa su questa roba.

Il sistema è a 15 votanti, con i membri non permanenti aventi peso uguale (che porremo pari a 1) e tutto il resto incognito; in formula, abbiamo [q;x,x,x,x,x,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]. Non conoscendo il valore dei membri permanenti, non conosciamo neanche quale sia la maggioranza.

Ora, siccome sono necessari i 5 membri permanenti più 4 non permanenti per far passare una mozione, deve essere:

$$5x + 4 \geq q\,.$$

Non solo, ma siccome basta che un membro permanente voti contro per bloccare una mozione, anche se tutti gli altri membri (permanenti e non) votano a favore, allora dobbiamo anche avere:

$$4x + 10 < q\,.$$

Mettendo assieme queste due equazioni otteniamo:

$$4x + 10 < q \leq 5x + 4\,.$$

A questo punto, per i diversi valori di x (partite da 5 per capire cosa succede…) potete calcolare q: l'espressione minore possibile è [39;7,7,7,7,7,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]; vi lasciamo il calcolo della corrispondenza con le regole viste sopra (è piuttosto divertente), e vi risparmiamo il calcolo dell'indice di potere (noiosissimo): i membri permanenti hanno un potere del 16,7%, mentre il potere degli altri è un misero 1,65%. *Dieci volte meno*.

Comunque, se volete divertirvi con numeri diversi ma sistemi meno balordi, sappiate che il Consiglio Europeo dei Ministri originale ha una struttura del tipo [62;10,10,10,10,8,5,5,5,5,4,4,3,3,3,2] e nell'ordine i paesi sono Francia, Germania, Italia, Regno Unito, Spagna, Belgio, Grecia, Olanda, Portogallo, Austria, Svezia, Danimarca, Finlandia, Irlanda, Lussemburgo. I loro Indici di Banzhaf spaziano tra un 11.16% e un 2.26% e una buona domanda può essere lo stabilire quanto sia "critico" (nel senso politico del termine) cambiare il valore di maggioranza che oggi è verso il 71% con altri valori, tipo 66% o 75%.

Ma fin qui abbiamo parlato di matematica: forse è il caso di buttarla sul politico[36].

Consideriamo una rappresentanza politica espressa, da sinistra a destra, come A=8, B=21, C=26, D=12, E=33: la maggioranza prevista è del 50%. A questo punto, però, cominciamo a sviluppare una serie di ipotesi politiche. Infatti, anche all'interno di una coalizione i partiti possono (e lo fanno sempre) litigare.

Una teoria sviluppata da *Riker* e detta della *coalizione minimale vincente* prevede di basarsi sul "criterio della dimensione", ossia di calcolare le coalizioni che garantiscono il minimo indispensabile per avere la maggioranza; questo è uno schema che piace ai partiti in quanto ogni partecipante alla coalizione ha il massimo potere e quindi può richiedere grosse quantità di sedie ministeriali; per ogni Segretario questa è sempre una bella cosa. In questo modo, abbiamo le maggioranze possibili ABC, ADE, BCD, BE, CE.

Un'altra teoria viene detta della *coalizione di minima dimensione*: nel senso che ogni partito continuerà a seguire l'ipotesi di Riker, ma accetterà di far parte solo delle coalizioni che gli garantiscono il massimo potere; in questo caso abbiamo un'unica possibilità, data da ADE.

Come sostiene però *Leiserson*, il massimo potere relativo sarà una bella cosa, ma a noi interesserebbe il massimo potere assoluto; quindi, possono anche essere preferibili le coalizioni che minimizzino il numero dei partiti, in modo da garantire loro il massimo potere; in questo caso, le uniche maggioranze possibili diventano BE e CE.

Un minimo di realismo porta a pensare che alleanze tra l'estrema sinistra e l'estrema destra siano inconcepibili; se definiamo uno spazio in cui sia possibile implementare il concetto di "distanza" tra i partiti e cerchiamo di minimizzarla, vediamo che le uniche coalizioni possibili sono ABC, BCD e CE.

Axelrod, lungo questa linea, impone una condizione ancora più restrittiva: che i partiti formanti la coalizione debbano essere vicini tra loro; questo limita le coalizioni possibili a ABC, BCD e CDE.

Ne resta solo più una: supponiamo i partiti siano interessati unicamente alla sopravvivenza della legislatura, piuttosto che alla spartizione del potere; in questo caso, il partito più importante (e mediano) della legislatura diventerebbe il "nucleo", e amplierebbe il proprio potere in quanto gli altri preferirebbero cambiare idea piuttosto che far saltare il governo; in questo modo, potremmo avere come coalizioni possibili ABC, BCD e DE.

Complicato? Sì, siamo d'accordo. Non solo, ma sono cominciate a nascere teorie fortemente critiche nei confronti dell'Indice di Banzhaf; *Shapley* e *Shubik*, ad esempio, sostengono che il potere non debba essere misurato sulla capacità o meno di far cadere il governo, ma piuttosto sulla possibilità, una volta caduto l'attuale, di contribuire ad uno diverso.

Mettete tutto insieme con le alleanze politiche e l'attuale situazione italiana e calcolate che cosa succede; tranquilli, pubblicheremo.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[36] Ringraziamo per l'aiuto fornito nella stesura di questa parte *Christian Derevlean*, amico e (ex) compagno di classe del maggiore dei Validi Assistenti di Laboratorio. L'articolo originale era in rumeno e trattava della situazione politica nella Repubblica Ceca.