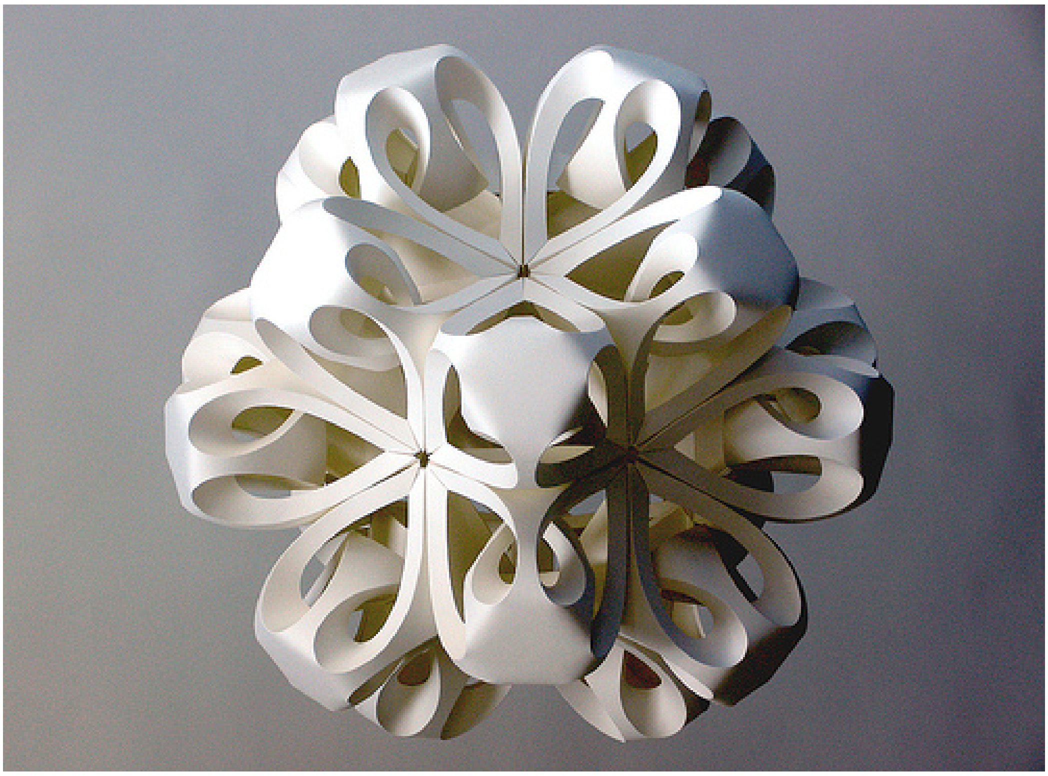
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 111 – Aprile 2008 - Anno Decimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 110 ha diffuso 1740 copie e il 31/03/2008 per Google eravamo in 4'020 pagine.

Sappiamo benissimo che stiamo rischiando di diventare noiosi, ma il selezionatore delle nostre copertine ha sempre avuto l'inettitudine tipica dei mancini nel lavorare con le forbici; oggetti come *Icosahedron II* di ***Richard Sweeney*** suscitano in lui dosi oceaniche di invidia.

1. Zero e Uno

Questo cosiddetto "telefono" ha troppi difetti per poterlo considerare seriamente come mezzo di comunicazione. Il dispositivo è intrinsecamente privo di valore, per quel che ci riguarda.
(comunicazione interna della Western Union, 1876)

Credo che nel mondo ci sia mercato per circa cinque computer.
*(*commento attribuito a Thomas J. Watson Presidente dell'IBM, 1943)

Il mondo è pieno di cose ovvie che nessuno si prende mai la cura di osservare.
(Arthur Conan Doyle, "*Il Mastino dei Baskerville"*)

Le invenzioni che più hanno influenzato la nostra era sono quelle che hanno a che fare con le comunicazioni: e con questo intendiamo sia il poter andare in quasi qualsiasi parte del mondo (volendo persino sulla Luna) in una quantità di tempo ragionevolmente piccola, sia il poter comunicare all'istante con quasi tutti i punti del globo. Basta prendere in mano il telefono, digitare un certo numero di cifre, e possiamo entrare in contatto con (almeno virtualmente) ogni altro essere umano vivente: o anche con un canguro, se questi è disposto a collaborare. C'è da farsi girare la testa.

Gli abitanti del globo, o perlomeno quelli delle zone mediamente opulente del globo, non lasciano passare un solo giorno senza comunicare con il resto del mondo: non solo più giornali e TV, ma anche scaricare la posta elettronica, verificare il conto in banca via web, dare uno sguardo alle ultime notizie e controllare i blog e i forum preferiti sono normali, normalissime attività quotidiane. E se ci fa male la pancia, è naturale, prima ancora di chiamare il dottore, dare uno sguardo veloce su cosa ha da dire Wikipedia in merito ai nostri sintomi.

1 *Time Magazine 2006: "la persona dell'anno" siamo tutti noi. La parte a schermo è uno specchio.*

Il Ventunesimo secolo è e sarà, almeno per quanto si riesce a capire al suo inizio, la piena realizzazione dell'Era dell'Informazione. Informazione che viene richiesta, creata, consumata, vissuta a ritmi sempre più serrati. E' questa anche l'opinione di *Time*, il noto magazine-news americano, che ha eletto nel 2006 *Person of the Year*, persona dell'anno[1], noi tutti, in qualità di utilizzatori dei media, di creatori di informazione: una visione certo molto alla moda, anche fautrice dell'idea del *Web 2.0*,

Complimenti allora, anche se un po' in ritardo, a tutti noi. L'unico dubbio è che forse, in tutta questa abbondanza, diventa veramente difficile distinguere il valore di ciò che ci arriva, o anche solo capire quanto veramente ci interessa tutto quello che finiamo col sapere.

Non era così all'inizio, quando il semplice fatto di poter inviare impulsi o suoni da un posto all'altro era qualcosa di straordinario. Ancora ai tempi di Napoleone il modo migliore per

[1] I meno giovani potranno forse riconoscere – anche nella grafica della copertina – una certa somiglianza con la *Person of the Year 1982*, quando fu scelto per la priva volta un non-umano: il Personal Computer.

segnalare alle truppe a distanza erano segnali con il fumo o il fuoco, un po' come fanno i pellerossa nei film western: il massimo della tecnologia era il telegrafo ottico di Chappe, composto da torrette ripetitrici di segnali visivi, che quindi dovevano essere piazzate in modo opportuno e a distanze non troppo elevate. La Francia rivoluzionaria e napoleonica ne eresse diverse linee[2].

L'idea della trasmissione di impulsi elettrici secondo la tecnica di Samuel Morse si sviluppa nel 1800, che fu il secolo in cui si compì, da parte di tutte le nazioni che potevano permetterselo, il più grande sforzo per collegare i centri abitati di maggior importanza politica o strategica. La struttura necessaria al collegamento – i pali, tralicci e i cavi – erano costosi e rappresentavano certo un onere grave per i tempi, ma il vantaggio di una comunicazione così incredibilmente veloce (nessun paragone possibile con il dover trasportare fisicamente un dispaccio) fu immediatamente evidente. E non bisogna limitarsi ad immaginare solo dei cavi appesi a dei pali: sono di quei tempi i primi collegamenti sottomarini, con i cavi posati sotto gli oceani. Avevano molti problemi tecnici da risolvere (a causa delle dimensioni erano particolarmente soggetti all'attenuazione del segnale, con effetti immaginabili sulla comprensione del messaggio) e soprattutto costarono enormi sacrifici in termini di lavoro umano.

Ma erano già questi i tempi in cui Nikola Tesla aveva sperimentato e dimostrato l'utilità della trasmissione radio, e Guglielmo Marconi trasmetteva attraverso la Manica e l'Oceano Atlantico: il *wireless* era una realtà già all'inizio del Novecento, anche se una realtà ancora ben lontana dall'essere alla portata di tutti. Ma aveva comunque mostrato fin dall'inizio effetti spettacolari: l'utilizzo della radio per le trasmissioni con le navi aumentava sensibilmente la possibilità di ricevere soccorso in mare. Nel 1912, la gran parte dei sopravvissuti del Titanic dovettero la loro salvezza al messaggio di S.O.S. captato dal *Carpathia*, che in quel momento procedeva a 93 km di distanza dal transatlantico: solo la radio poteva raggiungerlo. Si comprese l'importanza del mezzo, e grazie anche agli utilizzi successivi si arrivò presto alla regolazione internazionale di trattati di sicurezza marittima, nel 1914.

Erano altri tempi. La trasmissione di un'informazione era strettamente dipendente dal mezzo trasmissivo con cui veniva inviata, e le forme d'onda elettromagnetica erano allora sia il "mezzo trasmissivo" sia il "messaggio" stesso, cosa che implicava la necessità di separare le linee per la trasmissione della voce da quelle usate per i messaggi telegrafici. E fin dall'inizio ci si rese conto di quanto fosse importante ridurre al minimo le dimensioni dei messaggi per trasmetterli con la massima efficienza.

Morse aveva sviluppato un linguaggio[3] nel quale le lettere avevano simboli più brevi – quindi più veloci da comporre – in funzione della loro frequenza di utilizzo nella lingua inglese: così la "E" è un semplice punto, la "T" una linea[4], e così via. A ben vedere, questa è una caratteristica anche delle normali lingue parlate: le parole che sono usate più di frequente sono le più corte (perché probabilmente accorciate dall'uso) come gli articoli (il, lo, la, …), le congiunzioni (e, o, ma…), i verbi ausiliari (sono, è, sei, ho, ha, hai), i verbi più comuni (dare, dire, andare,…), e così via. Le lingue evolvono con il tempo, ce in un certo senso le parole che sono più usate sono anche quelle che sono meglio ottimizzate, e non è pertanto un caso che siano proprio i verbi più "utili" quelli che sono più frequentemente irregolari. Secondo una teoria, le lingue più complesse[5] sono quelle a cui il tempo non ha

---

[2] … e chi ha letto *Il Conte di Montecristo* di Alexandre Dumas, forse ricorda il loro ruolo nel romanzo.

[3] A dire il vero, sembra che l'inventore principale dell'alfabeto Morse non sia stato Morse, ma il suo principale collaboratore, Alfred Lewis Vail.

[4] E come ricorderanno i lettori di F.Brown, le lettere più frequenti nella lingua inglese sono *ETAOINSHRDLU.*

[5] Intendiamo quelle con più regole, casi e declinazioni. Le lingue neolatine (italiano, spagnolo, francese, portoghese, romeno, etc.) hanno perso molte delle difficoltà originali di sintassi, che in realtà altre hanno conservato (il tedesco ha ancora quattro casi di declinazione). Lingue come l'ungherese o il finlandese presentano una dozzina di casi.

ancora potuto eliminare i fronzoli, cioè le più *giovani*, mentre le più *semplici* sono anche le più *antiche*[6]. Ma, giovinezza e antichità a parte, chiunque abbia fatto lo sforzo di imparare una o più lingue sa bene che la sintassi e la grammatica sono comunque insufficienti a possedere un idioma: le regole hanno eccezioni e casi particolari, e parlare *veramente* una lingua implica conoscere una gran quantità di termini colloquiali e locuzioni idiomatiche, oltre a sapere quando e come utilizzarli. Occorre sempre, oltre alla pura teoria, leggere parecchi testi in lingua originale, ascoltare molte conversazioni e imparare i modi di dire, le espressioni particolari[7], le intonazioni.

Le lingue, peraltro, sono essenzialmente una forma di comunicazione: i pensieri vengono codificati in schemi atti alla trasmissione e sono emessi sotto forma di suoni, o segni su carta, o altro supporto. Anche se la scrittura, in realtà, è una codifica ulteriore, ancora successiva, del linguaggio: perché a determinati suoni o concetti vengono assegnati dei simboli, e la lettura consiste prima nella decodifica del simbolo, e solo in seguito il simbolo (anzi: l'insieme codificato dei simboli) trasmette l'informazione desiderata. Ma questo potrebbe lasciar pensare che la codifica-decodifica sia essenzialmente un esercizio puramente tecnico e razionale, mentre la comunicazione – soprattutto quella orale – non è attuata solo dalle parole: i movimenti delle braccia e le espressioni del viso riescono anche a modificare completamente il contenuto del messaggio, nonostante le parole usate. Questo perché i canali di comunicazione usati contemporaneamente sono diversi, e il messaggio ridondante: nella combinazione movimenti/espressioni/parole, sbattere un pugno su un tavolo, assumere un'aria cupa ed esclamare "Sono arrabbiato!" lo stesso concetto è espresso in triplice maniera, ma la combinazione aiuta a ben definire l'entità dell'emozione[8].

La ridondanza ha certo una sua valenza positiva, e i linguaggi moderni sono generalmente robusti anche per il suo contributo: è provato che scrivere una frase saltando qualche lettera qua e là non impedisce al leggente di comprendere il messaggio trasmesso, e che anzi spesso bastano solo la parte iniziale e quella finale di ogni parola. Senza contare che gli esseri umani hanno la tendenza a rafforzare i concetti utilizzando qualche forma di ripetizione – per non annoiare, hanno inventato i sinonimi, che consentono di ripetere il concetto senza ripetere la parola – e diverse ridondanze divertenti sono state create dall'uso, inveterato ai giorni nostri, di parlare per acronimi ad esempio, il "*numero di PIN*[9]" ha la parola "*numero*" già compresa nella "N". Se dovessimo scrivere un telegramma e pagare ogni singola parola, probabilmente faremmo attenzione ad usare solo le parole necessarie. Perché, ovviamente, l'esempio del telegramma mostra bene che la ridondanza, se pure ha una sua azione positiva, ha anche un costo, anche se non sempre in termini monetari. E allora diventa importante capire: quanta informazione è trasportata dalla ridondanza? Dire "PIN" o "numero di PIN" pare

[6] Secondo questo modo di pensare, il "Global English", ovvero l'inglese semplificato parlato dalla maggior parte delle persone non madrelingua come lingua franca, dovrebbe essere la lingua più antica a disposizione. Ne dubitiamo un po', essendosi evoluta appositamente per essere utilizzata come traduttore universale.

[7] Il primo esempio che ci viene in mente: in italiano, per far intendere la situazione di trovarsi al posto di un altro, si usa la locuzione "essere nei suoi panni". In inglese al posto dei panni si usano le scarpe (shoes), e l'espressione coniuga di conseguenza l'azione: "*to walk a mile in your shoes* – camminare un miglio nelle tue scarpe". I tedeschi, più radicalmente, ipotizzano un più brutale scambio di pelle (*Haupt*).

[8] Come sempre, nei nostri articoli semplifichiamo il semplificabile, ma la teoria è in realtà molto più complessa. Ad esempio, la comunicazione non verbale (come il pugno sul tavolo dell'esempio nel testo) è talvolta chiamata anche *digitale*, perché esprime concetti netti (sì/no: o sono arrabbiato o non lo sono, senza valori intermedi), e non ha codici di controllo: se vi esibite in un sorriso felice dopo che qualcuno ha picchiato sul tavolo, non se ne accorge nessuno *[RdA]*.

[9] *Personal Identification Number*, informazione ormai indispensabile: necessaria in banca, per il telefono e persino per affittare il film del venerdì sera. Ma ancora: il virus HIV (indovinate cosa vuol dire la V), per non parlare del frequente "*Servizio di Messaggi SMS*", quando sia *Servizio* che *Messaggi* sono già compresi nel prezzo di *SMS*. Del resto, è malattia antica: alcuni dialetti parlano del "*can bulldog*", forti del fatto che una volta l'inglese non era indispensabile per ogni cosa. Il fenomeno della ridondanza degli acronimi ha un acronimo pure lui, la *Sindrome da Acronimo Ridondante*, ovvero la sindrome RAS (RASS per gli amanti della ricorsione).

essere assolutamente la stessa cosa, tranne per la dimensione; ma nell'esempio del pugno sbattuto sul tavolo quanta informazione è trasportata dal rumore e dalla violenza del pugno, quanta dalla frase, quanta dall'espressione facciale? In altri termini e più direttamente: *come si può misurare l'informazione?*

Questo è senza dubbio il punto cruciale della tecnologia delle telecomunicazioni, che si occupa principalmente di *registrare* in qualche modo una comunicazione in una forma il più compatta possibile, *trasmetterla* ad una certa distanza, e *riportarla* alla sua condizione originale per renderla intelligibile. Il problema di ottimizzare questo processo è stato fin dagli inizi del ventesimo secolo un nodo fondamentale dello studio di numerosi ingegneri: per molto tempo, la matematica connessa al problema fu trascurata.


2 *Harry Nyquist*

Anche il telegrafo ottico di Chappe, citato qualche pagina fa, aveva bisogno d'una sua precisa sintassi; ma i primi studi significativi sulla trasmissione dei segnali furono affrontati da Harry Nyquist. Erano gli Anni Venti, e l'interesse principale era quello di determinare la velocità di trasmissione e la larghezza di banda[10] per una determinata trasmissione, e lui fu il primo a giungere a conclusioni importanti in merito alla teoria del rumore termico nei conduttori elettrici. Anche per questo non c'è ingegnere che non conosca il nome di Nyquist; una delle conclusioni che ottenne fu che il numero massimo di impulsi che possono essere trasmessi in una linea telefonica nell'unità di tempo è limitato dal doppio della larghezza di banda del trasmettitore. Su questo risultato si basa tutta la successiva teoria del campionamento dei segnali[11], cioè il modo in cui da un segnale analogico si estrae una sequenza di bit.

Malgrado l'eccezionale lavoro, Harry non riuscì a quantificare – e quindi a misurare – l'informazione da trasmettere: chiamava gli impulsi "*intelligence*" nel senso di conoscenza di qualche tipo, ancora indefinita. Lo stesso termine "informazione" fu invece utilizzato per la prima volta dal collega Ralph Hartley, che cercò di calcolarne la quantità trasmessa a partire dal numero di simboli usati e dalla lunghezza della sequenza di simboli. L'unità di misura di informazione – stiamo parlando del 1928 – prese il nome di *hartley* ed era proporzionale al logaritmo decimale del numero di simboli usati[12].

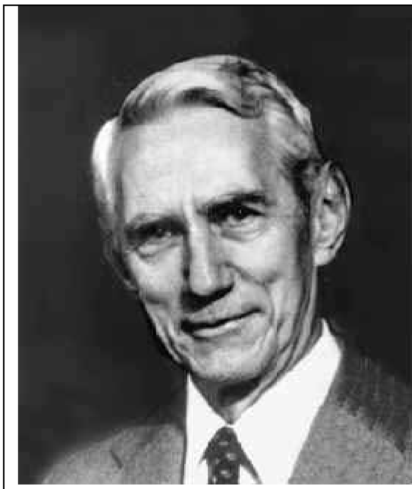
Le basi della teoria dell'informazione vennero anche da studi di ben altra natura, da parte di Boltzmann e Gibbs, che a loro volta studiarono effetti termodinamici attraverso la teoria delle probabilità; si trovano parecchie analogie nei nomi delle grandezze fondamentali delle due scienze.

Ciò non di meno, la teoria dell'informazione come la conosciamo oggi è stata sviluppata a partire dal 1940 da un solo uomo, Claude Shannon, che creò le basi matematiche per la rivoluzione tecnologica del nostro secolo.

[10] In realtà, qui dovremmo spiegare con un po' di dettaglio cosa si intenda tecnicamente con l'espressione "larghezza di banda", anche se il termine è ormai entrato nel linguaggio comune. Proprio per questo, però, può sembrare strano che di "larghezza di banda" si parlasse già negli Anni Venti, ben prima di ogni PC attaccato ad una qualunque ADSL. Ci limitiamo, molto sinteticamente, a dire che la larghezza di banda è di fatto la misura della velocità di trasmissione dell'informazione; questo ci attirerà forse gli strali degli esperti, ma speriamo che la maggior parte dei lettori si accontenti.

[11] Il teorema forse più importante di quella teoria si chiama infatti Teorema di Nyquist-Shannon.

[12] Ciò può forse sembrare complicato, ma basta ricordare come il logaritmo possa abbassare la dimensione di un numero per capire che aumentando il numero di simboli usati la quantità d'informazione trasmessa non può cambiare di molto: questo principio fu uno di quelli che aiutò Turing a decifrare il codice di "Enigma".



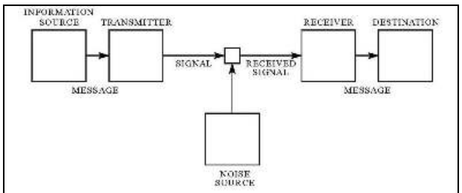
3 *Claude E Shannon*

Claude Elwood Shannon nacque il 30 aprile 1916 a Gaylord, in Michigan, e ottenne la laurea in matematica e ingegneria elettrica nel 1936. Forse non si distinse subito per le sue doti di matematico, ma ottenne ugualmente un dottorato al Massachussets Institute of Technology (MIT), e si interessò fin dall'inizio all'algebra di Boole e alla trasmissione dei segnali. Il titolo del suo master "*A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits*" gli valse l'assunzione alla Bell Laboratories, dove lavoravano (ancora) Nyquist e Hartley.

La tesi mostrava come i simboli di Boole potessero essere utilizzati come serie d'interruttori "accesi" o "spenti" (on/off) e come l'aritmetica binaria (stringhe di "0" e "1") potesse essere applicata ai circuiti elettrici. Fu questo l'anello di congiunzione tra il mondo analogico e quello digitale, e l'applicazione nel mondo della telefonia era la più naturale e immediata.

Claude era un personaggio schivo che amava starsene per conto suo, ma aveva un grande interesse per le applicazioni pratiche del suo lavoro. I colleghi, che si ritrovavano per la pausa pranzo a mangiare insieme e risolvere giochi matematici, non lo incontravano quasi mai, anche se lui usava terrorizzarli percorrendo i corridoi con un "uniciclo" di sua invenzione. Come se non bastasse, amplificava la minaccia con numeri da giocoliere[13] mentre pedalava sul suo marchingegno. Forse era riservato, ma chiunque bussasse alla sua porta era libero di chiedere e riceveva l'aiuto richiesto. In breve fu riconosciuto per il genio che era, grazie alla sua capacità di comprendere ogni problema velocemente ed afferrarne i possibili metodi risolutivi.

Claude Shannon ai laboratori Bell continuò a sviluppare la sua teoria sulla trasmissione dei segnali e nel 1948 produsse un testo (*A Mathematical Theory of Communication*) che ne è ancora oggi la base fondamentale.



4 *Schema di comunicazione – 1948*

Tutta la teoria dell'informazione nasce dall'assunto che "*il problema fondamentale della comunicazione è di riprodurre in un punto, in modo esatto o approssimato, un messaggio definito in un altro punto*". Se la cosa a parole sembra banale, lo è ancora di più lo schema che compare sulla seconda pagina della pubblicazione che ha fatto di Shannon il padre della teoria: a sinistra una sorgente, a destra la destinazione, un trasmettitore ed un ricevitore ai due lati, un canale di trasmissione affetto da rumore in mezzo. Ma il genio è proprio nella semplificazione della struttura nelle sue parti, che prese una per una possono essere studiate indipendentemente una dall'altra e in maniera lineare.

In primo luogo Shannon ha definito[14] il "bit" (binary digit), nel senso di "unità di informazione": supponendo di poter codificare ogni tipo di messaggio come stringa di zero e uno, si riesce a separare il messaggio stesso dalla forma d'onda da cui è trasportato. È importante distinguere tra il bit come unità binaria e la quantità di informazione stessa: il primo è semplicemente una definizione di stato (zero o uno, acceso o spento...), mentre il secondo è una misura di incertezza. Supponiamo che una sorgente trasmetta tutti "1":

[13] Sembra proprio che i matematici amino la giocoleria e i numeri ad essa connessi – ne abbiamo parlato in RM110 – Shannon è uno dei primi che ne hanno approfondito anche il lato teorico (Cfr. RM027).

[14] Lo stesso Shannon attribuisce il nome ad un altro collega e precedentemente altri avevano usato il termine "bits of information" in contesti analoghi – bit in inglese vuole dire anche "pezzettino" – ma decisamente fu lui ad utilizzare la parola nel modo in cui è ancora oggi intesa, per cui gli attribuiamo senza timori l'invenzione.

l'informazione trasportata da ogni "bit" è nulla, perché si conosce già quale sarà il valore in anticipo; se invece la sorgente trasmette "0" e "1" in modo equiprobabile e imprevedibile, ogni bit porterà un bit di informazione. Logicamente, se un evento è meno probabile la sua occorrenza porta più informazione di un evento con alta probabilità[15].

Il passo successivo è riconoscere che una sequenza di simboli potrebbe avere dei simboli tra loro correlati: leggendo "Rudi Math…" vi aspettate che al posto dei puntini segua "ematici", perché la quantità di informazione trasportata da ogni lettera dipende anche dalle precedenti. Da questo concetto parte la definizione di *entropia* d'informazione, che misura proprio l'ordine di una certa stringa di simboli e la correlazione tra loro. Lasciando da parte le informazioni tecniche su come questa venga misurata, vi facciamo sapere dallo stesso Shannon come mai ha scelto proprio questo nome per la grandezza:

> «La mia più grande preoccupazione era come chiamarla. Pensavo di chiamarla *informazione*, ma la parola era fin troppo usata, così decisi di chiamarla *incertezza*. Quando discussi della cosa con John Von Neumann, lui ebbe un'idea migliore. Mi disse che avrei dovuto chiamarla *entropia*, per due motivi: "Innanzitutto, la tua funzione d'incertezza è già nota nella meccanica statistica con quel nome. In secondo luogo, e più significativamente, nessuno sa cosa sia con certezza l'*entropia*, così in una discussione sarai sempre in vantaggio"»

Così l'*entropia* è diventata uno dei concetti fondamentali alla base delle varie teorie dei codici; si può calcolare l'entropia di una lingua, o di una sequenza di caratteri, o di un messaggio: questa darà il valore minimo di bit effettivamente necessari ad interpretare il messaggio stesso senza perdere in informazione[16]. Ma non finisce qui.

Una volta che abbiamo ridotto all'osso la nostra bella sequenza binaria, l'abbiamo resa estremamente fragile: perdere un singolo simbolo può significare la perdita di significato e l'impossibilità di ricostruire la sequenza originale. Conviene allora aggiungere ridondanza, per "proteggere" il nostro messaggio: da questo punto si diramano diverse tecniche di codifica, con bit di parità, codifiche a correzione d'errore, e così via[17].

Siamo ancora ben lontani all'aver accennato a tutte le conseguenze del lavoro di Shannon del '48: si dovrebbe ricordare ancora il modo in cui si può calcolare la capacità di un canale, parlare dei canali con memoria, raccontare perché il "Teorema del Campionamento" prenda il nome di Nyquist e di Shannon, esporre le innumerevoli applicazioni della teoria alla crittografia, alla creazioni di variabili casuali, all'analisi di bande di segnali, ad altri campi. Ma le *informazioni* sono troppe, non abbiamo speranza di *trasportarle* tutte.

---

[15] La quantità di informazione assoluta è l'inverso del logaritmo in base due della probabilità di occorrenza. Nell'esempio della sorgente con zeri e uni in cui la probabilità di uno è 25%, un "1" porta 2 bit di informazione, uno zero meno di metà. Se vi piacciono gli esempi con le parole, invece con i numeri, considerate il caso d'una rapina alla Banca Centrale di Pechino: se l'unico testimone oculare afferma: "il rapinatore aveva la pelle gialla" vi da certo un'informazione d'un certo valore, ma se affermasse "il rapinatore aveva la pelle nera", l'informazione ha un valore molto maggiore, visto che i neri a Pechino sono molto meno frequenti dei gialli.

[16] E qui non si intendono solo i bit che passano in una comunicazione radio o telefonica (l'argomento da cui siamo partiti): tutti i metodi di compressione dati, fino agli "zippatori" più banali utilizzano metodi di compressione basati sulla ricorrenza statistica dei simboli. Il che significa che non è possibile "comprimere" una sequenza completamente casuale, perché ogni simbolo porta un intero bit di informazione. Sorgenti ad alta entropia non possono di conseguenza essere molto compresse.

[17] Non è questa la sede per elencare e definire tutte le implicazioni di un'idea del genere, ma vogliamo farvi un esempio gastronomico. Immaginate il vostro salumiere che taglia magnifiche fette di prosciutto molto sottile: ognuna avrà un aspetto meraviglioso nel piatto dei vostri ospiti se e solo se avrà l'accortezza di separare le fette per bene con della carta apposita; anche se vi toccherà pagare la carta come prosciutto, in questo modo vi siete assicurati una presentazione ottimale.

5 *C.E.Shannon e il suo topo elettromeccanico*

E poi Claude non si fermò mica al 1948: andò avanti con i suoi studi e la sua vita. Nel '49 si sposava con Mary Elizabeth Moore, da cui poi ebbe quattro figli, e si interessò di teoria dei grafi.

Era un uomo pieno di hobby ed andava fiero delle sue invenzioni: il suo uniciclo ebbe parecchie versioni, di cui una a due posti (anche se non riuscì a convincere alcun collega a sedersi accanto a lui); creò un topo meccanico (Teseo, dalla leggenda del Minotauro) che era in grado di trovare un pezzo di formaggio in un labirinto. Il labirinto era modificabile e il topo si muoveva grazie ad un dispositivo magnetico; il programma che permetteva a Teseo di raggiungere l'obiettivo dopo aver navigato l'intero labirinto gli consentiva anche di ritrovare il formaggio in un secondo tempo; in pratica era uno dei primi algoritmi che *imparavano* dall'esperienza fatta, i precursori dell'intelligenza artificiale.

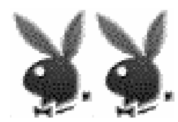
Era interessato anche agli scacchi e sempre negli anni '50 creò un programma per giocare a scacchi. Il programma assegnava a determinate posizioni un valore, e calcolava una funzione che sommava i valori di tutti i pezzi di un colore per confrontarla a quella dell'avversario: in questo modo decideva se la mossa successiva avrebbe portato ad un valore migliore per il giocatore. La teoria dei giochi lo interessava moltissimo: Claude aveva l'abitudine di passare weekend a Las Vegas con la moglie applicando le varie teorie alla roulette o al tavolo da blackjack.

L'opera omnia di Shannon è stata raccolta prima in russo e poi in inglese, e assomma a più di mille pagine, anche se molte delle sue strane invenzioni (come il frisbee a razzo, o il sistema meccanico che risolveva il cubo di Rubik) non sono mai state pubblicate. Il numero di premi e riconoscimenti è talmente lungo che tra i suoi amici girava la voce che in casa avesse una stanza dedicata agli abiti da cerimonia necessari per ritirare i premi. La maggior parte delle sue idee ed applicazioni dell'algebra booleana trovarono applicazione pratica anni dopo essere state proposte: solo negli anni '70, con la produzione dei circuiti integrati, le teorie di Shannon cominciarono a diventare applicazione pratica.

A sessant'anni dalla scrittura di *A Mathematical Theory of Communication*, il fatto che qualsiasi cosa, da questo articolo alle foto delle vacanze, possa essere trasformato in una stringa di zero e uno e arrivare dall'altro capo del mondo in un batter d'occhi non fa più notizia. L'uomo che lo ha reso possibile si è spento il 24 febbraio del 2001, dopo anni passati a combattere l'Alzheimer: non ha potuto essere testimone di quella che Time ha chiamato *Information Age*, e che "l'avrebbe divertito moltissimo", secondo il parere di sua moglie.

Comprimere la sua vita in queste poche pagine non è stato certo possibile: ma lo sapevamo benissimo. L'*entropia* delle opere di un uomo del genere è decisamente troppo elevata.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Pulizie di primavera			
Ritorno al Luogo da Cui			

2.1 Pulizie di primavera

Quando la moglie di Rudy, in questa stagione, entra nella camera dei Validi Assistenti con l'intenzione di fare un po' d'ordine, suona solitamente per questi ultimi l'allarme rosso, e l'attenzione a cosa viene conferito al locale cassonetto deve essere continua; quindi attività impegnative come l'organizzazione di una partita a Dungeons & Dragons[18] vengono immediatamente spostate in secondo piano, lasciando lo spazio a giochi veloci che possano essere risolti in pochi giri; durante l'ultimo passaggio dell'uragano Paola, i due teppisti ne hanno inventato uno interessante.

Utilizzando due dadi a sei facce, l'accordo era che Alberto avrebbe fatto un punto non appena fosse uscito un 12, mentre Fred per fare un punto avrebbe dovuto aspettare due 7 consecutivi; la semplicità del gioco permetteva di sorvegliare il Terminator che si aggirava per la stanza: l'idea era di arrivare ai venti punti, con un occhio al gioco e l'altro alla madre. Secondo voi, come è andata a finire?

La camera? Come al solito, "sembra" in ordine. I mucchi di robaccia sono ben nascosti.

2.2 Ritorno al Luogo da Cui

Causa un certo disamore per i lavori normalmente assegnati in questa ridente località (e causa anche la necessità di impedire brutalità "puliziesche" nella camera in loro assenza), i due Validi Assistenti non hanno accompagnato l'Augusto Genitore a soddisfare le esigenze di montaggio e smontaggio di strani aggeggi; quindi questa volta Rudy ha dovuto cavarsela da solo.

In questa circostanza, la richiesta della madre di Rudy era di attrezzare una zona chiusa nel cortile utilizzando strane griglie di forma rettangolare che potevano essere incastrate l'una con l'altra a delimitare una zona; con la sua abilità nel recuperare le cose più improbabili nei luoghi più impossibili aveva trovato quattro di questi aggeggi, di larghezza rispettivamente 1, 2, 3 e 4 metri, strani ganci rugginosi permettevano di agganciarli lungo le altezze.

Interrogata su cosa volesse fare, con una cosa del genere, ha risposto: "Ci metto dentro Balto quando decidiamo di mangiare in cortile, quindi vorrei che abbia a disposizione la massima area disponibile". I nostri auguri: nonostante i primi acciacchi della vecchiaia, quella bestia continua ad avere la massa e l'indole di un giovane ippopotamo giocherellone.

[18] Rudy approfitta di questa sede per richiedere perentoriamente la restituzione di *almeno uno* dei set di dadi, grazie.

Discutere con la madre di Rudy è un pochino peggio che discutere con Rudy, quindi potete immaginarvi come sia andata a finire; il nostro (aiutato dai festeggiamenti di Balto) montava i pezzi pensando che, se si trattava di residuati bellici, sicuramente ci si riferiva alla Prima Guerra d'Indipendenza. Con l'ausilio di alcuni spezzoni di robusto fil di ferro e di una serie di parole che non si trovano sui dizionari perbene, finalmente l'opera era compiuta.

"Fatto!"

"Sicuro che abbia a disposizione l'area massima?"

"Sì. Ma visti i lavori fetenti che mi trovi ogni volta, te la calcoli tu"

E adesso ve la calcolate anche voi. Qual è l'area massima racchiudibile con le quattro grate? In cambio, vi racconto come è andata a finire. Il cucciolotto, appena messo lì dentro, ha appoggiato le sue zampine e ha gioiosamente "dato il giro" all'intera struttura…

3. Bungee Jumpers

Trovare le lunghezze dei lati del più piccolo triangolo a lati interi per cui:

a) Uno degli angoli è due volte un altro

b) Uno degli angoli è cinque volte un altro

c) Uno degli angoli è sei volte un altro

Ne avevamo fatto uno simile, ma lì guardavamo i lati… decisamente più tosto..

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

Lo sappiamo: è abbastanza insolito decidere di introdurre una nuova rubrica proprio quando non facciamo altro che lamentarci delle mille cose da fare, dell'essere sempre in ritardo su ogni fronte, del non riuscire a chiudere decentemente nessuna delle molte attività intraprese. Ma una nuova rubrica può talvolta servire a ridurre il lavoro, anziché a moltiplicarlo: fosse anche solo per trovare uno spazio canonico, quasi istituzionale, a oggetti che altrimenti resterebbero sparsi in giro per la rivista ma che comunque da qualche parte finirebbero col restare. E poi, a voler cercare le ragioni buone per *non* creare questa rubrica, non avremmo che l'imbarazzo della scelta. Tanto per cominciare, questa sarà una rubrica di recensioni: prevediamo di recensire libri, soprattutto, ma non osiamo mettere limiti ad una cosa che è appena nata. Eppure di libri ne parliamo già abbastanza: è arduo trovare un Compleanno che non contenga qualche riferimento bibliografico, e i PM non si fanno problemi nel citare qualche bel testo di matematica incontrato in giro; senza contare, *last but not least*, che almeno due redattori su tre si dilettano di scrivere altre recensioni – in genere non di testi matematici – su una rivista specializzata cartacea[19]. E allora, avrà davvero senso una rubrica di recensioni su RM?

Noi pensiamo di sì, pensiamo che un senso ce l'abbia lo stesso: anzi, a dire la verità, pensiamo proprio che abbia piuttosto da rispettare un *controsenso*, più che un *senso*. Chiunque abbia anche solo una vaga idea di come funzionino le riviste letterarie sa che è

[19] Si chiama "Libri Nuovi", è una rivista bellissima e ne abbiamo già parlato spesso. Ulteriori info su http://librinuovi.arturin.it/ se siete davvero curiosi o, meglio ancora, se volete abbonarvi.

buona regola evitare di pubblicare, in rivista, recensioni di opere scritte dai redattori e dai collaboratori della rivista stessa. È una sorta di garanzia di correttezza, di sobrietà: dato che la differenza tra un recensione positiva ed una spudorata pubblicità è spesso sottile, i recensori seri vogliono mantenersi puri e liberi (liberi, soprattutto, di poter stroncare chi gli pare) da tentazioni, e quindi evitano come la peste di recensire amici e colleghi. Noi invece abbiamo scoperto di avere il problema esattamente opposto. Non stiamo facendo un largo giro per finire nuovamente col parlare del nostro *Rudi Simmetrie*, che peraltro ormai si sta avviando ad esaurire la sua tiratura (anzi, ci piacerebbe che apprezzaste la delicatezza mostrata nell'inaugurare questa rubrica con un libro diverso, non nostro): stiamo però constatando che la comunità di RM è davvero vasta e ben armata, e tra gli RMers ci sono diversi nomi di autori, traduttori, curatori, saggisti, coautori… insomma davvero tanta gente che qualcosa a che vedere con i libri ce l'ha davvero.

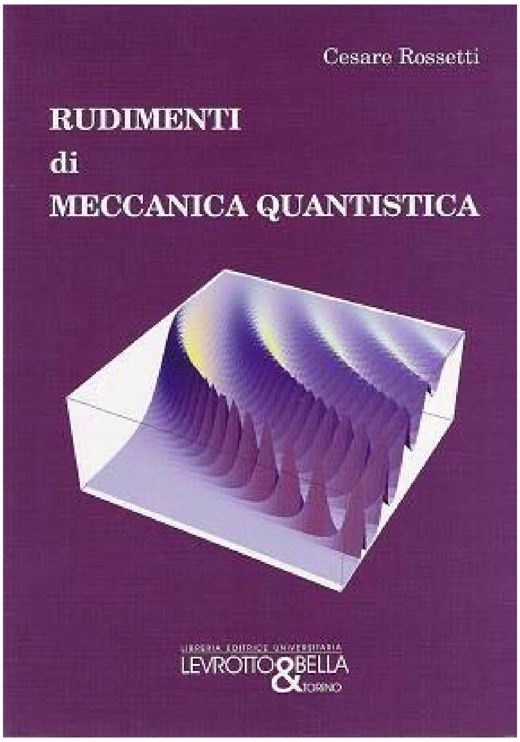
E adesso diteci voi cosa dovremmo fare: se un RMer, magari già noto agli altri per aver pubblicato qualche brillante soluzione ad alcuni problemi pubblica un suo libro, o ne traduce un altro, o in qualche maniera contribuisce alle patrie biblioteche, dovremmo davvero far finta di niente, ed evitare di strombazzare la cosa un po' in giro? Diamine, a noi sembra invece che questa sarebbe davvero cosa poco carina da parte nostra. In fondo, le sacrosante limitazioni delle riviste di recensioni valgono per le riviste di recensioni, mica per quelle di matematica ricreativa.

Ed ecco, in breve, come nasce l'idea d'una rubrica destinata all'uopo. Le regole sono poche e neppure tanto ben definite, ma volendo abbozzarne una lista, questa potrebbe essere, più o meno, la seguente:

- La nuova rubrica raccoglierà recensioni (presumibilmente spudoratamente favorevoli) a libri aut similia nei quali gli RMers hanno avuto una qualche parte operativa. Le preferenze sono per i libri (ma non solo) che abbiano qualche relazione con la matematica (ma non solo). Insomma, potremmo finire pure col recensire uno spettacolo teatrale di poesie curde su DVD, se la cosa ci piacesse; ma un libro di matematica ci piace quasi di sicuro.
- La nuova rubrica ha deciso di chiamarsi, in onore alla nota megalomania autorale di Snoopy, noto bracchetto romanziere dei Peanuts, con la prima frase di tutti i suoi romanzi: "Era una Notte Buia e Tempestosa".
- La nuova rubrica non si sogna neppure lentamente di avere una scadenza fissa sulle pagine di RM: a differenza delle consorelle che sono o sempre presenti o ben schedulate su base temporale, essa sarà del tutto imprevedibile. Questo soprattutto a causa dell'imprevedibilità degli RMers, che non sono in grado di garantirci la materia prima con regolarità. Quando ci sarà qualcosa da recensire, EUNBET comparirà su RM, altrimenti, niente.
- A proposito di materia prima: scopo neanche tanto recondito, da parte dei redattori/recensori, è quello di risparmiare sulle spese di approvvigionamento libresco. Se avete scritto o state scrivendo un libro, o se lo avete tradotto, o magari solo impaginato, o se avete fatto da correttore di bozze e non vi dispiace che la cosa si sappia in giro; insomma, se volete che noi lo si recensisca, mandatecene una copia (o due; o meglio ancora tre con dediche, così non litighiamo). Noi non ci sogniamo neppure di garantire la recensione sulle pagine di RM, ma possiamo garantirvi che ci terremo le copie omaggio con somma soddisfazione.

Adesso non fate quella faccia scettica: la prima recensione la trovate già qua sotto, giusto alla fine di questo paragrafo. E possiamo già assicurarvi che no, non sarà l'unica e ultima di questa neonata rubrica. Mai sottovalutare i lettori di RM.

4.1 Rudimenti di Meccanica Quantistica



I lettori più fedeli potrebbero ricordare che in RM60 (Gennaio 2004) il compleanno era dedicato a David Hilbert. Quelli che, oltre ad essere fedeli (e perseveranti), fossero anche dotati di una memoria molto, molto buona, potrebbero addirittura ricordarsi che in quel compleanno, in una lunga nota a piè di pagina, si ricordava un episodio della vita universitaria dei due redattori più anziani e meno muliebri di RM. Protagonista di quell'aneddoto era Cesare Rossetti, docente del corso di Istituzioni di Fisica Teorica nei tempi in cui i due loschi figuri calpestavano indegnamente gli augusti parquet dell'Istituto torinese di Fisica, con l'immeritato titolo di studenti. Non è il caso di riportare qui l'aneddoto nella sua interezza (anche perché uno dei pochi vantaggi delle riviste gratuite è quello di lasciare in linea tutta la produzione: i curiosi possono facilmente recuperare l'articolo in archivio), ma è piacevole ricordare che, grazie alla citazione nel compleanno, la redazione riuscì a rimettersi in contatto con quel "Vecchio Lupo Grigio", come lo chiamammo allora.

È probabile che ogni facoltà, ogni corso di laurea, abbia una specie di "corso d'esame principe"; un corso che sia al tempo stesso un grosso ostacolo e uno spartiacque, e anche tale da caratterizzarsi profondamente con la facoltà stessa. Forse, per gli studenti di giurisprudenza, potrebbe trattarsi del celebre Diritto Privato; per gli ingegneri del non meno famoso esame di Costruzioni, e magari di Teoria delle Macchine Calcolatrici per gli informatici. Non possiamo esserne del tutto sicuri, non conoscendo direttamente quelle facoltà (tra l'altro, potrebbe essere curioso e divertente scoprire quale sia il corso principe di tutte le attuali classi di laurea) ma siamo sicurissimi che, almeno finché è durato il cosiddetto vecchio ordinamento, per i fisici l'esame spartiacque è sempre stato "Istituzioni di Fisica Teorica". Cesare Rossetti ha tenuto questo corso nell'Università di Torino per molti anni, e generazioni di studenti hanno preparato l'esame di Istituzioni (ma anche quello parallelo di Metodi Matematici per la Fisica) su testi scritti da lui. È quindi facile capire come la redazione di RM (e in particolare i due ex-studenti) siano stati davvero contenti di scoprire che il vecchio lupo grigio era rimasto divertito dalla citazione in RM, e ancor più piacevolmente affascinato dalla scoperta dell'esistenza di RM stesso.

Assunto l'allonimo di Caronte, poi, l'augusto professore si è palesato solutore di maiuscola valentia: problemi storici come quello degli aeroplanini e quello del "dadi duri" sono stati domati con un procedere chiaro e sicuro. Ciò non di meno, circa due anni orsono la presenza del suo allonimo si è diradata fino a scomparire del tutto dalle pagine di RM, senza causa apparente. Anzi no, questo non è vero: la causa c'era eccome, e noi ne eravamo stati debitamente messi a parte: il lupo si ritirava per un po', perché gli era tornata la voglia di scrivere.

Ora, se la storia potessimo scriverla noi (e noi soltanto, senza contraddittorio), cominceremmo subito a prenderci libertà e meriti che certamente non ci appartengono. Proveremmo ad inoculare il sospetto che è proprio grazie all'allenamento e al gusto preso scrivendo le sue belle e lunghe soluzioni per RM, che Caronte ha riscoperto il gusto della scrittura di scienza. Arriveremmo pure, spudorati come siamo, a far pensare ai lettori che l'aver ritrovato due ex-studenti (e, francamente, due che non si collocano certo tra i più brillanti che egli abbia avuto) gli abbia in qualche modo risvegliato l'uzzolo didattico, il genio matematico, l'acume della didassi quantistica. E siccome quando ci mettiamo riusciamo ad essere anche spudoratamente immodesti e bugiardi, potremmo perfino arrivare a spacciare come prova evidente di tutto ciò il titolo dell'opera che ha finalmente visto la luce: ***Rudi**menti di Meccanica Quantistica*. Ci può essere dimostrazione più convincente del nostro teorema di quelle prime quattro lettere del titolo, che brillano quasi di luce propria?

Ma la storia è diversa, non siamo noi a scriverla, e non possiamo davvero avocarci in maniera talmente spudorata meriti che non abbiamo neanche in piccola parte. Il libro ha una sua profonda identità e una ancor maggiore dignità: più di mille pagine di fisica, scritte e ragionate da un accademico che ha più di quarant'anni di docenza; è un libro che ha davvero lo spessore (e non solo in senso metaforico) dell'opera definitiva dell'autore sull'argomento. E non è osservazione banale: il testo che ha accompagnato le citate "legioni di studenti piemontesi", quel "Istituzioni di Fisica Teorica – Introduzione alla Meccanica Quantistica" che per decenni è stato studiato come libro di testo a Torino, ha mantenuto nel tempo un'identità leggermente ambigua: era infatti ad un tempo un "testo sacro" da studiare accuratamente in molte sue parti, e al tempo stesso considerato alla stregua di "dispense", ovvero una sorta di appunti molto ben ordinati, ma legati sempre a doppio filo al corso universitario al quale faceva riferimento. Le cinquecento e passa pagine erano, purtroppo o per fortuna, chiaramente destinate in esclusiva agli studenti del terzo anno di Fisica.

Questo testo arriva invece trent'anni dopo, ma non si limita affatto a contenere trent'anni di fisica in più: è lo spirito che è rinnovato. Nell'organizzazione dei temi, nella modulazione della parte espositiva, senza dimenticare, naturalmente, anche la componente squisitamente tipografica, tanto migliorata quanto è lecito attendersi dalle moderne tecniche dell'editoria. Nello sfogliarlo (non vorremmo lasciar pensare a chi ci legge che noi si sia riusciti davvero, in un tempo così breve, a leggere compiutamente il testo in tutte le sue parti), l'attenzione di chi conosce i testi precedenti corre inizialmente alla ricerca delle differenze (ed è mestiere fin troppo facile: per quanto tutti gli argomenti dei libri precedenti si ritrovino in questo *RdMQ*, le differenze non sono enumerabili per il semplice fatto che si tratta di un libro sostanzialmente nuovo e diverso), e subito dopo, a causa dell'eccesso di riscontri, a cercare invece le somiglianze, la continuità.

Il risultato finale è curioso, e probabilmente viziato dal fatto che il rapporto che un libro di Meccanica Quantistica scritto da Cesare Rossetti non può essere giudicato senza una qualche sorta di coinvolgimento emotivo da parte di chi sui libri di Meccanica Quantistica di Cesare Rossetti ha passato qualche mese molto intenso della propria giovinezza. Ma a questo rimbalzo emotivo eravamo preparati, e in fondo, la non-neutralità di giudizio è prevista e addirittura presa a condizione per questa rubrica, che si è fin dall'inizio dichiarata come poco propensa all'imparzialità. Paradossalmente questa premessa rischia di penalizzare il testo, perché si può pensare che il giudizio conclusivo sia semplicemente una dichiarazione d'affetto nei confronti dell'autore e dell'opera. Non è così, o per lo meno non certamente solo così. Quel che appare con maggiore evidenza è infatti una solenne maturazione del testo: in fondo, come ben ricordano gli studenti e i professori di Fisica, il corso di Istituzioni di Fisica Teorica dovrebbe formare gli studenti nell'approccio alla Fisica Teorica: ed è solo quasi per accidente, per rinnovata e positiva convenzione che l'approccio alla Fisica Teorica si faccia utilizzando come banco di prova la Meccanica Quantistica. Questo, in genere, si sente durante il corso, e rende quell'insegnamento estremamente formativo ed estremamente difficile al tempo stesso: perché lo studente è costretto ad imparare un metodo nuovo (il fare *fisica teorica*) attraverso una materia nuova e difficile (la *meccanica quantistica*). E il testo del 1978 è chiaramente indirizzato a questo duplice scopo.

Questo *Rudimenti di Meccanica Quantistica*, invece, è un'opera dedicata essenzialmente e pienamente alla MQ: non ha più debiti da pagare con la struttura d'un corso universitario, non deve necessariamente mostrare i meccanismi attraverso i quali un fisico teorico elabora teorie; può invece liberamente sviscerare gli aspetti dei fenomeni quantistici in tutti gli aspetti essenziali, anche inquadrandoli di volta in volta nell'opportuno contesto storico. Questo non toglie che questo libro sarebbe comunque – e noi ci auguriamo anzi che sarà – un ottimo testo per più di un corso delle nuove Classi di Fisica; e, d'altra parte, anche *RdMQ* presuppone nel lettore un certo grado di conoscenza, una preparazione sia di matematica sia di fisica. E stiamo parlando d'una preparazione in genere ancora assente nei diplomati di scuola superiore: il lettore ideale resta, per il Vecchio Lupo Grigio che ha insegnato per otto lustri, lo studente ventenne che ha superato un biennio d'una facoltà scientifica. Ma quello che l'autore riserva a questo lettore ideale non sono più le dispense di un corso, ma un libro completo e profondo verso la comprensione completa e profonda della Meccanica Quantistica.

Non è un libro facile. Non è un libro leggero (in nessun senso, sfiora i due chili di peso); non è nemmeno un libro economico: il prezzo, come sempre in questi casi, è nella media dei testi universitari, e quindi alto rispetto ai libri normali; ma sembra proprio un libro che, se attraversato con caparbietà e tenacia attraverso tutti i suoi capitoli, condurrà a pagina 1015 un lettore con una consapevolezza della natura decisamente diversa da quella del lettore che aveva iniziato il viaggio a pagina 1.

Titolo	Rudimenti di Meccanica Quantistica
Autore	Cesare Rossetti (alias Caronte)
Editore	Levrotto & Bella – Torino
Data di Pubblicazione	2008
Prezzo	55,00 Euro
ISBN	978-88-8218-132-1
Pagine	1015

5. Soluzioni e Note

Fossimo dotati di un solo dito, anziché dieci, avremmo davvero inventato il sistema di numerazione unario? La cosa non è mica scontata: contare facendo sempre un nuovo trattino ogni volta che si deve aggiungere un'unità non sembra per niente intelligente né affascinante. È il metodo che la tradizione attribuisce ai galeotti d'un tempo, che tiravano una riga sul muro della cella ogni volta che passava un giorno di detenzione, ma non è che questo deponga a favore dell'utilità della cosa. E poi, a ben vedere, i galeotti stessi tiravano una riga orizzontale ogni cinque, a barrare le prime quattro verticali; come dire che il metodo era sì "unario", ma già vagamente contaminato da una specie di base 5. E comunque, se parliamo di notazioni unarie è ovviamente perché questo numero di RM ce ne dà davvero l'opportunità: erano giusto cento mesi che non vedevamo un numero d'ordine leggibile anche in base 1; certo, in questa base, il presente RM111 sarebbe solo il terzo numero della rivista, ma anche così non è cosa da scherzarci su: per un po' di tempo abbiamo pensato che arrivare a tre uscite sarebbe stata impresa notevole. E comunque, è quanto basta a farci inventare un giochino minuscolo: sapete dire quale sia il numero successivo della serie 3, 7, 13, 21, 31, 43, 57, 73, 91? Troppo facile, vero? Basta un minimo di attenzione (o di quello che si chiama "calcolo delle differenze finite") per accorgersi che il secondo numero si ottiene aggiungendo 4 al primo, il terzo aggiungendo 6 al secondo, poi si somma 8 al terzo per ottenere il quarto, e così via; quindi, trovare il successore è davvero facile. Con appena un po' di attenzione in più si arriva anche a notare che la formula generatrice della serie è n^2+n+1. Ancora un passo piccolo piccolo, magari notando en passant che n^2+n+1 è proprio come scrivere $n^2+n^1+n^0$, e si vede che quella successione banale è anche il modo di leggere il numero 111 nelle varie basi. Ah, è davvero curiosa, la matematica. Anche quella davvero elementare.

Questo numero unario di RM esce dopo un Marzo ricco di feste e di freddo. Una delle feste – peraltro assolutamente privata – è caduta nel dimenticatoio forse proprio a causa delle altre feste (raramente si vedono Equinozi di Primavera così attaccati alla Pasqua) o forse del freddo (che, notoriamente, congela i neuroni): fatto sta che Rudy si è lamentato che nessuno (*nessuno* della sua famiglia, chiaramente: non pretende certo che certe ricorrenze siano memorabili anche per gli RMers) si è ricordato delle sue Nozze di Porcellana. In realtà, chi lo conosce sa benissimo che le sue lamentele altro non sono che volgari scuse per mostrare un altro frammento della sua onniscienza (la relazione tra anniversari di nozze e materiali, ad esempio); da parte nostra, pensiamo che la mamma dei Validi Assistenti di Laboratorio (nonché i VAdL stessi, ovviamente) abbiamo accuratamente finto di scordarsene per evitare una lunga concione sulla materia. Noi, purtroppo, non siamo stati altrettanto fortunati: in qualità di GC ha diritto di veto (sulle cose scritte da altri) e diritto di imposizione (sulle cose scritte da lui), e quindi adesso, per espresso decreto presidenziale, vi beccate la lista completa delle denominazioni degli anniversari di nozze:

1 Carta	2 Cotone
3 Cuoio	4 Frutta (e/o Fiori)
5 Legno	6 Ferro
7 Rame	8 Bronzo
9 Terracotta	10 Stagno (o Latta)
11 Acciaio	12 Seta
13 Pizzo	14 Avorio
15 Cristallo	20 Porcellana
25 Argento	30 Perle
35 Corallo	40 Rubino
45 Zaffiro	50 Oro
55 Smeraldo	60 Diamante

Oltre alla lista, il nostro ci ricorda che il regalo da scambiarsi per l'occasione è ovviamente fatto del materiale relativo, salvo il caso del primo anniversario, in cui è tradizione regalare un orologio. Si noti come questa abominevole tradizione tagli subito le gambe ai regali (libri, stampe, disegni, figurine dei calciatori, etc.) indubbiamente più belli di tutto l'elenco.

Evasa questa formalità, concludiamo con un preghiera: nell'eventualità che tale esposizione di saccenteria vi abbia disgustato, non esitate a sommergerci di mail di protesta: forse così riusciremo a ricondurre il GC a più normali centri di interesse. Se invece – ah, temerari! – l'elenco delle nozze vi è piaciuto, per favore NON fatecelo sapere. Quello è capace di riempirci di notizie del genere da qui a RM777, sennò…

Per fortuna ci sono gli RMers, che anche quando ci scrivono per ragioni diverse dalla spedizione delle soluzioni mantengono uno standard di interesse decisamente più elevato di quello che riesce a racimolare la redazione. Tanto per dire, la prima lettera del mese è arrivata da parte di ***Felice***, che chiedeva qualche informazione in merito ai primi irregolari e alla loro connessione con l'Ultimo Teorema di Fermat. Il bello del ricevere domande via mail è che uno non deve preoccuparsi se la domanda ci coglie disperatamente impreparati: si può sempre prendere un po' di tempo per informarsi, e rabberciare una risposta che non faccia vedere troppo l'assoluta ignoranza sull'argomento. Però va detto che la domanda era davvero interessante, e se voi che leggete non sapete ancora che esistono dei *Primi Irregolari* (per non parlare dei connessi *Campi Ciclotomici*) fatecelo sapere, che magari convinciamo il GC a scriverci sopra un PM.

Un'altra mail ci chiedeva consigli in merito alla sicurezza del kite-surf, e anche questa volta abbiamo ripetuto il consolidato rito del non dar subito a vedere che non sapevamo niente dell'oggetto in questione. Ma, anche in questo caso, la mail di ***Agostino*** è servita ad aprirci un nuovo mondo dell'aviazione da diporto, che non conoscevamo affatto.

Proprio il giorno del compleanno di Einstein ci ha scritto ***Annalisa***, inviandoci una rielaborazione in formato *.pps* del primo problema di RM (filate in archivio, se non vi ricordate quale fosse; sta nella *Storia di RM*). Inutile dire che il suo gioco, ribattezzato Il *Paradosso del Topo*, è decisamente divertente: la sola idea di trasformare il buco formato dal quadratino mancante del disegno in una tana per topi è chiaro sintomo di genialità. Se ci riusciamo – frase che va letta come "se riusciremo a non dimenticarcene" – prima o poi lo metteremo sul sito.

Per concludere, abbiamo perfino un piccolo giallo da risolvere, e chissà se qualcuno dei nostri lettori può aiutare. ***Gabriel***, all'inizio di Marzo, stava ascoltando la radio e… beh, lasciamo che sia lui a raccontarlo:

> Divagazione: ieri mattina ascoltavo in auto Radio DeeJay, quando Fabio Volo, che con la matematica ha veramente poco a che spartire, riferiva di un episodio divertente di un ricercatore che, durante un noiosissimo congresso di fisici e matematici, si è alzato di scatto sussurrando "Ho capito!" ed è filato via precipitosamente per andare a trascrivere la dimostrazione di un teorema di cui si è in caccia da 140 anni, relativo ai materiali ed alla struttura delle grandi opere: roba un po' da matematici e un po' da architetti... però, causa clacson, mi sono sfuggiti, nell'ordine: nome del teorema, nome del ricercatore, città ove si svolgeva il congresso. Insomma, mi è sfuggito praticamente tutto. Semmai questa storia, se non me la sono sognata, dovesse arrivare sulle vostre scrivanie, mi raccomando, nel prossimo numero non trascurate almeno di citarla!

Ah, noi non trascuriamo di sicuro di citarla: anche se nessuno riuscirà a sciogliere i dubbi assillano il nostro, riteniamo l'episodio troppo divertente per dimenticare di raccontarlo.

Del resto, siamo quasi certi di dimenticare di dire alcune cose importanti. Ma sapete com'é… sono ormai mesi che vi diciamo che prima o poi faremo degli annunci importanti, ma poi non li facciamo mai (perché non è ancora tempo…); inoltre, se davvero dobbiamo dire qualcosa di particolare e speciale, magari finisce che ci costruiamo apposta sopra una rubrica (l'avete già trovata, la nuova EUNBET che abita in questo numero?); infine, ci sono delle cose che trovano spazio più acconcio nella newsletter piuttosto che in questa piccola cronaca delle note mensili. E allora? Beh, facile, in fondo: se queste sono le *Soluzioni & Note*, e se le *Note* sono finite, non resta che passare alle *Soluzioni*.

5.1 [109]

5.1.1 Qualcosa è cambiato

Ci sono delle caratteristiche di Rudi Mathematici che a noi – inventori e redattori – sembrano ragionevolmente rivoluzionarie: la cosa è evidentemente un florilegio d'immodestia, ma se non lo dichiarassimo aggiungeremmo all'immodestia la falsità. Una di queste caratteristiche rivoluzionarie ci sembra essere proprio l'idea di presentare dei problemi, e di seguito ai problemi presentare delle soluzioni, senza peraltro mai dichiarare nulla in merito alla bontà, correttezza ede esattezza (o meno) delle soluzioni ricevute e pubblicate. Di solito nei problemi di matematica la soluzione dei problemi viene sempre spiegata e raccontata in maniera ineluttabilmente precisa, esatta ed indubitabile. Noi, invece, non lo facciamo quasi mai: e questo ci piace davvero molto perché, se due soluzioni arrivano allo stesso risultato passando per vie diverse, allora si manifesta la poliedricità della matematica; se invece arrivano a risultati diversi, beh, quantomeno mettono in evidenza che il problema è interessante, e che resta ancora aperto. Ciò nonostante, la scelta non deve essere poi davvero così rivoluzionaria, visto che i lettori di RM di solito non si lamentano affatto della cosa: e noi ci immaginiamo che leggano, confrontino e decidano in merito.

Il mese scorso, comunque, abbiamo volutamente pubblicato tre diverse soluzioni – con tre diversi risultati – al problema presentato in RM109 "*Qualcosa è cambiato*", senza peraltro mettere in evidenza quale fosse delle tre quella giusta, e questo rischiava di sembrare quasi una provocazione. C'è infatti chi ha raccolto il guanto di sfida: ***Frank Sinapsi*** ha intercettato il triplice risultato, e ci ha scritto cosa ne pensa. Nella sua mail abbiamo trovato apprezzamento per l'e-zine e per il nostro libro (e già questo lo ha portato in alto nei nostri cuori), una giusta osservazione sulla difficoltà di reperire il gran testo "*Teoria dei Numeri*" di Weil (cara Einaudi, perché così crudele e ria con noi, poveri matematici assetati di matematica?), e un lungo e intrigante *post-scriptum*. Eccolo:

> Volevo segnalarti che nel numero 110 di RM, la soluzione di .mau. del gioco "Qualcosa è cambiato" **dovrebbe** essere sbagliata :-). Mi riferisco alla seconda domanda (calcolare il numero medio di mosse per partita).
>
> L'errore si trova in questo punto:
>
> $$N(1) = 1 + 1/3 + 2/3\ N(2)$$
>
> da dove esce 1/3? La relazione giusta è questa:
>
> $$N(1) = 1 + 2/3\ N(2)$$
>
> Con questa relazione, il calcolo del numero medio dà 6 come risultato, ed è lo stesso risultato a cui giunge anche il secondo solutore (Panurgo); ma non il terzo (Caronte) che trova 7.33... In pratica avete pubblicato tre soluzioni che giungono a tre risultati diversi :-)
>
> - .mau. -> 7
> - Panurgo -> 6
> - Caronte -> 7.33
>
> Io punterei su quella di mezzo. Nel caso vogliate darci un'occhiata ti aggiungo qui di seguito la spiegazione che avevo fornito alcuni giorni fa sul forum di TNT:
>
> Il numero di mosse non può mai essere dispari, ma può essere qualsiasi numero pari. Inoltre, indicando con P(n) la probabilità di finire in n mosse (n pari e non nullo), si vede che:
>
> $P(2) = 1/3 \cdot (2/3)^0$
>
> $P(4) = 1/3 \cdot (2/3)^1$
>
> $P(6) = 1/3 \cdot (2/3)^2$
>
> $P(8) = 1/3 \cdot (2/3)^3$
>
> $P(10) = 1/3 \cdot (2/3)^4$
>
> e così via...
>
> Un controllo che possiamo fare è che la somma infinita di queste probabilità deve dare esattamente 1, ed è abbastanza facile verificarlo (per ogni a diverso da 1, la somma $1+a+a^2+a^3+...+a^n$ vale $(1-a)^{(n+1)}/(1-a)$, quindi se $0<a<1$, la serie converge a $1/(1-a)$; qui abbiamo $a=2/3$, quindi converge a 3, che moltiplicato per 1/3 dà 1, quindi il controllo è ok).
>
> In modo analogo a quanto visto sopra, il numero medio di mosse sarà allora il valore a cui converge la seguente serie:
>
> $$P(2)\cdot 2+P(4)\cdot 4+P(6)\cdot 6+P(8)\cdot 8+...$$
>
> Si vede che converge a 6, e questa mi sembra la risposta al problema...
>
> Comunque non avevo seguito questa strada, ma una più semplice, che non passa attraverso somme infinite ma richiede pochi calcoli elementari.

Indichiamo con m1, m2, m3, m4 il numero medio di mosse per finire a partire dalle posizioni 1, 2, 3, 4 (rispettivamente). Se si riesce a ricavare m1, allora basterà sommare 1 e avremo il numero medio di mosse a partire dall'inizio.

L'osservazione principale è questa: se conosco il numero medio per finire da tutte le posizioni "adiacenti" a una certa posizione, allora posso ricavare il numero medio per finire da tale posizione: questo sarà la media aritmetica di tali valori a cui devo sommare 1 (la mossa obbligata per spostarmi da tale posizione su una delle posizioni adiacenti).

Vediamo un esempio pratico di come si applica questo principio. La posizione 2 è adiacente alle posizioni 1 e 4. Bene, allora deve valere necessariamente questa relazione:

$$m2 = 1 + (m1+m4)/2$$

La componente "1" è il contributo fisso, cioè la mossa che devo necessariamente fare per andare in una tra le posizioni vicine (1 o 4), a cui devo aggiungere la media del numero medio di mosse per finire da ciascuna di tali posizioni. Adesso possiamo sfruttare le simmetrie del gioco. Grazie alle simmetrie possiamo notare che valgono queste relazioni: m1=m4 e m2=m3. Spero che non ci sia bisogno di spiegare meglio questo punto. Quindi la relazione che avevamo trovato per m2 si semplifica in questo modo:

$$m2 = 1+m1$$

Adesso applichiamo lo stesso principio al calcolo di m1:

$$m1 = 1 + (0+m2+m3)/3$$

Perché quello 0 dentro la parentesi? Perché tra le posizioni adiacenti della posizione 1 c'è la posizione finale S, che non richiede ulteriori mosse (il gioco è finito).

Considerando che m2=m3 e che m2=1+m1, abbiamo:

$$m1 = 1 + 2/3 \cdot m2 = 1 + 2/3 \cdot (1+m1) = 5/3 + 2/3 \cdot m1$$

da cui si ricava facilmente che m1 deve valere necessariamente 5. Aggiungendo 1, otteniamo che il numero medio di mosse per finire (dalla posizione iniziale) deve essere 6.

È lo stesso risultato ottenuto con l'altro metodo, ma qui, grazie allo sfruttamento immediato delle simmetrie, non abbiamo dovuto calcolare somme infinite, quindi direi che questa strada era decisamente più facile.

Che possiamo dire, noi, se non che questo sembra davvero un altro colpo delle tanto celebrate e temute "*evidenti ragioni di simmetria*"?

5.2 [110]

5.2.1 Quasi un Q&D, dice Cid...

Il problema di ***Cid*** (sì, lo stesso losco figuro che ci ha rifilato la storia dell'uccello mangiasassi) relativo al tunnel che attraversa la Terra non è rimasto senza soluzioni. Ci hanno scritto in merito, ad esempio, sia ***Martino*** che ***Roberto*** (e questi è un geologo, quindi un professionista dell'argomento…). Le loro risposte sono assai interessanti: una cita perfino Bilbo Baggins, il che lascia presupporre una diretta estensione dalla Terra alla Terra di Mezzo. Se non le pubblichiamo non è certo perché non lo meritino, ma solo perché abbiamo una mezza idea di raccogliere prima tutte le risposte, e solo poi commentare in maniera acconcia.

5.2.2 Siamo pieni di monetine!

Ogni tanto qualche solutore se ne va in letargo solutorio. Questo non implica necessariamente che non sia più in grado di risolvere i problemi di RM, e neppure che smetta di leggere RM; e comunque, anche succedesse, non sarebbe certo un reato da punire con la galera… Sia come sia, è particolarmente piacevole scoprire, dopo un lungo periodo di assenza, che i prodighi figliuoli di tanto in tanto trovano ancora la strada della casa di RM. È quel che è successo a ***BR1*** (allonimo abbastanza esplicito, no? Non avrete mica dubbi sul suo nome di battesimo?) che ci ha spedito una soluzione del problema delle monetine:

> È un po' che non ci si sente, eh? C'è da dire che nei mesi scorsi alcune volte avevo risolto i vostri problemini, ed anche iniziato a scrivere le soluzioni, senza mai arrivare in fondo… In proposito, vi trascrivo per intero (onerosa fatica…) un racconto di Stefano Benni:
>
> RACCONTO BREVE
>
> C'era un uomo che non riusciva mai a terminare le cose che iniziava. Capì che non poteva andare avanti così. Perciò una mattina si alzò e disse:
>
> "Ho preso una decisione: d'ora in poi tutto quello che inizie…"
>
> Vediamo se stavolta riesco ad arrivarci, in fondo; me la sono spassata con le monetine e adesso vengo a narrare la mia interpretazione dei fatti. Per prima cosa mi sono procurato le seguenti quantità di spiccioli statunitensi:

Valore	Numero Pezzi	Valore Totale
1c	678	6.78$
5c	136	6.75$
10c	67	6.70$
25c	27	6.75$
50c	13	6.50$
1$ = 100c	6	6.00$

> Il tutto, fa un totale di 39.48$, pari a circa 26.03€ al cambio attuale. Il "numero pezzi" corrisponde al massimo numero di monetine di ciascun valore utilizzabili per il gioco senza trasgredire alla regola "*è vietato superare la cifra indicata*" (678c). Dopodichè, ho preso un bel foglio di carta quadrettata, ed ho disegnato una tabella con 46 righe e 15 colonne, riempiendo poi le caselline con i numeri da 0 a 678, procedendo da sinistra a destra e dal basso verso l'alto. Una cosa del genere, insomma:

											678	677	676	675
674	673	672	671	670	669	668	667	666	665	664	663	662	661	660
659	658	657	656	655	654	653	652	651	650	649	648	647	646	645
644	643	642	641	640	639	638	637	636	635	634	633	632	631	630
629	628	627	626	625	624	623	622	621	620	619	618	617	616	615
614	613	612	611	610	609	608	607	606	605	604	603	602	601	600
599	598	597	596	595	594	593	592	591	590	589	588	587	586	585
584	583	582	581	580	579	578	577	576	575	574	573	572	571	570
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
119	118	117	116	115	114	113	112	111	110	109	108	107	106	105
104	103	102	101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91	90
89	88	87	86	85	84	83	82	81	80	79	78	77	76	75
74	73	72	71	70	69	68	67	66	65	64	63	62	61	60
59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45
44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30
29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

> La casella 678 l'ho colorata di verde: perché? Perché se io, nel piazzare l'ultima monetina, lascio 678c nella ciotola, ho vinto. Quindi la 678 è una *casella vincente*, nel senso che una mia mossa che lasci quella cifra nella ciotola mi porta alla vittoria. Che cifra può trovarsi nella ciotola *prima* dell'ultima mossa? Dipende da quale monetina venga usata per ultima; potrebbero esservi 677, 673, 668, 653, 628 o 578 centesimi, a seconda dei 6 casi possibili. Allora le caselle corrispondenti a tali valori le ho colorate di rosso, così:

											678	677	676	675
674	673	672	671	670	669	668	667	666	665	664	663	662	661	660
659	658	657	656	655	654	653	652	651	650	649	648	647	646	645
644	643	642	641	640	639	638	637	636	635	634	633	632	631	630
629	628	627	626	625	624	623	622	621	620	619	618	617	616	615
614	613	612	611	610	609	608	607	606	605	604	603	602	601	600
599	598	597	596	595	594	593	592	591	590	589	588	587	586	585
584	583	582	581	580	579	578	577	576	575	574	573	572	571	570
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
119	118	117	116	115	114	113	112	111	110	109	108	107	106	105
104	103	102	101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91	90
89	88	87	86	85	84	83	82	81	80	79	78	77	76	75
74	73	72	71	70	69	68	67	66	65	64	63	62	61	60
59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45
44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30
29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Le caselle rosse sono *caselle perdenti*, nel senso che se un giocatore lascia nella ciotola la cifra corrispondente, permette all'avversario di vincere utilizzando la monetina opportuna. La casella di valore più alto non ancora colorata è adesso la 676: essa va colorata di verde, poiché da lì l'unica mossa possibile per l'avversario consiste nel mettere 1c nella ciotola, andando a finire nella casella perdente 677. Visto che la 676 è verde, saranno allora rosse le 6 caselle dalle quali si può pervenire ad essa con le monetine a disposizione, cioè le 675, 671, 666, 651, 626 e 576. Chi giocando lascia nella ciotola uno di questi valori, consente all'avversario di piazzare opportunamente una monetina, e di portarsi nella casella vincente 676.

E così via… Dopo un po' di colorazioni, appare uno schema regolare (in realtà, la regolarità dipende dalla *fortunosa* scelta di utilizzare una tabella con 15 colonne…), per cui si procede per induzione fino alla casella 0:

											678	677	676	675
674	673	672	671	670	669	668	667	666	665	664	663	662	661	660
659	658	657	656	655	654	653	652	651	650	649	648	647	646	645
644	643	642	641	640	639	638	637	636	635	634	633	632	631	630
629	628	627	626	625	624	623	622	621	620	619	618	617	616	615
614	613	612	611	610	609	608	607	606	605	604	603	602	601	600
599	598	597	596	595	594	593	592	591	590	589	588	587	586	585
584	583	582	581	580	579	578	577	576	575	574	573	572	571	570
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
119	118	117	116	115	114	113	112	111	110	109	108	107	106	105
104	103	102	101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91	90
89	88	87	86	85	84	83	82	81	80	79	78	77	76	75
74	73	72	71	70	69	68	67	66	65	64	63	62	61	60
59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45
44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30
29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Allora: il primo giocatore trova 0 centesimi nella ciotola, e piazza a suo piacimento 1, 10, 25 o 100 centesimi per spostarsi su una casella verde. Deve solo stare attento a non usare monete da 5 o 50 centesimi… L'avversario, per come è costruita la tabella, partendo da una casella verde non può far altro che finire in una rossa; dalle caselle rosse chi ha iniziato può sempre tornare in una verde, fino alla 678 vincente…

Passando in euro, le monetine necessarie sono le seguenti:

Valore	Numero Pezzi	Valore Totale
1c	678	6.78€
2c	339	6.78€
5c	135	6.75€
10c	67	6.70€
20c	33	6.60€
50c	13	6.50€
1€ = 100c	6	6.00€

Per un totale di 46.11€… Costruendo una tabella simile a quella per i dollari, viene fuori quanto segue:

											678	677	676	675
674	673	672	671	670	669	668	667	666	665	664	663	662	661	660
659	658	657	656	655	654	653	652	651	650	649	648	647	646	645
644	643	642	641	640	639	638	637	636	635	634	633	632	631	630
629	628	627	626	625	624	623	622	621	620	619	618	617	616	615
614	613	612	611	610	609	608	607	606	605	604	603	602	601	600
599	598	597	596	595	594	593	592	591	590	589	588	587	586	585
584	583	582	581	580	579	578	577	576	575	574	573	572	571	570
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
119	118	117	116	115	114	113	112	111	110	109	108	107	106	105
104	103	102	101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91	90
89	88	87	86	85	84	83	82	81	80	79	78	77	76	75
74	73	72	71	70	69	68	67	66	65	64	63	62	61	60
59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45
44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30
29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Qui sarebbe bastata una tabella con 3 sole colonne…

Comunque, il primo giocatore stavolta trova ancora la ciotola vuota, ma stavolta corrispondente ad una casella verde: qualsiasi cosa faccia, capiterà in una casella rossa, ed il secondo giocatore, se procede razionalmente, ha partita vinta…

Bene, in realtà le monetine non mi sono servite, e adesso non so più cosa farne: a portarle in tasca rischio di deformarmi la giacca… Visto che in fondo è colpa vostra, vi farò avere gli estremi bancari del mio CC sul quale siete invitati a versare al più presto la cifra complessiva di 72.14€. Le monetine sono qui e potete venirle a prendere quando vi pare…

Cosa potevamo fare, noi, di fronte a cotanta forza tabellare? Solo obbedire, facendoci carico della richiesta di ***BR1***. E così abbiamo affidato i richiesti 72,14 Euro ai due Validi Assistenti di Laboratorio, che si sono solertemente offerti volontari per la commissione. Ci hanno assicurato di aver perfettamente proceduto al bonifico, anche se un colpo di vento improvviso ha strappato loro di mano la ricevuta, e così ***BR1*** avrà di che festeggiare, questo mese.

Per i partigiani delle soluzioni analitiche, eccone una più diretta, proveniente dall'immarcescibile ***Cid***:

Giocando con i centesimi di dollaro vince chi gioca per primo. Giocando con i centesimi di euro vince chi gioca per secondo.

Dimostrazione

Lemma 1

Con i centesimi di $ vince chi gioca per secondo se e solo se il totale da raggiungere è uguale a:

$$15\cdot N + 2\cdot(K \text{ Modulo } 5)$$

dove N e K sono numeri interi non negativi.

Dimostrazione del lemma 1

Il lemma l'ho ricavato da quanto ho appreso sulla teoria dei giochi leggendo la pagina 28 di RM92, ma è assai più semplice dimostrarlo per induzione; in quanto è immediato ricavare che vale per N=0 e notare che se vale per N allora sicuramente vale anche per (N + 1). Risulta utile a tal fine notare che:

$$25 \text{ (Modulo } 15) = 10 \qquad 50 \text{ (Modulo } 15) = 5 \qquad 100 \text{ (Modulo } 15) = 10$$

Da questo lemma, si ricava che se il totale da raggiungere è 678 vince chi gioca per primo in quanto non esistono valori di N e K tali che 15·N + 2·(K Modulo 5) sia uguale a 678.

- Per $N < 45$ abbiamo che $15 \cdot N + 2 \cdot (K \text{ Modulo } 5)$ vale al massimo 668
- Per $N > 45$ abbiamo che $15 \cdot N + 2 \cdot (K \text{ Modulo } 5)$ vale al minimo 690
- Per $N = 45$ abbiamo che $15 \cdot N + 2 \cdot (K \text{ Modulo } 5)$ può assumere solo i seguenti valori: 675, 677, 679, 681, 683

<u>Lemma 2</u>

Con i centesimi di € vince chi gioca per secondo se e solo se il numero da raggiungere è divisibile per 3.

<u>Dimostrazione del lemma 2</u>

Le monete da 1, 10, 100 sono tutte uguali a 1 (Modulo 3)

Le monete da 2, 5, 50, 200 sono tutte uguali a 2 (Modulo 3)

Non esistono monete in euro aventi un valore divisibile per 3

Se il totale da raggiungere è divisibile per 3, ogni volta che il primo giocatore mette una monetina, il secondo giocatore può sempre far ritornare la somma divisibile per 3 (in quanto esiste sia la moneta da 1 centesimo che la moneta da 2 centesimi) in tal modo è sicuro che l'altro giocatore non possa vincere in quanto non esistono monete in euro aventi un valore divisibile per 3.

Se il totale da raggiungere non è divisibile per 3, chi gioca per primo mette come prima moneta un valore tale che la differenza tra il totale da raggiungere e la moneta posta nella ciotola sia divisibile per 3; a questo punto, qualunque sia la moneta giocata dal secondo giocatore, il primo giocatore ha sempre la possibilità di far ritornare la somma divisibile per 3 (in quanto esiste sia la moneta da 1 centesimo che la moneta da 2 centesimi) ed assicurarsi di conseguenza la vittoria della partita

Da questo lemma, si ricava che in centesimi di €, se il totale da raggiungere è 678 vince chi gioca per secondo in quanto 678 è divisibile per 3.

Niente da aggiungere: il ***Cid*** lascia sempre questa sensazione di "definitività", quando chiude le sue dimostrazioni…

A chiudere questa sezione chiamiamo ***Trekker***, che in qualche misura si può vedere proprio come fautore del compromesso tra l'approccio analitico e quello classificatorio, ma solo fino ad un certo punto: questo perché lui subisce soprattutto il fascino delle generalizzazioni:

Propongo di complicare il problema allo scopo di mostrare un algoritmo che possa risolvere una più ampia classe di situazioni con Euro, Dollari, Yen, Rubli, Rupie, Scudi e Dobloni....

Sia $S=\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ con $S_1<S_2<\ldots<S_m$ l'insieme dei risultati conseguendo i quali con l'ultima mossa si vince il torneo (nel caso proposto da RM110 è $S=\{678\}$).

Sia $M_i=\{m_{i1}=1, m_{i2}, \ldots, m_{in}\}$[20] l'insieme dei valori delle monete da cui scegliere per fare la prossima mossa qualora il "gruzzolo" nella ciotola valga "i" (nel caso proposto da RM110 è $\forall i, M=M_i=\{1, 5, 10, 25, 50, 100\}$).

Costruiamo gli insiemi $A_i= M_i \cap\{k:i+k\leq S_m\}$formato dai valori ammissibili delle monete, cioè per ogni valore del "gruzzolo" scegliamo solo i valori che non fanno "tracimare" il valore complessivo delle monete oltre il maggiore degli obiettivi S_m.

[20] Si noti che abbiamo ipotizzato $m_{i1}=1$, in modo che tutti i gruzzoli fra 0 e S_m siano "raggiungibili" *[Nota di **Trekker**]*

Definiamo ora una funzione booleana **V(.)** definita sui numeri interi fra 0 ed S_m tale che **V(i)=vero** se il giocatore che si trova a dover scegliere la prossima moneta quando il "gruzzolo" ha valore **"i"** è in grado, di volta in volta, di selezionare almeno una mossa che lo porta **sicuramente** a vincere il torneo (in pratica cioè il giocatore, quando è il suo turno, riesce a far evolvere il gioco mantenendo la **V(.)** sempre a **vero**, qualunque sia lo sforzo "creativo" del suo avversario). Viceversa **V(i)=falso** se il giocatore che si trova a dover scegliere la prossima moneta quando il "gruzzolo" ha valore **"i"** , avendo in fronte un avversario "tosto", è destinato a perdere.

Per le regole del gioco possiamo sicuramente subito scrivere che:

$$V(S_1) = V(S_2) = \ldots = V(S_m) = falso$$

infatti il giocatore che ha il turno con "gruzzolo" di valore $S_1, S_2, \ldots, S_m$ ha sicuramente perso, visto che la vittoria è andata a chi, cioè il suo avversario, con l'ultima mossa ha portato il valore complessivo delle monete proprio ad uno degli obiettivi $S_1, S_2, \ldots, S_m$.

Ragioniamo ora per ricorsione e calcoliamo V(i) noti che siano i valori V(i+N)[21] con N intero strettamente positivo e tale che $i+N$□S_m. Possiamo scrivere:

1. se $\exists k \in A_i : V(i+k) = falso$ allora *V(i)=vero*, allora, cioè se il giocatore di turno può almeno scegliere una moneta di valore k ammissibile (potenzialmente ci possono essere più scelte "buone") tale che si porti, con questa mossa, l'avversario in uno stato perdente, allora la mossa k è vincente per il giocatore di turno;
2. se $\exists k \in A_i : V(i+k) = vero$ allora *V(i)=falso*, cioè se il giocatore di turno, qualunque scelta faccia, porta inevitabilmente l'avversario in uno stato vincente, allora il suo stato è perdente.

Determinato quindi V(i) si passa ad esaminare V(i−1), etc. fino a V(0). In pratica quindi se si scoprisse **V(0)=vero** allora vincerebbe sempre il giocatore "scaltro" che inizia il "torneo", viceversa se si scoprisse **V(0)=falso** vincerebbe sempre il giocatore "scaltro" che parte per secondo.

Operativamente quindi l'algoritmo è sintetizzabile così:

1. Porre $V(S_1) = V(S_2) = \ldots = V(S_m) = falso$
2. $i = S_m - 1$
3. se V(i) è già assegnato – quindi in pratica se **"i"** fosse uguale a S_1 **o** S_2 **o ....** – andare allo step 6, altrimenti procedere allo step 4
4. calcolare l'insieme delle mosse ammissibili: $A_i = M_i \cap \{k : i \quad k \leq S_m\}$ – in pratica si considerano solo le mosse che non fanno "tracimare il gruzzolo" oltre il limite non superabile imposto dal gioco
5. valutare la funzione booleana V(.) in "i": $V(i) = \neg \bigwedge_{k \in A_i} (V(i+k))$ – in pratica si calcola l'AND dei valori della funzione booleana V(.) in tutti i punti raggiungibili da "i" (valori che sono noti) e poi si applica la negazione NOT. Si noti che qualora **V(i)=vero**, si può costruire l'insieme $K_i = (k : k \in A_i, V(i+k) = falso)$ delle scelte "monetarie" che fanno perdere l'avversario.
6. decrementare "i" di una unità
7. se $i \geq 0$ si riprende dallo step 3, altrimenti procedere allo step 8
8. Fine – cioè abbiamo calcolato la V(.) da $V(S_m)$ fino alla V(0).

[21] Stiamo ipotizzando cioè di conoscere il valore della funzione booleana V(.) per "gruzzoli" maggiori di quello che stiamo esaminando *[Nota di Trekker]*

Vince di sicuro il giocatore (se "smart") che ha la prima mossa del torneo se ***V(0)=vero***; vince di sicuro il giocatore (se "smart") che parte per secondo nel torneo se ***V(0)=falso***.

Caso in Dollari

Applicando l'algoritmo (bastano poche righe di codice per implementarlo) al caso americano in Dollari con monete **M={1,5,10,25,50,100}** e obiettivo **S={678}** si scopre che **chi inizia il torneo può sempre vincere**. In particolare si osserva che "essere di mano", prima della propria mossa, quando la ciotola contiene uno dei seguenti valori **(1+15k), (3+15k), (10+15k), (12+15k)** e **(14+15k)** , con k intero non negativo, porta, se si ha in fronte un giocatore "smart", **inevitabilmente alla sconfitta** poiché questi sarà in grado di condurre il gioco, qualunque scelta si faccia, in modo che il gruzzolo nella ciotola sia sempre esprimibile in questo modo DOPO la sua mossa.

Ma operativamente, e a mente, come si può fare? Bisogna che la somma fra quanto nella ciotola e la nostra prossima scelta dia come resto alla divisione per 15 uno qualsiasi fra **Φ={1,3,10,12,14}** (o **Φ={±1, ±3, −5,10})**. E come si calcola facilmente il resto della divisione per 15 di numeri <999 (ma è facile estendere la regola anche oltre)? Si considera il numero senza le centinaia e si sottrae la cifra delle centinaia moltiplicata per 5, quindi si prende il resto della divisone per 15 di questo numero (con l'accortezza, se il caso, di aggiungere tante volte 15 tanto quanto serve per non renderlo negativo). Se il resto è uno di quelli sopra abbiamo sicuramente portato il nostro avversario a perdere.

- Esempio #1: e se sommando il valore della ciotola con una delle nostre scelte possibili arrivassimo a 428? Beh, 428:15 ha resto uguale a $(28-4\cdot5):15=(28-20)=8:15$, cioè il resto è $8 \notin \Phi$. Quindi non conviene portare il nostro avversario ad avere questo valore nella ciotola prima del suo turno.
- Esempio #2: e se sommando il valore della ciotola con una delle nostre scelte possibili arrivassimo a 627? Beh, 627:15 ha resto uguale a $(27-6\cdot5):15=(27-30):15=(-3):15$, cioè il resto della divisione è $(-3+15)=12\in\Phi$. Quindi portare la ciotola a 627 è perdente per il nostro avversario.

In alternativa si calcola il resto modulo 15 del valore contenuto nella ciotola e si sceglie una delle monete (che non fanno "tracimare") elencate sotto il corrispondente resto della tabella:

Valore Modulo 15 prima della scelta	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Scegliere	1;10;25;100	**PERDI**	1;10;25;100	**PERDI**	10;25;100	5;50	10;25;100	5;50	10;25;100	1;5;50	**PERDI**	1;5;50	**PERDI**	1;5;50	**PERDI**

Ad esempio se il resto della divisione per 15 del valore in centesimi delle monete contenute nella ciotola fosse 11, dovremmo scegliere 1 oppure 5 oppure 50, infatti:

11+1=**12**(mod 15); 11+5=16=**1**(mod 15); 11+50=61=**1**(mod 15), e 12 ed 1 sono marcati come perdenti. In particolare chi comincia il gioco è meglio che, alla prima mossa, stia alla lontana dalle monete da 5 e 50 centesimi!

Caso in Euro

Viceversa applicando l'algoritmo al caso Euro con monete **M={1,2,5,10,20,50,100,200}** e obiettivo **S={678}** si scopre che **colui che parte per primo è destinato a perdere**. In particolare è "perdente" trovarsi, prima della propria mossa, con una ciotola contenente 3k cent, con k intero non negativo. **Per vincere quindi bisogna fare in modo che DOPO la propria scelta, la ciotola contenga un numero di cent multiplo di 3.**

> La cosa è particolarmente evidente se si nota che l'insieme dei valori delle monete disponibili **M={1,2,5,10,20,50,100,200}={1,2,2,1,2,2,1,2}(mod 3)** è tale per cui colui che trova la ciotola con un valore di 3k centesimi, qualunque scelta faccia, esce da questo multiplo "magico" e, ahilui, l'avversario riesce sempre a fargli trovare, nella mossa successiva, di nuovo un multiplo di 3 centesimi!
>
> Dovrebbe essere chiaro che siamo in grado, e facilmente, di dedurre anche chi sarà il vincitore con ciotola inizialmente non vuota o con valore da raggiungere S diverso da 678 (in questo caso è perdente colui che si trova in uno stato X tale che X=S (mod 3).

A rotative chiuse (sì, lo sappiamo che le rotative non chiudono: ma voi non sapete riconoscere un modo di dire? O pensate davvero che noi si abbia delle rotative?) ci è arrivata anche la soluzione di ***Val316***; questa è inizialmente finita sotto le grinfie del più moderno sistema antispam del mondo occidentale (leggasi: lento controllo a manina dei redattori delle schifezze pervenute), che per una volta si è sbagliato e ha distrutto l'opera del nostro. Ma il sistema è sofisticato mica per scherzo: anche se la cancellazione non era più recuperabile, ci ricordavamo bene d'aver visto una lettera non da rottamare. Così, abbiamo chiesto a ***Val316*** di rispedirla. Adesso è un po' triste dover confessare che non abbiamo però lo spazio sufficiente a pubblicarla tutta; ci piace però almeno pubblicare le prime righe, perché sono un splendido esempio di prosa risolutiva:

> Per poter rispondere al problema quale sia una strategia vincente per uno dei due giocatori che permetta di arrivare per primo a 678 ho studiato i sottogiochi che hanno per obiettivo il raggiungimento di totali inferiori, partendo dal valore più piccolo (1) per poi crescere fino al numero richiesto 678. Ho trovato che i sottogiochi si ripartiscono naturalmente in sottoinsiemi di cardinalità 15 strategicamente equivalenti

Non sappiamo come la pensate voi, ma alle nostre orecchie una frase che recita "*…sottogiochi si ripartiscono naturalmente in sottoinsiemi di cardinalità 15 strategicamente equivalenti*" è pura poesia.

E con questo, possiamo mettere le monetine in archivio. Come? Ah, certo, diamine! Credevamo lo aveste già capito tutti: si tratta proprio di una forma di Nim!

5.2.3 Peggio di Doc

I bicchieri di questo problema sono risultati per quasi tutti poco adatti a far brindisi. Solo pochi eroici solutori si sono impegnati nella geometria del simposio: uno dei pochi è ***FrancoZ:***

> Ho optato per una risoluzione approssimata con le seguenti premesse:
>
> - Lo spessore del bicchiere è trascurabile.
> - L'origine delle mie coordinate di riferimento nel centro del fondo e mi muovo sull'asse del bicchiere (il baricentro, per motivi di simmetria, dev'essere sull'asse).
>
> Inoltre, per una volta, mi dimentico di tutto il Sistema Internazionale, e parlo di pesi in grammi (e non in Newton) come la stragrande maggioranza della popolazione. Tutto ciò premesso divido il mio insieme di bicchiere ed acqua in tre parti per ognuna delle quali calcolo il peso (p) e la distanza (y) del baricentro dall'origine:
>
> - fondo: $p_f = a\pi r^2 = 4\pi a$ $\quad y_f = 0$
> - parete: $p_p = 2a\pi rh = 48\pi a$ $\quad y_p = h/2 = 6$
> - acqua: $p_a = \pi r2x = 4\pi x$ $\quad y_a = x/2$

Con ***a*** ho indicato il peso per unità di superficie del bicchiere (*g/cm²*, costante incognita) e ***x*** rappresenta l'altezza (***cm***, variabile) dell'acqua nel bicchiere.

Per calcolare la posizione del baricentro di tutto l'insieme basta ricordare che:

$$y\,(p_f + p_p + p_a) = y_f p_f + y_p p_p + y_a p_a$$

Sostituendo i valori precedentemente calcolati (ometto un po' di passaggi) si arriva a:

$$y = (144a + x^2)/(26a + 2x)$$

L'altezza minima del baricentro corrisponde allo zero della derivata :

$$y' = 2x\,(26a + 2x)^{-1} - 2\,(144a + x^2)(26a + 2x)^{-2} = 2\,(26a + 2x)^{-2}(x^2 + (26x - 144)\,a)$$

Sapendo che questa condizione si ottiene quando $x = 4{,}5 = 9/2$ si arriva immediatamente a:

$$a = x^2 / (144 - 26x) = 3/4\ (g/cm^2)$$

Il peso del bicchiere sarà quindi:

$$p_b = p_f + p_p = 52\pi a = 39\pi$$

Pari a circa 123 grammi (viste le approssimazioni in premessa non mi sento di aggiungere decimali!). Se avessi deciso di non trascurare lo spessore del bicchiere avrei avuto sicuramente l'effetto di complicare, e non poco, i calcoli ma penso che si potrebbe arrivare ugualmente alla soluzione. Solo i dati di partenza sarebbero stati (ammettendo che le misure date siano quelle interne e prendendo come origine il centro della superficie interna del fondo):

- fondo: $p_f = b\pi(r+s)^2 s$ $\qquad y_f = -\,s/2$
- parete: $p_p = b\pi((r+s)^2 - r^2)h$ $\qquad y_p = h/2 = 6$
- acqua: $p_a = \pi r2x = 4\pi x$ $\qquad y_a = x/2$

Con *b* stavolta indico il peso per unità di volume del vetro (*g/cm³*).

Io neppure ci provo!

Beh, caro ***FrancoZ***, intanto hai provato il caso dello spessore trascurabile, e questo è già un gran bel merito; anche perché, di soluzioni a questo problema, ce ne è arrivata solo un'altra, dal solito ***Cid***: e stavolta, anche a lui vengono dei risultati decisamente *pesanti*.

Il peso del bicchiere è approssimativamente: 3166 grammi

Considerato che nel problema non viene specificato lo spessore del bicchiere, ipotizzo che tale spessore possa essere considerato trascurabile rispetto al diametro del bicchiere. L'area della base del bicchiere è:

$$R^2 \cdot \pi = 16 \cdot \pi$$

La superficie laterale del bicchiere ha area uguale a:

$$2 \cdot R \cdot \pi \cdot H = 8 \cdot \pi \cdot 12 = 96 \cdot \pi$$

Finché l'acqua si trova sotto il baricentro, ogni goccia d'acqua che viene aggiunta abbassa il baricentro; appena l'acqua arriva all'altezza del baricentro, ogni ulteriore goccia d'acqua che viene aggiunta alza il baricentro. Pertanto se ne deduce che l'altezza del baricentro è uguale a 4,5 cm dalla base del bicchiere.

Chiamando *x* lo spessore del bicchiere: il volume di bicchiere situato sopra il baricentro è approssimativamente uguale a:

$$(2 \cdot R \cdot \pi) \cdot (H - 4{,}5) \cdot x = 8 \cdot \pi \cdot 7{,}5 \cdot x = 60 \cdot \pi \cdot x$$

Il volume di bicchiere situato sotto il baricentro è approssimativamente uguale a:

$$(2 \cdot R \cdot \pi) \cdot 4{,}5 \cdot x + (16 \cdot \pi \cdot x) = 8 \cdot \pi \cdot 4{,}5 \cdot x + (16 \cdot \pi \cdot x) = 36 \cdot \pi \cdot x + 16 \cdot \pi \cdot x = 52 \cdot \pi \cdot x$$

Il volume complessivo del bicchiere è uguale a:

$$60 \cdot \pi \cdot x + 52 \cdot \pi \cdot x = 112 \cdot \pi \cdot x$$

Il peso dell'acqua contenuta nel bicchiere è uguale a:

$$4{,}5 \cdot 16 \cdot \pi = 72 \cdot \pi \text{ grammi.}$$

Chiamando P il peso in grammi del bicchiere abbiamo la seguente equazione:

$$\frac{52}{112} P + 72 \cdot \pi = \frac{60}{112} P$$

$$72 \cdot \pi = \frac{8}{112} P$$

$$72 \cdot \pi = \frac{1}{14} P$$

$$P = 72 \cdot 14 \cdot \pi = 1008 \cdot \pi \qquad \text{(grammi)}$$

Quindi il peso del bicchiere è circa uguale a 3166 grammi. Un bicchiere che pesa più di tre chili non mi pare poi tanto leggero!! Restano 3 possibilità per spiegare questo risultato:

- Siete abituati a bicchieri molto pesanti.
- Lo spessore del bicchiere non poteva essere considerato trascurabile (ma allora manca il dato dello spessore del bicchiere per poter risolvere il problema)
- Ho commesso qualche errore nel risolvere o nell'interpretare il problema

Beh, sono delle belle domande, queste. Non vorrete mica che le risposte giungano da noi! Quante volte dobbiamo ripeterlo? Noi facciamo le domanda, e voi date le risposte: sennò, a che pro fare ogni mese questa faticaccia?

6. Quick & Dirty

Abbiamo parlato di mazzi da cinquantadue che contenevano più carte, adesso cerchiamo di essere onesti. Mazzo da cinquantadue con (oh, stupore!) 52 carte. Mescolato e piazzato faccia in giù sul tavolo. Quello che vi si chiede è di scommettere su quale sia la distanza dalla cima del mazzo del *primo asso nero*.

Come gioco non sembra un gran che, ma il bello è che viene reiterato, e si vogliono ottenere il massimo delle probabilità (che, siamo d'accordo, restano piuttosto sul "loffio") sul lungo periodo.

Su che posizione scommettete?

7. Pagina 46

Secondo la notazione usuale, sia ABC il nostro triangolo, di lati a, b, c in cui il lato indicato da una data lettera è opposto all'angolo indicato dalla stessa lettera.

Supponiamo genericamente $B = nA$; questo implica (lavorando in gradi) che $C = 180^\circ - (n+1)A$ e conseguentemente, dalla legge dei seni,

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin nA}{\sin A},$$
$$\frac{c}{a} = \frac{\sin(n+1A)}{\sin A}.$$

Nel caso (a), abbiamo $n = 2$. Siccome

$$\sin 2A = 2\sin A \cos A,$$
$$\sin 3A = 4\cos^2 A \sin A - \sin A,$$

Abbiamo

$$\frac{b}{a} = 2\cos A,$$
$$\frac{c}{a} = (2\cos A)^2 - 1. \qquad \textbf{[1]}$$

Ma $2\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc}$, e quindi in un triangolo a lati interi $2\cos A$ deve sempre essere razionale. Sia quindi $2\cos A = \frac{p}{q}$; allora, dalla **[1]**, abbiamo:

$$a : b : c = q^2 : pq : (p^2 - q^2).$$

Se p e q sono primi tra loro gli interi q^2, pq e $p^2 - q^2$ non hanno divisori comuni diversi da 1. Quindi, in tutti i triangoli che soddisfano la condizione $B = 2A$ e aventi i lati (interi) di dimensione minima (ossia senza divisori comuni) le lunghezze dei lati sono esprimibili attraverso le formule:

$$a = q^2,$$
$$b = pq,$$
$$c = p^2 - q^2,$$

dove p e q sono primi tra loro.

Per determinare effettivamente il triangolo a lati interi in cui $B = 2A$, i numeri p e q devono anche soddisfare la condizione[22]:

$$A = \arccos\frac{p}{2q};\ 0 < A < 60^\circ.$$

Essendo $\cos 0^\circ = 1$ e $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, la condizione può essere riscritta come $2 > \frac{p}{q} > 1$. I minimi interi p e q soddisfacenti questa condizione sono $p = 3; q = 2$. Da cui, il minimo triangolo intero soddisfacente la condizione $B = 2A$ sarà quello avente lati $a = 4$, $b = 6$ e $c = 5$.

[22] A deve essere minore di 60° in quanto $A + B + C = 3A + C = 180^\circ$.

Possiamo ora passare a risolvere le parti (b) e (c). Qui sarà necessario utilizzare le funzioni trigonometriche per esprimere i valori $\sin 5A$, $\sin 6A$ e $\sin 7A$. Applicazioni successive delle identità coinvolgenti il seno della somma degli angoli porta alle identità:

$$\sin 5A = (2\cos A)^2 \sin A - 3(2\cos A)^2 \sin A + \sin A,$$
$$\sin 6A = \left[(2\cos A)^2 - 1\right] \cdot \left[(2\cos A)^2 - 3\right] 2\cos A \sin A,$$
$$\sin 7A = \left[(2\cos A)^2 - 2\right] \cdot \left[(2\cos A)^2 - 3\right] \cos^2 A \sin A - \sin A,$$

Da cui il calcolo può essere portato avanti esattamente nello stesso modo del caso precedente.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Da cosa nascono? E cosa ci faccio?

Dunque, quando eravamo piccoli abbiamo promesso di non parlarne; siccome una delle cose che ci diverte maggiormente è contraddirci, ne parliamo. Cominciamo con delle definizioni, e vi diciamo subito chi è l'assassino.

Si definisce *funzione generatrice* (ordinaria, ma non stiamo a sottilizzare) della sequenza $\{a_n\}$ la serie *formale*:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \; ; \qquad \textbf{[1]}$$

Due serie di questo tipo si definiscono *uguali* se hanno esattamente la stessa serie di coefficienti; siccome la cosa sembrava troppo semplice, si indica talvolta l'*n*-esimo coefficiente come $a_n = [x^n]f(x)$; quindi la nostra relazione di uguaglianza tra le due serie formali risulta:

$$[x^n]f(x) = [x^n]g(x) \quad \forall n.$$

"Ci sembra sospetto l'accento che avete messo sulla parola *formale*". E avete ragione. Infatti la definizione della formula è *algebrica*, non analitica; abbiamo un insieme (ordinato) di numeri (reali, per adesso: l'espansione ve la fate voi) e a ognuno di questi appiccichiamo un termine x "la cui natura è, dal punto di vista della costruzione, decisamente irrilevante"; virgolettiamo perché queste sono le parole di chi ce le ha spiegate. Tagliando (molto) per i campi, "formale" significa "non preoccupatevi della convergenza": la cosa sembra un controsenso, ma rappresenta la base di tutto il giochino.

Gli aggeggi che otteniamo, li consideriamo tranquillamente sommabili e moltiplicabili; non solo ma postuliamo anche che le operazioni siano commutative e che l'addizione sia distributiva rispetto alla moltiplicazione; siccome stiamo parlando di algebra, dovreste ricordarvi che un oggetto ("struttura algebrica") del genere è noto come *anello*. E qui, a ben vedere, cominciano i guai. Infatti, dovreste ricordare che in un anello alcuni elementi hanno un inverso moltiplicativo, mentre altri (lo zero, tra i numeri) no; sarebbe interessante capire qui come funzionano le cose.

Cominciamo barando, nel senso che sappiamo già come va a finire; del metodo più corretto ci occuperemo dopo. Vi ricorderete la famosa relazione[23]

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \; ; \qquad \textbf{[2]}$$

Ora, siccome abbiamo detto che trattiamo questi oggetti come *formali*, moltiplichiamo il secondo membro per il denominatore del primo, ottenendo:

$$(1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) = 1 \; ;$$

Ossia $(1-x)$ è *l'inverso* della serie all'interno del secondo fattore! Siamo i primi a restare perplessi dal fatto che questo incredibile tagliare per i campi venga definito *formale*, ma non siamo stati noi ad inventare la definizione.

Certo che un metodo un po' più "formale" (nel senso serio del termine) farebbe comodo… Tranquilli, esiste.

[23] Se non ve la ricordate, siete in buona compagnia: Rudy se la dimentica sempre.

Data la nostra $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, supponiamo esista l'inversa $f^{-1} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$; visto quello che abbiamo detto sulla serie e sul fatto che non ci importa poi molto delle x, quello che ci interessa è riuscire ad imporre la condizione $ff^{-1} = 1 + 0x + 0x^2 + \ldots$; ossia, *con l'eccezione del primo, tutti i coefficienti delle x devono valere zero*. Come dicevamo, essendo quindi le x solo dei simboli ausiliari, quello che richiediamo è l'*uguaglianza dei coefficienti di pari grado, ossia*:

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 1, \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0, \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0, \\ \ldots \end{cases}$$

Il che non solo ci permette di dire che *una funzione generatrice ammette inverso se e solo se* $a_0 \neq 0$, ma ci permette anche di calcolare b_0 (dalla prima) e tutti gli altri b_i procedendo attraverso le altre espressioni.

Insomma, contrariamente alla visione *analitica* delle serie, in cui x è una variabile reale o complessa e la serie medesima assume significato solo quando è convergente, qui *non siamo autorizzati* ad effettuare sostituzioni; questa operazione, qui, non ha significato e le varie x servono solo per portare a spasso i termini.

Viene da chiedersi quanto sia possibile applicare questi metodi spensierati, che sin qui abbiamo ritenuto tipici solo delle serie convergenti o finite, a questi oggetti; il bello è che sin quando considerate l'espressione *formale*, potete sempre farlo, anche per le serie infinite; ad esempio, è perfettamente legale fare un ragionamento del genere:

Qual è la funzione generatrice della serie $\{1,-1,1,-1,1,-1,\ldots\}$? Si vede facilmente che è:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots;$$

se sommate questa alla **[2]** ottenete:

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = 2 \cdot \left(1 + x^2 + x^4 + \ldots\right);$$

da questa, ricavate immediatamente che

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots.$$

Ora, qualche temerario potrebbe azzardarsi a far notare che bastava sostituire x^2 a x nella **[2]** per ottenere lo stesso risultato senza calcoli; il bello qui è che questa operazione è perfettamente regolare, nonostante si stia parlando di serie infinite. Senza eccessiva fatica, potete anche stabilire che è:

$$\frac{1}{1-cx} = 1 + cx + c^2 x^2 + c^3 x^3 + \ldots.$$

Ossia la serie $\{1, c, c^2, c^3, \ldots\}$ è generata dalla funzione data. Potenza del formalismo…

Ora, tanto per cambiare, qui "minaccia elezioni".

Se vi ricordate, molto tempo fa avevamo parlato della matematica delle elezioni, arrivando ad una serie di conclusioni piuttosto interessanti; un oggetto del quale avevamo parlato piuttosto poco (anche perché il calcolo del valore era di una noiosità suprema) era l'*Indice di Banzhaf*; ve lo ricordiamo velocemente.

Una *coalizione* è, per definizione, un insieme non vuoto di giocatori; una coalizione viene definita *perdente* se il peso totale dei membri non raggiunge la quota necessaria; altrimenti viene definita *vincente*. Un membro della coalizione è *critico* se il suo spostamento dall'altra parte trasforma una coalizione vincente in perdente. Ora, sia N il numero dei votanti (o *giocatori*, come di dice di solito); indichiamo con B_i il numero delle volte per cui l'*i*-esimo giocatore è critico; la nostra serie di numeri, quindi, è un catalogo di quanto ogni singolo giocatore possa far andare male le cose.

Consideriamo il polinomio:

$$B(x)=\left(1+x^{p_1}\right)\left(1+x^{p_2}\right)\ldots\left(1+x^{p_N}\right); \qquad \textbf{[3]}$$

Se ci pensate un attimo, $\left[x^n\right]B(x)$ è il numero di modi con cui possiamo rappresentare n come somma degli elementi della sequenza $\{p_n\}$, ossia *il numero di coalizioni con peso totale pari a* n. Quindi, $B(x)$ viene ad essere la funzione generatrice per una sequenza $\{c_n\}$ rappresentante il numero di coalizioni possibili aventi un dato peso n. Nello stesso modo, posiamo definire il polinomio $B^{[i]}(x)$, di espressione identica al **[3]** ma nel quale omettiamo l'*i*-esimo termine (la notazione ce la siamo inventata noi); allora, l'espressione

$$B^{[i]}(x)=\frac{B(x)}{\left(1+x^{p_i}\right)}$$

esprime *tutte le coalizioni che non includono l'i-esimo giocatore*; e quindi il numero delle volte in cui un dato giocatore è critico può essere definito da:

$$B_i=\left[x^{q-p_i}\right]B^{[i]}(x)+\ldots+\left[x^{q-1}\right]B^{[i]}(x).$$

Che, anche se non sembra, è un'espressione ragionevolmente semplice. Ora andrebbe introdotto un altro indice (detto di *Shapley-Shubik*, se volete fare ricerche), che analizza le coalizioni sequenziali; siccome però si arriva "solo" ad una funzione generatrice di due variabili (sì, esistono) e la cosa diventa decisamente complicata, ci fermiamo qui e parliamo d'altro.

L'utilità delle funzioni generatrici (e se siete arrivati sin qui vi meritate di conoscerla) è però essenzialmente di semplificare potentemente la vita quando vi ritrovate davanti un'*espressione ricorsiva*; supponiamo, ad esempio, vi abbiano fornito la sequenza definita come:

$$a_{n+1}=2a_n+n \quad (n\geq 0; a_0=1),$$

e vi abbiano chiesto un'espressione generica e non ricorsiva dell'*n*-esimo termine.

Siccome stiamo cercando l'espressione dei vari $a_0, a_1, a_2, \ldots$, indaghiamo il comportamento della funzione espressa da $A(x)=\sum_{j\geq 0}a_j x^j$; quello che dobbiamo cercare di fare è moltiplicare la relazione di ricorrenza che ci hanno fornito, moltiplicare entrambi i membri per x^n, sommare su tutti i valori di n per cui la nostra relazione è valida[24] e quindi esprimere il tutto in funzione di $A(x)$.

Se prendiamo il primo membro, otteniamo:

[24] Da zero a infinito, nel nostro caso.

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots = \frac{A(x) - a_0}{x} = \frac{A(x) - 1}{x}.$$

Similmente, a secondo membro otteniamo l'espressione $2A(x) + \sum_{n \geq 0} nx^n$, e siamo i primi a riconoscere che il secondo termine non ha proprio l'aria simpaticissima. Utilizzando il metodo di "formale tagliata per i campi", però, possiamo dire che:

$$\sum_{n \geq 0} nx^n = \sum_{n \geq 0} x\left(\frac{d}{dx}\right)x^n = x\left(\frac{d}{dx}\right)\sum_{n \geq 0} x^n = x\left(\frac{d}{dx}\right)\frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Dove, come anzidetto, abbiamo bellamente ignorato il fatto che la nostra serie converga o meno. Uguagliando i due membri, otteniamo:

$$\frac{A(x) - 1}{x} = 2A(x) + \frac{x}{(1+x)^2},$$

Ossia

$$A(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2}{(1-x)^2(1-2x)},$$

"…e siamo pronti per farci la birra…" Se vi fermate qui, sì. Ma andiamo avanti. Possiamo espandere in somma di frazioni il secondo membro:

$$\frac{1 - 2x + 2x^2}{(1-x)^2(1-2x)} = \frac{A}{(1-x)^2} + \frac{B}{(1-x)} + \frac{C}{(1-2x)}$$

E risolvere in A, B e C sostituendo in entrambi i membri opportuni valori di x; il risultato finale, che potete verificare, è:

$$A(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2}{(1-x)^2(1-2x)} = \frac{-1}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-2x}$$

Ragionevolmente utile, infatti, il primo termine sappiamo già in che serie espande, e i suoi coefficienti sono $-(n+1)$; il secondo termine è una serie geometrica, e i coefficienti sono esprimibili come $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$; a questo punto, se combiniamo entrambi i termini, otteniamo:

$$a_n = 2^{n+1} - n - 1,$$

che è l'espressione che cercavamo.

"Carino, ma in pratica cosa ci facciamo?" Beh, mi rifiuto di credere che su un aggeggio così folle non si possa costruire qualche problema decente… Qualcuno ha un'idea?.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms