Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 110 – Marzo 2008 - Anno Decimo

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 109 ha diffuso 1666 copie e il 02/03/2008 per Google eravamo in 5'160 pagine.

Se vi capita di passare da S.Francisco, non mancate di visitare la Cattedrale della Grazia. Terminata nel 1960, una delle sue vetrate rappresenta Albert Einstein che guarda verso l'alto, circondato da orbitali elettronici e tracce di particelle elementari. La coda di un razzo, nella parte superiore, sta ad indicare l'impatto della sua opera nell'astronomia e nella cosmologia (la vetrata di fronte rappresenta l'esplorazione spaziale con John Glenn). È riconoscibile, in rosso, parte della Trasformata di Lorentz, mentre in basso a sinistra è rappresentato un atomo di elio stilizzato.

L'opera è stata realizzata da Gabriel Loire ed è stata donata alla chiesa da Clarence Gould, in memoria della moglie Lottie.

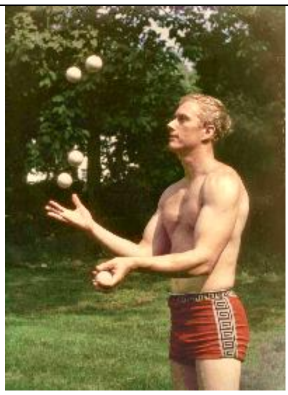
1. Bello e impossibile

Il bello è lo splendore del vero.
(Platone)

Nessun problema è troppo piccolo o troppo banale
se possiamo veramente farci qualcosa.
(Richard Feynman)

In questo articolo daremo i numeri.

Ne daremo parecchi, per cui reggetevi forte.



1 *Ronald L. Graham giocoliere*

L'uomo scarsamente vestito[1] che nella foto fa girare ben cinque palle contemporaneamente è un matematico, ed anche piuttosto bravo. Questa premessa serve per demolire subito un paio di false credenze: ad esempio, che su RM si trovino solo immagini di belle donne; o, peggio ancora, che tutti matematici siano bruttini e poco sportivi. Poco più avanti proveremo a ribadire nuovamente questa ipotesi ormai iconograficamente falsificata, quindi tenete bene a mente questo disclaimer iniziale. Siccome tra i vari sport che Ronald Graham ha sempre praticato c'è il salto sulle molle elastiche oltre alla giocoleria, il nostro eroe si trova in questa pagina anche a testa in giù mentre effettua un doppio salto mortale.

2 *Ronald L. Graham acrobata*

Il bello della matematica[2] è che la si può veramente applicare a qualsiasi cosa, e nel caso di Ron, brillante matematico nonché presidente dell'Associazione Internazionale dei Giocolieri, "far roteare le palle" fa parte dello studio della matematica, e gli ha permesso di produrre parecchie pubblicazioni scientifiche in merito. Ma per quanto divertente questo possa essere, si era detto che avremmo parlato di numeri.

Per ottenere la massima impressione da un numero, bisogna usarne uno grosso, da primato: il numero di Graham è uno di questi, è entrato nel libro dei Guinnes nel 1977 come "il più gran numero mai usato in una dimostrazione matematica". Il problema da risolvere era il seguente: si consideri un ipercubo n-dimensionale e si connettano i vertici due a due per ottenere un grafo completo con 2^n vertici; si colorino i bordi di questo grafo usando solo i colori rosso e bianco; qual è il più piccolo valore di n per il quale ogni possibile colorazione così ottenuta debba necessariamente contenere un grafo completo di un solo colore con 4 vertici sullo stesso piano?

Si tratta di uno dei tanti problemi di Ramsey che Ron ha studiato a lungo, e per il quale cercò di creare un limite superiore ed uno inferiore al valore cercato: il primo è il famigerato *numero di Graham* ed il secondo è sei. Verso la fine degli anni ottanta Martin Gardner ipotizzava che la soluzione del problema potesse essere proprio sei, facendo del massimo di Ron la peggiore approssimazione mai vista. Anche se nell'arco degli anni è stato dimostrato che il minimo è superiore ad undici ed il problema non ha ancora trovato

[1] Se pensate che questo sia un mezzuccio per arruffianarsi, in questo inizio di Marzo 2008, le donne e la loro rituale festa dell'8 del mese, vi sbagliate. È solo che è proprio l'autore del Compleanno di questo mese, ad essere donna [*RdA & PRS*].

[2] Leggasi "la cosa bella della scienza dei numeri" e non "il tipo belloccio che professa la geometria". Va bene, adesso la smettiamo con le note a piè di pagina sessiste [*RdA & PRS*].

una soluzione, il primato persiste e non ha questa grossa importanza stabilire se la dimostrazione fosse o meno rilevante: il numero è piuttosto impressionante, tanto che è stato calcolato che anche trasformando in inchiostro tutta la materia dell'Universo, questo non basterebbe per poterne scrivere tutte le cifre (e dove, poi, se tutta la materia dell'universo è diventata inchiostro?). Per quelli a cui gira la testa ad usare la notazione esponenziale queste pagine saranno terribili, perché dovremo andare ben oltre; il numero di cui parliamo non può essere scritto nemmeno in termini di "dieci alla…" neppure se per ogni cifra dell'esponente si usasse una particella dell'universo di cui sopra.

Forse è meglio procedere per piccoli passi per dare un'idea del valore. Un numero che si riesce più o meno a concepire è Un Miliardo – 10^9 – pari all'ordine di grandezza della popolazione cinese o indiana: e con meno di dieci miliardi siamo ancora in grado di contare tutta la popolazione mondiale. Con tre zeri in più si parla di Bilioni: e questo è l'ordine di grandezza del numero di cifre note di pi greco. Poi vengono i Biliardi, i Trilioni, ogni volta aggiungendo tre zeri al numero per esteso o sommando tre all'esponente della base dieci[3]. Dieci alla ventiquattresima è un Quadrilione, stimato come il numero di connessioni sinaptiche presenti nel cervello umano. Ma forse un numero più grosso di cui tutti hanno sentito parlare (soprattutto i frequentatori di RM) è il googol: uno seguito da cento zeri; sembra che non serva proprio a niente, è anche più piccolo del numero di Shannon, che dovrebbe dare un'indicazione di limite inferiore del numero di possibili partite a scacchi, ed è circa 10^{120}; però è più grande del numero di particelle elementari nell'universo osservabile (stimato tra 10^{79} e 10^{85}). Archimede nell'*Arenario* si era riproposto di calcolare il numero di granelli di sabbia nell'universo (certo, secondo le opinioni del tempo sulle dimensioni dell'universo, e il "tempo" era quello delle guerre puniche), e prima di mettersi all'opera decise di trovare una notazione che gli permettesse di dare un nome a numeri particolarmente grandi, il più grande che riuscì a nominare era uno seguito da $8\cdot10^{16}$ zeri nella moderna notazione[4], anche questo quindi più grande di un googol. Volendo definire il googolplex (10^{googol} cioè uno seguito da un googol di zeri) si rimane senza possibili esempi, eppure un numero che ha, nell'esponente di 10, dieci alla 10^{1000} era già stata usato da Skewes in precedenza in una dimostrazione, ed era nel Guinness dei primati prima della dimostrazione di Ronald, ma perfino questo è ancora un numero minuscolo al confronto con quello di Graham.

Per arrivare a scriverlo ci vuole una notazione particolare, che coinvolge gli operatori di Knuth; il simbolo è quello di una freccia verso l'alto: una sola è il semplice elevamento a potenza, due fanno l'effetto di iterazione dell'esponente, per esempio $a\uparrow\uparrow b$ è a elevato ad a elevato ad a… b volte. Senza dimenticare che l'elevamento a potenza si fa da destra verso sinistra, si ottengono numeri già piuttosto spaventosi con poche cifre, $3\uparrow\uparrow 3=3^{3^3}$

---

[3] Sembra incredibile, ma solo sul modo di chiamare i numeri si potrebbe scrivere un libro intero. Le denominazioni che abbiamo qui riportate non vengono da autorevoli fonti matematiche (anche perché le autorevoli fonti matematiche, normalmente di lingua inglese, ancora non si sono messe d'accordo tra le due sponde d'Atlantico sul significato della parola "billion"), ma dalla direttiva CEE/CEEA/CE N. 55 del 21/11/94, che è quella che ha definitivamente sancito l'ingresso della parola "bilione" nella lingua italiana. Ha anche stabilito i prefissi e i nomi riportati nel testo per le potenze 10^{12} (bilione, tera), 10^{15} (biliardo, peta) e 10^{18} (trilione, esa). E ha stabilito anche un sacco di altre cose che non riportiamo, visto che è una direttiva di 359 pagine. Se volete una regola generale, allora considerate che il prefisso (bi-, tri-, quadri- ecc.) indica la potenza del milione; sostituendo -ardo a -one si moltiplica per mille (10^3), perciò il bilione è $(10^6)^2=10^{12}$, il biliardo è $10^3 x 10^{12}=10^{15}$ ecc. (Grazie, Wikipedia)

[4] Archimede aveva a disposizione i numeri da 1 a 10.000, che all'epoca si indicava con il bellissimo termine di "miriade". Definiva questi come numeri del "primo ordine", e passava a definire i numeri del "secondo ordine" come quelli che cominciavano con una miriade di miriadi. Successivamente, definiva tutti i numeri di ordine inferiore a una miriade di miriadi come del "primo periodo"; quindi, il secondo periodo cominciava con il numero (10^8)^(10^8); i periodi continuavano sino al miriade-di-miriade-esimo periodo, e qui si fermava la notazione; quindi, il più alto numero esprimibile era (bimiriade=miriade di miriadi) una bimiriade di miriade di miriadi di unità del bimiriadesimo ordine del bimiriadesimo periodo; suppergiù, ottantamila milioni di milioni di cifre. Peccato per Archimede che dopo aver fatto tutta la fatica per poter nominare numeri tanto grossi, alla fine il suo universo potesse contenere solo 10^{63} granelli di sabbia, una miseria… nemmeno un googol.

ha 13 cifre, ma $3\uparrow\uparrow 4$ richiederebbe terabytes per essere scritto. Forse per Knuth era chiaro, ma a noi comincia a girare la testa quando cerchiamo di considerare che ogni "operatore freccia" itera il successivo operatore freccia, per cui si tratta di una forma di ricorsione. Così vi scriviamo qui vicino il numero di Graham in una notazione di Knuth con molte frecce e parecchie parentesi per il numero di iterazioni, ma forse abbiamo già reso l'idea: si tratta di un numero inconcepibile.

$$G = \left.\begin{matrix} 3\underbrace{\uparrow \ldots \uparrow}3 \\ \underbrace{\vdots} \\ 3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 \end{matrix}\right\} \text{64 layers}$$

3 *Il numero di Graham*

Anche se a questo punto sembra tutto un po' confuso, gli studi di Ramsey coinvolgono principalmente l'ordine: in pratica l'opinione diffusa è che il completo disordine sia impossibile e che, per insiemi sufficientemente grandi, alcune proprietà "ordinate" debbano essere valide. Per esempio, ad una festa quanti invitati dobbiamo avere come minimo affinché almeno tre di loro si conoscano o almeno tre di loro non si conoscano? Ne bastano sei, e forse non è neppure difficile da dimostrare; ma quanti invitati serviranno invece affinché la proprietà sia valida per il numero quattro? In generale i problemi di Ramsey partono da una complessa struttura matematica – come un grafo completo – e la scompongono in qualche modo, per poi chiedersi quando grande deve essere la struttura originaria affinché ogni scomposizione abbia una determinata proprietà interessante.

Prendiamo un altro esempio, geometrico per alleviare un po' la tensione numerica: supponete di avere alcuni punti sul piano: quanti devono essere per assicurare la possibilità che quattro di essi possano essere uniti per formare un quadrilatero convesso? Ne bastano cinque. Se invece si vuole un pentagono convesso ne occorrono nove: la legge (molto probabilmente), è che per essere sicuri di poter costruire un n-agono convesso occorrono $2^{n-2} + 1$ punti; il nome di questo problema è "problema del lieto fine". Un nome parecchio originale per un'ipotesi matematica, ma forse perché originale è l'inventore del nome. Fatto sta che per tradizione è un problema che è stato trattato da "coppie" matematiche: il quesito fu proposto per la prima volta da Esther Klein, era il 1934 a Budapest, durante una delle riunioni del gruppo di giovani studenti ebrei ed ungheresi che si trovavano di nascosto dall'ordine costituito per parlare del loro argomento preferito: la matematica. György Szekeres, più che altro per impressionare la giovane Klein, riuscì a dare la prima massimizzazione del risultato per l'esagono, ed i due convolarono a nozze poco dopo, per passare la vita a sviluppare teorie matematiche insieme; ecco il motivo del "lieto fine".

4 *Fan Chung e Ron Graham*

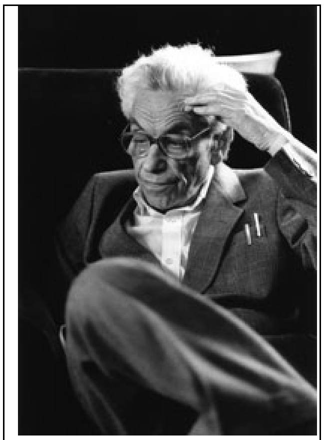
Ma si diceva "molto probabilmente", perché ad una dimostrazione definitiva del risultato generale non si è mai arrivati, ed il numero dei punti necessari per ottenere un esagono convesso era stato dimostrato da Szekeres inferiore a 71, ben lontano dal 17 teorizzato; fu di un'altra coppia il merito di migliorare il risultato, più di sessant'anni dopo: e non dovrebbe stupire il fatto che ritorni il nome di Ron Graham insieme a quello di Fan Chung, sua moglie. I due si trovavano nel '97 in volo per la Nuova Zelanda e per non annoiarsi affrontarono il problema e riuscirono a migliorare il valore di un punto; nel giro di un anno la massimizzazione era di 37 punti: e si spera che, tra una coppia matematica e l'altra, prima o poi si raggiungerà il previsto 17.

Fan Chung[5] è senz'altro uno degli esempi migliori di donne di successo e matematiche che si possa trovare: già brillante in Taiwan, ancora studentessa impara a collaborare con i colleghi per ottenere il massimo dai suoi risultati, e al suo arrivo negli Stati Uniti è la

[5] Molto di quanto si trova in questo articolo è stato estratto da sito di Fan: http://www.math.ucsd.edu/~fan/

prima agli esami di qualificazione. Attira subito l'attenzione dell'università e viene indirizzata verso i problemi di Ramsey. Da lì ad incontrare Graham (che sarà il suo secondo marito), e diventare una dei più grandi esperti di Teoria dei Grafi, nonché mamma ed atleta, ci passa pochissimo. Ha scritto più di 240 articoli di matematica ed almeno tre libri con circa 120 coautori. Il suo principale coautore, almeno negli ultimi tempi, è naturalmente Ron, che a sua volta ha scritto più di 300 articoli e cinque libri con centinaia di altri coautori: entrambi hanno passato quarant'anni a fare matematica – almeno trenta insieme – e la comunità matematica ne ha senz'altro tratto giovamento.

A quanto pare la matematica, quella dei numeri spesso detti "freddi" sa anche essere romantica: lo sapeva bene il grande amico dei Graham, che l'amore l'aveva trovato soprattutto per i numeri.


5 *Paul Erdös*

Paul Erdös[6] era nato il 26 marzo 1913 a Budapest, ed era uno dei giovani "cospiratori" ebrei e ungheresi del '34. Anzi, era proprio quello che aveva dato il nome al "problema del lieto fine", ed il fatto che il suo nome compaia in un pezzo che tratta di numeri, d'amicizia e di collaborazione non è per niente un caso: il numero di coautori di Paul è esattamente 504, e il numero di articoli e libri da lui pubblicati supera i millecinquecento (1500 articoli non banali di matematica, più centinaia di lettere e corrispondenza con colleghi in cui parlava solo di matematica). Paul Erdös non è solo un matematico: è una leggenda. A vent'anni aveva già dimostrato in maniera estremamente elegante un teorema fondamentale di teoria dei numeri (esiste sempre un numero primo tra un intero e il suo doppio).

Da ragazzino era proprio "uno strano", cresciuto sotto l'ala della madre, che per molti motivi era stata fin dall'inizio molto protettiva nei suoi confronti. Ne aveva certo buone ragioni: pochi giorni dopo la nascita di Paul le sue altre due figlie erano morte di scarlattina e allo scoppio della prima guerra mondiale il marito era partito per la guerra; fatto prigioniero in Russia (Paul aveva appena un anno) di lui non si seppe più niente finché non tornò dalla Siberia nel 1920; infine gli Erdös – il cui nome originario era Engländer – erano ebrei, e l'Ungheria non fu certo patria facile in quegli anni per gli ebrei[7]. In ogni caso da ragazzino fu educato principalmente a casa leggendo libri di ogni tipo: soprattutto di storia e filosofia, ma anche matematica, visto che entrambi i genitori erano insegnanti di quella disciplina: e quando il padre ritornò dalla Siberia gli insegnò l'inglese che aveva imparato nei lunghi anni di prigionia. Non avendo mai avuto occasione di ascoltarlo da un madrelingua, però, la pronuncia che poi Paul si portò dietro per il resto dei suoi giorni era molto particolare.

Fino agli anni trenta il giovane prodigio era riuscito a rimanere a Budapest e a farsi ammettere all'università per merito, nonostante le restrizioni all'educazione per i giovani ebrei, e proprio in quegli anni cominciò a frequentare i giovani matematici come Szekeres e Klein, e dovendosi nascondere dall'oppressione antisemita, coniò il linguaggio per il quale diventò poi famoso. Erdös chiamava i bambini "epsilon", le donne "capi" e gli uomini "schiavi"; gli Stati Uniti erano "Sam" e la Russia "Joe"; dare conferenze era "predicare", Dio era il "Supremo Fascista" (SF) e la sua frase di apertura per ogni discorso era "apri la tua mente". I giovani si riunivano sotto una statua che era chiamata

[6] Il matematico che trattiamo questo mese è stato celebrato in talmente tanti modi che di certo non ha bisogno anche del nostro contributo. Parlare di lui sarà per noi una specie di festa particolare, un modo per celebrare i "cinque anni di compleanni" di RM. Il libro che contiene la maggior parte delle informazioni che trovate nell'articolo è "L'uomo che amava solo i numeri", Paul Hoffman, Mondadori.

[7] Di questo periodo storico in Ungheria abbiamo già parlato in altri compleanni, come per esempio in quello di von Neumann, RM107.

"Anonimo", e quindi erano chiamati il "gruppo dell'Anonimo", e da lì i discorsi sulla politica lasciavano presto il passo a congetture e teoremi.

Il 1934, l'anno della prima soluzione del "problema del lieto fine" Erdös aveva colto la possibilità di trasferirsi a Manchester per un post-dottorato, per sfuggire alla difficile situazione in patria. In Inghilterra conobbe Ulam e Hardy[8], e la sua rete di conoscenze cominciò ad espandersi, il numero di matematici con cui collaborava era già superiore a quello che alcuni raggiungono in una vita. Nei primi tempi cercava di tornare in Ungheria a visitare i genitori almeno tre volte l'anno, ma dal '38 in poi gli fu impossibile; poi, con la guerra, non poté nemmeno più restare in contatto epistolare. Nel 1945 riuscì finalmente a riavere notizie dei suoi, e non erano buone: il padre morto ormai da tre anni, e uniche sopravvissute in famiglia la madre e la cugina. Dovette attendere ancora tre anni per poter riabbracciare la madre, ma dopo questa prolungata separazione prese a portarla sempre con sé nei suoi viaggi. Perché Paul era uno zingaro, e di certo non stava mai in un posto troppo a lungo.

Quello che amava di più al mondo, dopo sua madre, era la matematica, i numeri, e i bambini – gli "epsilon". Era continuamente alla ricerca di nuove idee ed ispirazioni, e ne forniva in continuazione a tutti coloro che con lui volevano collaborare: era noto per sottoporre problemi e dimostrazioni che andavano proprio al limite delle capacità dell'interlocutore. Ma non tutte le dimostrazioni e le soluzioni erano accettabili per Erdös: per lui dovevano essere non solo giuste, ma anche elementari, belle, di quella bellezza che è resa solo dall'evidenza. Negli anni aveva sviluppato una sua teoria secondo cui Dio aveva un Libro nel quale erano scritte tutte le dimostrazioni eleganti e perfette di tutti i teoremi; un libro che non poteva mai essere conosciuto totalmente. Quando un lavoro di un collega era particolarmente bello usava dire "viene direttamente dal Libro!"[9].

Per lui tutto quello che non era matematica era un'inutile perdita di tempo: ma ciò non significa che non fosse un uomo di cultura e che non potesse stupire gli astanti con le sue conoscenze storiche e la sua conoscenza in molteplici altri campi. Aveva un particolare senso dell'umorismo, che accoppiato con il suo strano modo di muoversi e comportarsi ne faceva un compagno spassoso ad ogni tipo di evento e un divertente ed entusiasmante lettore. Soprattutto nei primi anni di carriera era piuttosto squattrinato; il denaro non gli interessava: non appena ne aveva (e con il sopraggiungere dei vari premi ne ottenne anche parecchio) ne usava la maggior parte per istituire nuovi premi per la soluzione di questo o quel problema.

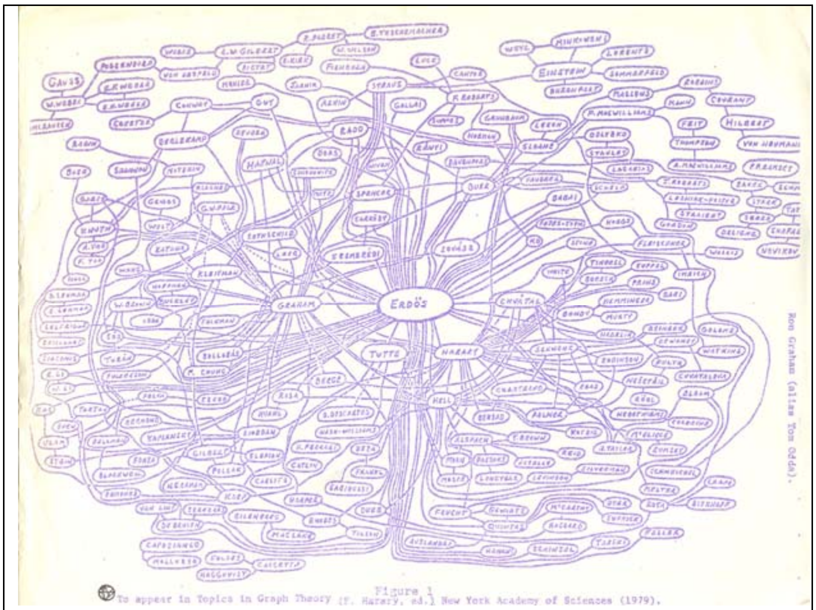
Il dopoguerra in America era stato piuttosto difficile per Paul, dato che "Sam" era in piena isteria anticomunista e lui era poco cauto. Sembra che per errore avesse passeggiato con un gruppo di amici matematici nelle vicinanze di un trasmettitore militare: la polizia li aveva fermati e, sentendoli parlare, aveva preso il loro linguaggio (stavano dimostrando qualche teorema) per una specie di codice segreto e loro per spie. L'incidente era stato chiuso come malinteso, ma questo, più il fatto che lui non negasse di voler tornare in Ungheria (paese decisamente troppo rosso per i gusti americani), che tenesse una fitta corrispondenza con matematici in ogni angolo del mondo (tutte lettere che cominciavano più o meno con "Caro amico, sia n un numero intero…"), che anche durante il colloquio per l'ammissione a Los Alamos avesse dato le "risposte sbagliate", fecero sì che con l'avvento dell'era McCarty, Erdös non fosse più ammesso negli Stati Uniti al suo ritorno da una conferenza in Europa, nel '54.

Passò gli anni successivi in peregrinazione – anche se era stato accolto in Israele – e poté tornare solo negli anni sessanta grazie alle petizioni firmate di decine di scienziati e colleghi. Nel frattempo era abituato ad avere come solo possedimento un paio di valigie

[8] Protagonista di "Stanlio e Ollio", RM049.

[9] E forse Wiles fu un po' dispiaciuto del fatto che, a proposito della sua dimostrazione dell'ultimo Teorema di Fermat, Paul abbia osservato dubbioso: "Questa non viene dal Libro…"

semivuote, una con alcuni abiti e l'altra con carte e appunti. Arrivava alle porte di un qualche collega senza preavviso, con la classica frase "Sei pronto ad aprire la mente?" e si installava in casa per settimane, finché non sentiva la necessità di ripartire.



6 *Il grafo di collaborazione con al centro Erdös*[10]

Tra le tante porte a cui bussava c'era quella dei Graham.

Con l'andare degli anni Ron organizzò una vera e propria stanza dedicata ad Erdös nella quale raccoglieva i suoi appunti e libri, tutto il materiale che potesse servire. Ronald si occupò a lungo anche della situazione finanziaria di Paul: una volta dichiarò che quasi tutti gli assegni dell'amico erano firmati da lui, e che se mai la banca avesse ricevuto un assegno firmato dal vero Erdös probabilmente non l'avrebbe accettato.

I Graham si adoperarono anche per raccoglierne e distribuirne il materiale dopo la sua morte, nel '97: per esempio molti dei problemi da lui proposti sulla teoria dei grafi sono esposti in un testo pubblicato da loro "*Erdös on graphs*", e di sicuro i grafi sono collegati a quest'uomo quanto i numeri. Un esempio è il grafo di collaborazione, una specie di gioco tra i matematici e parte della teoria dei "gradi di separazione": considerando una pubblicazione di articolo su una rivista accreditata come base per il collegamento tra due matematici, il *numero di Erdös* indica la distanza di una data persona dal matematico ungherese: Erdös ha numero di Erdös zero, e chi ha collaborato con lui direttamente (come Graham, Chung, e altri 502) ha numero di Erdös 1. Chi ha scritto insieme ad uno scienziato con numero 1 ha dunque numero di Erdös pari a 2. Vincitori di premi Wolf o Nobel e medaglie Fields sembrano essere i detentori di numeri di Erdös particolarmente piccoli, non a caso[11].

Tantissimi tra quelli con numero di Erdös 1 erano gli amici ungheresi[12] con cui continuò a lavorare per tutta la vita: Turán fu uno di loro, e così sua moglie Vera T. Sòs – con loro Paul pubblicò articoli di teoria statistica dei gruppi – Bollobás, Szemerédi e Lovász – calcolo combinatorio – e la lista è talmente lunga da non poter essere esaurita qui anche se volessimo parlare solo dei compatrioti; ci rimangono le curiosità, come Frankl, che (incredibile ma vero) è anche un giocoliere professionista.

---

[10] Questo grafo e molte informazioni qui riportate vengono dal sito www.oakland.edu/enp/ "The Erdös number Project". Se avete pubblicato qualcosa in campo matematico potete calcolare il vostro numero di Erdös seguendo il link: www.ams.org/mathscinet/collaborationDistance.html.

[11] Avere un basso Numero di Erdös è considerato prestigioso, ma dal punto di vista della Teoria delle Reti è quasi più interessante scoprire quanto alto possa essere tale numero. Al momento, sembra che non si conoscano matematici con Numero di Erdös superiore a 7.

[12] A quei tempi giravano parecchie barzellette sui geni matematici ungheresi, proprio perché il loro numero sembrava enorme: la migliore che ci viene in mente è quella che risponde alla domanda "ma tu ci credi a quell'ipotesi secondo cui degli alieni dall'intelligenza superiore siano in mezzo a noi?" con "Mmm, per non diffondere il panico qui ci facciamo chiamare *ungheresi*".

Il "numero di Erdös" non è l'unica cosa che ha preso il nome dall'itinerante matematico ungherese: congetture, problemi, teoremi, costanti, grafi, disuguaglianze, e quasi tutti dai nomi composti Qualcuno-Erdös. Forse l'unico matematico che l'ha superato nel dare nomi ad equazioni e congetture è forse Eulero[13], ma il confronto è quasi impossibile.

7 Ronald Graham, sua moglie Fan Chung e Paul Erdös, 1986

Di Erdös si sono scritti libri e storie, e non bastano poche pagine in questa rivista a rendere giustizia a quella che fu una delle menti matematiche più geniali del secolo scorso.

Molti matematici (tra cui Hardy) erano convinti che le grandi scoperte originali potessero essere fatte solo in giovane età (non per niente Paul adorava gli *epsilon*), lui superò gli ottant'anni ancora in pieno possesso delle sue facoltà, e non smise mai di camminare a lunghe falcate mentre agitava le braccia pensando a qualche teorema (per questo aveva una certa tendenza e perdersi e gli amici riuscirono ad evitare che prendesse la patente), di stimolare altre menti e avere intuizioni originali. La sua insofferenza era soprattutto per tutte le costrizioni che limitavano la libertà, sua e degli altri. Dio era Supremo Fascista perché non permetteva agli uomini di leggere "il Libro", e perché dava loro poco tempo per tutto quello che c'era da scoprire.

Prendeva anfetamine per tenersi sveglio e poter aggiungere ore di lavoro alle sue giornate, beveva caffé come fosse acqua[14] e correva in soccorso a chiunque gli sembrava essere in difficoltà. Cresceva giovani menti nell'amore dei numeri, per esempio una volta venne a sapere che un promettente ragazzo non poteva permettersi gli studi: lo finanziò con un migliaio di dollari, dicendo che si trattava di un prestito; quando il giovane divenne un brillante professore e fu in grado di ripagarlo, si sentì rispondere che poteva usare la cifra nello stesso modo, per finanziare un'altra promessa. Da questo punto di vista forse non ha lasciato figli, ma dal punto di vista matematico ha una tale quantità di eredi che è veramente impossibile contare.

Combatteva giorno per giorno la sua sfida contro il tempo e contro lo SF, e quando parlava di "andarsene", non intendeva uscire dalla stanza, così come per lui "morire" significava smettere di fare matematica: in questo senso Erdös non morì mai, semplicemente se ne andò nel settembre del 1997. Per cui non dovrebbe stupire la frase che gli viene attribuita:

> *Mia madre diceva "Nemmeno tu, Paul, puoi essere in due posti allo stesso tempo". Forse presto sarò sollevato da questo svantaggio. Forse, quando me ne sarò andato, sarò capace di trovarmi in molti posti allo stesso tempo. Forse allora sarò in grado di collaborare con Archimede ed Euclide.*

E ci piace credere che sia proprio quello che sta facendo.

[13] Ne abbiamo parlato in RM051, "Di Minuscole Forme".

[14] E adesso provate ad indovinare chi sia l'autore di una delle citazioni preferite del GC: "Un matematico è una macchina per trasformare il caffé in teoremi", o almeno chi l'ha messa in pratica più di chiunque altro.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Siamo pieni di monetine!			
Peggio di Doc			

2.1 Siamo pieni di monetine!

La prima domanda è: "Quanto tempo ci mettete a capire che questo problema l'abbiamo preso dagli americani?"

Avete messo a disposizione dei Validi Assistenti una scorta sostanzialmente infinita di monete da 1, 5, 10, 25, 50 e 100 centesimi (capito, adesso?). L'emozionante gioco che i Nostri devono giocare consiste nel mettere una moneta alla volta in una ciotola, con lo scopo di raggiungere *esattamente* la cifra di 678 centesimi; è vietato superare la cifra indicata. Vince il giocatore che mette l'ultima moneta, raggiungendo il valore indicato.

Chi vince?

L'ultima domanda, alla quale non abbiamo la risposta (non l'abbiamo neanche cercata… In questo momento siamo piuttosto presi, è già da festeggiare che si riesca a mettere insieme un numero al mese) è: "Come vanno 'cucinati' i numeri di cui sopra per ottenere un problema simile in Euro?

Caso mai vi interessasse sapere come i due Validi Assistenti hanno risolto il gioco, si sono accordati su un "…ma cosa ci importa di vincere? Dividiamoci la scorta sostanzialmente infinita e via andare…"

2.2 Peggio di Doc

Ci riferiamo alla simpatica abitudine del Nostro di parlare, oltre che con la voce, anche con le mani; a quanto pare, abbiamo trovato di peggio. Il guaio è che trattasi della madre di Rudy.

La summenzionata signora, durante il pranzo di Natale, al momento degli aperitivi si è infervorata nella discussione causando la sottomissione alla forza di gravità di alcuni *tumbler* (sarebbero i bicchieri cilindrici stretti dove si servono gli aperitivi leggeri e le bevande analcoliche); la cosa non era molto grave, visto che Rudy non apprezza particolarmente questa tipologia di bicchieri; siccome però le sue *flûte* da spumante preferite sono fragilissime (un "servizio da cinque", ormai. Ma non divaghiamo), per il fine pasto optava per dei bicchieri metallici[15].

Per comprarne di nuovi (tumbler), abbiamo aspettato la fine delle feste (così sono al sicuro almeno fino all'anno prossimo), solo che Rudy adesso ha un dubbio: vorrebbe calcolarne il peso, visto che gli sembrano più leggeri degli altri: probabilmente il cristallo è "un po' meno cristallo" di quelli vecchi.

[15] Non vorremmo pensaste a dei boccali ricavati da carrarmati dismessi: sono degli snelli calici con l'interno dorato (per motivi enologici). Infatti, anche il tavolo è di vetro.

Logicamente, è senza bilancia. Gli unici dati che ha a disposizione sono che lo spessore del vetro è uniforme, che il raggio del bicchiere è di 4 centimetri[16] e che l'altezza è di 12; non solo, ma Rudy si è accorto di uno strano fenomeno.

Infatti, quando aggiungete acqua nel bicchiere il baricentro prima si abbassa, poi comincia a salire[17]; quando raggiunge il suo punto più basso, l'acqua nel bicchiere è al livello 4.5 centimetri.

A questo punto, grazie a un colpo di genio degno di un Quick & Dirty e a qualche calcolo, Rudy è in grado di calcolare il peso del bicchiere.

3. Bungee Jumpers

Provare che, se n è un intero positivo, il numero

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2},$$

posto in forma decimale, è periodico con antiperiodo[18].

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Se ci fosse un premio per il masochismo noi di RM ne vinceremmo uno ogni mese. Oltre ad avere una decina di attività non lavorative in parallelo, di cui non si può parlare perché non vogliamo rovinare la sorpresa (e quindi di cui non ci si può nemmeno lamentare in questa sede), ed un lavoro sacrosanto per uno (di quello sì che ci lamentiamo, ma non in questa sede), ci tocca anche scegliere le vostre soluzioni da pubblicare. Ebbene, per questo l'umile redattore già dovrebbe avere un certo diritto al turpiloquio, e soprattutto in un febbraio lunghissimo come quello passato in cui la fantasia di lettori vecchi e nuovi si è scatenata.

Ma dopotutto c'è stato il carnevale, e noi – per quanto spesso mascherati da duri e rudi matematici – siamo in realtà molto buoni. Faremo una scelta, perché questo mese è arrivato veramente di tutto, ma speriamo di aver ricordato tutti i vostri nomi.

Prima di procedere, ancora una notizia segnalata da ***Cid***:

> ...dovresti sapere che sono tante le notizie assurde che circolano per la rete: l'invenzione del mantello dell'invisibilità, la scoperta del moto perpetuo, l'invenzione della macchina del tempo, ecc... Ebbene, senti questa in-credibile notizia:
>
> Alcuni scienziati hanno scoperto l'esistenza di un uccello che costruisce il suo nido sottoterra e che per facilitare la digestione ha la curiosa abitudine di mangiare i sassi che si trovano ad un metro di profondità. A questo buffo animale che mangia tutti i sassi che si trovano ad un metro di profondità è stato dato il nome di "Uccello mangiasassi".
>
> Che te ne pare di questa in-credibile notizia?

---

[16] OK, qui stiamo già litigando sulla scarsa fisicità di questo bicchiere, per evitare ulteriori polemiche diciamo che il diametro è quello interno.

[17] Non stiamo a dirvi come Rudy calcola il baricentro; ci limitiamo a consigliarvi di fare l'esperimento in presenza di un supporto morbido e assorbente; aiuta anche l'assenza del coinquilino comproprietario del bicchiere.

[18] Quando si ha un numero periodico, come ad esempio 7,890121212121212.., si dice *periodo* il gruppo di cifre che si ripete (nel nostro caso il periodo è 12), mentre si dice *antiperiodo* il gruppo di cifre che sta tra la virgola e il periodo (nel nostro esempio, l'antiperiodo è 890).

Non abbiamo avuto tempo di verificare, ma la cosa potrebbe avere delle conseguenze.

Sappiate inoltre che ***Frank Sinapsi*** ha attivato un "torrent" con tutti gli ultimi numeri di RM, e sta procedendo a salvarli tutti. Il torrent si trova a questo indirizzo: www.tntvillage.org/index.php?act=showrelease&id=114363

Il mese di marzo porta compleanni illustri ed un po' di primavera, per cui state all'erta!

4.1 [108]

4.1.1 Il contratto di SKY

Ebbene, dopo aver lanciato l'urlo d'allarme per la mancata soluzione del problema di contratti del Capo, ecco che si presentano con soluzioni ***Val316***, ***Sand*** e ***FrancoZ***. ***Val316*** ci manda proprio tutte le soluzioni del numero scorso il giorno dopo l'uscita di RM109 – non molto fortunato con i tempi...

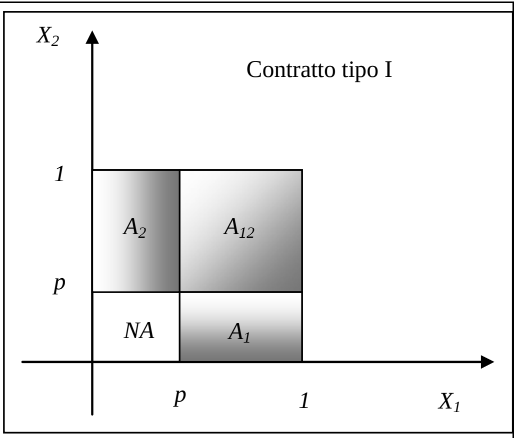
> Dal punto di vista del provider televisivo, che offre 2 canali, lo spazio dei clienti è rappresentabile da una coppia (X_1,X_2) di variabili aleatorie continue uniformemente distribuite nell'intervallo $[0,1]$. Supponiamo che il prezzo di ogni canale sia normalizzato con l'utilità del cliente in modo che prezzo 1 corrisponda al massimo che un qualsiasi cliente sarebbe disposto a spendere.
>
> Allora nel caso del contratto di tipo I, in cui i canali vengono venduti separatamente e indipendentemente, se p_1 e p_2 sono i relativi prezzi possiamo scrivere in formule la funzione guadagno atteso del provider

$$\begin{cases} G_I(X_1,p_1;X_2,p_2) = p_1\mathrm{P}(X_1 \geq p1, X_2 < p_2) + p_2\mathrm{P}(X_1 < p1, X_2 \geq p_2) + (p_1+p_2)\mathrm{P}(X_1 \geq p1, X_2 \geq p_2) \\ p_1, p_2 \leq 1 \end{cases}$$

> Mentre in un contratto di tipo II, il provider vende ad un prezzo p entrambi i canali, di modo che un cliente o accetta di pagare quel prezzo oppure non se ne fà niente.
>
> Quindi il guadagno atteso

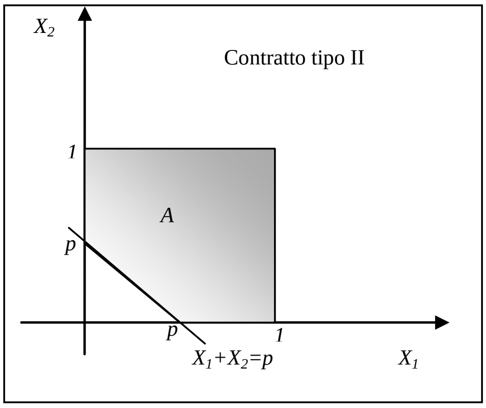
$$\begin{cases} G_{II}(X_1,X_2,p) = p\mathrm{P}(X_1+X_2 \geq p) \\ p \leq 2 \end{cases}$$

> In maniera più intuitiva possiamo dare del tutto un'interpretazione geometrica.
>
> Lo spazio di probabilità dei clienti è in questo riconducibile ad un quadrato di lato unitario rispetto ad un sistema di coordinate dato dalle due v.a. X_i. Ogni punto del quadrato rappresenta una tipologia di cliente con associate le sue utilità/valore rispetto ai due canali.



1 *Fig 1 di **Val316**.*

> Una generica politica commerciale di tipo I seziona lo spazio in quattro aree (vedi Fig.1). Se un cliente rientra nella sezione A_1 oppure nella sezione A_2 allora sarà disposto a sottoscrivere soltanto un canale, due se invece il cliente si trova ad essere contenuto nella sezione A_{12}. C'è la quarta sezione NA i cui clienti ritengono troppo alti i prezzi dei due canali e quindi non sottoscrivono nessun abbonamento.



2 *Fig 2 di* ***Val316***.

Di converso per un contratto di tipo II lo spazio di probabilità è suddiviso in solo due regioni (Fig.2) tale per cui solo i clienti che rientrano nel sottoinsieme *A* alla fine di decideranno di comperare i due canali in offerta.

Per inciso se $p_1(x)$ e $p_2(x)$ sono le funzioni di densità di probabilità delle v.a. X1 e X2 allora la densità $p_+(y)$ della v.a Y=X1+X2 è data dalla convoluzione di $p_1(x)$ e $p_2(x)$ cioè

$$p_+(y)=\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)p_2(y-x)dx$$

Nel nostro caso, essendo $p_i(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1]\\ 0 & x\notin[0,1]\end{cases}$, $p_+(y)=\begin{cases}y & y\in[0,1]\\ 2-y & y\in[1,2]\\ 0 & y\notin[0,2]\end{cases}$

Il surplus dei clienti.

Dalla definizione mi sembra che il surplus possa essere una grandezza additiva "pesata" dalla densità di probabilità. Per cui:

1)Contratto di tipo I

In una regione infinitesimale centrata in (x_1,x_2), se sono in A_1 c'è surplus solo per il secondo contratto

$$dS^{(A_1)}=(x_2-p_2)dx_1dx_2\,,$$

se sono in A_2 c'è surplus solo per il primo

$$dS^{(A_2)}=(x_1-p_1)dx_1dx_2$$

ed infine se sono in A_{12}

$$dS^{(A_{12})}=(x_1+x_2-p_1-p_2)dx_1dx_2\,.$$

Il surplus differenziale globale allora è

$$dS=dS^{A_1}+dS^{A_2}+dS^{A_{12}}$$

E il surplus globale infine:

$$\begin{aligned}S_I(p_1,p_2)= & \int_0^{p_1}\left(\int_{p_2}^{1}(x_2-p_2)dx_2\right)dx_1+\\ & \int_0^{p_2}\left(\int_{p_1}^{1}(x_1-p_1)dx_1\right)dx_2+\\ & \int_{p_1}^{1}\int_{p_2}^{1}(x_1+x_2-p_1-p_2)dx_1dx_2\end{aligned}$$

2) Contratto di tipo II

Ho una densità di probabilità, quindi la formula è più intuitiva:

$$S_{II}(p) = \int_p^2 (y-p)p_+(y)dy$$

Ora possiamo applicare le formule precedenti ai quesiti proposti nel problema. Con quale politica dei prezzi il gestore massimizza il suo guadagno atteso.

I)

$$G_I = p_1p_2(1-p_2) + p_1p_2(1-p_1) + (p_1+p_2)(1-p_1)(1-p_2)$$

$$G_I = p_1 + p_2 - p_1^2 - p_2^2$$

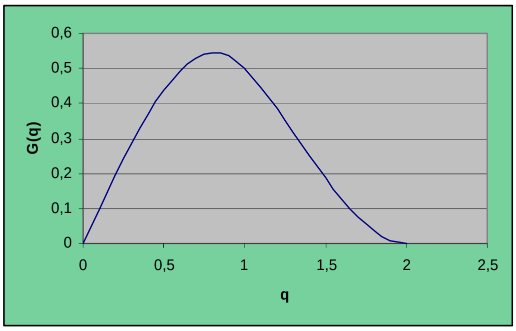
$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_I}{\partial p_1} = 1 - 2p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial G_I}{\partial p_2} = 1 - 2p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = \dfrac{1}{2} \\ p_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

per cui $G_{I,MAX} = \dfrac{1}{2}$

II)

$$G_{II} = \begin{cases} p\left(1 - \dfrac{p^2}{2}\right) & p \in [0,1] \\ p\dfrac{(2-p)^2}{2} & p \in [1,2] \end{cases}$$

Nella figura seguente ho tracciato il relativo grafico.



3 *Fig 3 di **Val316**.*

Lo studio della funzione, che ometto, dà che

$$G_{II,MAX} \approx 0{,}54 \text{ per } p_{MAX} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}77$$

Cioè più o meno in questo contratto il cliente paga di meno e il provider guadagna di più rispetto al contratto a offerte indipendenti…

Il surplus dei clienti.

Nel caso I, essendo $p_1=p_2=1/2$, svolgendo i tre integrali e sommando, otteniamo

$$S_I(p,p) = (1-p)^2 \Rightarrow S_I(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

Nel caso II, per $p<1$,

$$\begin{aligned} S_{II}(p) &= \int_p^1 (y-p)ydy + \int_1^2 (y-p)(2-y)dy \\ &= \frac{1}{6}p^3 - p + 1 \end{aligned}$$

Quindi

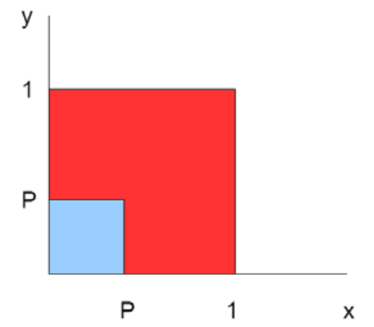
$$S_{II}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\approx 0{,}31$$

… e i clienti sono anche più contenti…

Anche ***Sand*** ha fatto un bel po' di esercizio nel colorare grafici:

Prima domanda: *supponiamo i due canali siano prezzati indipendentemente; quale dovrebbe essere il prezzo di ogni canale per massimizzare i guadagni, e quanto ci si aspetta di guadagnare in media per ogni cliente?*

La premessa è l'ipotesi che il "valore" per il cliente di un canale sia una variabile distribuita uniformemente tra 0 e 1. Se i canali sono 2, chiamate x e y le due variabili (ovviamente indipendenti), ogni cliente è rappresentato da un punto all'interno del quadrato sul piano xy delimitato dalle disequazioni $0<x<1$ e $0<y<1$.

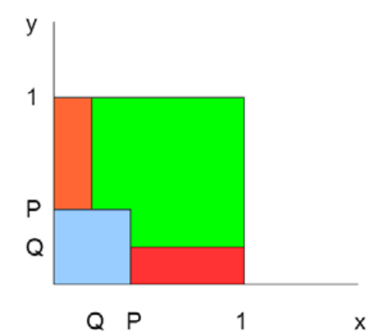


4 *Fig 1 di **Sand***

Il cliente compra un canale se almeno uno dei due valori è superiore a P (prezzo del primo canale), e solo in tal caso acquista il secondo canale se l'altro valore è inferiore a Q (prezzo del secondo canale).

La percentuale di clienti che acquistano il primo canale è pari all'area della porzione di quadrato che delimita tutti i punti che hanno almeno una fra x e y superiore a P (in rosso nella figura 1).

L'area vale ovviamente $1-P^2$, e il guadagno medio per cliente è $P(1- P^2)=P-P^3$.



5 *Fig 2 di **Sand***

Passiamo al secondo canale: l'area si individua in modo ovvio, è rappresentata in fig. 2 in verde e vale $1-P^2-2Q(1-P)$, e il guadagno medio per cliente è $Q[1-P^2-2Q(1-P)]$.

Il guadagno medio totale dalla vendita dei due canali separati è la somma dei due contributi:

$$f(P,Q)=P-P^3+Q[1-P^2-2Q(1-P)]=P-P^3+Q-QP^2-2Q^2+2Q^2P$$

Per massimizzare la $f(P,Q)$ dobbiamo porre pari a zero entrambe le derivate parziali df/DP e df/dQ:

$$df/dP=1-3P^2-2PQ+2Q^2=0$$

$$df/dQ=1-P^2-4Q+4PQ=0$$

Il sistema di due equazioni in due incognite è di secondo grado, ma c'è un'unica soluzione accettabile:

$$P=(\sqrt{244}-1)/27=0{,}541499975993086$$

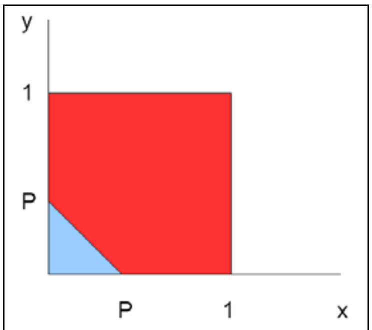
$$Q=(\sqrt{244}+26)/108=0{,}385374993998271$$

Introducendo i valori trovati per P e Q nella f si ottiene il guadagno medio totale che vale:

$$G=0{,}518907389328126.$$

Una semplice simulazione effettuata con il metodo Montecarlo conferma la validità del risultato.

Seconda domanda: *supponiamo la politica inversa, ossia o ti prendi due canali o non ti prendi niente; sempre volendo massimizzare i profitti, quale dovrebbe essere in questo caso il prezzo e quanto vi aspettate di guadagnare?*



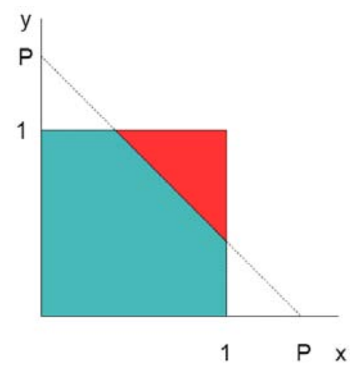
6 *Fig 3 di* ***Sand***

Chiamato di nuovo P il prezzo, si utilizza la rappresentazione grafica di cui sopra, che si modifica come mostrato in fig. 3. Tale figura assume P<1. La f(P) che ci dà il guadagno assume ora la forma:

$$f(P)=P(1-P^2/2)=P-P^3/2, \text{ e la } df/dP=1-3/2P^2$$

Da cui $df/dP=0$ per $P=\sqrt{2}/\sqrt{3}=0{,}816496580927726$

In tal caso G=0,544331053951817.



7 *Fig 4 di* ***Sand***

Per P>1 il grafico assumerebbe la forma di fig. 4, e la f(P) diventerebbe:

$$f(P)=P(2-P)^2/2=P+P^3/2-2P^2$$

$$df/dP=3/2P^2-4P+1$$

che va a 0 solo per P esterni all'intervallo 1<P<2. Pertanto non vi sono massimi per P>1, ed essendo la P continua in 1 si conclude che il massimo si ha per il valore sopra calcolato.

Anche questa soluzione è stata controllata con una Montecarlo.

Dai risultati ottenuti si deduce che la seconda strategia, che presenta un guadagno medio maggiore, è preferibile rispetto alla prima.

Terza domanda: *qual è il surplus per i due piani finanziari prospettati sopra?*

<u>Canali prezzati indipendentemente</u>

Prendendo come riferimento la fig. 2 si deve innanzitutto calcolare l'integrale (cioè il volume sotteso) della funzione $f(x,y)=x+y$ sull'area verde, di $g(x,y)=x$ sull'area rossa e di $h(x,y)=y$ sull'area arancione. Tale valore indica la capacità di spesa del cliente medio.

Il volume V si calcola agevolmente per via geometrica, e vale:

$V=(P+1)(1-P)+(P-Q)(P+Q)(1-P)$.

Per P e Q che massimizzano il guadagno G il surplus è:

S=V-G=0,773126552447105-0,518907389328126=0,254219163118979.

<u>Canali prezzati insieme</u>

Seguendo il medesimo procedimento, e prendendo questa volta a riferimento la fig. 3, si ottiene $V=1-P^3/3$, e sostituendo il valore di P che rende massimo G si ha:

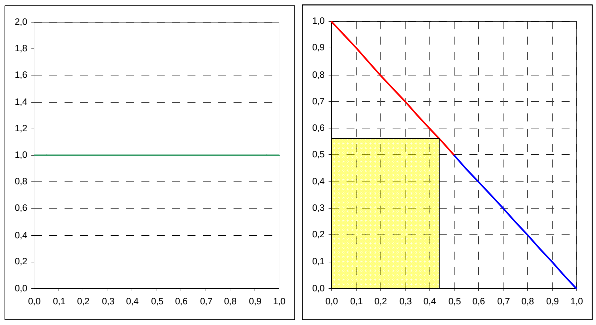
S=V-G=0,818556315349394-0,544331053951817=0,274225261397577.

Infine ***FrancoZ***:

Nel caso di canali venduti singolarmente, il massimo incasso si ottiene vendendo ogni canale ad ½ del valore massimo.

Per ogni singolo canale i due grafici sottostanti rappresentano:

- il primo la distribuzione dell'"indice di gradimento" (uniforme)
- il secondo la quota di popolazione (Y) disposta a pagare un determinato prezzo (X).



8 *Fig 1 di **FrancoZ***

L'area indicata col rettangolo giallo rappresenta l'incasso (***R***) dell'emittente. A voler usare equazioni:

$$Y = 1 - X$$

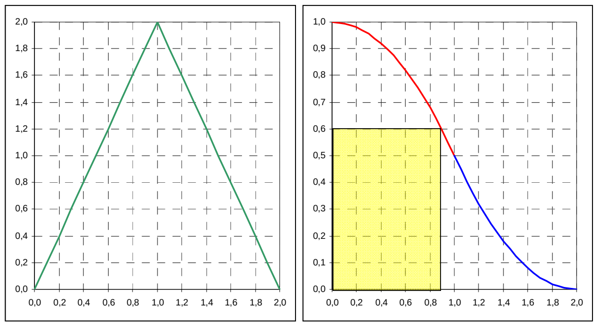
$$R = X * Y = X - X^2$$

$$\frac{dR}{dx} = 0 \Rightarrow 1 - 2X = 0 \Rightarrow X = \frac{1}{2}$$

$$R_{MAX} = \frac{1}{4}$$

Naturalmente, se i canali in vendita separata sono due, l'incasso complessivo dell'emittente risulterà pari a **½**.

Se i due canali sono invece venduti in combinazione la situazione è rappresentata dai due grafici in Fig 2 (con gli stessi significati del caso precedente).

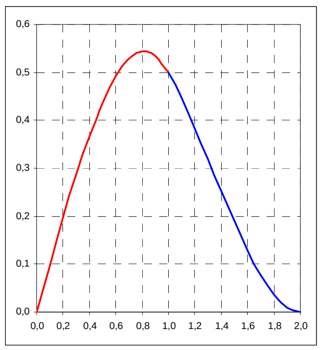


9 *Fig 2 di **FrancoZ***

La situazione è meno semplice.

Per comodità (e per pigrizia, non ho voglia di studiare separatamente i due tratti di curva rosso e blu) disegno prima il grafico di ***R*** in funzione di ***X*** (con Excel ci vuole un minuto – Fig 3).

Visto che sono a caccia del massimo incasso, limito l'analisi alla "zona rossa":



10 *Fig 3 di **FrancoZ***

$$Y = 1 - \frac{1}{2}X^2$$

$$R = X - \frac{1}{2}X^3$$

$$\frac{dR}{dX} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{3}{2}X^2 = 0 \Rightarrow X = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cong 0{,}816$$

$$R_{MAX} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \cong 0{,}544$$

Per quanto riguarda il surplus (***S***), per come è definito dovrebbe essere rappresentato dall'area sopra quella gialla nel grafico di fig. 2:

$$S = \left(\int_0^K \left(1 - \frac{X^2}{2} \right) dX \right) - R_{MAX} ....con...K = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$S = \frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} \cong 0{,}181$$

Vi sfidiamo a confrontare i risultati.

4.2 [109]

4.2.1 Qualcosa è cambiato

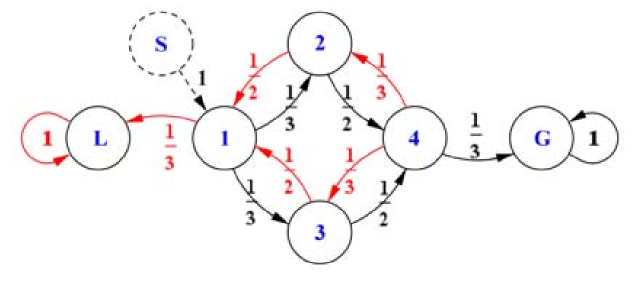
Ammettiamolo, il problema era facile, o almeno doveva esserlo se ***.mau.*** lo ha commentato in maniera tanto sprezzante:

> La prima parte del problema 1 è di una facilità disarmante. Per ogni posizione p, definiamo S(p) la probabilità che da p si finisca a S e quindi si perda, e G(p) la probabilità che da p si finisca a G e quindi si vinca. A questo punto, è chiaro che S(S) = S(1) e S(G) = S(4), e parallelamente G(S) = G(1) e G(G) = G(4). Ma è anche chiaro, data la simmetria perfetta del sistema, che S(2)=G(2)=1/2, e similmente S(3)=G(3)=1/2. Ora, S(1) = 1/3 + (1/3)S(2) + (1/3)S(3) = 2/3; e quindi G(1) = 1/3.
>
> Come in tutti i giochi proposti da Rudy, in genere è meglio evitare di farli, perché si perde.
>
> Per la seconda parte, i conti li ho fatti al volo e potrei essermi sbagliato. Comunque definiamo N(p) il numero medio di mosse da fare partendo dalla posizione p. Chiaramente, N(S) = 1 + N(1).
>
> Poi, per simmetria, possiamo unire tra loro le posizioni 2 e 3, ricordandoci però che ovviamente la probabilità conta doppio.
>
> Pertanto, visto che con una mossa da (1) andiamo con probabilità 1/3 a terminare il gioco e con 2/3 a (2) oppure (3), N(1) = 1 + 1/3 + 2/3 N(2) e similmente
>
> N(4) = 1 + 1/3 + 2/3 N(2)
>
> Infine, N(2) = 1 + 1/2 N(1) + 1/2 N(4) = 1 + N(1) (visto che N(1) ed N(4) sono anch'essi uguali per simmetria).
>
> Sostituendo, N(2) − 1 = 4/3 + 2/3 N(2) --> 1/3 N(2) = 7/3 --> N(2) = 7 e pertanto N(1) = 6 e N(S) = 7.
>
> Bastano insomma 7 mosse in media per terminare il gioco.
>
> In effetti, non è così complicato.

Sono arrivate tante altre soluzioni: ***Frank Sinapsi*** (benvenuto!), ***Mirtillo*** (bentornato!), ***Trekker***, ***Cid***, ***FraPao***, ***Camillo*** (benvenuto!), ***il Panurgo***, e ***Caronte*** (bentornato!). Si sono viste catene di Markov e grafici colorati e persino poesie. In ordine sparso, date un'occhiata al lavoro del ***Panurgo***:

> Carissimi, interpreto "ad ogni impulso del giocatore la pallina si sposta con probabilità uguale per ogni mossa" come un invito ad assegnare le probabilità di transizione in base al principio di indifferenza: per esempio, dallo stato **2** si esce in due modi quindi $p(\mathbf{1}|\mathbf{2}I) = p(\mathbf{4}|\mathbf{2}I) = \frac{1}{2}$ (si legga "probabilità di arrivare nello stato **1** quando si parte dallo stato **2**" ecc.).

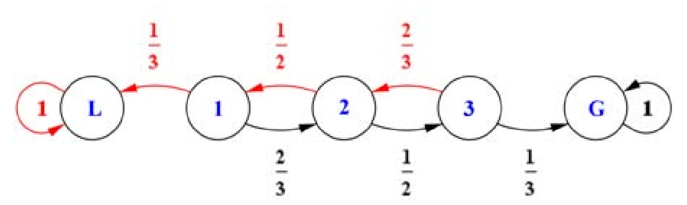
Con questa interpretazione abbiamo, dopo la prima mossa, un processo in cui le probabilità di transizione sono costanti (Markov!) e dipendono solo dallo stato precedente (Markov, 1° ordine!); la prima mossa è obbligata, dopodichè lo stato **S** (start) diventa uno stato assorbente che preferisco chiamare **L** (lose, ovviamente **G** sta per gain): il grafo corretto è in Fig 1.



11 *Fig 1 del* ***Panurgo***

Semplifichiamolo assumendo che il gioco cominci dallo stato **1** (ci ricorderemo però di contare una mossa in più).

Un'ulteriore semplificazione si può fare osservando che gli stati **2** e **3** sono perfettamente equivalenti e unificandoli: il nuovo grafo è in Fig 2.



12 *Fig 2 del* ***Panurgo***

Questo è ciò che io ho deciso di chiamare "Gioco Lineare Simmetrico": la matrice di transizione è

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Le probabilità di transizione dopo una sequenza di r passi si ottengono elevando **T** alla r-esima potenza: siamo interessati al comportamento di $\mathbf{T}^r$ quando $r \to \infty$.

Per calcolare $\mathbf{T}^r$ troviamo gli autovalori di **T**, $\lambda = \left\{0,1,1,-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}$, e la matrice degli autovettori

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3-\sqrt{6} & -3+\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 & 4+2\sqrt{6} & 4-2\sqrt{6} \\ -3 & 0 & 0 & -3-\sqrt{6} & -3+\sqrt{6} \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

con la sua trasposta

$$\mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 8 & 12 & 16 & 24 \\ 24 & 16 & 12 & 8 & 0 \\ 0 & -6+2\sqrt{6} & -6+3\sqrt{6} & -6+2\sqrt{6} & 0 \\ 0 & -6-2\sqrt{6} & -6-3\sqrt{6} & -6-2\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$$

e abbiamo

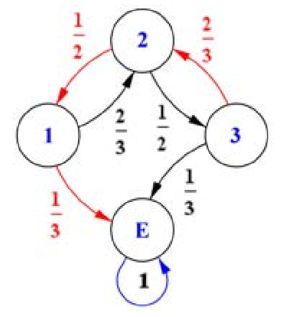
$$\mathbf{T}^r = \mathbf{S}\,\mathrm{diag}\left(\boldsymbol{\lambda}^r\right)\mathbf{S}^{-1}$$

e

$$\lim_{r\to\infty}\mathbf{T}^r = \mathbf{S}\lim_{r\to\infty}\mathrm{diag}\left(\boldsymbol{\lambda}^r\right)\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\,\mathrm{diag}\left\{0,1,1,0,0\right\}\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Otteniamo dunque $p\left(\mathbf{G}\,|\,\mathbf{1}I\right) = \frac{1}{3}$.

Ai fini del calcolo dell'expectation di r gli stati **G** e **L** sono equivalenti, quindi possiamo semplificare ulteriormente l'algebra unificandoli nello stato **E** (end): il nuovo grafo è in Fig 3.



13 *Fig 3 del* ***Panurgo***

La matrice di transizione è

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

I suoi autovalori sono $\boldsymbol{\lambda} = \left\{0,1,-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}$ e la matrice degli autovettori è

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{3+\sqrt{6}}{2} & -\frac{3-\sqrt{6}}{2} \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{6} & 2-\sqrt{6} \\ 1 & 0 & -\frac{3+\sqrt{6}}{2} & -\frac{3-\sqrt{6}}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mentre la sua inversa è

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{3-\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}-2}{4} & -\frac{3-\sqrt{6}}{6} & 0 \\ -\frac{3+\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}+2}{4} & -\frac{3+\sqrt{6}}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

La potenza r-esima della matrice di transizione, $\mathbf{T}^r$, contiene le probabilità di raggiungere i vari stati in r passi, cioè, le distribuzioni cumulative di probabilità per le transizioni in r passi.

Per la conclusione della partita in r passi (transizione da **1** a **E**) la distribuzione cumulativa di probabilità è

$$F(r\,|\,I)=\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ \mathrm{X} & & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & a^r & \\ & & & b^r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & & & \\ 1 & & & \\ -\frac{3-\sqrt{6}}{6} & & & \\ -\frac{3+\sqrt{6}}{6} & & & \end{pmatrix}$$

dove $b=-a=\frac{\sqrt{6}}{3}$ sono i due autovalori diversi da 0 e da 1

$$F(r\,|\,I)=1-\frac{3-\sqrt{6}}{6}a^r-\frac{3+\sqrt{6}}{6}b^r$$

Poiché si tratta di una distribuzione cumulativa discreta, la densità di probabilità vale

$$p(r\,|\,I)=\begin{cases}0 & r=0\\ F(r\,|\,I)-F(r-1\,|\,I) & r>0\end{cases}$$

cioè

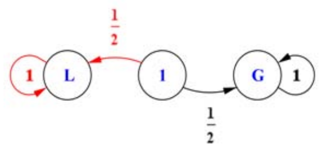
$$p(r\,|\,I)=\begin{cases}0 & r=0\\ \frac{3-\sqrt{6}}{6}(1-a)a^{r-1}+\frac{3+\sqrt{6}}{6}(1-b)b^{r-1} & r>0\end{cases}$$

Possiamo così calcolare l'expectation di *r* (tenendo conto del primo passo obbligato, da **S** a **1**)

$$\langle r\,|\,I\rangle=1+\sum_{r=0}^{\infty}r\,p(r\,|\,I)=1+\frac{3-\sqrt{6}}{6}(1-a)\sum_{r=1}^{\infty}r\,a^{r-1}+\frac{3+\sqrt{6}}{6}(1-b)\sum_{r=1}^{\infty}r\,b^{r-1}$$

e, dato che

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}n\,x^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

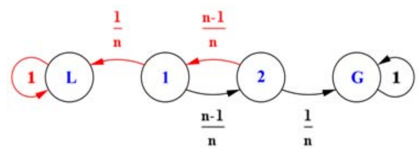


14 *Fig 4 del* ***Panurgo***

otteniamo

$$\langle r\,|\,I\rangle=1+\frac{3-\sqrt{6}}{6(1-a)}+\frac{3+\sqrt{6}}{6(1-b)}=1+\frac{3-\sqrt{6}}{6\left(1+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}+\frac{3+\sqrt{6}}{6\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}=6$$

Esempi di GLS più semplici sono Testa e Croce (Fig 4), con $p(\mathbf{G}\,|\,\mathbf{1}I)=\frac{1}{2}$ e $\langle r\,|\,I\rangle=1$, e la Roulette Russa (Fig 5) con $p(\mathbf{G}\,|\,\mathbf{1}I)=\frac{n-1}{2n-1}$ e $\langle r\,|\,I\rangle=n$.



15 *Fig 5 del* ***Panurgo***

E per quanto riguarda la poesia, ovviamente è di ***Caronte***:

Se da S io mi muovo
dentro il sito mi ritrovo
che con 1 sta segnato
dentro un tondo ben marcato.

Con 2/3 di speranza
di 2 e 3 nell'alleanza
io mi posso ritrovare
il percorso a continuare
alla mossa successiva
che però, più che cattiva,
mi può indietro rispedire
ed il gioco far finire.
Da 2 e 3 la situazione
offre poco di emozione
che di vincer la metà
ho di probabilità.
Questa è dunque la morale
che sto gioco fa un po' male
ché, malgrado i buoni intenti,
su tre volte che tu tenti
una sola sei vincente,
mentre due sarai perdente.

P.S. Il numero medio di mosse è $\overline{N} = 7.33$. Infatti: il gioco implica un numero pari di mosse; la probabilità che il gioco duri due mosse è 1/3 (con perdita certa); quella che duri 4 mosse è $P(4) = 4/9 \equiv 4 \times (1/3)^2$, con uguale probabilità di vincita e di perdita; quella che duri $2n$ mosse (con $n \geq 2$) è $P(2n) = 4 \times (1/3)^n$, sempre con uguale probabilità di vincita e di perdita; il valor medio del numero di mosse, dato dalla somma del numero di mosse possibili (tutti i numeri pari) ciascuno moltiplicato per la propria probabilità, è dunque

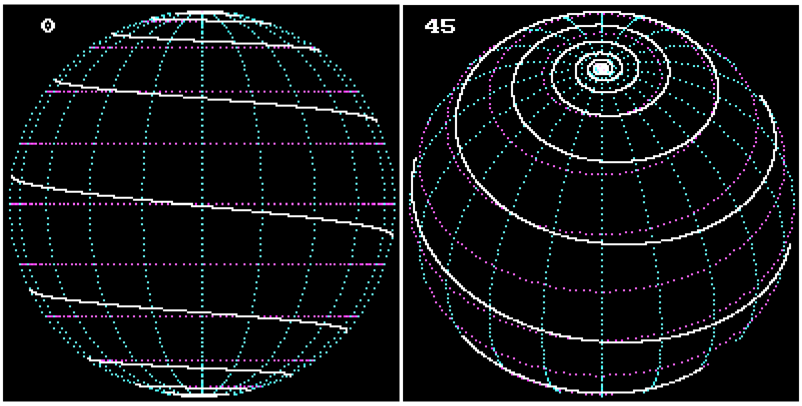
$$\overline{N} = 2 \cdot 1/3 + \sum_{n=2}^{\infty} (2n) \cdot P(2n) = 2/3 + 8 \sum_{n=2}^{\infty} n (1/3)^n = 22/3 \equiv 7 + 1/3 .$$

E perdonateci se non vi mostriamo più soluzioni.

4.2.2 Un altro vecchio problema

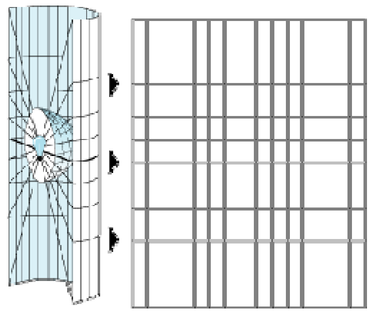
Per risolvere questo problema molti sono andati a documentarsi con cura in giro per la rete, e ci sentiamo un po' in colpa a dover fare una scelta, perché tante sono le informazioni utili ed interessanti che sono tornate indietro nel proporre il problema.

Contributi con grafici e spiegazioni sono giunti da ***Zar***, ***Trekker***, ***Frank Sinapsi***, ***Gavrilo***, ***FraPao*** e ***Cid***. Pubblichiamo solo quella di ***Gavrilo***: leggendola non si dovrebbero avere dubbi sul perché.



16 *Fig 1 di **Gavrilo**, da Wikipedia*

Per calcolare la lunghezza della nostra passeggiata tra il punto di incrocio dell'equatore e del meridiano di Greenwich camminando sempre con un angolo costante α rispetto al parallelo su cui ci troviamo (se andiamo verso Nord-Ovest è $\alpha = \pi/4$), cominciamo col supporre che la nostra Terra perfettamente sferica abbia raggio uguale a 1 (che per ora è quello più opportuno). La nostra velocità, rappresentata da un vettore di angolo costante α con il parallelo si può decomporre in due componenti ortogonali, una secondo il parallelo e una secondo il meridiano. Se la velocità è uguale a 1, la componente secondo il meridiano è $\sin \alpha$. La distanza dall'equatore al Polo Nord è $\pi/2$, quindi il tempo necessario per arrivare dall'equatore al polo è $\pi/(2 \sin \alpha)$. Essendo la velocità uguale a 1 anche la lunghezza della passeggiata sarà di $\pi/(2 \sin \alpha)$.



17 *Fig 2 di **Gavrilo***[19]

Se $\alpha = \pi/4$, si ha $\sin \alpha/4 = \sqrt{2}/2$ e la lunghezza della passeggiata (sulla sfera di raggio unitario) è $\pi/\sqrt{2}$.

È poi facile vedere che per una sfera di raggio R si ha rispettivamente $R\pi/(2 \sin \alpha)$ e, per $\alpha = \pi/4$, $R\pi/\sqrt{2}$. Assumendo un raggio medio terrestre di 6.371 km si ha:

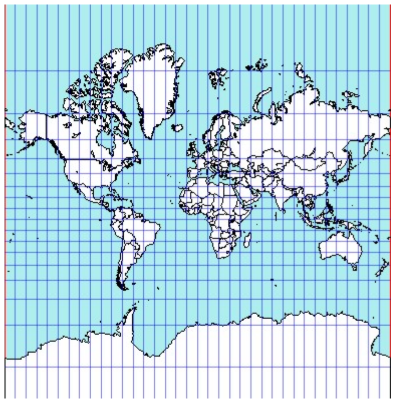
$$L_{\alpha = \pi/4;\ \pi/2 - 0} = 14.152{,}804 \text{ km}$$

A questo punto sarà bene ricordare che la curva su cui stiamo passeggiando[20] si chiama *lossodromica* (dal greco *loxos*, obliquo e *dromos*, corsa) e viene usata nella navigazione perché si può seguire facilmente mantenendo un orientamento costante rispetto al Nord (indicato dalla bussola). Già all'inizio del '500 avevano capito che tale tecnica di navigazione ad orientamento costante non seguiva un cerchio massimo. Il primo a scrivere sull'argomento nel 1537 fu Pedro Nunes (1502-1578), nominato 1534 alla nuova cattedra di matematica dell'Università di Coimbra, istituita dal re del Portogallo Giovanni III per introdurre metodi matematici nelle tecniche di navigazione. Nunes, che fu pure Regio Cosmografo, usò per primo la parola *rumbo* per indicare la navigazione da lui studiata, da cui deriva ancor oggi l'inglese *rhumb line* per la lossodromica. Quest'ultima denominazione è una latinizzazione (forse sarebbe meglio dire grecizzazione) del termine olandese *kromstreijk* (direzione curva) introdotta nel 1624 da Willebrord Snell van Roijen (1580-1626), a sua volta latinizzato in Snellius (che formulò la legge della rifrazione).

[19] (da: http://edndoc.esri.com/arcobjects/9.2/net/89b720a5-7339-44b0-8b58-0f5bf2843393.htm)

[20] Evidentemente per la nostra "passeggiata" è richiesta la capacità di camminare (o almeno navigare) sull'acqua, dato che partiamo dal Golfo di Guinea quindi, dopo un passaggio sull'Africa occidentale, ci muoviamo attraverso l'Atlantico, per attraversare parte del Canada vicino alla Baia di Hudson e poi sue isole più a nord, avventurandoci infine nei mari e ghiacci artici.

Due belle immagini di una lossodromica da polo a polo (con $\alpha < \pi/4$) sono in Fig. 1.



18 *Fig 3 di* ***Gavrilo***[21]

Nel 1569 Gerhard de Cremer (1512-1594) (latinizzato in Gerardus Mercator, italianizzato in Mercatore) introdusse la proiezione cilindrica della superficie terrestre, secondo lo schema di Fig. 2 e la rappresentazione di Fig. 3. Una lossodromica diventa una retta sulla mappa di Mercatore (che conserva sulla carta gli angoli sulla sfera) e viceversa.

Prima di avventurarci più oltre possiamo subito dedurre che, sulla mappa di Fig. 3 (che ovviamente è interrotta a Nord e a Sud, dato che dovrebbe essere infinita), la nostra passeggiata è costituita da una serie infinita di segmenti a 45°, che finiscono sul margine sinistro e ripartono su quello destro alla medesima latitudine (in quanto la mappa è in realtà una specie di "toro" bidimensionale piano, in cui il lato sinistro coincide con quello destro). Perciò l' "un po' " di giri consiste in un numero infinito di giri attorno al Polo Nord (come è qualitativamente evidenziato in Fig. 1), anche se abbiamo visto che la lunghezza della passeggiata è finita.

Vediamo ora dove incrociamo il meridiano di Greenwich per la prima volta (dopo la partenza). Assumiamo come coordinate sulla sfera la longitudine Ovest (φ), con lo zero su Greenwich) e la colatitudine (θ) con lo zero al Polo Nord. Allora l'equazione differenziale della lossodromica di angolo α in un punto $P[\varphi, \theta]$, considerando il triangolo che lo congiunge con $(P + dP)[\varphi + d\varphi, \theta - d\theta]$ (avendosi $- d\theta$, poichè andiamo verso Nord), di cateti $- R \cdot d\theta$ (essendo il raggio dei meridiani sempre R) e $R \cdot \sin\theta \cdot d\varphi$ (essendo il raggio del parallelo di colatitudine θ uguale a $R \cdot \sin\theta$ sarà data da

$$\operatorname{tg} \alpha = (- R \cdot d\theta) / (R \cdot \sin\theta \cdot d\varphi) ;$$

da cui

$$d\varphi / d\theta = - 1 / (\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin\theta) .$$

Essendo nella nostra passeggiata $\operatorname{tg} \alpha = 1$ (dato che $\alpha = \pi/4$):

$$d\varphi / d\theta = - 1 / \sin\theta ,$$

o anche:

$$d\theta / \sin\theta = - d\varphi .$$

Per trovare la colatitudine Θ_1 in cui incrociamo la prima volta il meridiano di Greenwich basta integrare rispetto a φ e θ tra il punto di partenza $[0, \pi/2]$ e il successivo incrocio con Greenwich $[2\pi, \Theta_1]$:

$$\int_{\pi/2}^{\Theta_1} (1/\sin\theta) \cdot d\theta = -\int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$[\ln[\tan(\theta/2)]]_{\pi/2}^{\Theta_1} = -2\pi$$

$$\ln[\operatorname{tg}(\Theta_1/2)] - \ln[\operatorname{tg}(\pi/4)] = - 2\pi$$

[21] (da: http://www.mgaqua.net/AquaDoc/Projections/img/Mercator.jpg)

$$\ln [\mathrm{tg}\,(\Theta_1 /2)] = -2\pi$$

quindi

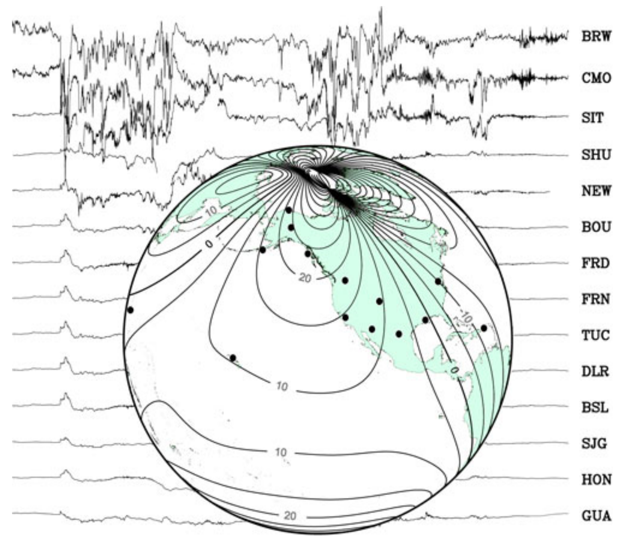
$$\Theta_1 = 2 \cdot \mathrm{arctg}[\exp(-2\pi)] = 3{,}73488112182\mathrm{E}\text{-}3 \text{ rad} = 0°{,}213992925263$$

che corrisponde a una latitudine di

$$\lambda_1 = 90° - \Theta_1 = 90° - 0°{,}213992925263 = 89°{,}7860070747 =$$
$$= 89°\ 47'\ 09''{,}62546892 .$$

Come si può vedere siamo a meno di 13' dal Polo Nord. Per quanto riguarda la nostra distanza dal Polo Nord sulla lossodromica vale sempre la stessa considerazione fatta all'inizio per la lunghezza della lossodromica dall'equatore al polo, ma questa volta la distanza angolare da percorrere non è $\pi /2$, ma soltanto Θ_1. Quindi la distanza mancante è:

$$L_{\alpha = \pi/4;\ \Theta_1 - 0} = 2 \cdot R \cdot \Theta_1 /\sqrt{2} = 5{,}281919536434\mathrm{E}\text{-}3 \cdot R = 33{,}651 \text{ km}$$



19 *Fig 4 di* ***Gavrilo***[22]

Infine, perché la bussola che stiamo usando è completamente andata? Ma è ovvio, è una bussola magnetica e, non coincidendo il Polo Nord Magnetico con il Polo Nord Geografico (oltre a mille altre diavolerie) per avere il Nord vero da quello della bussola magnetica bisogna avere le carte della declinazione magnetica e sommarla (algebricamente) all'indicazione della bussola, come si può vedere a grandi linee in Fig. 4. (A questo punto sarà bene precisare che le considerazioni precedenti su dove si trovi il punto di colatitudine Θ_1 valgono supponendo che abbiamo navigato con una bussola giroscopica e non magnetica).

Nel nostro caso si può porre il problema contrario: dove siamo dato che la bussola che dice "Nord Ovest" ma in realtà sta indicando "Nord-Nord-Ovest" (cioè + 22°,5 rispetto alla bussola)? Esiste sul Web un "declination calculator" del National Geophysical Data Center (NGDC) USA, che permette, date le coordinate geografiche di sapere la declinazione magnetica in quel luogo. Con un po' di tentativi (puro e semplice "trial and error") sono riuscito a trovare il primo punto sulla nostra lossodromica dove la declinazione è di 22° 30' E (dove, per convenzione E = EST indica un valore positivo). Chiamiamo Q questo punto, le sue coordinate (trovate come detto) sono:

$$\varphi_Q = 1{,}96960406087 \text{ rad} = 112°\ 51'$$

$$\theta_Q = 0{,}277234744716 \text{ rad} = 15°\ 53'\ 04'',$$

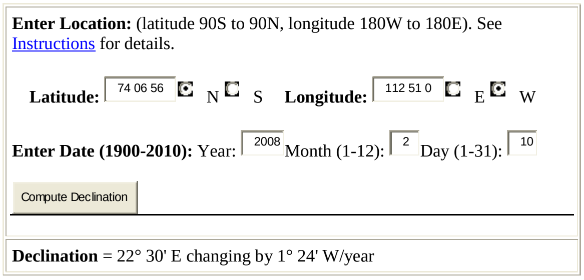
che corrisponde a una latitudine (λ): $\lambda_Q = 74°\ 06'\ 56''$.

[22] Linee di uguale declinazione magnetica sulla superficie terrestre (da: http://geomag.usgs.gov/).

Si può verificare che φ_Q e θ_Q soddisfanno la:

$$\ln [\mathrm{tg}\, (\theta_Q /2)] = - \varphi_Q,$$

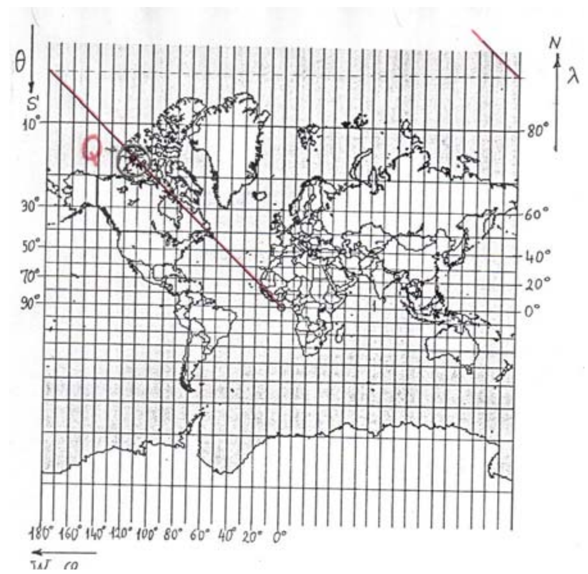
che abbiamo visto in precedenza.



20 *Fig 5 di* ***Gavrilo***[23]

Inserendo i valori di φ_Q e θ_Q nel "declination calculator" del NGDC, si ottiene il risultato di Fig. 5, che conferma la declinazione cercata.

Ma dove si trova questo punto Q? Un'occhiata a un atlante ci dice che si trova nelle isole nordiche del Canada, più precisamente nella Melville Island, che fa parte dell'arcipelago delle Queen Elizabeth Islands.



21 *Fig 6 di* ***Gavrilo***

La Fig. 6 indica dove si trova Q e dà anche la rotta della nostra passeggiata lossodromica su di una proiezione di Mercatore, fino oltre gli 80° di latitudine Nord.

Di ***Cid***, che manda sempre soluzioni a qualsiasi cosa proponiamo, abbiamo anche questo mese ricevuto valevoli soluzioni, e ci sembra opportuno riportare anche il quesito che ci ha sottoposto:

> (...) nel leggere il testo del 2° problema mi è venuto in mente un semplice problema che ha come oggetto il globo terrestre.
>
> È quasi un Quick & Dirty, nel senso che la soluzione è semplice ma è anche assai semplice sbagliare. Considerato che basta poco tempo per rispondere, ho deciso di proportelo per vedere come te la cavi con la fisica, conto su una tua rapida risposta:
>
> Supponiamo la Terra perfettamente sferica. Immagina ora di scavare un buco che passando dal centro della terra giunga agli antipodi; se lasci cadere un sasso nel buco, quale sarà la sua traiettoria?

Diteci se avete delle risposte per questo, vi faremo sapere il mese prossimo cosa abbiamo risposto noi. Con questo è tutto, buon marzo!

5. Quick & Dirty

Speriamo vi ricordiate che 4 è un quadrato; per una curiosa coincidenza, 9 è il quadrato immediatamente successivo. Ora, se li scrivete uno di fianco all'altro, ottenete 49, che è anch'esso un quadrato.

Coincidenza?

[23] (da: http://www.ngdc.noaa.gov/seg/geomag/jsp/Declination.jsp).

Mica tanto, se lavorate nella base opportuna. Se scrivete $(n-1)^2$ *e* n^2 *in base* n^2+1 *(nel caso esaminato la base è* $3^2+1=10$*) e li giustapponete, ottenete il numero* $(n-1)^2[n^2+1]+n^2$*, pari a* $(n^2-n+1)^2$.

6. Pagina 46

Ricordiamo che un numero è dotato di antiperiodo se, espresso in forma di frazione irriducibile, il suo denominatore ha un fattore comune con 10.

Abbiamo:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{3n^2+6n+2}{n(n+1)(n+2)}.$$

Il numeratore di questa frazione non è chiaramente divisibile per 3, ma il denominatore – essendo il prodotto di tre numeri consecutivi – lo è. Questo fattore 3 a denominatore non è quindi semplificabile, e darà origine alla parte periodica del risultato.

Tra i due interi consecutivi n e $n+1$, almeno uno è dispari.

Se n è dispari $(n+1)$ è pari e quindi il denominatore è pari; per quanto riguarda il numeratore, $3n^2$ è dispari e quindi l'intero numeratore è dispari, e quindi non avrà un fattore 2 semplificabile.

Se n è pari lo è anche $(n+2)$, quindi a denominatore è presente un fattore $4=2^2$; per quanto riguarda il numeratore, imponendo $n=2k$ abbiamo:

$$3n^2+6n+2=12k^2+12k+2=2(6k^2+6k+1),$$

E quindi a numeratore è presente un unico fattore 2, in quanto il termine tra parentesi è dispari.

In entrambi i casi, esiste un fattore 2 a denominatore non semplificabile; quindi il denominatore ha sempre un fattore comune con 10 che darà origine alla parte antiperiodica del risultato.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 La Gilda degli Abacisti: Gli Ordini Minori

Con l'eccezione del pistacchio, Rudy preferisce ampiamente i ghiaccioli al gelato; se appartenete alla stessa categoria di *gourmand*, tenete i bastoncini.

Scopo di questo pezzo era, in origine, parlare degli attrezzi che permettono di fare anche addizione e sottrazione senza l'utilizzo di energia elettrica; Rudy però si è accorto che sono degli oggetti piuttosto noiosi dal punto di vista teorico, in quanto sono tutti uguali; se vi mettiamo qui una foto dell'*Addiator* e vi spieghiamo che si infila uno stilo nel numero opportuno e si abbassa (se è nella zona rossa si alza e si gira: la curva in cima gestisce il riporto) ottenendo il risultato della somma, dovreste essere in grado di capire come è costruito e come si fanno anche le sottrazioni. Quindi, la cosa è poco interessante[24].

Eccezione, della quale comunque non abbiamo intenzione di parlare: se avete un aggeggio che sembra un incrocio tra un macinapepe e una bomba a mano (ha una manovella sopra e un anello di fianco), che potrebbe anche avere una svastica da qualche parte, tenetelo da conto: è in grado di fare quasi tutte le operazioni che fa un regolo, ma con precisione molto maggiore (una decina di cifre); Rudy ne aveva visto usare uno da (molto) piccolo, ma non ne ha mai trovati in vendita a prezzi accessibili; i pochi possessori di questi aggeggi hanno imparato a smontarli e pulirli per conto proprio e li conservano gelosamente. Quelli con la svastica erano costruiti nel campo di concentramento in cui era rinchiuso l'inventore durante il periodo nazista.

E adesso andiamo in Cina. Ormai, ve lo aspettavate tutti.

Nelle sue varie versioni l'abaco è probabilmente il primo strumento di calcolo[25] inventato; anzi da un suo parente stretto romano – o meglio, dai sassolini che lo componevano, i *calculi* – deriva il termine stesso oggi utilizzato. Ve ne abbiamo simulato uno in Figura 1, adesso cerchiamo di vedere come funziona.

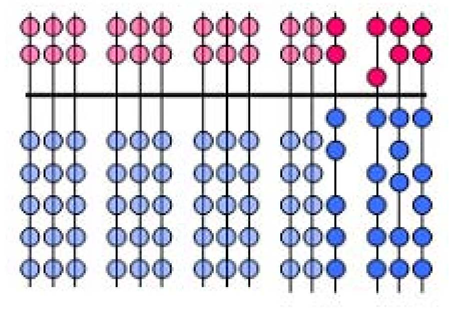


Figura 1 – Il *Suan Pan*

Tanto per cominciare, ignorate le palline più chiare; secondariamente, ricordatevi che sono tutte di un colore (nero, di solito); l'importante è che ne avete due sopra e cinque sotto[26]: quelle sotto valgono uno, quelle sopra valgono cinque e il numero è formato dalle palline che toccano la sbarra orizzontale; quindi in figura dovreste avere il numero 2.631 (o qualsiasi altro numero formato da queste cifre in quest'ordine… Insomma, lo scrivete un po' dove vi pare).

L'addizione (come la sottrazione) non dovrebbe presentare problemi; spostate l'opportuno numero di palline per ogni colonna e poi aggiustate; nel momento stesso nel quale vi ritrovate entrambe le palline rosse "giù", sapete che avete un riporto.

Il bello di questo aggeggio è che è in grado di fare anche la moltiplicazione, e pure in due modi diversi; uno dei metodi dovreste conoscerlo, visto che lo utilizzate sin dalle

[24] Tranne che per i collezionisti: ne esistono alcuni (rarissimi) precedenti la decimalizzazione della sterlina in grado di fare somme/sottrazioni di Pound, pence & shilling.

[25] *Calcolo*, non *enumerazione*. In questo campo, probabilmente vincono le ossa Bonobo (ma perché il far di conti richiede sempre delle ossa? Vedi dopo)

[26] Attenzione che potreste ritrovarvene uno con una pallina sopra e quattro sotto: in questo caso si chiama *Soroban* ed è giapponese. Funziona, comunque, nello stesso modo.

elementari. Volendo (ad esempio) calcolare $34 \cdot 27$, quello che calcolate è in realtà $(34 \cdot 20) + (34 \cdot 7)$ che, se ci pensate un attimo, è esattamente quello che fate quando effettuate una moltiplicazione, a meno di ordinamento degli addendi; in Oriente cominciavano dalla cifra più significativa per il pragmatico motivo che in questo modo, se serviva semplicemente una stima, ci si fermava automaticamente raggiunto il grado di precisione voluta.

"E come si facevano, i conti interni?" Beh, qui bisognava conoscere le tabelline, e si utilizzavano zone diverse dell'abaco per i risultati intermedi; sempre per il nostro calcolo, da qualche parte si calcolava $(34 \cdot 2)$ spostato di uno a sinistra, da un'altra parte si calcolava $(34 \cdot 7)$ e poi nel primo punto si sommavano i due valori. Più facile a dirlo che a disegnarlo, ma ci proviamo.

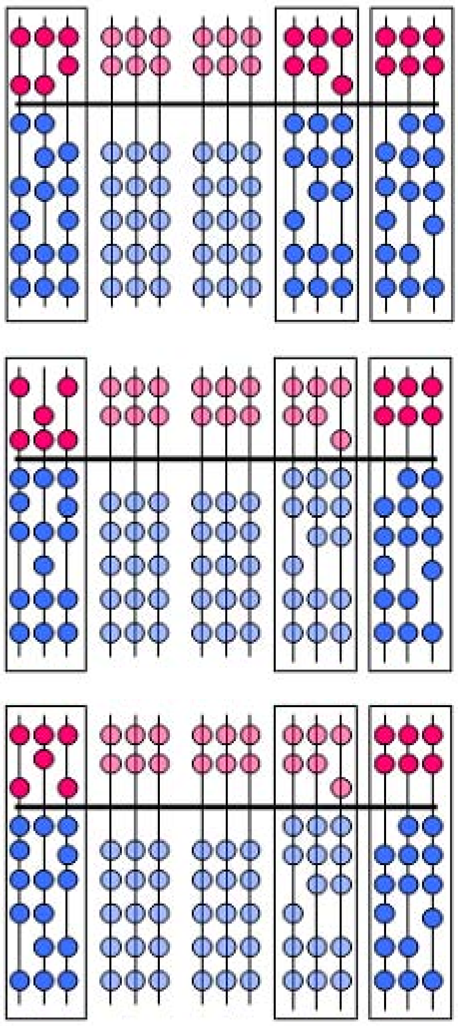


Figura 2 – Trentaquattro per ventisette

Nel primo schema, le tre colonne più a destra contengono 34, giusto per ricordarcelo: tutti i testi di abacistica (si dice così?) sostengono che si scrive il moltiplicando, ma non il moltiplicatore: quello va ricordato a mente. Nelle tre colonne più a sinistra lo abbiamo moltiplicato per venti (insomma, abbiamo lavorato sulle due colonne più a sinistra moltiplicandolo per due), mentre nell'altra terna di colonne lo abbiamo moltiplicato per sette (facendo sette-per-tre-ventuno, duecentodieci, più sette-per-quattro-ventotto, duecentotrentotto: tutto con l'abaco); nel secondo schema, ci siamo limitati a sommare i due blocchi che contenevano i risultati intermedi (e abbiamo schiarito il secondo blocco, che ormai non ci serve più); quindi, nel terzo passaggio, abbiamo messo a posto gli eventuali "dieci rossi" che ci ritrovavamo. Totale, novecentodiciotto. Più lungo a dirlo che a farlo, e più lungo a disegnarlo che a dirlo: se avete un abaco, provate e vedrete che non è difficile raggiungere una discreta manualità arrivando al risultato con un allegro klik-klak che ricorda le vecchie calcolatrici[27].

Se siete delusi dal fatto che il conto "si faccia uguale", siamo lieti di comunicarvi che nella maggioranza dei casi, soprattutto con numeri grandi, si usava un altro metodo molto più divertente: prima vi diamo il metodo con carta e matita[28].

Scrivete i due numeri di fianco.

Raddoppiate il primo e dimezzate il secondo, tenendo solo la parte intera.

[27] Quando Rudy era piccolo, sua madre ne aveva una in ufficio: di quelle elettriche, che occupavano mezza scrivania e, quando facevate una moltiplicazione, partiva un'allegra "danza delle camme" che sporgevano da sopra sin quando non veniva stampato il risultato. Quella danza ha sempre affascinato Rudy, e il metodo utilizzato dalla macchina era sostanzialmente questo.

[28] In realtà ve lo abbiamo già dato: è la divisione "alla russa". PM da RM056, "Come far impazzire la maestra".

Se avete resto, scrivetevi il primo numero in una terza colonna, altrimenti continuate.

Ricominciate da "raddoppiate e dimezzate", smettendo quando il secondo numero vale 1.

Sommate la terza colonna.

Per chiarirci, con il calcolo di cui sopra la terza colonna dovrebbe essere formata dai numeri 34, 68, (spazio vuoto), 272, 544 che, sommati assieme, vi ridanno 981.

Lo stesso calcolo, con l'abaco, è semplicissimo: usate tre colonne, esattamente come in questo metodo, e andate avanti a raddoppiare e dimezzare su due utilizzando la terza come accumulatore della somma; non solo, ma il raddoppio e il dimezzamento sono visivamente semplicissimi e quindi molto veloci (soprattutto se considerate come secondo numero il più piccolo).

Sulla divisione non stiamo a parlare che è una noia terribile, visto che è l'inverso dei due metodi appena visti; annotiamo solo che i migliori abacisti giapponesi (sono organizzati in *dan*, come nelle arti marziali) non usano quasi mai il metodo "classico", preferendo l'inverso della moltiplicazione "alla russa" (che chiamano in modo diverso).

"Fa anche le radici quadrate?" Sì, e prepara un passabile caffé. Esiste un metodo piuttosto deludente per farle, ma è semplicemente un adattamento del metodo classico che si sono dimenticati tutti[29]; in realtà secondo Rudy esiste un metodo originale giapponese molto antico più dedicato all'abaco; purtroppo, l'unico manuale che ha trovato e ne tratta indovinate in che lingua è… Comunque il Nostro non demorde e sta provando, con una certa difficoltà, a leggere almeno i numeri di tre calcoli diversi per capire che cosa succede; appena abbiamo notizie, vi terremo informati.

Un'ultima nota, prima di cambiare discorso. I *calculi* romani (quelli del – secondo qualcuno – "Noli tangere calculos meos!") funzionavano suppergiù sullo stesso principio, solo che le colonne si chiamavano, da destra, "I", "V", "X", "L", "C", "D", "M". Un po' più complicato, ma il principio è lo stesso.

Bene, cambiamo discorso. A questo punto, dovreste aver raccolto un sufficiente numero di bastoncini dei ghiaccioli: almeno una ventina, giusto per fare qualcosa di interessante: li usiamo come ossa.

Ve l'avevamo detto che ne avremmo riparlato; il nome originario inglese è "ossa di Nepero" (Napier's bones: sì, quello dei logaritmi naturali) che in italiano si traduce in un molto meno macabro "bastoncini di Nepero". Cominciamo a costruirli: qui non si scappa, bisogna conoscere le tabelline. Con questo valido indizio, speriamo riusciate a capire come sono fatti, perché non abbiamo la minima intenzione di costruirli tutti e dieci.

Lasciate perdere il primo; il secondo, in testa ha il numero 2 da solo e, nelle caselle sotto (scritta in modo abbastanza balordo), la tabellina del due; i successivi contengono la tabellina del sette (per far vedere che ce la ricordiamo) e quella del nove (che è facile e dà un po' di varietà). Fatevi anche le altre, possibilmente in duplice copia. La prima serve solo da riferimento e l'abbiamo colorata diversa.

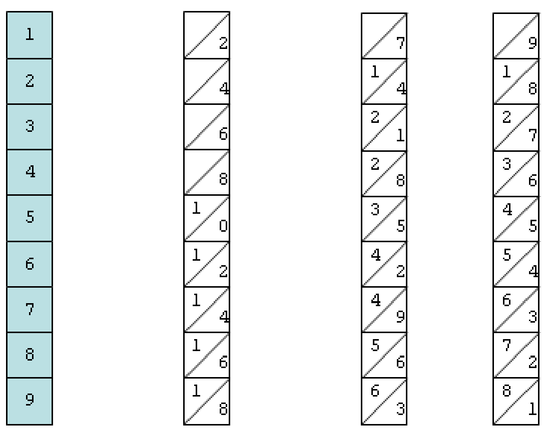


Figura 3 - Le Ossa di Nepero

Come prima cosa, calcoliamo $729 \cdot 7$: si

[29] Tranne gli attenti lettori di RM057, dove è ricavato.

ordinano opportunamente le bacchette bianche mettendo prima il 7, poi il 2 e quindi il 9 delle caselle in testa vicini e quindi si avvicina sulla sinistra la bacchettina azzurra, facendo attenzione alla riga del 7; a quel punto, si sommano i valori "vicini" (per chiarire il concetto li abbiamo messi dentro ai segni rossi) *et voila*. Avete in mano il risultato.

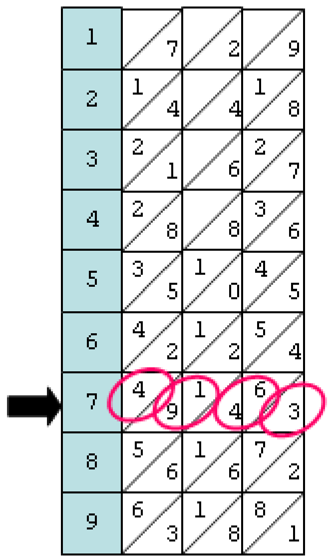


Figura 4 – 729 per 7

Con calma, cominciamo dal fondo. Avete il 3 non sommato a niente, scrivetelo. Il secondo gruppo è 4+6=10, scrivo 0 davanti al 3 e porto uno. Quindi 9+1=10, riportavo 1 fa 11 scrivo 1 davanti a 03 e porto 1 sul 4 che fa 5. Totale, 5103.

"Rudy, questo aggeggio ci ricorda qualcosa…" Bravi, vuol dire che siete andati a rileggere il vecchio Paraphernalia che vi avevo suggerito prima: infatti, questo non è altro che il metodo di *moltiplicazione a gelosia* (o a veneziana, o a persiana… insomma, le tende, non i posti).

Se volete fare delle moltiplicazioni più complicate (ad esempio con il moltiplicatore con più di una cifra) non fate altro che procedere nel modo classico: calcolate per la prima cifra e lo scrivete, poi fate il conto per la seconda e lo scrivete spostato, avanti così e alla fine sommate.

Delusi? Beh, contate che stiamo parlando di un periodo in cui chi sapeva anche solo le tabelline era un dotto; un aggeggio del genere era di grossa utilità.

Non vorremmo pensaste che Nepero abbia fatto un'indigestione di ghiaccioli per potenziare la sua macchina; in realtà non usava dei bastoncini piatti, ma a sezione quadrata; su ogni faccia era presente una serie numerica e il Centro di Calcolo era formato da due copie di dieci bastoncini; quello che Rudy non ha capito (e che Nepero non spiega) è il motivo per cui i bastoncini fossero costruiti in modo tale da avere, su due facce opposte, le tabelline di due numeri la cui somma fosse nove; se siete curiosi, il set da dieci originale era composto dai bastoncini {0, 1, 9, 8}; {0, 2, 9, 7}; {0; 3; 9; 6}; {0, 4, 9, 5}; {1, 2, 8, 7}; {1, 3, 8, 6}; {1, 4, 8, 5}; {2, 3, 7, 6}; {2, 4, 7, 5}; {3, 4, 6, 5}. Se qualcuno riesce a capire (posto che ci sia) il motivo di questa suddivisione e ce lo manda, pubblicheremo con ringraziamenti.

Adesso fate attenzione, che il prossimo è il primo calcolatore binario mai inventato; esaminiamo solo il modello a otto bit, ma dovreste essere in grado di effettuare l'upgrade ai modelli più potenti piuttosto facilmente.

Andate a prendere la scacchiera, un mucchio di pedine e qualche post-it di quelli piccoli; mettete i post-it con i numeri indicati (sono le potenze di due) ai bordi della scacchiera e state attenti, che partiamo con un conto complicato: 89+41+52.

Per prima cosa, scriviamo i tre numeri nelle tre righe in basso con le nostre pedine in notazione binaria; li trovate nella prima parte della Figura 5.

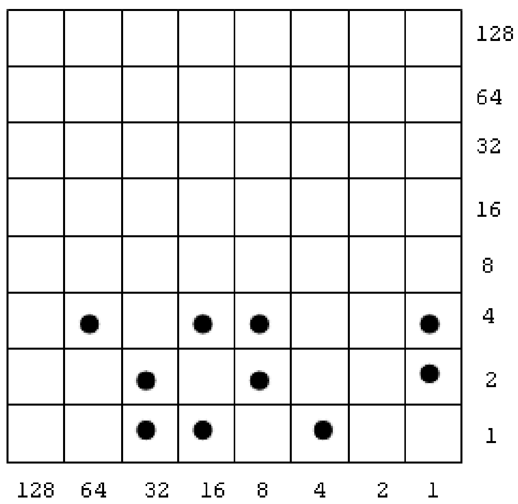


Figura 5 – Somma difficile

E poi, facciamo la somma: nel senso che ammucchiamo tutte le pedine per colonna nella riga più in basso. Fatto.

"Guarda che abbiamo un mucchio di quadretti con due pedine…" Bene, fate il riporto:

- Togliete due pedine dalla casella n-esima
- Aggiungete una pedina nella casella (n+1)-esima

…e avanti così. Può anche capitarvi di avere tre o più pedine nella stessa casella di base, il procedimento è lo stesso. Sembra una definizione stupida, ma vorremmo definire questo procedimento come "dimezzamento verso l'alto": mettete la metà delle pedine che avete in una casella nella casella più alta.

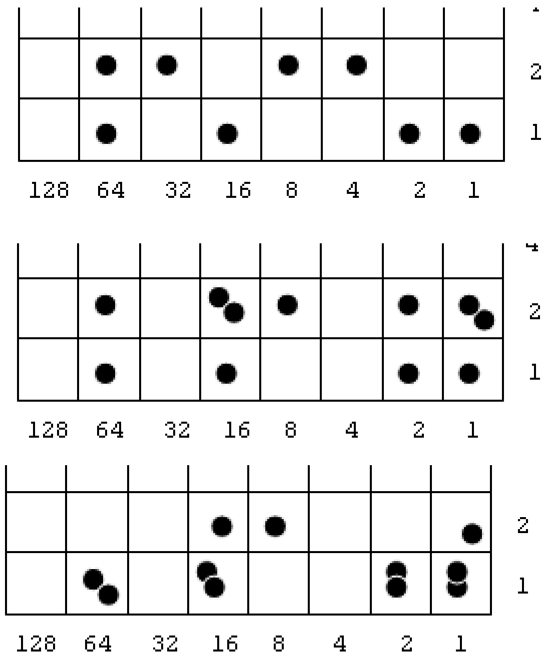


Figura 6 – centootto meno ottantatrè

La sottrazione funziona in modo molto simile, ma questa volta, anziché un "dimezzamento verso l'alto" *dopo* il conto, dovete effettuare un "raddoppiamento verso il basso" *prima*: in pratica, gestite il "prestito"; quando avete in seconda riga l'opportuno numeri di doppie pedine, cominciate a raddoppiare spostando verso il basso tutte e sole le pedine della riga bassa; il risultato lo trovate in seconda riga.

Forse è meglio se facciamo un esempio.

In Figura 6, vedete il calcolo di 108-83; il primo è scritto nella riga superiore, il secondo in quella inferiore; poi, attraverso prestiti, abbiamo fatto in modo che ci fosse almeno una pedina sopra ogni pedina della riga più bassa; quindi, per tutte le pedine della riga bassa, abbiamo preso una pedina della riga sopra e l'abbiamo abbassata; il risultato (venticinque) nella seconda riga dell'ultimo passaggio.

"(Yawn)…'nteressante… fa anche altro?" Sì, ad esempio le moltiplicazioni. E il metodo è interessantissimo, e giustifica il fatto che si siano messi i post-it sul lato destro. Proviamo direttamente con un esempio, $19 \cdot 13$.

Tanto per cominciare, scriviamo 19 nella riga in basso e 13 nella *colonna a destra*. Successivamente, in tutte le caselle in cui si incrociano una riga e una colonna entrambe occupate da un gettone in prima, mettiamo un altro gettone. Il risultato dovreste trovarlo in Figura 7. Vi abbiamo cerchiato, nella prima fase, in fucsia i gettoni della costruzione originaria.

Poi, spostate tutti i gettoni della riga in basso in diagonale verso l'alto sino a farli arrivare nella colonna a destra; seconda immagine, gettoni originali in grigio e gettoni risultato in rosso. E poi, equalizzate. Terza immagine. Duecentoquarantasette.

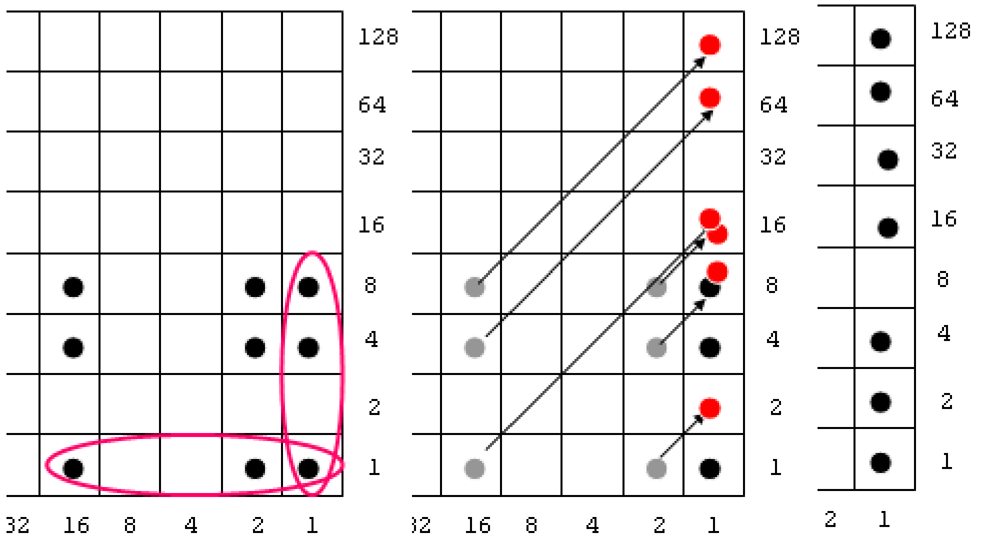


Figura 7 – Diciannove per tredici

Sarebbe facile cavarsela con un “la divisione è fatta nello stesso modo, ma procedendo al contrario”, ma siamo abbastanza onesti da ammettere che ogni tanto possono nascere dei problemi. Quindi, vi diamo il metodo per esteso. Ma senza disegni.

Tanto per cominciare, scrivete il dividendo sulla colonna di destra e marcate in un qualche modo il divisore sulla riga in basso; il vostro scopo è di ottenere un rettangolo “ben formato” (per intenderci, come quello all’inizio della Figura 7), eventualmente avanzando qualche gettone: spiacente, ma quella che ottenete è la divisione intera.

A questo scopo, prendete il gettone in alto a destra e spostatelo diagonalmente verso il basso sino alla colonna marcata dalla base più a sinistra; se ad un certo punto vi accorgete che non potete formare lo schema desiderato, riportate il gettone alla cella originaria, “raddoppiatelo in basso” e andate avanti; in questo modo, dovreste farcela a riempire il vostro schema procedendo verso il basso e verso destra. Se vi avanzano dei gettoni, quelli sono il resto.

Il sistema calcola anche le radici quadrate, o meglio vi trova la radice del più grande quadrato intero minore del numero dato; la procedura non è molto divertente (anche perché per fare qualcosa di sensato sarebbe necessario un upgrade della CPU sino almeno a dieci bit); ci limitiamo a dirvi che, come per la divisione, dovete ottenere il rettangolo “ben formato”, solo che qui evidentemente deve essere un quadrato dotato di simmetria anche secondo la diagonale da in alto a sinistra a in basso a destra, per il semplice motivo che il numero sulla colonna di destra e quello sulla riga in basso devono essere uguali.

…Ora, se qualcuno trova il modo di calcolarci le funzioni trigonometriche, abbiamo un calcolatore con installati dei bellissimi giochi, nessuno può usarlo per telefonarvi e le pile non sono mai scariche.

Ma cosa volete di più, dalla vita?

Rudy d’Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms