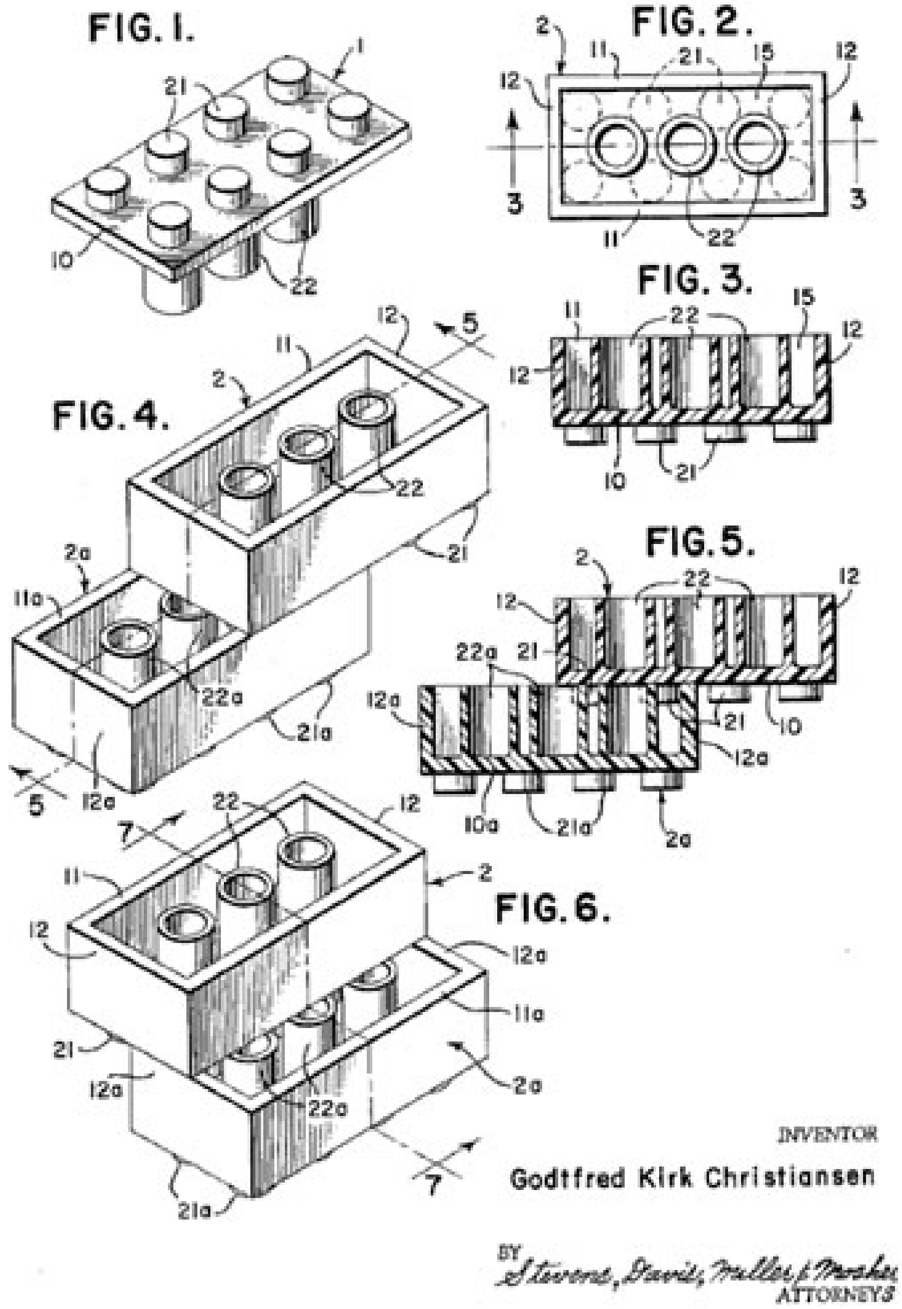
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

# Rudi Mathematici

*Rivista fondata nell'altro millennio*

Numero 109 – Febbraio 2008 - Anno Decimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

***Rudi Mathematici***

Rivista fondata nell'altro millennio da

*Rudy d'Alembert* (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com

*Piotr Rezierovic Silverbrahms* (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

*Alice Riddle* (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 108 ha diffuso 1626 copie e il 30/01/2008 per Google eravamo in 4'850 pagine.



Abbiamo parlato del Lego qualche numero fa in un problema, ma non ci eravamo accorti che poco dopo (per essere precisi, alle 13:58 del 28 gennaio) avrebbe compiuto 50 anni. L'ora è ricavata dalla registrazione del brevetto di cui riproduciamo una pagina; adesso, finalmente, avete tutte le misure che vi servono.

# 1. Contare coi buchi

*In molte delle civiltà meno formaliste dell'Orlo Esterno Est della Galassia, la Guida Galattica per gli Autostoppisti ha già soppiantato la Grande Enciclopedia Galattica, diventando la depositaria di tutto il sapere e di tutta la scienza, perché nonostante presenti molte lacune e contenga molte notizie spurie, o se non altro alquanto imprecise, ha due importanti vantaggi rispetto alla più vecchia e più accademica Enciclopedia.*
*Uno, costa un po' meno; due, ha stampate in copertina, a grandi caratteri che ispirano fiducia, le parole NON FATEVI PRENDERE DAL PANICO.*
(Douglas Adams, *Guida Galattica per Autostoppisti*, trad. Laura Serra)

Tutti gli indizi in nostro possesso finora sembrano indicare che la conoscenza totale sia probabilmente irraggiungibile, e Douglas Adams[1], sancendo nella citazione qui riportata la superiorità della Guida sull'Enciclopedia, non fa altro che articolare l'importante concetto che talvolta più che la conoscenza siano necessari degli antidepressivi. Anche perché, con buona pace di internet e della facilità di accesso alle informazioni, il sapere non basta averlo a disposizione, ma va in qualche modo compreso, catalogato, assimilato; altrimenti non serve a niente.

Quando le informazioni e la conoscenza sono profondamente integrate con la mente indagante e con il mondo indagato, il binomio "sapere-potere" cessa d'essere un binomio e diventa una limpida identità. Il rischio è come al solito quello di eccedere in semplificazione[2], ma è verosimile che quasi tutto quanto costituisce la distanza tra l'Homo Sapiens e i suoi predecessori nell'albero evolutivo sia riconducibile a fattori culturali, e quindi in ultima analisi ad informazioni e conoscenza. E l'organizzazione delle informazioni più elementari già stravolge la struttura sociale primitiva: dalla formazione di gruppi di individui con funzioni sociali diverse – cacciatori, coltivatori, guerrieri – alla creazione di un vero e proprio sistema gerarchico, è sempre l'elaborazione dei fattori esterni che rende possibile prendere delle decisioni essenziali alla sopravvivenza.

Organizzazione sociale e acquisizione delle informazioni possono sembrare attività abbastanza disgiunte, almeno sin quando non si nota che la raccolta dei dati per eccellenza ha un'etimologia che discende direttamente da "stato", perché è proprio il potere centrale che, da sempre, si occupa della raccolta dei dati per successiva elaborazione e utilizzo a suo uso e consumo: sotto questa luce, la *statistica* perde immediatamente il manto di innocenza che gli scienziati tendono ad attribuirle. In fondo, però, si tratta anche di vera e propria autocoscienza: in quanto organizzazione complessa, lo Stato – qualsiasi Stato – necessita di conoscere al meglio possibile le proprie caratteristiche e potenzialità. Serve sapere quali siano le dimensioni della popolazione, quali le occupazioni, quali i prodotti: a prescindere da qualsiasi giudizio etico (è certo facile ricordare come la quasi totalità dei governi antichi fosse interessata a queste informazioni essenzialmente solo per ottimizzare il dominio di pochi sulla moltitudine, ma è indubbio che queste informazioni siano indispensabili anche – e forse di più – ad uno stato ideale e perfettamente democratico), lo Stato deve sapere in che misura potrà imporre tasse e contributi ad ognuno dei cittadini, quale percentuale della popolazione può essere richiamata in difesa del territorio in caso di guerra; e più in generale quanti e quali prodotti la nazione è in grado di produrre per mantenersi e prosperare.

---

[1] No, non abbiamo intenzione di parlare di lui, anche perché se ne parla ampiamente in RM081 "Idee ad improbabilità infinita". Riportiamo solo la Risposta alla Domanda Fondamentale dell'Universo (che è notoriamente 42) e glissiamo amabilmente sulla Domanda stessa.

[2] Nel senso che non abbiamo affatto intenzione di sminuire le reali differenze genetiche, non riconducibili a fattori ambientali e culturali: più che altro, è che queste differenze sembrano di gran lunga meno significative (almeno ad occhi inesperti quali i nostri) delle altre.

La prima informazione essenziale, a questo proposito, è il semplice conteggio degli abitanti: può sembrare dato ovvio e non particolarmente significativo, ma in realtà costituisce la base per ogni elaborazione successiva dei dati[3]. E quando si parla di "conteggio della popolazione" è inevitabile pensare allo strumento universalmente noto utilizzato all'uopo, ovvero al *censimento*. Il Vangelo di Luca riporta notizie del censimento in atto durante la nascita di Gesù Cristo, e la diffusione del testo sacro ha fatto in modo che spesso si pensi che quello fosse il primo censimento della storia; in realtà la pratica è antica quanto l'uomo: i Sumeri raccoglievano dati sulla consistenza della popolazione e dei beni già seimila anni fa[4], e la stessa azione era attuata dai popoli mesopotamici, egiziani, greci, cinesi; tutti quelli, in pratica, in grado di contare. I Babilonesi pare eseguissero un conteggio della popolazione e delle risorse (burro, latte, lana, verdure…) ogni sei anni circa, e l'attenzione posta sull'enumerazione delle risorse mostra anche che i primi censimenti non avevano solo scopi militari, ma anche quello di valutare la capacità di sopravvivere a carestie o altre emergenze.

È però curioso che la parola *censimento* non sembri avere nella lingua italiana alcuna relazione etimologica con il concetto di contare, che pure appare essere – quantomeno a prima vista - l'azione cruciale del censimento; viceversa appare evidente una parentela strutturale con le parole *censo*[5] e *censura*[6], che invece con i conteggi sembrano avere poco a che fare. In latino, *censere* significa *valutare*, e forti di questo significato si riesce a comprendere l'origine delle parole derivate. Il censimento si chiama infatti così perché era il compito principale del *censor*, ovvero del titolare dell'altissima magistratura romana della *censura*. Come le altre magistrature aveva una connotazione sia civile che religiosa: e anche se la pretura e il consolato godevano di un maggior potere politico, il *censor* era tenuto in altissima considerazione morale, al punto di essere considerata magistrato sacro e secondo, in termini di dignità e di rispetto dovutogli, solo al *dictator*. Ogni cinque anni si teneva il censimento e tutti i capifamiglia romani dovevano presentarsi di fronte al censore, dichiarare sotto solenne giuramento le proprie generalità, la composizione della propria famiglia e i beni in proprio possesso: terre, schiavi, greggi, e tutto quanto contribuiva a comporre il loro patrimonio. Questa era un'azione rituale dal forte connotato civile e religioso: non solo chi non vi si sottoponeva veniva dichiarato *incensus,* non censito, che era un vero e proprio marchio di infamia; ma era in base ai risultati di questa complessa *valutazione* generale che ogni cittadino veniva collocato nella classe di censo che gli spettava. Questo aveva delle conseguenze importanti nella società romana, e non solo per questioni di pagamento delle imposte: il massimo organo legislativo dell'antica Roma, il Senato, era ovviamente composto dai senatori, ma il titolo di senatore, come tutti gli altri, doveva sempre risultare dal censimento quinquennale eseguito dal censore, che diventa pertanto, per la durata della sua carica (non a caso parimente quinquennale, con due censori eletti congiuntamente) il garante della legittimità dell'organo legislativo. Ma anche a livelli più bassi il censimento poteva cambiare la vita: in casi particolari, ad esempio, se si aveva il giusto reddito e la giusta posizione sociale si poteva diventare destinatari di un "equus publicus", ovvero ci si poteva venir assegnato un cavallo del demanio e assurgere così al rango di "cavaliere[7]",

---

[3] A volte, il dato grezzo stesso contiene informazioni sufficienti: al governo della Repubblica di San Marino basta confrontare il numero degli abitanti senza alcuna ulteriore elaborazione statistica per comprendere che probabilmente non è opportuno dichiarare guerra alla Repubblica Popolare Cinese.

[4] Ciò non di meno, i primi documenti scritti giunti fino a noi relativi a censimenti sono relativi a quelli eseguiti dai militari persiani, intorno al 500 avanti Cristo, con lo scopo di suddividere le terre e definirne la tassazione.

[5] "Il complesso dei beni e delle ricchezze posseduti da una persona", dice il dizionario online De Mauro Paravia.

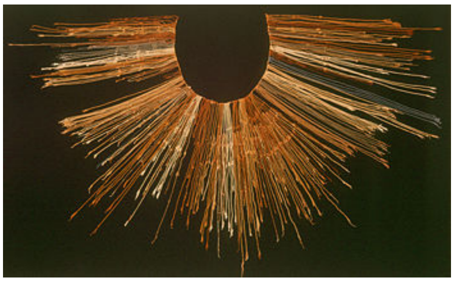
[6] "Controllo esercitato da un'autorità civile o religiosa su pubblicazioni, spettacoli, mezzi di informazione, per adeguarli ai principi della legge, di una religione o di una dottrina morale". Anche questa definizione presa dal medesimo dizionario online: visto che è a consultazione gratuita e non richiede neppure registrazione (il che fa sperare che non tormenti nessuno con mail pubblicitarie), gli regaliamo un link: http://www.demauroparavia.it/

[7] A dire il vero, si entrava a far parte della classe degli "*equites equo publico*", ovvero dei cavalieri con cavallo pubblico; sempre cavalieri, certo, ma un po' di serie B.

che implicava una evidente crescita nei ranghi della società (nonché, naturalmente, dell'esercito). Non solo: il censimento non aveva solo lo scopo di contare il numero di cittadini e di valutarne i beni, ma anche di classificare ogni elemento della società in base alle sue caratteristiche: così, se tutta la dichiarazione del "pater familias", rilasciata sotto giuramento solenne, regolamentava le posizioni di tutti i membri della sua famiglia, anche i liberti, gli orfani e le vedove e tutti i componenti della società romana che non potevano vantare l'appartenenza ad una famiglia erano registrati in liste dedicate.

Da qui si può comprendere anche l'attuale significato della parola *censura*, perché il secondo – ma forse più pregnante – compito dei censori era proprio quello di stabilire il giusto comportamento etico e morale dei cittadini. Un noto principio giuridico ricorda come "illegalità non equivale a immoralità", e anche se ai nostri tempi l'immoralità, almeno nei paesi laici e democratici, è in genere sottoposta solo al giudizio della pubblica opinione, ai tempi di Roma era fustigata direttamente dal censore. E non erano solo vuoti richiami verbali quelli che la censura indirizzava a coloro che riteneva colpevoli di comportamento immorale: chi veniva marchiato dalla *nota censoria* poteva finire con l'essere espulso da tutte le cariche sociali (senato, ordine equestre, tribù, etc.) a seconda della gravità della colpa (*ignominia* o *infamia*, con la seconda decisamente più grave della prima). Naturalmente, le colpe perseguite dai censori erano essenzialmente di ordine morale, quali l'infedeltà coniugale, il maltrattamento dei beni o delle persone della famiglia, ma anche il semplice fatto di non prendere moglie (perché così facendo non si generavano figli, privando pertanto l'esercito di Roma dei suoi soldati).

Era così grave e impegnativo il compito del censore che quando si arrivava alla fine del periodo comandato alla magistratura, i due censori celebravano un sontuoso e solenne sacrificio agli dei, per ringraziarli di averli ben diretti durante il delicato ufficio. La carica, come si è detto, durava cinque anni, e il sacrificio finale veniva detto *lustrum*: è per questo che ancora oggi *lustro* è sinonimo di *quinquennio*.


1 *Quipo andino.*

Ma, pur senza raggiungere la sacralità dei censori romani, i censimenti si ritrovano a tutte le latitudini e in ogni epoca della storia umana. Un caso particolarmente interessante è quello della civiltà Inca: la popolazione, completamente distrutta dai *conquistadores* spagnoli, aveva una civiltà estremamente avanzata di cui si sa pochissimo, anche perché non ha prodotto nessuna forma di scrittura, e non esistono pertanto documenti scritti dai quali desumere la storia di quel popolo. Esistono però i *quipo* (o *khipu*); la figura ne mostra uno: si tratta di corde di cotone annodate in cui ogni corda rappresenta un numero, in notazione posizionale non troppo diversa dalla nostra normale maniera di scrivere i numeri. In ogni segmento c'è posto per unità, decine, centinaia, e i nodi che rappresentano i numeri hanno una diversa forma a seconda della posizione. I quipo erano utilizzati per mantenere archiviati dati di varia natura: ogni villaggio aveva il suo "contabile" il cui compito era quello di "leggere", "scrivere" e conservare i quipo[8], e cioè i dati fondamentali che servivano a valutare l'economia del villaggio, il numero degli abitanti e dei lavoratori, e naturalmente le tasse da pagare.

Nell'antichità come nei tempi moderni, il compito essenziale in tempo di pace dei censimenti era sempre lo stesso: valutare quanto denaro sotto forma di tasse, imposte e balzelli si poteva spremere dalla popolazione. Non sarà allora una sorpresa scoprire che

[8] Per ulteriori informazioni sui quipo, vi rimandiamo al recentemente uscito Bartocci-Odifreddi - "La Matematica (Vol.1 - I Luoghi e i Tempi)" - Einaudi, dove diventeranno limpide ed evidenti le notazioni (stenografiche? quipografiche?) di "nodo lungo" e "nodo corto", nonché il metodo per inserire una nota nell'appunto. [RdA]

quasi sempre il popolo ha visto i censimenti come il fumo negli occhi; avendone la possibilità era di gran lunga meglio sfuggire alle loro maglie ed evitare così di pagare le tasse e di partire soldato. In pieno medioevo Guglielmo I il Conquistatore decide di far censire l'Inghilterra fresca di conquista, e istituisce nel 1086 il Domesday Book, che serviva proprio a definire la tassazione da applicare ad ogni suddito (e senza la minima possibilità di appello). "Dom" è una parola inglese dell'epoca, il cui significato è *conto*, *misura*, e pertanto il Domesday era letteralmente il giorno in cui veniva effettuato il conto degli averi di ogni singolo abitante. È un'epoca in cui la religione regolamenta ogni aspetto della vita, e forse non è un caso se un altro, ancora più spaventoso giorno dedicato alla resa dei conti avesse un suono tanto simile: il Domesday di William the Conqueror ricorda infatti da vicino il Doomsday, giorno in cui il Creatore farà una verifica di tutte le azioni di ogni uomo, ovvero il Giorno del Giudizio[9]. Forse perché di giorni del giudizio nessun uomo può sostenerne più di uno, tutti i successivi tentativi di riscossione delle tasse tramite Domesday furono ferocemente osteggiati dalla popolazione. Del resto il Domesday non rappresenta affatto bene il concetto di censimento: era così concentrato sulle tasse e sui beni materiali che i dati che si premuniva di registrare spesso non tenevano affatto conto dei poveri, donne, bambini o anziani, insomma dei soggetti che non potevano essere tassati e che come tali potevano restare invisibili.


2 *Thomas Robert Malthus*

A dare un grosso contributo allo sviluppo del censimento come lo conosciamo oggi fu Malthus, il cui testo del 1797 "*An essay of the principle of the population as it affects the future improvement of society*" (titolo reso più sinteticamente nella versione italiana: "*Saggio sul principio della popolazione",* anche se così è decisamente meno chiaro il contenuto del trattato, visto che sono rimosse le illuminanti parole "*…come influenza il futuro miglioramento della società"*) scosse l'immaginario collettivo. Vi si sosteneva che l'incremento demografico era molto superiore alla crescita delle risorse, e avrebbe spinto a coltivare terre sempre meno fertili con conseguente penuria di generi di sussistenza per giungere all'arresto dello sviluppo economico. In altre parole era un'esortazione a tener conto anche dei poveri, delle donne, dei bambini e degli anziani, perché anche se non avevano soldi per le tasse avevano bocche per mangiare.

Thomas Robert Malthus era nato il 13 febbraio 1776 da una famiglia influente e benestante, e, dopo una felice carriera accademica che l'aveva visto brillare soprattutto in matematica, era diventato un pastore anglicano. Sembra fosse afflitto da labbro leporino, un difetto genetico diffuso nella sua famiglia, e per questo non volle farsi ritrarre fino al 1833, dopo essersi sottoposto ad un intervento estetico. Considerando che il difetto gli provocava anche problemi nella pronuncia lo si può anche capire, altrimenti ci sarebbe da chiedersi come mai abbia atteso di raggiungere la veneranda età di 57 anni prima di sottoporsi all'operazione[10]: morì poi nel dicembre del 1834, il che ci fa supporre che in fondo il numero di ritratti che riuscì a farsi fare non sia stato molto alto; pare che dopo l'operazione il nostro si considerasse "moderatamente di bella presenza"[11].

[9] Giorno "per fare i conti" molto utile anche per la costruzione dei calendari: se ne parla anche nel PM di RM043.

[10] Stiamo naturalmente crudelmente ironizzando: le cause possono essere diverse e ragionevolissime, per quanto ne sappiamo: inedite abilità dei chirurghi, difficoltà ad affrontare la spesa, o chissà cos'altro…

[11] Giudizio che condividiamo, specialmente per quanto riguarda l'avverbio.

Le conclusioni dei suoi studi statistici ed economici sulla popolazione inglese erano abbastanza scioccanti, soprattutto leggendo le sue stesse parole:

> *Ogni bambino nato in soprannumero rispetto all'occorrente per mantenere la popolazione al livello necessario deve inevitabilmente perire, a meno che per lui non sia fatto posto dalla morte degli adulti ... pertanto ... dovremmo facilitare, invece di sforzarci stupidamente e vanamente di impedire, il modo in cui la natura produce questa mortalità; e se temiamo le visite troppo frequenti degli orrori della fame, dobbiamo incoraggiare assiduamente le altre forme di distruzione che noi costringiamo la natura ad usare.*

Secondo l'ispiratore del Malthusianesimo – corrente che volle poi tentare di controllare le nascite[12] per interrompere l'impoverimento dell'economia mondiale – la popolazione tenderebbe a crescere in progressione geometrica, quindi più velocemente della disponibilità di alimenti, che crescerebbe invece solo in progressione aritmetica:

> *Invece di raccomandare ai poveri l'igiene, dobbiamo incoraggiare il contrario. Nelle città occorre fare le strade più strette, affollare più persone nelle case, agevolando il ritorno della peste. In campagna occorre costruire i villaggi dove l'acqua ristagna, facilitando gli insediamenti in tutte le zone palustri e malsane. Ma soprattutto occorre deplorare i rimedi specifici alla diffusione delle malattie e scoraggiare quella persone benevole, ma tratte decisamente in inganno, che ritengono di rendere un servizio all'umanità ostacolando il decorso della estirpazione completa dei disordini particolari.*

La teoria sarà poi ripresa da altri economisti per prevedere l'esaurimento del carbone prima, e del petrolio dopo, ma ha l'effetto di una bomba nell'Inghilterra dell'esplosione demografica e colonizzatrice, ispira economisti come Keynes e Ricardo e lo stesso Darwin, che sulla scarsità delle risorse baserà la sua teoria evoluzionista. Ma il primo effetto fu semplicemente quello di scuotere la società inglese, il cui governo finalmente insedia una strategia di censimenti a partire dal 1801, a scadenza decennale, fino al più recente del 2001, con le solite motivazioni venali: conoscere l'entità delle risorse dell'impero e il numero degli uomini abili alla guerra, per la pianificazione della coltivazione di grano e relative importazioni ed esportazioni, per decidere l'intervento militare e supportare l'industria delle assicurazioni.

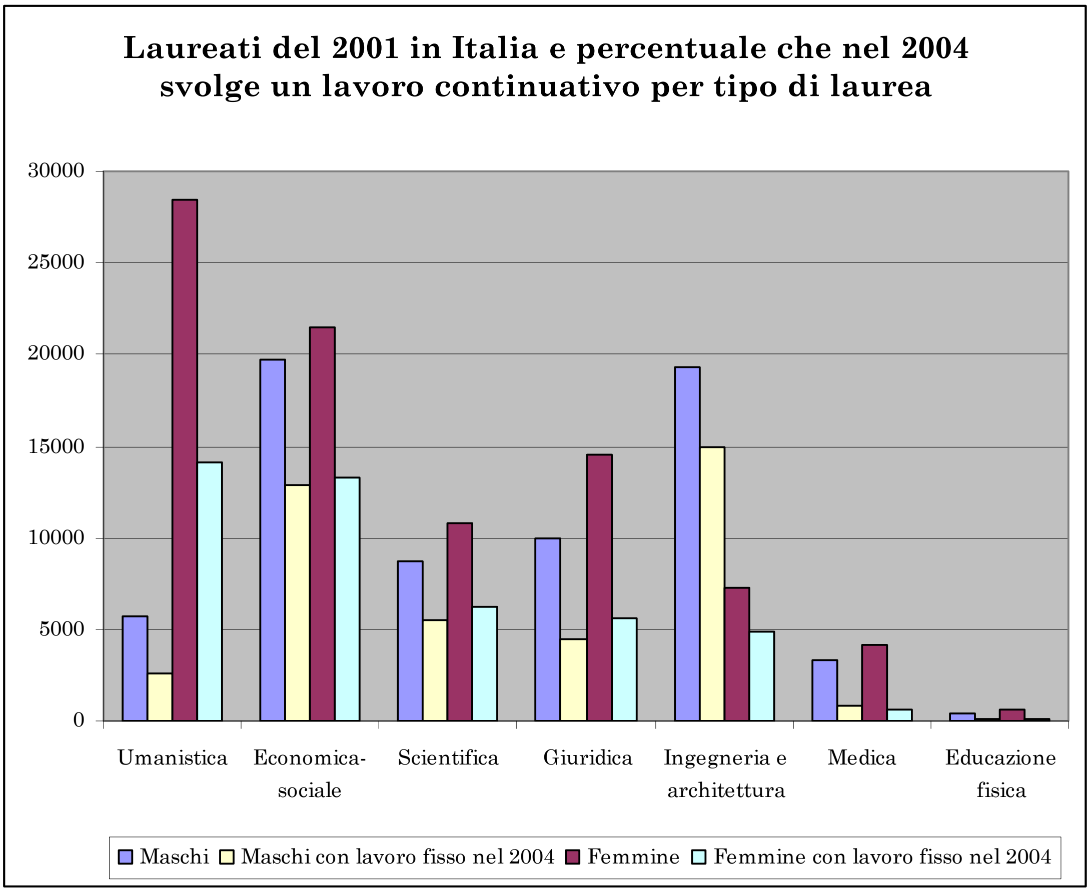
E in Italia? Il primo censimento "italiano" avviene, con sorprendente tempestività, già nel 1861, subito dopo l'unità d'Italia; da allora è stato ripetuto ogni dieci anni con minime eccezioni, e infatti l'ultimo è stato effettuato nel 2001. Dalla sua fondazione, nel 1926, l'organo che se ne occupa è l'ISTAT[13], l'Istituto Nazionale di Statistica collegato istituzionalmente al corrispondente Sistema Statistico Europeo. L'Istituto si occupa di effettuare sia i censimenti totali (quelli decennali) sia i parziali, che sono invece attuati valutando dei campioni. I dati sono pubblici – non più riservati ai soli monarchi come un tempo – e internet li ha resi decisamente più accessibili a tutti.

È cruciale rendersi conto che la lettura statistica dei dati non si limita ad organizzare le informazioni, ma le crea addirittura, almeno sotto un certo punto di vista. È infatti abbastanza evidente che la raffinazione dei dati grezzi consente alla fine il raggiungimento di una conoscenza che sarebbe riduttivo classificare come meramente quantitativa: sembra proprio che sia raggiungibile una specie di nuova lettura anche qualitativa dei dati originali. Per fare un esempio elementare ci siamo procurati i dati dei laureati del 2001 e li abbiamo relazionati per verificare l'usabilità di una laurea. I numeri non dicono molto da soli, ma mettendoli uno vicino all'altro lasciano scoprire parecchie

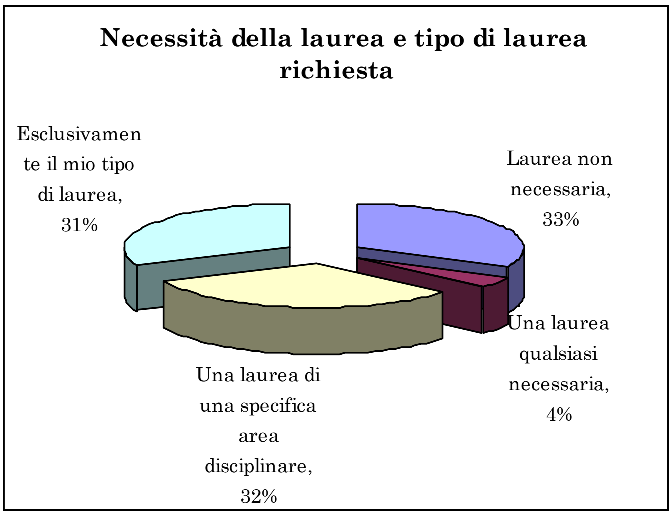
[12] Per i tempi questo significava semplicemente l'esortazione alla castità, ovviamente.

[13] Vi consigliamo il sito internet www.istat.it, da cui si possono ottenere talmente tanti dati che potrebbe tornare utile ricordare il "No Panic" della citazione iniziale. L'abbiamo utilizzato per molti dei dati del compleanno della Scott in RM106, "*Topoi*".

cose: ad esempio che le laureate donne in materie umanistiche sono quattro volte i maschi, e che per la metà di questi laureati (di ambo i sessi) un lavoro stabile è ancora una chimera tre anni dopo la laurea.

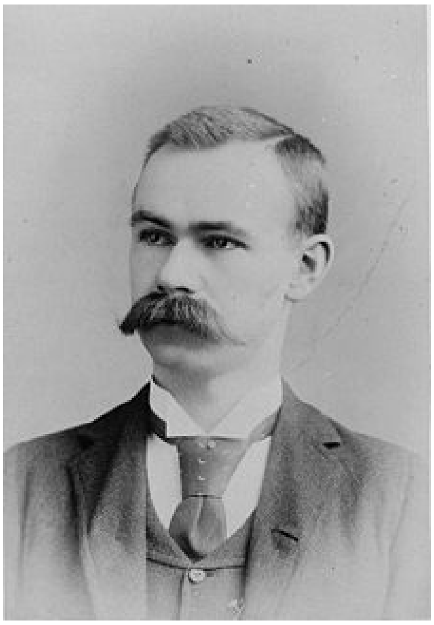



Si scopre che in fondo sono pochi gli studenti che hanno scelto un corso di laurea del comparto medico, e che per loro la percentuale degli impiegati è perfino minore; e i dottori dell'area giuridica non se la passano troppo meglio. I dati non sono incredibilmente aggiornati (la fase di raccolta e integrazione richiede molto tempo), ma anche se sono moderatamente "vecchi", riescono ad essere abbastanza preoccupanti: tra tutti quelli che un lavoro l'hanno trovato, il 33% riporta che la laurea posseduta non ha nessun ruolo nel lavoro ottenuto: ben un terzo! Un altro terzo circa ha acquisito una laurea nella stessa area disciplinare in cui è impiegato, e solo il 31% dei laureati del 2001 ha il titolo di studio esattamente mirato studiato alla professione intrapresa.




Dal dato all'interpretazione c'è comunque parecchia strada, e alla fine del percorso è anche possibile raggiungere conclusioni non necessariamente conclusive. Nel nostro esempio, vale consolarsi con l'idea che in fondo i nostri atenei si dimostrano in grado di fornire agli studenti strumenti e tecniche che tutto sommato sono riutilizzabili anche fuori dall'ambiente originario di applicazione, o dobbiamo solo constatare che verosimilmente la società e l'università sono ancora troppo separate e distanti, con la seconda tutto sommato poco impegnata a verificare i bisogni della prima mentre forma gli studenti? L'importanza di un dato statistico non sta nel suo mero possesso, ma nel suo pratico utilizzo: le poche informazioni sopra esposte dovrebbero confluire in un ben più grande insieme di dati, essere analizzate, integrate e infine cristallizzate in una opportuna riforma del settore. Il confronto tra i dati del 2001 e quelli del 2011 dovrebbe misurare l'effetto della riforma. Sull'onda delle teorie di Malthus, l'Inghilterra iniziò i suoi censimenti decennali nel 1801, e i primi dati vennero subito utilizzati – in modo non troppo diverso da quanto facevano gli antichi – per valutare il peso in termini di uomini e di mezzi delle guerre napoleoniche; forse quei dati servirono a Pitt e a Wellington per decidere di impegnare direttamente i propri uomini solo nelle campagna di Spagna e a Waterloo. La formazione dei nostri studenti non è meno importante d'una campagna napoleonica: c'è da augurarsi che si sappia fare un uso non peggiore dei dati raccolti.

Soprattutto a valle della rivoluzione industriale, i censimenti hanno cominciato ad avere scopi informativi a più ampio spettro, non limitandosi più a contare solo i giovani da mandare alla leva e i pagatori di tasse. Le informazioni richieste crescono, crescono vertiginosamente, perché cresce la necessità di sapere come evolve la società stessa. Negli Stati Uniti i censimenti cominciano nel 1790, e la storia mostra bene come quantità di dati indagati continuasse imperterrita a crescere con il passare degli anni: si arrivò al punto che per riuscire a tabulare e computare i dati grezzi dell'indagine del 1880 ci vollero quasi sei anni. Con il continuo crescere della popolazione e dei dati richiesti, non era difficile prevedere che presto i dati di un censimento non sarebbero stati disponibili prima della scadenza del successivo. Ma per fortuna a questo punto compare la figura di Herman Hollerith.


3 *Herman Hollerith*

Herman Hollerith nacque il 29 febbraio[14] del 1860 a Buffalo. I suoi genitori erano immigrati negli Stati Uniti dalla Germania, e malgrado la spiccata intelligenza ebbe difficoltà iniziali a scuola a causa delle sue difficoltà nello scrivere in inglese, che alla fine lo costrinsero ad essere educato privatamente. A quindici anni si iscrisse al City College di New York, e ottenne la sua laurea in ingegneria mineraria nel 1879 tanto brillantemente[15] che uno dei suoi insegnanti, il professor Trowbridge, gli chiese di diventare suo assistente. Herman lo seguì nei vari incarichi alla Columbia University e poi al Census Bureau (ufficio censimenti), dove venne in contatto con i problemi connessi alla tabulazione dei dati raccolti nel censimento americano del 1880.

Nel 1882 Hollerith andò ad insegnare ingegneria meccanica al Massachusetts Institute of Technology (MIT). L'insegnamento non l'interessava, ma ebbe in quest'occasione modo di investigare il sistema automatico delle macchine per maglieria Jacquard,

[14] Se pensate che potrebbe non essere un caso l'aver deciso di dedicare il compleanno di Febbraio di un anno bisestile ad un matematico nato il 29 Febbraio, potreste aver ragione. Se Herman, al pari di Rossini e del nostro webmaster Yan, festeggiasse il compleanno solo il 29/2, compirebbe 37 anni. Oppure no? Ci fate venire dei dubbi…

[15] Secondo alcune fonti i suoi punti deboli erano ragioneria (book-keeping) e macchine: tenetelo a mente, poi proseguite la lettura…

che permettevano di utilizzare schede perforate per definire il disegno da far riprodurre alla macchina[16]. Iniziò quindi i primi esperimenti per definire il modo ottimale per leggere le schede perforate e per perforarle[17]. Nel frattempo si trovò un altro lavoro, all'ufficio brevetti di Washington: non si sa se avesse avuto un'illuminazione sul futuro o semplicemente fortuna, ma fu questa una delle mosse migliori nella sua carriera. Nel 1884 otteneva il suo primo brevetto sul metodo che aveva sviluppato al MIT per convertire l'informazione su schede perforate in impulsi elettrici, che a loro volta attivavano contatori meccanici; questo fu solo il primo di una serie di 30 brevetti ottenuti da Hollerith.

4 *Hollerith Electric Tabulator, US Census Bureau, Washington, DC, 1908*

Una volta creata la macchina per leggere le schede perforate, si dedicò alla costruzione di una macchina perforatrice che permettesse di utilizzare al meglio le potenzialità delle schede (tanto per dire, la punzonatrice del controllore del treno poteva far fori solo lungo il bordo delle schede, e questa era una ovvia limitazione). Il suo sistema si chiamò "Hollerith Electric Tabulating System" e finì con l'essere uno dei tre a concorso per l'impiego nel censimento del 1890: bastarono poche prove sul campo e fu chiaro che la macchina di Hollerith era la più veloce, e le altre vennero messe da parte. Del resto, le prove effettuate con le statistiche di mortalità di Baltimora nel 1887 l'avevano già resa celebre ed era infatti la macchina più utilizzata, ma per il censimento Hollerith dovette far costruire le macchine perforatrici e calcolatori apposta. I dati completi del censimento arrivarono a settembre del 1890 e furono tabulati completamente in tre mesi: la macchina di Hollerith potè orgogliosamente affermare che il 12 dicembre 1890 la popolazione degli Stati Uniti era di 62'622'250 abitanti[18].

Herman nel frattempo non aveva perso i contatti con il mondo accademico, e sottoponeva nello stesso anno una tesi di dottorato sul suo sistema di tabulazione, ottenendo il titolo accademico lo stesso anno in cui la sua invenzione provava il suo valore su più di sessantadue milioni di schede. Fu un anno felice per Hollerith: lo coronò sposando Lucia Beverly Talcott, da cui ebbe sei figli e con la quale condusse una vita serena.

[16] Si tratta dello stesso telaio meccanico che tanto impressionò Ada Lovelace, e che citiamo anche nel compleanno dedicato a lei e a Charles Babbage [RM059, *La Farina di Ofelia*]

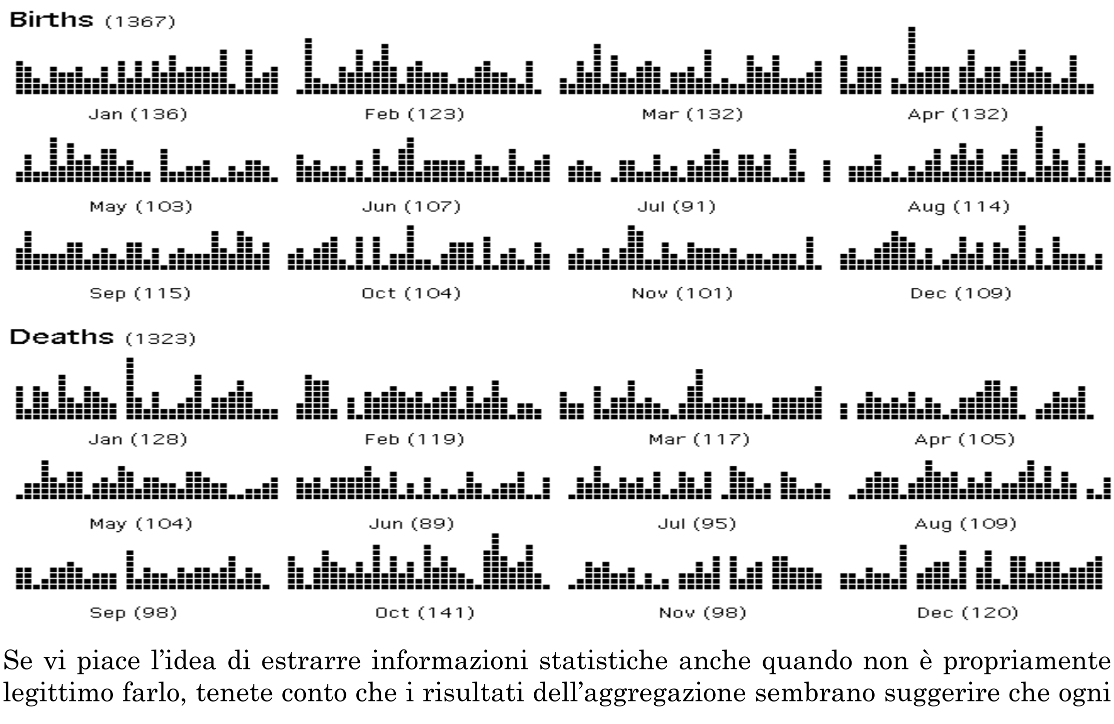
[17] Pare che l'idea per la perforatrice gli sia venuta osservando un controllore perforare il suo biglietto del treno.

[18] Dei censimenti americani (e di Hollerith) si parla anche nel PM "Era meglio se era piatta" di RM083. Tra l'altro, i dati richiesti erano: maschi e femmine maggiori di 16 anni (2 dati); maschi e femmine minori di 16 anni (2 dati); altre persone libere; schiavi. E basta. [RdA]

La macchina aveva fatto risparmiare al governo americano cinque milioni di dollari dell'epoca, e forte di questa pubblicità fu impiegata per i censimenti del 1891 in Canada, in Norvegia e in Austria; l'Inghilterra la adottò invece nel 1911. Il suo inventore collezionò premi prestigiosi come la Elliot Cresson Medal dal Franklin Institute di Filadelfia, la Medaglia d'Oro all'esposizione di Parigi e la Medaglia di Bronzo alla Fiera Mondiale del 1893. Forte della popolarità sua e dei suoi brevetti Hollerith fondò le Tabulating Machine Company nel 1896, che produceva macchine di calcolo che continuavano nel frattempo a diventare sempre più efficienti e più veloci. Il suo era di fatto un monopolio, e non si può dire che Herman non ne approfittasse: quando il governo dovette affittare le macchine per il censimento del 1900, il loro costo era tale che sarebbe costata forse meno la raccolta manuale dei dati. L'ufficio brevetti allora corse al contrattacco: un certo James Powers[19] costruì una macchina alternativa a quella di Hollerith e fu in grado di perfezionarla in tempo per il 1910. Powers era riuscito a registrare il brevetto a suo nome e procedette ad aprire la sua "Powers Tabulating Machine Company", degna avversaria ed alternativa alla compagnia di Herman.

La Tabulating Machine Company attraversò così un periodo difficile, dove Herman affrontò anni di litigi e processi con il governo americano, fino al punto di decidere di associarsi ad un brillante uomo d'affari, Thomas J. Watson, che rilevò la gestione dell'azienda e risollevò le sue sorti. Hollerith non aveva mai amato la parte di gestione dell'azienda e fu contento di restare come principale riferimento tecnico; l'azienda riuscì a ritrovare il suo ruolo di fornitore primario del governo entro il 1920, ed Herman decise infine di andarsene in pensione l'anno successivo. Tre anni dopo, la sua compagnia decise di cambiare nome e assunse quello di International Business Machines[20] Corporation. Morì di un attacco al cuore il 17 novembre del 1929.

Uno dei migliori siti di storia della matematica, quello dell'università St. Andrews[21], riporta il grafico delle nascite (*births*) e morti (*deaths*) di tutti i matematici contenuti nel database.




Se vi piace l'idea di estrarre informazioni statistiche anche quando non è propriamente legittimo farlo, tenete conto che i risultati dell'aggregazione sembrano suggerire che ogni

[19] Anche lui impiegato all'ufficio brevetti.

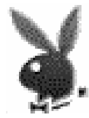
[20] Avete dodici centesimi di secondo per riconoscere l'acronimo. No, forse sono troppi…

[21] Lo abbiamo diligentemente riportato nella pagina dei link del nostro sito. Lo trovate lì, se siete curiosi.

coppia che voglia produrre valente prole matematica dovrebbe concentrare i propri sforzi per ottenere una nascita nei primi mesi dell'anno, mentre tutti i matematici che il successo l'hanno già ottenuto dovrebbero stare attenti alla salute dalle parti di ottobre.

Siete avvertiti.

# 2. Problemi

| | Rudy d'Alembert | Alice Riddle | Piotr R. Silverbrahms |
|---|---|---|---|
| Qualcosa è cambiato |  |  |  |
| Un altro vecchio problema |  |  |  |

## 2.1 Qualcosa è cambiato

*[...] Notre jeunesse est enterrée*
*Au fond d'un vieux calendrier*
*Ce n'est plus qu'en fouillant la cendre*
*Des beaux jours qu'il a contenus*
*Qu'un souvenir pourra nos rendre*
*La clef des paradis perdus.*
Henry MURGER,
"Scènes de la vie de bohème"

...e sempre per restare sul francese, Rudy ha un po' di spleen (lo dice Baudelaire, quindi è francese).

Cominciamo dalla citazione: Rudy non ascolta mai l'opera lirica perché va sempre a finire male. Le uniche cose in questo campo che conosce e sopporta sono il "Flauto Magico" e il "Fidelio". Tra l'altro, se ne conoscete qualcun'altra che vada a finire bene fateglielo sapere: per lui il disamore è tale che non ha neanche voglia di cercarle, e questo è uno di quei pregiudizi radicati fin dalla gioventù[22]. Quella che proprio gli sta sulle scatole (grazie alla sua prof di Italiano, madre di un ottimo baritono[23]) è "La Bohème": la prof ebbe infatti a chiarirgli il concetto che quello rappresentato nell'opera lirica è *l'unico capitolo che va a finire male* di un libro decisamente allegro e divertente. Se lo trovate (Rudy ha l'edizione BUR in cartaccia grigia: volume quadruplo, lire ottocento) non lasciatevelo scappare.

Bene, ripartiamo.

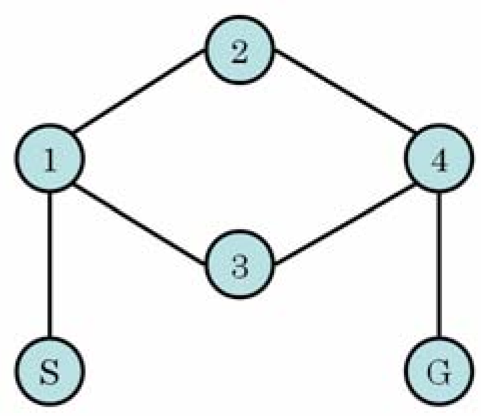
A dicembre Rudy stava giustappunto compulsando i *vieux calendriers* di una Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa, onde evitare di pubblicare qualche barzelletta già presentata, quando si è ritrovato tra le mani un problema di quelli olimpici; vi ricordiamo che all'epoca questi problemi erano considerati veramente tosti e non ne davamo (né ci aspettavamo) soluzioni. Bene, giudicate voi, possibilmente ignorando la valutazione in

[22] *E pregiudizio, per quel che mi è dato sapere, infondato: di opere liriche che finiscono bene ce ne sono una marea. Di Rossini, ad esempio, è impossibile trovarne una che finisca male, o quasi: quel tragicone di Puccini ha fatto comunque la Turandot, che finisce bene; Verdi, poi, ha secondo me più o meno lo stesso rate di Skakespeare, nel bilancio tragedie/commedie. [PRS]*

[23] ...e se Rudy avesse usato un'altra parola avreste avuto un indizio per indovinare chi è *[RdA]*.

birre di Alice (sapete che lei, se si parla di probabilità, chiude orecchie & cervello) e il fatto che pochi mesi fa ne abbiamo presentato uno simile ma più semplice.

Un videogioco ha sullo schermo il disegno qui di fianco.




All'inizio, la pallina è su "S". Ad ogni impulso da parte del giocatore, la pallina si sposta in una delle posizioni vicine, con probabilità uguale per ogni mossa.

Il gioco finisce quando:

1. La pallina torna in "S", e il giocatore perde.
2. La pallina raggiunge "G", e il giocatore vince.

Calcolare:

1. La probabilità per un giocatore di vincere
2. Il numero medio di mosse per ogni partita.

...insomma, ci sembra che a difficoltà dei problemi siano cambiati un attimo i giudizi... Fateci sapere se siete d'accordo.

## 2.2 Un altro vecchio problema

Sarà che il tempo in questi giorni spinge a starsene seduti davanti ad un caminetto pensando ai bei tempi andati, sarà che ci è preso un attacco di nostalgia (primo sintomo della demenza senile: su questo punto, ci stiamo portando avanti col progetto), ma anche questo nasce da un vecchio problema.

Cominciamo parlando d'altro: qual è (secondo voi) la barzelletta più bella che conoscete?

Rudy non ha dubbi: è "Cosa dice il pinguino all'eschimese?".

Bene, un po' per i ricordi di cui sopra, un po' per una serie di altri motivi (Rudy sta lavorando su una cosa di cui non ha intenzione di parlare sino alla fine; non lo ha detto neanche a Alice e a Doc), si è trovato a lavorare con una serie di problemini piuttosto interessanti. Come al solito ha le soluzioni, ma forte del fatto che voi siete specialisti nel trovare vie più rapide delle sue (al momento, i suoi calcoli hanno l'agilità di un brontosauro con l'artrite), ve li propone e sta a vedere.

Supponiamo una Terra perfettamente sferica, di raggio opportuno.

Partiamo dal punto in cui l'equatore incrocia il meridiano di Greenwich e cominciamo a camminare verso Nord-Ovest, intenzionati a raggiungere il Polo Nord. Quanto è lunga la nostra passeggiata?

Siccome saranno necessari "un po'" di giri attorno, quanto siamo lontani dal Polo quando incrociamo per la prima volta (la partenza non conta) il meridiano di Greenwich?

Ferma tutto! La bussola che stiamo usando è completamente andata! Infatti, dice "Nord-Ovest", ma in realtà sta indicando "Nord-Nord-Ovest" (22,5 gradi da Nord, caso mai non abbiate voglia di fare il conto)! In questo caso, quali sono le risposte alle domande precedenti?

Eh? Quale pinguino? Ah, quello. Dice "Uno dei due si è perso di brutto".

# 3. Bungee Jumpers

Provate che se tutti i coefficienti dell'equazione quadratica $ax^2 + bx + c = 0$ sono interi dispari, allora le sue radici non sono razionali.

*La soluzione, a "Pagina 46"*

# 4. Soluzioni e Note

La semplice esistenza di queste soluzioni e note è piuttosto pericolante: se c'è qualcosa di importante che dobbiamo dirvi ce ne dimentichiamo quasi sempre, e se ci ricordiamo sbagliamo spesso le citazioni. Comunque non possiamo dimenticare che ***Randall***, il nostro corrispondente dalla Germania, è stato alla conferenza di un premio Nobel, Peter Grünberg, e ci ha mandato un breve resoconto:

> Mi pareva il minimo fare un piccolo riassunto del talk... in tedesco (ci avrò capito sì e no il 20%). Comunque fortuna che l'argomento non mi era nuovo (Giant Magnetoresistance) ho seguito più o meno la discussione.
>
> Grünberg è un vecchietto dall'aria dolce e dall'aspetto di un piccolo burocrate prussiano. Parla con meticolosità macinando sistematicamente le sue slide. Voce bassa e sguardo miope... il perfetto topo da biblioteca.
>
> Ha toccato i principali punti partendo dalle sue prime misure con spettroscopia di Brillouin e poi proseguendo con le onde di spin in eterostrutture fino alla GMR e alle sue applicazioni (con anche uno sguardo sul futuro, l'idea di una elettronica integralmente basata su spin, la spintronic). Insomma talk interessante anche se un po' tecnico per il tipo di pubblico (molto vario).

Per il resto gennaio è stato piuttosto breve, siamo usciti con premeditato e indecente ritardo, e di tempo per ricevere e rielaborare grandi notizie non ce n'è stato. Quindi soprassediamo, forse a marzo troveremo un po' di lucidità per raccontarvi le novità del mese e le incredibili mail che ultimamente arrivano in Redazione, per il momento vi ringraziamo perché continuate a seguirci con affetto e passiamo direttamente alla parte di soluzioni.

## 4.1 [106]

### 4.1.1 Non dovrebbe stare qui

Come promesso pubblichiamo qui la proposta di estensione e le considerazioni di ***Antonio***, visto che nessuno ha tentato di risolvere.

> Rivisitiamo il problema in esame e re-interpretiamolo come n lanci di una moneta, testa o croce, senza limitazione sull'ugual numero di teste e croci (n carte Rosse = n carte Nere, come nel problema 2.1_RM106 originale).
>
> Ad ogni k-esimo lancio, il nostro punto materiale, che parte dalla posizione iniziale $a_0 = 1$, si sposta verso sinistra o destra, in funzione dell'uscita di testa o croce, di una quantità pari a $\frac{(-1)^{n_k}}{k+1}a_{k-1}$, e giunge nella nuova posizione
>
> $$a_k = a_{k-1}\left[1 + \frac{(-1)^{n_k}}{k+1}\right]$$
>
> con $k = 1, \dots, n$ e con $n_k = \begin{cases} 1 \text{ se nel lancio esce Testa} \\ 2 \text{ se nel lancio esce Croce} \end{cases}$.
>
> La posizione finale dopo n lanci, ponendo, senza perdere di generalità, $a_0 = 1$, è

$$\bar{a} = a_n = \prod_{k=1}^{n} \left[ 1 + \frac{(-1)^{m_k}}{k+1} \right]$$

E qui cominciano a sorgere problemi che, in base alle mie conoscenze, ritengo insormontabili.

Sia dato uno "scenario" di n lanci con esiti T o C. Dati n lanci, ce ne sono ben $2^n$ di questi possibili scenari. La probabilità P(n,j) che in tale scenario escano, per esempio, j Teste è data, come è noto, dalla distribuzione binomiale

$$P(n,j) = \binom{n}{j} \frac{1}{2^n} = \frac{n!}{(n-j)!\,j!} \cdot \frac{1}{2^n}$$

Il problema comincia già qui a complicarsi perché, in base alle posizioni di uscita delle j Teste all'interno dello scenario degli n lanci, cambia la posizione finale. È di fatto impossibile legare a P(n,j) tale posizione finale.

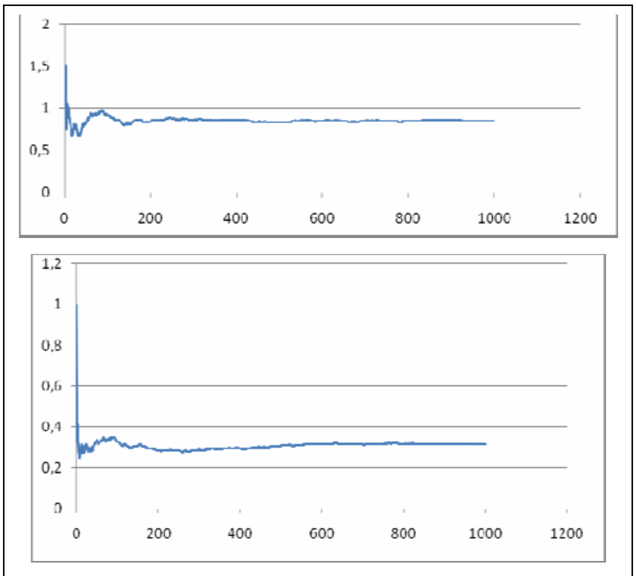
Prendiamo in considerazione, per esempio, il caso n=4, che prevede i $2^4 = 16$ possibili scenari e i corrispondenti valori di $\bar{a}$ riportati nella seguente tabella.

| Scenario | j = numero di T | Uscite in sequenza | P(4,j) | $\bar{a}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | C C C C | 0,0625 | 3 |
| 2 | 1 | T C C C | 0,25 | 1 |
| 3 | | C T C C | | 1,5 |
| 4 | | C C T C | | 1,8 |
| 5 | | C C C T | | 2 |
| 6 | 2 | T T C C | 0,375 | 0,5 |
| 7 | | T C T C | | 0,675 |
| 8 | | T C C T | | 0,66667 |
| 9 | | C T T C | | 0,9 |
| 10 | | C T C T | | 1 |
| 11 | | C C T T | | 1,2 |
| 12 | 3 | T T T C | 0,25 | 0,3 |
| 13 | | T T C T | | 0,33333 |
| 14 | | T C T T | | 0,45 |
| 15 | | C T T T | | 0,6 |
| 16 | 4 | T T T T | 0,0625 | 0,2 |

Si può notare, dall'analisi della tabella, che la posizione finale non è in alcun modo legata a P(n,j), ma piuttosto alla sequenza di uscita, che, se pur prevedibile in quanto a probabilità, è del tutto casuale.

Lascio immaginare i casi in cui il numero n di lanci cresce.

D'altro canto, quello che si può dire della posizione finale quando il numero n di lanci cresce è che a essa vi si giunge mediante una successione convergente di valori di $a_k$. La cosa è abbastanza ovvia, poiché, malgrado la casualità dei vari passi verso destra o sinistra, ogni passo è proporzionale a $\frac{1}{k+1}$, e quindi il suo valore tende a zero all'aumentare di k.



5 *Le simulazioni di Antonio*

Ho elaborato alcune simulazioni numeriche con $n = 1000$ lanci, riproducendo sequenze casuali di T e C e riportando per ognuna il grafico dei valori di in funzione di k. I grafici seguenti sono l'espressione di alcune di queste simulazioni:

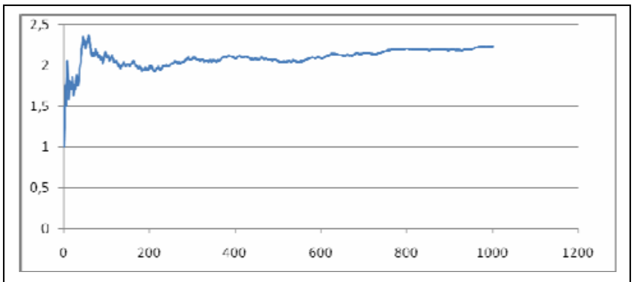
Si può notare come, dopo un transitorio, la successione degli $a_k$ tenda comunque a convergere ma a valori del tutto casuali e in nessun modo riconducibile al particolare "scenario" tra i tanti possibili.

A conclusione di questa breve nota, che purtroppo non può essere esaustiva o definitiva sul problema affrontato, possiamo dedurre che:

1. La determinazione del punto di arrivo $\bar{a}$ è fortemente dipendente dal modo in cui si presentano, in sequenza, le uscite di T e C, e quindi il valore di è del tutto casuale;

2. Non è possibile legare il valore di alla probabilità P(n,j) di uscita di un certo "scenario", poiché, anche in casi elementari di n piccoli, scenari che si presentano con la stessa probabilità danno luogo a valori distinti di $\bar{a}$.

3. Per quelle che sono le mie conoscenze, ritengo che il problema generale non sia risolubile. Ma sarei ben felice di sbagliarmi



6 *Le simulazioni di Antonio*

Ovvio che tutti i contributi ulteriori che arrivano ci fanno piacere, ma soprattutto farebbero piacere ad ***Antonio***.

## 4.2 [108]

I problemi del mese scorso erano in soprannumero, e non sono stati molto fortunati dal punto di vista dei solutori... ma noi pubblichiamo quello che è arrivato e speriamo per il futuro.

### 4.2.1 Il gioco della fontana

Quando il gioco si fa duro, sono i Duri e Rudi che non si fanno mai indietro. Avrete già capito che i solutori di questo problema sono stati ***Cid*** e ***Trekker***. Cominciamo con ***Cid***:

Non esistono soluzioni possibili, poiché nelle condizioni iniziali le quattro monete di almeno una delle tre vasche hanno un numero pari di monete che mostrano il *recto*, mentre nella condizione finale tutte e tre le vasche hanno un numero dispari di monete che mostrano il *recto*.

Infatti, la mossa FLIP lascia immutata la parità del numero di monete che mostrano il *recto* in ciascuna vasca.

Invece la mossa CANC può variare la parità del numero di monete che mostrano il *recto* in una delle tre vasche, ma sicuramente fa anche si che nella vasca in cui viene eseguita il numero di monete che mostrano il *recto* diventi un numero pari.

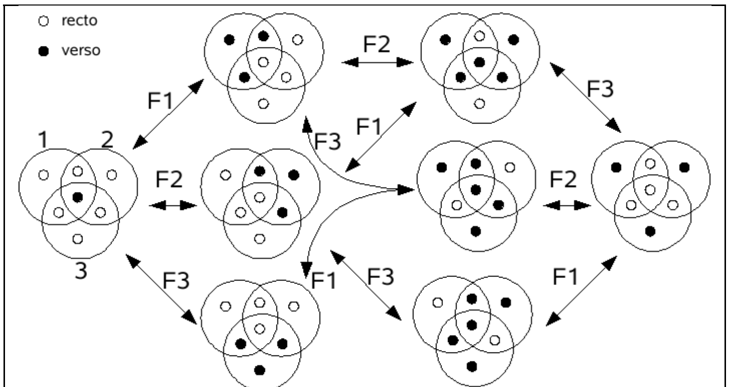
Per cui, si possono trarre le seguenti conclusioni:

- se si eseguono solo mosse FLIP, la vasca che aveva inizialmente un numero pari di monete che mostrano il *recto*, continuerà ad avere un numero pari di monete che mostrano il *recto*; siccome nella condizione finale tutte e tre le vasche hanno un numero dispari di monete che mostrano il *recto* si deduce che eseguendo solo mosse FLIP non esiste una soluzione valida.
- se la mossa CANC è l'ultima mossa, la moneta centrale mostrerà il *recto*; siccome nella condizione finale la moneta centrale mostra il *verso* si deduce che se la mossa CANC è l'ultima mossa non esiste una soluzione valida.
- se la mossa CANC non è l'ultima mossa, dopo l'ultima mossa CANC tutte le monete della vasca in cui è stata eseguita l'ultima mossa CANC avranno un numero pari di monete che mostrano il *recto*, in quanto la mossa CANC porta a 4 il numero di monete che mostrano il *recto* in quella vasca e tutte le successive mosse FLIP non variano la parità delle monete che mostrano il *recto* in quella vasca; siccome nella condizione finale tutte e tre le vasche hanno un numero dispari di monete che mostrano il *recto* si deduce che eseguendo solo mosse FLIP non esiste una soluzione valida.

Se ***Cid*** è stato in questa occasione molto sintetico, ***Trekker*** ci fornisce questa volta molte figure:

Diciamo che il cerchio/vasca in alto a sinistra è il numero 1, il cerchio/vasca in alto a destra è il numero 2 ed il cerchio/vasca in basso è il numero 3. Indichiamo con C1, C2 e C3 le mosse che portano a *recto* visibile rispettivamente le monete nei cerchi/vasca 1,2 e 3. Analogamente siano F1, F2 ed F3 le mosse che girano le monete rispettivamente nei cerchi/vasca 1, 2 e 3.

La condizione finale di moneta al centro *verso* visibile non si può ottenere con una mossa C1 o C2 o C3 precedente perché questo tipo di mossa porta sempre la moneta al centro ad essere di *recto*. Quindi la mossa precedente deve essere per forza un FLIP. Per simmetria possiamo assumere che la mossa sia F1. Ora la moneta comune alla vasche 1 e 2 (ma non alla 3) e la moneta comune alle vasche 1 e 3 (ma non alla 2) sono di *verso*. Di nuovo non possiamo raggiungere questo stato provenendo da una mossa di cancellazione C1 o C2 o C3 ma, necessariamente, da un'altra operazione di FLIP applicata ai cerchi/vasca 2 o 3. Insomma continuando il ragionamento si ottiene il grafo seguente.

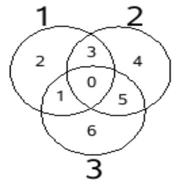


7 *Il grafo di Trekker*

In pratica quindi NON è possibile raggiungere la configurazione con la sola moneta interna di *verso* partendo da una configurazione con tutte le monete di *recto*. E lo stesso vale per una configurazione iniziale di quattro monete di *recto* in una vasca e le altre qualsiasi (infatti anche questa configurazione non è presente nel grafo di cui sopra).

Si noti che si può costruire un grafo "duale" del precedente trasformando le monete di *recto* con monete di *verso*, e viceversa.

Potrebbe essere interessante allora scoprire quali configurazioni sono invece raggiungibili partendo dalla condizione iniziale con tutte le monte di *recto*. Per fare questo "indicizziamo" le monete da 0 a 6 come da figura.



8 *Le monete indicizzate di Trekker*

Per ogni configurazione di monete costruiamo un numero binario di sette cifre mettendo 0 e 1 - a seconda che la singola moneta sia rispettivamente di *recto* o di *verso* - nella posizione corrispondente all'indice associato alla moneta. Così ad esempio alla condizione iniziale con le monete tutte di *recto* corrisponde il numero binario 0000000 ed alla condizione di arrivo voluta con l'unica moneta centrale di verso corrisponde il numero binario 0000001.

Le funzioni C1, C2, C3, F1, F2 ed F3 in pratica trasformano un numero binario in un altro. Utilizzando un foglio di calcolo, senza troppi sforzi, possiamo costruire una tabella come l'estratto di cui sotto (dove, per comodità i numeri binari sono stati trasformati in base 10):

| Binario di partenza | Corrispondente decimale di partenza | Applicando C1 (decimale di arrivo) | Applicando C2 (decimale di arrivo) | Applicando C3 (decimale di arrivo) | Applicando F1 (decimale di arrivo) | Applicando F2 (decimale di arrivo) | Applicando F3 (decimale di arrivo) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0000000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 15 | 57 | 99 |
| 0000001 | 1 | 0 | 0 | 0 | 14 | 56 | 98 |
| 0000010 | 2 | 0 | 2 | 0 | 13 | 59 | 97 |
| 0000011 | 3 | 0 | 2 | 0 | 12 | 58 | 96 |
| 0000100 | 4 | 0 | 4 | 4 | 11 | 61 | 103 |
| 0000101 | 5 | 0 | 4 | 4 | 10 | 60 | 102 |
| 0000110 | 6 | 0 | 6 | 4 | 9 | 63 | 101 |
| 0000111 | 7 | 0 | 6 | 4 | 8 | 62 | 100 |
| 0001000 | 8 | 0 | 0 | 8 | 7 | 49 | 107 |
| 0001001 | 9 | 0 | 0 | 8 | 6 | 48 | 106 |
| 0001010 | 10 | 0 | 2 | 8 | 5 | 51 | 105 |
| 0001011 | 11 | 0 | 2 | 8 | 4 | 50 | 104 |
| 0001100 | 12 | 0 | 4 | 12 | 3 | 53 | 111 |
| 0001101 | 13 | 0 | 4 | 12 | 2 | 52 | 110 |
| 0001110 | 14 | 0 | 6 | 12 | 1 | 55 | 109 |
| 0001111 | 15 | 0 | 6 | 12 | 0 | 54 | 108 |
| 0010000 | 16 | 16 | 0 | 16 | 31 | 41 | 115 |
| Etc | Etc | Etc | Etc | Etc | Etc | Etc | Etc |

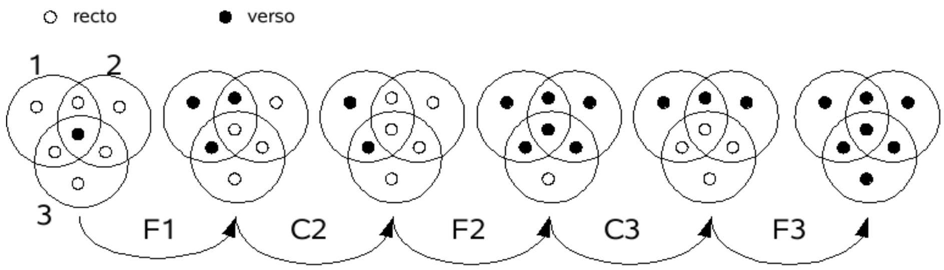
Se ad esempio si partisse da $0001111_b$ = 15 (vasca numero 1 con tutte monete di *verso* ed il resto delle monete di *recto*) applicando F3 si arriverebbe a 108 = $1101100_b$.

A questo punto possiamo costruire un'altra tabella (le cui colonne sono "**Da**", "**Con**", "**A**", "**Step**") che indica quanti step (="Step") sono necessari per raggiungere una certa configurazione (="A"), quale è la configurazione precedente (="Da") e con quale mossa finale vi si arriva (="Con").

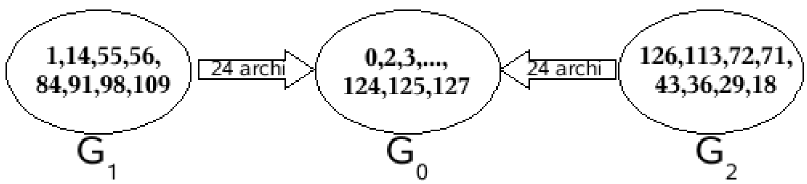
Ad esempio partendo da 0 si può raggiungere in uno step i nuovi (a parte lo zero) numeri 15 (con F1), 57 (con F2) e 99 (con F3). E questo sicuramente è il cammino minimo per raggiungerli. Etichettiamo quindi la tabella nei punti 15,57 e 99 (in colonna "A") mettendo 0 come predecessore (in colonna "Da"), step uguale ad 1 (in colonna "Step") e le corrispondenti mosse F1, F2,F3 (in colonna "Con"). Analogamente partendo da 57 si possono raggiungere i (nuovi) numeri 48,24,54,90 rispettivamente con C1, C3, F1, F3. Etichettiamo quindi il numero 48 con Da=57, Con=C1, A=48, Step=2. Procediamo finché non abbiamo etichettato tutti i numeri con Step=1. Poi rifacciamo con tutti i numeri con Step=2, etc. fino a che non si riesce più a progredire. La *tabella dei cammini minimi* finale diventa:

| Da | Con | A | Step | Da | Con | A | Step | Da | Con | A | Step | Da | Con | A | Step |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 0 | 33 | C1 | 32 | 4 | 66 | C1 | 64 | 3 | 99 | C1 | 96 | 2 |
| | | 1 | | 24 | F2 | 33 | 3 | 34 | F3 | 65 | 6 | 2 | F3 | 97 | 5 |
| 3 | C2 | 2 | 4 | 27 | F2 | 34 | 5 | 99 | C2 | 66 | 2 | | | 98 | |
| 12 | F1 | 3 | 3 | 66 | F3 | 35 | 4 | 32 | F3 | 67 | 5 | 0 | F3 | 99 | 1 |
| 6 | C3 | 4 | 3 | | | 36 | | 108 | C2 | 68 | 3 | 7 | F3 | 100 | 6 |
| 10 | F1 | 5 | 6 | 28 | F2 | 37 | 5 | 38 | F3 | 69 | 6 | 6 | F3 | 101 | 3 |
| 15 | C2 | 6 | 2 | 31 | F2 | 38 | 5 | 111 | C2 | 70 | 4 | 95 | F2 | 102 | 5 |
| 8 | F1 | 7 | 5 | 68 | F3 | 39 | 4 | | | 71 | | 4 | F3 | 103 | 4 |
| 9 | C3 | 8 | 4 | 39 | F1 | 40 | 5 | | | 72 | | 103 | F1 | 104 | 5 |
| 6 | F1 | 9 | 3 | 16 | F2 | 41 | 4 | 70 | F1 | 73 | 5 | 80 | F2 | 105 | 4 |
| 51 | F2 | 10 | 5 | 19 | F2 | 42 | 6 | 41 | F3 | 74 | 5 | 9 | F3 | 106 | 4 |
| 4 | F1 | 11 | 4 | | | 43 | | 68 | F1 | 75 | 4 | 8 | F3 | 107 | 5 |
| 15 | C3 | 12 | 2 | 35 | F1 | 44 | 5 | 47 | F3 | 76 | 6 | 15 | F3 | 108 | 2 |
| 2 | F1 | 13 | 5 | 20 | F2 | 45 | 4 | 66 | F1 | 77 | 3 | | | 109 | |
| | | 14 | | 23 | F2 | 46 | 4 | 45 | F3 | 78 | 5 | 13 | F3 | 110 | 6 |
| 0 | F1 | 15 | 1 | 32 | F1 | 47 | 5 | 64 | F1 | 79 | 4 | 12 | F3 | 111 | 3 |
| 24 | C1 | 16 | 3 | 57 | C1 | 48 | 2 | 90 | C1 | 80 | 3 | 123 | C1 | 112 | 4 |
| 30 | F1 | 17 | 6 | 8 | F2 | 49 | 5 | 50 | F3 | 81 | 6 | | | 113 | |
| | | 18 | | 61 | F1 | 50 | 5 | 49 | F3 | 82 | 6 | 75 | F2 | 114 | 5 |
| 28 | F1 | 19 | 5 | 80 | F3 | 51 | 4 | 48 | F3 | 83 | 3 | 16 | F3 | 115 | 4 |
| 54 | C3 | 20 | 3 | 13 | F2 | 52 | 6 | | | 84 | | 23 | F3 | 116 | 4 |
| 26 | F1 | 21 | 6 | 12 | F2 | 53 | 3 | 54 | F3 | 85 | 3 | 22 | F3 | 117 | 7 |
| 25 | F1 | 22 | 6 | 15 | F2 | 54 | 2 | 53 | F3 | 86 | 4 | 79 | F2 | 118 | 5 |
| 24 | F1 | 23 | 3 | | | 55 | | 52 | F3 | 87 | 7 | 20 | F3 | 119 | 4 |
| 57 | C3 | 24 | 2 | | | 56 | | 59 | F3 | 88 | 6 | 27 | F3 | 120 | 5 |
| 32 | F2 | 25 | 5 | 0 | F2 | 57 | 1 | 96 | F2 | 89 | 3 | 64 | F2 | 121 | 4 |
| 35 | F2 | 26 | 5 | 3 | F2 | 58 | 4 | 57 | F3 | 90 | 2 | 25 | F3 | 122 | 6 |
| 20 | F1 | 27 | 4 | 2 | F2 | 59 | 5 | | | 91 | | 24 | F3 | 123 | 3 |
| 63 | C3 | 28 | 4 | 51 | F1 | 60 | 5 | 63 | F3 | 92 | 4 | 31 | F3 | 124 | 5 |
| | | 29 | | 4 | F2 | 61 | 4 | 62 | F3 | 93 | 7 | 68 | F2 | 125 | 4 |
| 39 | F2 | 30 | 5 | 7 | F2 | 62 | 6 | 61 | F3 | 94 | 5 | | | 126 | |
| 16 | F1 | 31 | 4 | 6 | F2 | 63 | 3 | 80 | F1 | 95 | 4 | 28 | F3 | 127 | 5 |

Se ad esempio partendo da $0000000_b = 0$ si volesse raggiungere $1111111_b = 127$ (cioè partendo da tutte le monete di *recto* si volessero ottenere tutte le monete di *verso*) dalla tabella troveremmo che 127 è raggiungibile in 5 step, precisamente: 127 è raggiungibile da 28 applicando F3; 28 è raggiungile da 63 applicando C3; 63 è raggiungibile da 6 applicando F2; 6 è raggiungibile da 15 applicando C2 e 15 è raggiungibile da 0 applicando F1. In pratica la sequenza delle operazioni che portano da $0000000_b = 0$ a $1111111_b = 127$ è : F1(0)=15, C2(15)=6, F2(6)=63, C3(63)=28, F3(28)=127.




Dalla tabella si nota che le configurazioni dell'insieme $S_1$={1,14,55,56,84,91,98,109} non sono raggiungibili da 0 (ma sono raggiungibili fra di loro, come si può facilmente osservare dal primo grafo discusso in questa soluzione). Analogamente le configurazioni dell'insieme $S_2$={126,113,72,71,43,36,29,18}, complemento a 127 di quelle in $S_1$, non sono raggiungibili da 0 (ma sono raggiungibili fra di loro). In pratica il grafo G delle 128 configurazioni (e degli archi che le collegano) si può scomporre in tre sotto-grafi: il primo sotto-grafo, e sia $G_1$, contenente i nodi di $S_1$, il secondo sotto-grafo, e sia $G_2$, contenente i nodi di $S_2$ ed infine il sotto-grafo $G_0$ contenente i nodi restanti. Partendo da $G_1$ si può sempre raggiungere qualunque nodo di $G_0$ (ad esempio applicando "quanto basta" C1 e/o C2 e/o C3 fino a raggiungere lo 0 e poi sfruttando la tabella dei cammini minimi), ma non viceversa. Ovvero, se si è finiti in una configurazione di $G_0$ .... non se ne esce più (almeno con le operazioni elementari consentite). Analogamente per $G_2$.



Il metodo proposto ovviamente consente di trovare gli insiemi raggiungili (o non raggiungibili) anche qualora venissero definite mosse diverse da quelle proposte, ad esempio:

- FLIP delle monete comuni ad almeno due vasche;
- CANC (ovvero *recto* visibile) delle monete esterne delle tre vasche;
- ROTAZIONE delle monete di una vasca;
- etc

e per vasche, magari di forme varie e con intersezioni più complesse, contenenti molte più monete.

Così potete trattare tutte le fontane che volete...

### 4.2.2 Arrivati tardi

Numerosi gli interventi su questo problemino nato già un po' in ritardo: ***Emanuele***, ***Trekker***, ***Michele***, ***Giampietro***, ***Cid***. ***Emanuele*** per cominciare è molto sbrigativo:

> 5 1 502 83667.
>
> PS: la formula chiusa di quante le triple alla rinfusa e con somma costante l'avevo trovata da giovane al Mauriziano. Il caso n, o ricordo male, era stato risolto da un giovane indiano?

Forse un po' troppo sintetica. ***Michele*** ha pensato bene di generalizzare il problema:

> In quanti modi si può scrivere 2007 come somma di interi positivi consecutivi? La risposta è 5:
>
> - 668+669+670 = 2007 — 3 addendi
> - 219+220+…+227 = 2007 — 9 addendi
> - 1003+1004 = 2007 — 2 addendi
> - 332+333+…+337 = 2007 — 6 addendi
> - 103+104+…+120 = 2007 — 18 addendi
>
> Si può generalizzare? In quanti modi si può scrivere $N$ come somma di interi consecutivi? Enunciamo i seguenti fatti.
>
> <u>1. $N$ = somma di un numero dispari di interi consecutivi</u>
>
> $N$ è somma di $d=2n+1$ interi positivi consecutivi se e solo se $N \equiv 0 \pmod d$ e $0<n(2n+1)<N$, cioè se $N$ è divisibile per $d$ e se $n$ non è "troppo grande", cioè se il primo addendo è positivo. In questo caso i $d$ addendi sono:
>
> $$\frac{N}{d}-n,\ \frac{N}{d}-n+1,\ \ldots,\ \frac{N}{d}+n=N$$
>
> Nell'esempio di $N=2007$: poiché $2007 = 3\cdot3\cdot223$, i divisori sono: 1, 3, 9, 223, 669, 2007 e i valori utili per $d$ sono 3 e 9.
>
> $$d=3 \quad\Rightarrow \frac{N}{d}-n=\frac{2007}{3}-1=668 \qquad\Rightarrow\qquad 2007=668+669+670$$
>
> $$d=9 \quad\Rightarrow \frac{N}{d}-n=\frac{2007}{9}-4=219 \qquad\Rightarrow\qquad 2007=219+220+\ldots+227$$
>
> OSSERVAZIONE. Se prendiamo un valore $d$ "troppo grande", per esempio 223, otteniamo che il primo addendo della scomposizione è negativo:

$$d = 223 \Rightarrow \qquad \frac{N}{d} - n = \frac{2007}{223} - 111 = -102$$

In questo caso esprimiamo 2007 come somma di 223 addendi, in parte negativi e in parte positivi:

2007 = −102−101−…+101+102+103+…+120

da cui, annullando le coppie di valori opposti:

2007 = 103+…+120

con un numero pari (18) di addendi positivi.

Questa scomposizione si ottiene però direttamente con l'algoritmo 2 che segue, cercando cioè un numero pari di addendi.

2. $N$ = somma di un numero pari di interi consecutivi

$N$ è somma di $d=2n$ interi positivi consecutivi se e solo se $N \equiv n \pmod d$ e $0<n(2n-1)<N$, cioè se $N-n$ è divisibile per $d$ e se $n$ non è "troppo grande". La prima ipotesi è equivalente alla richiesta che $N$ sia divisibile per $n$ e che il quoziente sia dispari. In questo caso i $d$ addendi sono:

$$\frac{N-n}{d}-n+1,\ \frac{N-n}{d}-n+2,\ \ldots,\ \frac{N-n}{d}+n$$

Nell'esempio di $N=2007$ gli unici valori utili di $d$ sono 2, 6, 18.

$$d = 2 \quad \Rightarrow \frac{N-n}{d}-n+1 = \frac{2007-1}{2} - 1+1 = 1003 \Rightarrow 2007=1003+1004$$

$$d = 6 \quad \Rightarrow \frac{N-n}{d}-n+1 = \frac{2007-3}{6} - 3+1 = 332 \Rightarrow 2007=332+332+\ldots+337$$

$$d = 18 \quad \Rightarrow \frac{N-n}{d}-n+1 = \frac{2007-9}{18} - 9+1 = 103 \Rightarrow 2007=103+104+\ldots+120$$

Un esempio generale: $N = 2008$

Applichiamo entrambi gli algoritmi 1 e 2 per $N=2008$.

1) Poiché 2008 = $2^3 \cdot 251$, l'unico dispari per cui è divisibile è 251, che però è "troppo grande":

$$\frac{N}{d} - n = \frac{2008}{251} - 125 = -117.$$

Dunque 2008 non si può esprimere come somma di un numero pari di interi consecutivi positivi.

2) L'unico valore $d$ che soddisfa entrambe le proprietà richieste, cioè $N \equiv n \pmod d$ e $n(2n-1)<N$ è 16.

$$d = 16 \quad \Rightarrow \frac{N-n}{d}-n+1 = \frac{2008-8}{16} - 8+1 = 118 \Rightarrow 2008=118+119+\ldots+133$$

Questa è dunque l'unica scomposizione di 2008 come somma di interi consecutivi positivi

***Michele*** ci fornisce anche l'algoritmo generale ed il programma per ottenere i consecutivi per ogni numero. Solo ***Trekker*** e ***Cid***, purtroppo, hanno inviato una soluzione della parte dei triangoli. Vediamo prima la versione di ***Cid***:

Essendo 2007 divisibile per 3, esiste un triangolo equilatero avente perimetro 2007 e lato = 669.

Per quanto riguarda i triangoli isosceli, la somma delle lunghezze dei due lati uguali è il doppio di un numero intero, cioè un numero pari, quindi il terzo lato è un numero dispari essendo la differenza tra un numero dispari e un numero pari, inoltre è sicuramente minore di 1004 perché ogni lato di un triangolo è sempre minore della metà del perimetro.

Esistono 502 numeri dispari compresi tra 1 e 1003, quindi esistono 502 differenti triangoli isosceli. (Il triangolo equilatero precedente è uno di questi 502 triangoli isosceli).

Per quanto riguarda i triangoli scaleni (di lati A < B < C ). Per poter esistere il triangolo si deve avere che: $A > (B - C)$.

- per cui se il lato minore A è inferiore a 502 ed è un numero pari, allora (B−C) può assumere tutti i valori dispari minori di A: numero di triangoli scaleni (con A pari e minore di 502):

$$\sum_{i=1}^{250} i = 125 \cdot 251 = 31375\,;$$

- mentre se il lato minore A è inferiore a 502 ed è un numero dispari, allora (B−C) può assumere tutti i valori (positivi e pari) minori di A: numero di triangoli scaleni (con A dispari e minore di 502):

$$\sum_{i=1}^{250} i = 125 \cdot 251 = 31375\,.$$

Quando A vale almeno 502, abbiamo che la differenza massima tra C e B non è limitata solo dal fatto che deve essere $A > (B - C)$, ma anche dal fatto che essendo per ipotesi A il lato di valore minore, deve anche essere: A<B.

<u>Per A = 502 il numero di triangoli scaleni possibili é: 250.</u>

Per ogni valore pari successivo il numero di triangoli scaleni possibili cala di 3, in quanto A aumenta di 2, di conseguenza il valore minimo di B aumenta di 2 e dovendo essere la somma uguale a 2007, il valore massimo di C cala di 4; quindi il valore massimo della differenza (C−B) cala di (2 + 4) = 6 e quindi calano di 3 i numeri dispari compresi.

Dovendo essere il lato più piccolo, A non può assumere un valore pari maggiore di 668. I valori pari di A compresi tra 668 e 502 sono: $\frac{668-502}{2} + 1 = 83 + 1 = 84$.

Numero di triangoli scaleni (con A pari e maggiore di 501):

$$\sum_{i=0}^{83} (3 \cdot i + 1) = 84 + 3\sum_{i=0}^{83} i = 84 + 3 \cdot 83 \cdot 42 = 10542\,.$$

<u>Per A = 503 il numero di triangoli scaleni possibili é: 248</u>

Per ogni valore dispari successivo il numero di triangoli scaleni possibili cala di 3, in quanto A aumenta di 2, di conseguenza il valore minimo di B aumenta di 2 e dovendo essere la somma uguale a 2007, il valore massimo di C cala di 4; quindi il valore massimo della differenza (C−B) cala di (2 + 4) = 6 e quindi calano di 3 i numeri pari compresi. Dovendo essere il lato più piccolo, A non può assumere un valore dispari maggiore di 667. I valori pari di A compresi tra 667 e 503 sono:

$$\frac{667-503}{2}+1=82+1=83\,.$$

Numero di triangoli scaleni (con A dispari e maggiore di 502):

$$\sum_{i=0}^{82}(3\cdot i+2)=2\cdot 83+3\sum_{i=0}^{82} i=166+3\cdot 41\cdot 83=10375\,.$$

Numero totale di possibili triangoli scaleni: 31375 + 31375 + 10542 +10375 = 83667.

<u>Nota:</u> Il fatto che: $502=Int\left(\frac{2007}{4}\right)$, $83=Int\left(\frac{502}{6}\right)$, $83667=3\cdot(83+84)^2$ mi fa supporre che possa esistere un procedimento migliore per risolvere il problema, che permetta di scrivere il numero di triangoli scaleni possibili in funzione del perimetro.

Infatti ***Trekker*** ha affrontato il problema in modo diverso.

Siano B ed L rispettivamente le misure (intere) della base e dei lati uguali dei triangoli isosceli da cercare. Dalla geometria euclidea sappiamo che ogni lato di un triangolo è minore (strettamente) della somma degli altri due (in particolare quindi la base del triangolo isoscele è minore della somma dei lati uguali). Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{matrix} B+2L=2007 \\ B<2L \\ B\geq 1 \\ L\geq 1 \end{matrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{matrix} B=2007-2L \\ 2007-2L<2L \\ 2007-2L\geq 1 \\ L\geq 1 \end{matrix}\text{, quindi } 502\leq L\leq 1003\,.$$

In conclusione i triangoli con *almeno due lati uguali* sono 1003-502+1=502 di cui 1 equilatero (di lato 2007/3=669) e gli altri 501 (strettamente) isosceli.

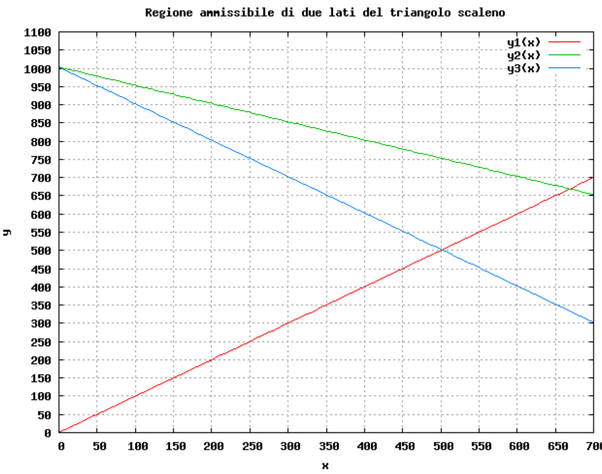
<u>Triangoli scaleni</u>

Siano x<y<z i tre lati "interi" di un triangolo scaleno. Al solito ricordando che un lato di un triangolo è minore della somma degli altri due possiamo scrivere:

$$\begin{matrix} x+y+z=2007 \\ x<y \\ y<z \\ z<x+y \end{matrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{matrix} z=2007-x-y \\ x<y \\ y<2007-x-y \\ 2007-x-y<x+y \end{matrix} \quad \text{o anche} \quad \begin{matrix} z=2007-x-y \\ x<y \\ y<\frac{2007-x}{2} \\ y>\frac{2007}{2}-x \end{matrix}\,.$$

La regione del piano (x,y) che soddisfa a queste disequazioni è all'interno (strettamente) del triangolo avente vertici in (0; 2007/2); (2007/4; 2007/4) e (669,669) intersezioni delle rette:

$$y_1(x) = x$$
$$y_2(x) = \frac{2007 - x}{2}$$
$$y_3(x) = \frac{2007}{2} - x$$




Amplificando le regioni triangolare nell'intorno dei vertici (0; 2007/2) e (2007/4; 2007/4), notiamo che le coppie (x,y) di numeri interi soddisfacenti alle disequazioni sono 1 per x=2 e x=3, 2 per x=4 e x=5, 3 per x=6 e x=7, ... , 249 per x=498 e x=499, 250 per x=500 e x=501. Si riconosce quindi che il numero delle coppie (x,y) di numeri interi, con x≤501, è calcolabile moltiplicando per 2 la somma della progressione aritmetica di 250 termini con ragione 1 e termine iniziale 1, cioè: $2 \cdot \frac{1+250}{2} \cdot 250 = 62750$.

Amplificando ora la regione triangolare nell'intorno del vertice (669,669), notiamo che le coppie (x,y) di numeri interi soddisfacenti alle disequazioni sono 1 per x=668, 2 per x=667, 4 per x=666, 5 per x=665, etc. In pratica possiamo intravedere la "fusione" di due progressioni aritmetiche rispettivamente di 84 e 83 termini di ragione 3 e termini iniziali rispettivamente 1 e 2.

| X | 668 | 666 | 664 | 662 | 660 | 658 | 656 | 654 | 652 | ... | 506 | 504 | 502 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **# coppie "intere"** | **1** | **4** | **7** | **10** | **13** | **16** | **19** | **22** | **25** | **...** | **244** | **247** | **250** |

| X | 667 | 665 | 663 | 661 | 659 | 657 | 655 | 653 | 651 | ... | 505 | 503 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **# coppie "intere"** | **2** | **5** | **8** | **11** | **14** | **17** | **20** | **23** | **26** | **...** | **245** | **248** |

Il numero totale di queste coppie di numeri interi, con x≥502, pertanto è:

$$2 \cdot \frac{1+250}{2} \cdot 84 + 2 \cdot \frac{2+248}{2} \cdot 83 = 20917.$$

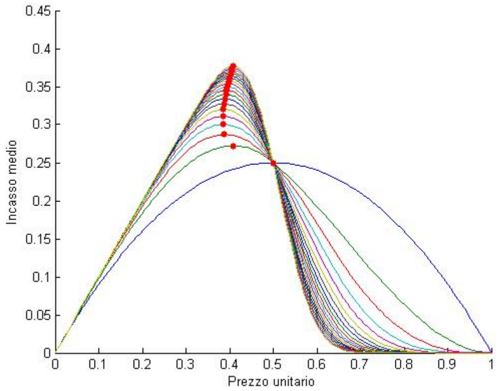
Quindi il numero totale di triangoli scaleni "interi" di perimetro 2007 è 62750+20917=83667.

E anche questa è fatta.

### 4.2.3 Il contratto di SKY

Qui non è arrivato quasi niente, e siamo sicuri che sia mancato il tempo alla maggior parte dei nostri lettori. ***Marco*** ci ha però mandato delle considerazioni all'ultimo momento, che pubblichiamo volentieri, sperando di stimolare l'immaginazione degli altri.

Vi scrivo perché nei giorni scorsi ho lavorato a tempo perso sul problema dei pacchetti della pay-tv, che mi piace molto. Però ormai il mese volge al termine, e forse sono già lungo per sperare in una citazione nel nuovo numero. Per intanto vi mando questo parziale, e si vedrà se viene qualche altra buona idea...



9 *La figura di Marco*

Sto cercando di generalizzare il problema ad un numero di pacchetti venduti simultaneamente maggiore di due. Vi mando solo una figura dei miei risultati. Ogni riga è un numero diverso di pacchetti (da 1 a 20). In ascissa c'è il prezzo del singolo pacchetto, ed in ordinata l'incasso atteso.

Ad esempio, la curva verde è il caso dei due pacchetti venduti insieme. Il punto di massimo è per un prezzo di $1/\sqrt{6} = 0.4082...$ per pacchetto, e l'incasso atteso è di $\sqrt{2/3}/3 = 0.2722...$. È ben riconoscibile la parabola blu del caso del pacchetto singolo.

Ogni curva è una polinomiale a tratti, di grado pari al numero di pacchetti più uno, e i punti di raccordo sono derivabili tante volte quante sono i pacchetti. La formula esplicita si scrive anche, ma è bruttina...

Su ogni curva ho segnato con un bollo rosso il punto di massimo, che rappresenta il prezzo ottimale di vendita. La cosa interessante è che i massimi crescono aumentando il numero dei pacchetti, ed è probabilmente per questo che i gestori quadratici medi di pay-tv tendono a proporre pacchetti super ricchi di programmi improbabili che nessuno guarderà mai.

Ora, la domanda naturale è, fin dove si arriva? Una limitazione che si dimostra facilmente ragionando per simmetrie, è che l'incasso medio non può superare 1/2.

Il mio sospetto però è che in verità ci si fermi prima, ma onestamente qui sono stato piacevolmente interrotto...

E di sicuro come novello padre ha tutti i diritti ai nostri auguri... mentre a tutti voi spetta il solito augurio di buon Febbraio!.

## 5. Quick & Dirty

Speriamo vi ricordiate che 4 è un quadrato; per una curiosa coincidenza, 9 è il quadrato immediatamente successivo. Ora, se li scrivete uno di fianco all'altro, ottenete 49, che è anch'esso un quadrato.

Coincidenza?

## 6. Pagina 46

Dalla formula per le radici dell'equazione di secondo grado:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

abbiamo che le radici sono razionali se e solo se il determinante $\Delta = b^2 - 4ac$ è un quadrato perfetto.

Sia allora $b = 2n + 1$, $a = 2p + 1$, $c = 2q + 1$. Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
b^2 - 4ac &= (2n+1)^2 - 4(2p+1)(2q+1)\\
&= 4n^2 + 4n - 16pq - 8p - 8q - 3\\
&= 8\left(\frac{n(n+1)}{2} - 2pq - p - q - 1\right) + 5.
\end{aligned}$$

Notiamo che $\frac{n(n-1)}{2}$ è un intero, in quanto uno dei due termini a numeratore è sicuramente pari; dovendo l'intero determinante essere dispari (in quanto se $b$ è dispari lo sarà il suo quadrato, $4ac$ è sicuramente pari e la sottrazione di un pari da un dispari dà un dispari), esso sarà il quadrato di un numero dispari.

Ora, ogni numero dispari può essere espresso nella forma $4k \pm 1$, quindi il quadrato di un dispari sarà nella forma:

$$(4k \pm 1)^2 = 16k^2 \pm 8k + 1 = 8(2k^2 \pm k) + 1.$$

Ossia, il quadrato di un dispari dà sempre un resto di 1 quando viene diviso per 8. Quindi, essendo il nostro determinante dispari ma dando un resto 5 quando diviso per 8, non può essere un quadrato perfetto.

# 7. Paraphernalia Mathematica

## 7.1 La Gilda degli Abacisti

Se non conoscete l'Antica, Affermata e Potente Società Segreta citata nel titolo, una volta tanto siete scusati.

In realtà il tutto è stato inventato da Rudy (che ne è il Presidente) e l'altro socio, al momento, è Zar (Maestro di Cerimonie[24]): infatti, questi si è vantato recentemente di aver acquistato *due* regoli calcolatori.

Ora, dovete sapere che anche Rudy possiede due regoli: un Nestler-Rietz "S" che da più di venti anni è il suo portafortuna (ormai è utilizzabile solo da un mancino che sappia suonare la chitarra, visto che manca la molla e richiede incredibili acrobazie del pollice sinistro), e un Aristo MultiRietz 829 che tratta con una cura leggermente superiore a quella con cui viene trattata la ferramenta di Sèvres[25].

Questo sopra (e buona parte del seguito) era la situazione quando, mancando pochi minuti alla chiusura di questo numero di RM, Rudy si affannava ad ottenere delle foto decenti dei suoi regoli, con risultati terrificanti; arrivava in suo aiuto Doc, presentandosi con delle magnifiche foto (le trovate dopo) e dicendo, con l'aria più innocente del globo: "Prova queste, sono del mio: però mi sembra le scale siano diverse…" Vi lasciamo immaginare l'invidia di Rudy quando si accorge che quello di Doc è il Vero Regolo dello Scienziato Pazzo: l'ottocentosessantotto!

Non solo, ma c'è da riscrivere buona parte del PM: molte scale sono in un posto diverso.

Ora, se questo fosse l'inizio, ci starebbe bene una citazione:

> *"Come hai scoperto il passaggio segreto?"*
> *"Oh, logaritmi…"*
> Tobor, USA, 1954

Nel senso che tutti, se appena sapete come è fatto, vi limitate a dire che è basato sui logaritmi e finito qui, amici come prima. Nulla di più falso: tutta una serie di idee durante la progettazione e una pletora di trucchi durante il calcolo lo rendono una miniera di possibilità; aggiungete a questo che nessun telefonino è in grado di calcolare una funzione trigonometrica decente, e capirete perché Rudy conserva gelosamente i suoi.

Bene, cominciamo.

La "vera filosofia di tutta la questione" (come diceva Lagrange), dovreste saperlo, è:

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b; \qquad \textbf{[1]}$$

la cosa è vera per qualsiasi base dei logaritmi (basta sia la stessa per entrambi i membri), e quindi evitiamo di scriverla a pedice; comunque, i regoli lavorano[26] in base 10.

Tutte le persone normali (e anche alcune non-persone: i circuiti combinatori senza memoria, ad esempio) preferiscono ampiamente fare le addizioni piuttosto che le moltiplicazioni, e quindi il riuscire a trasformare attraverso la **[1]** una moltiplicazione tra grossi numeri in qualcosa di più semplice rende la vita decisamente meno complicata;

---

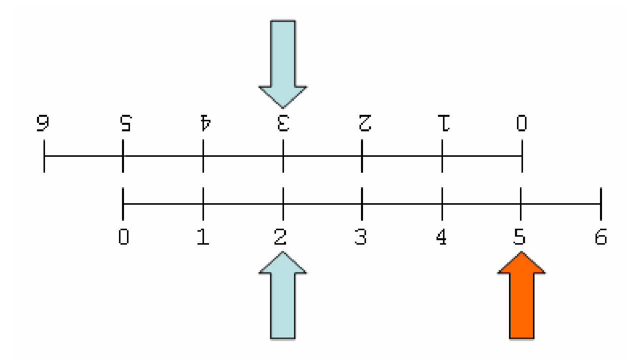
[24] Anche se di dimensioni ridotte, la GdA ha un regolamento ben preciso che definisce strettamente le funzioni di ogni ruolo: il Maestro di Cerimonie deve ricordare al Presidente che nelle Assemblee di ordine dispari tocca a quest'ultimo pagare da bere. Dovreste facilmente dedurre gli ardui compiti del Presidente e, per induzione, capire cosa succederà per un numero $n$ (non troppo grande) di Adepti.

[25] Con il suo abituale affabulare obliquo, Rudy si riferisce con questo termine ai campioni del metro e del chilogrammo, ivi conservati *[Nota del resto della Redazione]*

[26] L'uso del presente indicativo è chiaro segno di una netta e radicale presa di posizione da parte dello scrivente.

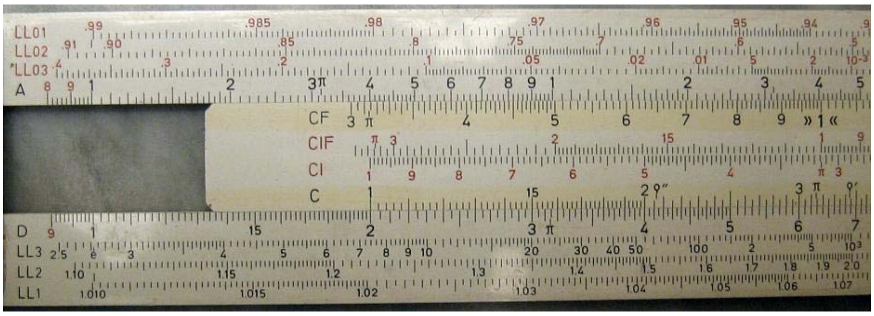
il "piccolo" problema è che per fare l'addizione al posto della moltiplicazione dovete prima calcolare i logaritmi dei due termini, e la cosa è decisamente complicata: non ci risulta esista un metodo generale di precisione a piacere (tipo la radice quadrata, per intenderci: lo sviluppo in serie di Taylor non è valido) per risolverlo; aiutano le tavole dei logaritmi[27], ma una cosa più facile da portare in giro sarebbe utile.

Se prendete due righelli e ne giustapponete le scale in modo tale che (come nell'esempio di *Figura* 10) due numeri coincidano, è immediato accorgersi che sotto lo zero avete la somma dei due ossia, complicando un pochino la cosa, sotto l'elemento neutro rispetto all'addizione trovate il risultato dell'addizione; la luminosa idea che ha portato all'invenzione del regolo è, molto semplicemente: "…ma allora, se prendo due scale logaritmiche, sotto l'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione, dovrei trovare il risultato della moltiplicazione…". Vero. E, di solito, ci si ferma qui.




10 *3+2=5*

Bene, Rudy non ha la minima intenzione di disegnare due scale logaritmiche, quindi a questo punto meglio riferirsi a qualche foto.




11 *Il regolo di Doc*

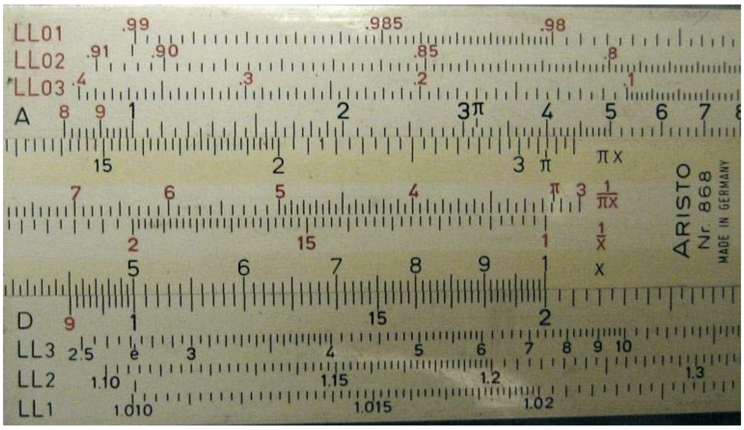
Il nostro regolo al momento è composto da due parti: un *fisso* e un *cursore*. Tra la pletora di scale, tenete d'occhio la scala **D** sul fisso e la scala **C** sul cursore: se portate il valore 1 della scala **C** sopra il valore 2 della scala **D**, vi accorgete che sotto il 3 della scala **C** viene indicato 6; da cui, $2 \cdot 3 = 6$. Carino, vero?

"Rudy, guarda che a fare duepertre ci arrivavamo anche senza sofisticati strumenti di calcolo…" Vero; moltiplicate duevirgolasette per pigreco in meno di tre secondi e poi ne riparliamo (fa un po' meno di ottovirgolaotto). Non solo ma, restando all'operazione precedente, se guardate sotto il 2, sotto il 4 e sotto il 5 della scala **C**, vi ritrovate l'intera tabellina del due; e, se guardate sotto pigreco, dovreste individuare facilmente un "quasi sei virgola tre". È (quasi) immediato, quindi, che se dovete fare un disegno in scala non dovete neanche toccare il regolo: lo piazzate al valore giusto in una posizione comoda e, man mano che dovete calcolare i valori, vi limitate a lanciare un'occhiata[28].

[27] Libro certo non di avvincente lettura, ma in grado di stimolare importanti scoperte matematiche: ne parliamo nel PM di RM024, "La distribuzione di Benford". A proposito, qualcuno ha visto dove è finito il "Brasca-Levi" di Rudy? Con il Dwight non si ritrova proprio…

[28] I regoli "a doppia faccia" (come l'829 e l'868) hanno delle sporgenze alle estremità della faccia secondaria per evitare che quest'ultima si righi quando è appoggiato sul tavolo; le stesse sporgenze non sono presenti sulla faccia principale, in quanto inutili. Si potrebbe dire che è un oggetto progettato da dei geni per dei maldestri, ovverosia da degli ingegneri per degli ingegneri.

Il dubbio può sorgere quando dovete calcolare 2·6; sotto il sei di **C** sulla scala **D** non c'è più segnato niente. A questo punto, vorremmo attrarre la vostra attenzione sull'estremo *destro* del cursore: la scala **C** ha un uno anche lì (in realtà molti regoli ne hanno due, da quelle parti; usate quello a sinistra, l'altro è un undici); portatelo sul due e leggete il risultato sull'uno a sinistra.



12 *Come manovrare le scale*

Se riflettete un attimo, potete inventarvi da soli il Primo Trucco dell'Abacista: *se il cursore sporge a destra, la caratteristica del risultato è pari alla somma delle caratteristiche dei fattori; se sporge a sinistra, aggiungete* 1 *alla somma.*

Cerchiamo di essere più chiari: tanto per cominciare, ricordiamo che la *caratteristica* di un logaritmo è la sua parte intera; lavorando con i logaritmi decimali, la caratteristica rappresenta la potenza cui dovete elevare 10 per ottenere la più grande potenza (intera) di 10 minore del numero; quindi, in un calcolo complicato, la posizione della virgola (o il numero di cifre del risultato, fate voi) può essere facilmente tenuta a mente e modificata di conseguenza.

Diamo per scontato che a questo punto siate in grado di invertire il processo ed effettuare al volo una divisione: provate a ricavare la regola della caratteristica (aka "Trucco dell'Abacista") in questo caso.

Complicazione: e se devo eseguire operazioni in catena? E se sono pigro e voglio spostare il cursore il meno possibile?

In questi casi, può (il capire quando sì e quando no è il Secondo Trucco dell'Abacista) venire utile la scala **CI**: la trovate sul cursore sopra la scala **C**. Come dice il suo nome, è l'**I**nverso della scala **C**: per fare, ad esempio, 1.5·2·9 si porta l'uno sulla sinistra di **C** sul valore 1.5 di **D**, trovando il risultato intermedio sotto il 2 di **C**; per moltiplicare per 9 dovrei portare sul risultato intermedio l'uno sulla destra di **C**, ma è molto lontano; allora porto sul risultato intermedio il 9 di **CI** e guardo il risultato sotto l'uno di **C** (o **CI**); molto più veloce (sì, fa 27).

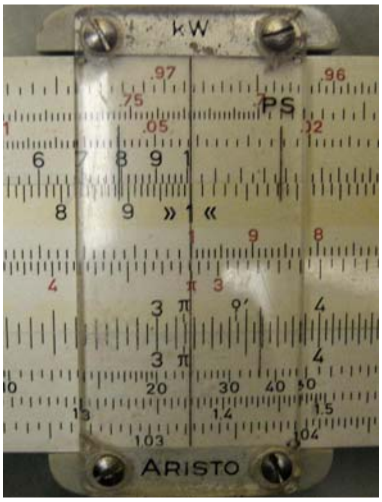
Pienamente d'accordo con voi che tra la distanza verticale di **CI** da **D** e il dover "tenere il segno" del valore intermedio l'operazione sia piuttosto scomoda; infatti, è stato inventato il *trasparente* che, grazie alla sua riga in mezzo (delle altre parliamo alla fine) permette, se avete ancora la molla, di allineare facilmente queste scale (se non avete la molla togliete il "facilmente").

Tranquilli, comincia la parte in discesa. La parte più difficile l'abbiamo passata. E infatti, il seguito è la parte che si dimenticano tutti.

Se guardate, abbiamo saltato un mucchio di scale sul fisso, e qualcuna ha l'aria decisamente strana: per esempio, la scala **L** è lineare. Questo potente indizio dovrebbe convincervi, con l'aiuto di un paio di tentativi, che serve a calcolare i logaritmi (in base dieci).

Nelle foto in realtà compaiono *un mucchio* di scale **L**: **LL1**, **LL2**, **LL3** e quelle "con lo zero in mezzo"; come vi dicevamo, questo è il Regolo dello Scienziato Pazzo: vi permettono di calcolare le potenze (positive sulle scale **LLx**, negative sulle scale **LL0x**) di $e$ (invidia… sui miei non ci sono).

Siccome gli operandi si impostano (quasi) sempre sul fisso e queste scale sono tutte sul fisso, è immediato pensare che servano per operazioni *monadiche*: su ogni regolo degno di questo nome dovreste individuare facilmente la scala **A**, che vi dà il quadrato del numero impostato su **D** e la scala **K**, dei cubi. La scala **A**, quando è presente anche sullo scorrevole si chiama **B**; se siete pigri e, elevato un numero al quadrato, lo dovete moltiplicare/dividere per qualcosa, potete usare quest'ultima; attenzione che si perde un pochino in precisione. A proposito della scala **A**: chiudete il regolo (nel senso di avere lo scorrevole non sporgente) e spostate il trasparente sul valore 1 centrale di **A** e guardate che valori ci sono "da quelle parti" su **CI** e **C**: una cosa che ha sempre lasciato perplesso Rudy è l'incredibile vicinanza tra i valori $\sqrt{10}, \pi, \frac{1}{\pi}$: a calcolarli ci vuole un'eternità, ma qui "si vede subito!".



13 *La vicinanza di* $\sqrt{10}, \pi, \frac{1}{\pi}$

Ci risultano regoli diritti, circolari, cilindrici ed elicoidali[29], ma nessuno costruito su un nastro di Möbius; quindi, hanno una faccia dietro. E qui casca il telefonino, sostiene Rudy (nel senso che il telefonino queste cose non ve le calcola).

Infatti, nei modelli normali dietro trovate tre scale: quella indicata con **S** permette di calcolare i seni degli angoli da 0° a 90°, mentre quella indicata con **T** permette di calcolare le tangenti tra 0° e 45°; attenzione che i modelli standard usano, per questi due calcoli, due incisioni diverse: quella per la scala **T** è in basso a sinistra, mentre quella per la **S** è in alto a destra[30].

"E dove lo vedo, il risultato?" Facile: girate il regolo, cercate un uno sulla scala **D** del fisso che abbia lo scorrevole sopra e leggete il risultato sullo scorrevole in scala **C** (ovvi utilizzi delle scale **CI** e **A** per ottenere altre funzioni trigonometriche; la sottrazione da 1 in mezzo al calcolo o ve la fate a mano o vi comprate una cosa di lusso – o aspettate il mese prossimo. Forse).

L'uso della scala **ST** è riservato ai virtuosi degli angoli stretti; al di sotto dei 6°, potete tranquillamente confondere il seno con la tangente.

"Rudy, ma il mio regolo ha un mucchio di altre scale!" Complimenti. Vuol dire che è uno strumento da veri professionisti. Della pigrizia.

Dovreste avere, sul davanti, un paio di scale una sul fisso e l'altra sullo scorrevole indicate con **DF** e **CF**; la "F" sta per "s**F**alsate" (non fate domande. Non lo so[31]); hanno la stessa strutture delle analoghe scale non sfalsate ma presentano un'interessante caratteristica: hanno *un solo uno*, all'incirca a centro scala; questo, nelle parole di un vecchio manuale, permette di evitare "la fastidiosa necessità di commutare l'inizio e la fine dello scorrevole tra loro". Se siete stati attenti prima, dovreste facilmente capire di quanto è sfalsata la scala. Aiutino: da quelle parti, sulla scala **D**, c'è una lettera greca.

Per i conti complicati non poteva mancare la scala **CIF**, inversa delle precedenti.

[29] Questi ultimi due tipi costosissimi e fragilissimi.

[30] Ne approfittiamo per ricordare che il regolo si gira in avanti (alcuni eretici lo girano all'indietro, ma non li prenderemo in considerazione); se lo girate di fianco, vi ritrovate le scale al contrario.

[31] *La F sta per "Folded", inglese per piegato. [PRS]*

Le uniche altre scale che potreste avere e che Rudy conosce sono una scala **DI** (reciproci sul fisso) e la rarissima scala **P**, in grado di fornirvi al volo il valore di $\sqrt{1-x^2}$. Il fatto che sia posizionata dalla parte delle funzioni trigonometriche dovrebbe fornirvi ampi indizi sul suo uso. Se avete delle ulteriori scale con i numeri piccoli e scritti in rosso, vuol dire che i progettisti hanno talmente coccolato la vostra pigrizia da inserirvi delle scale dei relativi reciproci sulle scale dirette; la cosa, sulle trigonometriche, non è così immediata.

L'Ulteriore Trucco dell'Abacista è rappresentato da due strani segni sulla scala principale: uno che sembra un apice e l'altro un doppio apice (in alcuni regoli c'è anche un simbolo che con un incredibile sforzo di fantasia potrebbe essere identificato come una $\rho$ [32]). Il secondo rappresenta un valore che è 6 (o sessanta, o seicento, o cose del genere… ormai dovreste averla capita) volte il primo, e il primo vale, senza virgola, 3438. Volendo svelare il mistero a poco a poco, vi diciamo che questo aggeggio diviso 6 fa suppergiù 57.

Complimenti a chi ci è arrivato: tra tutti e due, permettono di trasformare minuti o secondi di grado in radianti e viceversa.

Bene Rudy, finito? Neanche per sogno. Siete solo all'inizio del lungo cammino dell'Abacista. Infatti, manca un pezzo. Il trasparente. La riga lunga l'abbiamo già vista: è il riferimento fondamentale.

Adesso, i casi sono due, anzi tre: il secondo e il terzo sono sullo stesso regolo, uno da una parte e l'altro dall'altra.

1. Il trasparente ha due righine: una in alto a sinistra e l'altra in basso a destra.
2. Il trasparente ha una sola righina in alto a destra
3. Il trasparente ha tre righine: una in alto a sinistra, una in alto a destra e l'altra in basso a destra.

Come dicevamo, il secondo e il terzo caso sono sullo stesso regolo (e avete una roba di lusso, a due facce): il secondo caso è la faccia principale, il terzo la faccia secondaria.

Semplifichiamo le cose, per cominciare. Questo è l'Innumerabile Trucco dell'Abacista. Il caso (1) è equivalente al caso (3), prima e terza righina.

In questi casi, la righina in alto a sinistra sta alla riga lunga come la riga lunga sta alla righina in basso a destra.

Sono stato poco chiaro, lo ammetto. Proviamo con un esempio.

Se puntate la riga lunga del trasparente su 3 della scala **D** ottenete, sul trattino in alto a sinistra sulla scala **A**, qualcosa leggermente maggiore di 7; se mettete la righina in basso a destra sul 3 della scala **D**, ottenete sulla riga lunga in scala **A** la stessa cosa leggermente maggiore di 7. Quindi, le due righe sono equivalenti; usare una o l'altra dipende dall'abilità/pigrizia dell'Abacista.

Tranquilli, adesso vi spiego cosa fanno: se posizionate il trasparente (riga lunga o righina in basso a destra) su un numero della scala **D**, prima lo elevano al quadrato e quindi lo moltiplicano per suppergiù 0.785 (fornendo il risultato in scala **A**) che, guarda caso, è

[32] Questo pezzo è stato scritto prima dell'alba di una domenica mattina, giornata nella quale Doc accende il cervello verso le 15:30, e quindi inutile chiedere a lui. Attenzione che la "rho" che indicano i manuali ha uno strano svirgolo sotto; a quanto pare (deduzioni di Rudy, basate sul Rocci della moglie – non svegliabile) quando viene scritta in grassetto ha la gamba dritta come qui, mentre se la scrivete in normale corsivo la gamba ha una specie di piede. Inutile cercare cose del genere sul regolo, nella migliore delle ipotesi avete una via di mezzo tra una "p" e una "q" o, in alcuni esemplari, solo gli apici e via andare.

un'ottima approssimazione di $\frac{\pi}{4}$; quindi, se impostate il trasparente sul diametro del cerchio, dovreste essere in grado di calcolare velocemente l'area.

L'Ulteriore Trucco dell'Abacista è in realtà basato su una curiosa coincidenza e ormai interessa ben poca gente: il peso specifico dell'acciaio dolce è circa uguale a $\frac{10\pi}{4} g/cm^3$, quindi lo stesso valore può essere utilizzato per calcolare al volo il peso dei tondini. I due segni piccoli che permettono questi calcoli non hanno un nome preciso, ma sono sempre stati chiamati "i piquarti".

Bene, torniamo alle cose serie. Se avete la scala **DF** (quella sfalsata di $\pi$), dovreste avere una righina in alto a destra sul cursore; questo riferimento è noto come "il trentasei" (sì, come l'autobus), in quanto moltiplica per 3.6 il valore impostato in **D** con risultato in **DF**. Inutile ricordarvi (e quindi ve lo diciamo) che in un'ora ci sono 3600 secondi, in un metro al secondo 3.6 kilometri all'ora, in un grado 3600 secondi, e in un anno (commerciale) 360 giorni…

Infine, l'Annualmente Utile Trucco dell'Abacista: dalla parte dei piquarti, sul trasparente dovrebbe esservi avanzato una righina in alto a destra (non confondetela col "trentasei": è dall'altra parte): nella foto, ci trovate scritto sopra "**PS**".

Se mettete il principale su (ad esempio) 20 della scala **A**, la righina vi indica suppergiù 27.2; la lineetta (nota come "l'accapì") permette la conversione dei kilowatt in cavalli vapore (non ci pronunciamo sulla "S", ma "cavallo" in tedesco dovrebbe dirsi "Pferde": da cui, la "P"). Tutti si ricordano quanti cavalli fa la propria macchina, ma il bollo lo pagate in kilowatt.

"Cribbio, ma non potevano metterli in scala **D**, tutti 'sti valori?".

Se capite al volo il perché, benvenuti nella Gilda. Tocca a voi pagare da bere, adesso[33].

*Rudy d'Alembert*
*Alice Riddle*
*Piotr R. Silverbrahms*

[33] Ah, dimenticavo. Se volete saperne di più, scrivete "slide rule" e accendete un cero a San Google.