Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 108 – Gennaio 2008 – Anno Decimo

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com
RM107 ha diffuso 1513 copie e il 06/07/2008 per Google eravamo in 9'350 pagine.

Nodologia (o, in modo più simpatico, *knotology*) è il nome dato da ***Heinz Strobl*** all'arte di creare forme tridimensionali partendo da strisce di carta annodate. In copertina trovate la ***Sphere94***, creata da una non meglio specificata Rosa (olandese). Apprezzabile il fatto che per fare una cosa così complicata siano utilizzati solo nodi *semplici*.

1. Il Bianconiglio di Vittoria

Vivere è una cosa troppo importante per poterne parlare seriamente.
(Oscar Wilde, Il ventaglio di Lady Windermere)

«Sei capace a fare le somme?» chiese la Regina Bianca. «Quanto fa uno più uno più uno più uno più uno più uno più uno più uno più uno più uno?» - «Non so», rispose Alice. «Ho perso il conto.».
(da "Attraverso lo Specchio")

L'educazione è una bella cosa; tuttavia è bene ricordare, almeno una volta ogni tanto, che nulla di ciò che è veramente importante conoscere può essere insegnato.
(Oscar Wilde)

È preferibile l'aver amato e aver perso l'amore al non aver amato affatto.
(Lord Alfred Tennyson)

La memoria della storia non è troppo diversa da quella degli uomini: risalendo indietro nel tempo le informazioni, come i ricordi, sembrano fotografie sempre più sfocate, imprecise, a grana grossa. Al contrario, risalendo dal passato verso il tempo presente, la precisione e i dettagli aumentano: dalle ere del mondo in cui i ghiacci e i dinosauri si alternano a qualche sparuto manufatto, all'avvento delle culture egizie, quando la misura del tempo passa da ere a millenni; poi l'antichità e il medioevo, quando la navigazione mentale fa uso dei secoli, fino al passato recente, al passato prossimo, a ieri e oggi, quando si scende ai decenni, agli anni, ai mesi e ai giorni. Certo non si tratta solo dell'effetto di ricordi e memoria: la quantità di informazioni aumenta spaventosamente con l'avvicinarsi dell'evento storico, e grazie all'avvento dei moderni sistemi di registrazione possiamo veramente raccogliere un numero altissimo di fatti, più o meno rilevanti, accaduti in un solo anno, in un solo mese, quasi in un solo istante.

Prendiamo ad esempio il 2007, che ci ha appena lasciati. Per che cosa verrà ricordato? Questo anno Europeo per le Pari Opportunità ha segnato, per esempio: l'ingresso di Bulgaria e Romania nell'Unione Europea; l'introduzione dell'euro in Slovenia; il passaggio della cometa McNaught; l'eccezionale crescita dei mercati cinese e indiano, alla quale ha fatto da contraltare il crash dell'economia americana causato dalla congiuntura sui mutui immobiliari,; gli arancioni e le elezioni in Ucraina (e forse il resto del mondo comincia a sapere dove si trova); la sparatoria al politecnico della Virginia; le morti di Comencini, Ferrè, Bergman e Antonioni avvenute tutte lo stesso giorno, e poi quelle di Pavarotti ed Enzo Biagi; il Nobel ad Al Gore; l'uscita del settimo e forse ultimo Harry Potter[1]; gli incendi in California, e chissà quante altre cose. Basta fare un giro su Wikipedia, che permette di scegliere anni, secoli, decenni, ed andare a ritroso per decidere quanti e quali fatti salienti siano registrati mese per mese, anno per anno, secolo per secolo. Certo per prossimità temporale, ma forse anche per autentica ricchezza di eventi, si scopre in fretta che in generale è il XIX Secolo il primo ad accumulare una gran quantità di notizie in merito ad avvenimenti, cambiamenti, forme letterarie, filosofie, invenzioni. La ragione fondamentale potrebbe trovarsi nel tumulto portato nel mondo moderno dalla rivoluzione industriale del secolo precedente, che aveva cambiato la faccia dell'Europa e del mondo. Tutto uno strato della società, che possiamo in qualche modo assimilare a quello che oggi chiameremo ceto medio, aveva acquistato una nuova dimensione e coscienza di classe. La Rivoluzione Francese e l'intera avventura napoleonica, malgrado il tentativo di cancellazione dalla storia tentato dalla Restaurazione dei vari monarchi sui loro troni avevano mostrato che, in effetti, l'ordine costituito perpetuato nei secoli non era poi così inamovibile come sembrava a prima vista. Queste tensioni sociali e un vigoroso impulso nel progresso tecnologico e scientifico fanno

[1] Questo per quel che ne pensano i miopi contemporanei: i posteri lungimiranti ricorderanno il 2007 per un ben maggiore evento editoriale, ovvero la prima edizione del best-seller "Rudi Simmetrie".

sì che l'Ottocento diventi tutto un fiorire di correnti e di nuovi approcci: ed è certamente il secolo d'oro dell'Impero Britannico, che dopo le guerre napoleoniche controllava un terzo dei territori e un quarto della popolazione del mondo. E se si mettono insieme il diciannovesimo secolo e l'Inghilterra non si può far a meno di parlare dell'età Vittoriana.

L'età è molto più contraddittoria e complessa di quello che potrebbe sembrare; anche se si tende a ricordarla soprattutto per il puritanesimo portato all'estremo (venivano coperte non solo le gambe delle donne, ma anche quelle di tavoli e pianoforti), ha avuto parecchie fasi e movimenti ed è stata soggetta ad innumerevoli rivisitazioni storiche. In ogni caso, il personaggio principale, o almeno quello che diede il nome a tutto il periodo, è la Regina Vittoria.


La Regina Vittoria da giovane

Vittoria si ritrovò improvvisamente erede al trono all'età di undici anni, e passò pertanto i successivi sette a prepararsi al compito di regnante: poco dopo il suo diciottesimo compleanno, nel 1838, lo zio morì lasciandole il peso dell'intero Impero Britannico sulle spalle. E non solo: gravava sulla giovinetta il peso di una nobiltà tradizionalmente corrotta e inaffidabile, lontanissima dall'ideale di moralità e dalla stima del popolo inglese. Come se non bastasse, Vittoria, senza alcuna esperienza di politica, dovette inizialmente affidarsi a Primi Ministri che non esitarono a prendere spesso decisioni senza nemmeno degnarsi di informarla. Tutto questo mentre la crisi economica e l'incremento demografico rendevano l'ordine costituito molto impopolare: numerose carestie ed il ristagno del commercio stavano paralizzando lo stato.

Ma Vittoria reagì. Cominciò allora a costruire la sua immagine, che ancora oggi la tramanda come esempio di onestà, moralità, patriottismo e dedizione alla famiglia: Vittoria fu il simbolo vivente della solidità dell'impero britannico. Il suo regno, durato sessantatré anni, fu il più lungo nella storia dell'Inghilterra[2]: durante questo periodo il paese conobbe una prosperità senza precedenti, dalla quale trasse beneficio soprattutto la classe media. Sposò Alberto di Sassonia nel 1840 e da lui ebbe nove figli e un matrimonio felice e stabile; Vittoria fu il primo monarca britannico moderno: sotto di lei diverse riforme aumentarono il potere della Camera dei Comuni a scapito della Camera dei Lord e della Corona stessa, ridotta sempre più a mero simbolo dell'unità della nazione. È dal regno di Vittoria in poi che il trono inglese avrà essenzialmente solo "il diritto di essere consultato, il diritto di consigliare ed il diritto di avvisare". E la forte enfasi sulla moralità e sui valori della famiglia, era voluta per contrastare gli scandali sessuali, finanziari e personali legati ai precedenti Hannover: per la prima volta nasceva per i britannici il concetto di "monarchia di famiglia" in cui anche la crescente (sia in numero sia in importanza) classe media inglese potesse identificarsi.


La Famiglia Reale nel 1880.

Internazionalmente Vittoria fu una figura di primo piano: non solo come rappresentante dell'influenza dell'impero britannico, ma anche a causa dei legami familiari attraverso tutta l'Europa che le fecero guadagnare l'affettuoso soprannome di "bisnonna d'Europa". Tre dei maggiori regnanti coinvolti nella Prima Guerra Mondiale, anche su fronti opposti, erano suoi nipoti o coniugi di suoi nipoti: lo zar Nicola II di Russia era sposato con Alessandra che, al pari del re

[2] Il record è ancora solido, anche se è ormai palese che la più pericolosa concorrente di Vittoria è proprio la regina attualmente in carica, Elisabetta II: salita al trono nel 1952, pareggerebbe i conti con l'antenata nel 2015. Non manca poi tanto...

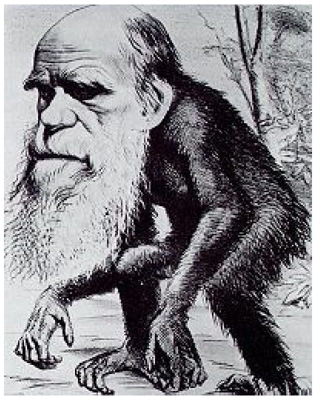
Giorgio V d'Inghilterra e del kaiser Guglielmo II di Germania, era nipote della regina Vittoria.

Ma cos'era cambiato nel mondo con l'avvento del diciannovesimo secolo? Semplicemente la Rivoluzione Industriale cominciava ad avere finalmente i suoi effetti più drammatici: masse di lavoratori si riversavano dalle campagne verso la città alla ricerca di lavori che spesso erano pagati pochissimo, per vivere in condizioni pietose di povertà e igiene. L'industria richiedeva quantità sempre maggiori di carbone, cosa che portò all'apertura di un numero sempre maggiore di miniere, nelle quali anche donne e bambini erano utilizzati per i lavori pesanti. La classe borghese e gli imprenditori cominciavano a crescere in numero ed in potere economico; ciò non di meno continuavano ad avere solo pochissima influenza sul governo, che a quel tempo rimaneva accessibile solo all'aristocrazia, anche se erano i ceti medi ed i lavoratori a sostenere quasi completamente il peso fiscale. A sua volta la nobiltà, il cui potere si basava sulla proprietà di terre e quindi sull'agricoltura, non reggeva più il confronto economico con i "moderni businessman". La situazione non poteva che evolversi in qualche maniera. E così successe.

La seconda metà dell'Ottocento inglese è caratterizzata dall'alternarsi di Primi Ministri più o meno liberali, ma soprattutto illuminati, che portò ad un consolidamento dell'impero ed alle necessarie modifiche della politica del Paese: mentre la regina creava un'immagine di stabilità e continuità, l'Inghilterra era traghettata attraverso un fiume di riforme. Solo per nominarne alcune: l'eliminazione della tassa sui cereali, l'estensione del suffragio a quasi tutto il ceto medio, la scuola pubblica accessibile a tutti, le leggi per la protezione di donne e bambini nel lavoro in miniera, l'accesso delle donne alle università (seppure solo in forma passiva, ovvero solo come discenti e non docenti), e la regolamentazione della proprietà privata (che avvenne solo dopo il 1870); nonché riforme sanitarie e lo sviluppo dei trasporti pubblici. Il mondo stava diventando sempre più piccolo, e durante la seconda metà del diciannovesimo secolo la ferrovia collegava ormai quasi ogni punto dell'Inghilterra: la più vecchia metropolitana del mondo, quella londinese, entra in funzione nel 1863.

Il periodo storico è stato spesso rivisto utilizzando diverse chiavi di lettura, ma nell'immaginario collettivo permane l'idea che l'epoca fosse fortemente moralista e puritana. È certo che molte contrastanti realtà erano presenti allo stesso tempo: l'enorme sottobosco urbano di povertà, prostituzione, lavoro nero; il crescente potere della borghesia, l'avvento dei nuovi ricchi e la loro sete di importanza; il lento degrado del mondo nobiliare. Il tutto viene sicuramente rispecchiato da un ampio spettro di nuovi modi di esercitare le arti, figurative e non: all'improvviso l'artista non può più dipendere da aristocratici illuminati e generosi e deve trasformare l'arte in un mestiere. Non solo lo scrittore viene a rappresentare le diverse esigenze delle classi sociali che leggono i suoi romanzi, ma si ritrova anche ad assecondarne le necessità, adeguare gli argomenti e lo stile: la sopravvivenza dell'artista dipende non più dal valore intrinseco delle sue opere, ma da quante riesce a venderne[3]. Basti pensare ad uno dei più celebrati scrittori vittoriani – Charles Dickens – che pubblicò la maggior parte dei suoi romanzi a puntate su riviste, e proprio grazie al successo che ottenne riuscì ad avere accesso all'alta società. Ma sono molti i generi letterari che fioriscono in questi anni: il gotico delle sorelle Brontë, l'orrore con Poe, l'avvento dei polizieschi con le indagini di Sherlock Holmes narrate da Arthur Conan Doyle, e infine il soprannaturale, figlio sia della rivoluzione scientifica che degli orrori di una società in trasformazione.

[3] Triste realtà che ha seguito la società moderna fino ad oggi.



Caricatura di Darwin.

È infatti in epoca vittoriana che la letteratura scientifica incomincia a sconvolgere il mondo e a scuotere le fondamenta di quelle credenze religiose che avevano rassicurato l'uomo come centro del creato: "*L'origine delle specie*" di Darwin è pubblicato nel 1859. L'uomo diventa quindi non solo simile, ma addirittura parte del mondo animale, aprendo tutta una serie di disturbanti prospettive per la cultura del tempo: la letteratura semi-scientifica fa la sua comparsa alla ribalta e storie come "*Lo strano caso del dottor Jekyll e del signor Hide*" studiano proprio la convivenza della natura animalesca e istintiva e di quella più elevata in un essere umano.

La scienza sembra poter risolvere qualsiasi problema: è l'epoca dell'invenzione delle macchine a vapore e del motore elettrico, della scoperta del vaccino contro la rabbia di Pasteur, dell'invenzione della fotografia, dell'illuminazione delle città con lampade prima a gas e poi elettriche, della costruzione del Canale di Suez, dell'invenzione delle presse Monotype e Linotype, del telegrafo, del telefono, della dinamite, dell'aspirapolvere, dei grammofoni e del cinema. E in quest'epoca pare possibile quasi tutto: sono queste possibilità che sfociano nei primi racconti fantascientifici come "La macchina del Tempo" di Wells, che per la prima volta ipotizza viaggi nella quarta dimensione, quella temporale. Secondo alcune fonti è di questo periodo persino la creazione della parola "scienziato" per designare proprio lo studioso di scienza – che diventa per la prima volta un vero e proprio mestiere.

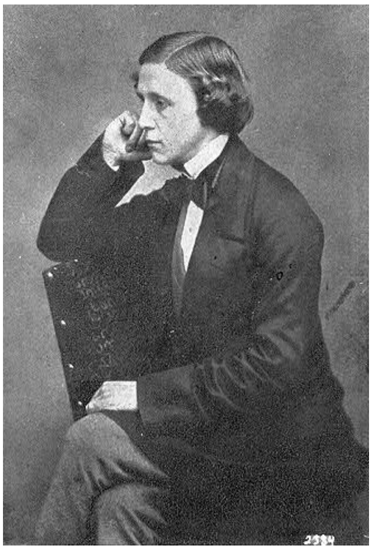
Oscar Wilde

La dirompente esplosione di eventi e scoperte sembra non aver termine: la pubblicazione del Capitale di Marx è del 1867, e scuote soprattutto le classi più alte che cercano di ridurre il divario che si stava aprendo tra i ceti sociali con opere di beneficenza e accettando riforme sociali pur di non arrivare alla crisi tra le classi. Contemporaneamente il mondo aristocratico, amante della pura bellezza e ancora impermeabile alla necessità di lavorare o comunque di occuparsi di vili questioni commerciali, aveva il suo ultimo colpo di coda in movimenti come l'estetismo ed il dadaismo, di cui l'esponente che meglio conosciamo è sicuramente Oscar Wilde.

Chi non ha sentito parlare dell'immortale umorismo del drammaturgo irlandese? Wilde scrisse romanzi, commedie, trattati[4], poesie, e visse una vita di frequentazioni di circoli sociali e ricca di fama, per poi finire in disgrazia, denigrato ed abbandonato. E anche lui è prodotto precipuo, così come Dickens, le sorelle Brontë e H.G.Wells, della stessa età vittoriana, dello stesso Ottocento inglese.

Era che segna anche la nascita di un ulteriore nuovo genere, la letteratura per bambini: con l'introduzione della scuola pubblica e dell'età minima per l'impiego, infatti, la società aveva in qualche modo "inventato" la fanciullezza, regalando – a chi poteva permetterselo – un periodo di giochi e letture. Rifioriscono quindi in nuove vesti editoriali le favole di Esopo, dei fratelli Grimm e di Andersen: ma il più noto esponente del filone inglese è Lewis Carroll, l'autore di "Alice nel Paese delle Meraviglie" e "Attraverso lo Specchio".

[4] "*Chiunque può scrivere un romanzo in tre volumi. Richiede soltanto una completa ignoranza sia della vita che della letteratura*" Oscar Wilde.



Charles Lutwidge Dodgson

Il vero nome di Carroll era Charles Lutwidge Dodgson, ed era nato il 27 gennaio 1832, terzo di undici figli di un curato di provincia inglese. Il padre (anche lui di nome Charles) aveva studiato ad Oxford sia materie classiche sia matematica, eccellendo in entrambi i campi; e qui aveva insegnato finché il matrimonio l'aveva costretto a ritirarsi a Daresbury, dove sarebbero nati quasi tutti i suoi figli.

Data la dimensione della famiglia e il modesto impiego del padre, Charles fu in un primo tempo educato a casa, e mostrò subito un grande talento per la letteratura e le scienze. Palesò insomma il grande desiderio di seguire le orme del padre sia nella carriera religiosa sia in quella di insegnante ad Oxford; e – *last but not least* – nella passione per la matematica[5].

Non appena il padre ottenne un lavoro migliore il giovane Charles fu mandato a frequentare la scuola, dove ovviamente eccelse in tutte le materie, ma ebbe difficoltà ad adattarsi: forse per la balbuzie che lo affliggeva o forse per la scarsa salute, veniva continuamente dileggiato dai compagni. In ogni caso approdò infine al Christ Church College di Oxford, dove in breve passò dallo status di studente a quello di professore, ottenendo presto una cattedra e dedicandosi a numerose attività: lezioni private, bibliotecario, preparazione di testi per l'insegnamento. Una condizione per il suo impiego ad Oxford (ed il motivo per cui il padre aveva dovuto alla fine abbandonare il posto) era che rimanesse celibe e prendesse gli ordini sacerdotali, cosa che però Charles non fece mai. È anche questo un segno di quanto fosse considerato importante all'interno della scuola, perché nonostante assillanti insistenze e perfino ultimatum, gli fu in ogni caso concesso di restare. Non è mai stata chiara la ragione del suo rifiuto, e numerose sono state le illazioni: alcuni critici pensarono che volesse evitare il pulpito e le prediche (a causa della balbuzie), altri che si fosse trovato in contrasto con l'anglicanesimo (era un tempo in cui emergevano nuove confessioni), altri ancora che semplicemente avesse scoperto altri interessi, tra cui la fotografia.

Alice Liddell ritratta da Dodgson, 1858

Nel 1855 Dodgson fece visita allo zio e nell'occasione provò l'apparecchiatura fotografica per la prima volta; ne rimase affascinato e decise di dotarsi subito di attrezzatura e prodotti per lo sviluppo. Fotografava di tutto, panorami, opere di architettura e scultura, ma soprattutto persone: i soggetti preferiti erano bambini. Al tempo frequentava soprattutto la famiglia di Henry Liddell, il decano di Christ Church, ma anche scrittori, come George Mcdonald e il poeta Lord Tennyson, tutti i figli dei quali vennero ritratti spesso e volentieri nelle foto di Dodgson. Amava la compagnia dei piccoli, soprattutto delle bambine, forse perché gli era più facile contrastare la balbuzie parlando con i giovanissimi. Passava molto tempo seduto su un sofà con le tre piccole Liddell – che erano le uniche bambine al Christ Church, visto che il personale non poteva sposarsi – inventando storie sul momento ed

[5] Cosa che non sorprenderà, essendo questa una rivista di matematica e non di letteratura: anche se il protagonista del compleanno di questo mese è passato alla storia con un *allonimo* per le sue produzioni letterarie, resta pur sempre un matematico di vaglia e, come molti altri suoi predecessori nelle pagine di RM, aveva mostrato il suo talento già in tenera età.

illustrandole con disegni su grandi fogli di carta.

Un giorno, durante un picnic lungo il Tamigi con la piccola Alice e le sue sorelle, particolarmente ispirato, raccontò qualcosa di molto simile alla storia che lo rese famoso. Promise di scriverne il contenuto, e dopo aver aggiunto qualche illustrazione disegnata di suo pugno regalò il prodotto ad Alice Liddell[6], che ne aveva fatto richiesta. Non passò molto tempo prima che le frequentazioni letterarie dell'autore avessero l'opportunità di leggere il manoscritto e ne suggerissero la pubblicazione.

Il Bianconiglio nell'illustrazione originale di Tenniel

Il libro fu illustrato da John Tenniel[7], che era in assoluto il più conosciuto e celebrato disegnatore del tempo, anche se la collaborazione di due perfezionisti richiese lunghissime discussioni e numerose variazioni: addirittura la prima stampa dovette essere ritirata[8] perché Tenniel non era soddisfatto della qualità delle vignette, e la prima versione di "*Le Avventure di Alice nel Paese delle Meraviglie*" vide la luce solo per il Natale del 1866. Il successo fu enorme, tanto che l'autore decise di scriverne la continuazione, sempre illustrata da Tenniel, "*Attraverso lo specchio*", che fu pubblicata nel 1872. Tutti gli scritti letterari, contrariamente a quelli matematici, furono firmati con lo pseudonimo *Lewis Carroll*, che l'eclettico scrittore aveva ottenuto "latinizzando" e poi "inglesizzando" nuovamente il suo nome e cognome (*Lewis* è infatti la versione inglese di *Ludovicus*, da cui deriva *Lutwidge*; *Carroll* è l'anglicizzazione di *Carolus*, il latino per *Charles*).

Nella traduzione dall'inglese si perdono inevitabilmente una grandissima quantità di battute e di giochi di parole: i due romanzi sono il culmine del "nonsense" inglese, e quasi ogni dettaglio narrativo parte da frasi fatte, filastrocche, frammenti dell'educazione obbligatoria del tempo, modificandoli e rendendoli di per sé divertenti, anche se non si conosce quello che viene scimmiottato. Un buon esempio è quello del Cappellaio Matto e della Lepre Marzolina: in inglese c'è il modo di dire "matto come un cappellaio"[9] e "matto come una lepre a marzo", che sembra avere origine dal fatto che marzo è più o meno il periodo in cui i conigli vanno in calore e quindi sono particolarmente fuori controllo; ma anche se non si conoscono i detti inglesi i due personaggi restano affascinanti e curiosi. Anche perché in fondo, come dice lo Stregatto piuttosto chiaramente, tra matti non c'è una grande differenza:

> *«Qui siamo tutti matti. Io sono matto. Tu sei matta.»*

[6] L'autrice di questo compleanno è troppo modesta per farlo notare, ma noi ci si chiedeva, qui in redazione, se ci fosse ancora qualcuno che non conoscesse il significato nascosto nell'allonimo della nostra Alice. Ora, dopo aver ricordato il nome completo dell'Alice di Carroll e il fatto che "riddle" – oltre ad essere perfettamente assonante con Liddell – significa "indovinello, enigma", non dovrebbero proprio esserci più dubbi, no? [*RdA & PRS*]

[7] Le illustrazioni di "Le Avventure di Alice nel Paese delle Meraviglie" sono quarantadue – un numero a noi caro, per questo ci teniamo a ricordarlo.

[8] Fu quasi completamente distrutta; solo una ventina di copie sono sopravvissute, oggi considerate rarissime e molto preziose: ne è stata presentata una all'asta a Christiès nel gennaio 2006 che è stata comprata per 4'800 sterline.

[9] "matto come un cappellaio" ha anche un'altra origine, decisamente più triste: la lavorazione del feltro da cappelli richiede l'uso dei vapori di mercurio, che portano (prima) alla pazzia e (successivamente) alla morte per avvelenamento. Ancora adesso gli abitanti della Valle Cervo, sede del Luogo del Divano Quantistico, sono considerati tipi "strani". Pieno di cappellifici, anticamente: Barbisio, come marchio e come cognome, nasce lì. Per l'associazione con le lepri, il feltro da cappelli anticamente era "feltro di coniglio". "Capel 'd cônij" ancora adesso indica i migliori feltri. [RdA]

«Come lo sai che sono matta?» disse Alice.

«Per forza,» disse il Gatto: «altrimenti non saresti venuta qui.»

Alice decide di andare dalla Lepre perché è maggio, e di conseguenza la cosa dovrebbe essere un po' più sicura, anche perché non sa che troverà lì anche il Cappellaio. Forse in italiano – e nelle altre lingue – può non sembrare che Alice scelga il male minore, ma del resto parecchi dei giochi di parole nelle varie traduzioni hanno perso il loro significato. Quello che continuamente accade, però, è che tutte le dimostrazioni contenute nel testo sono volutamente assurde.

Nel primo libro Alice cambia dimensione parecchie volte, tanto da non sapere più chi sia; altre volte deve spesso ricordare a chi incontra di essere una bambina, per trovarsi infine coinvolta in un gioco di carte in cui i personaggi assurdamente cancellano le azioni uno degli altri, come la regina di cuori che continua a condannare alla decapitazione chiunque la ostacoli, e il re che perdona i tapini non appena la consorte si volta da un'altra parte. Nel secondo, la nostra eroina sembra muoversi con più esperienza nel mondo che trova dall'altra parte dello specchio, e si rende presto conto che i libri vanno letti allo specchio, o che per andare da qualche parte bisogna dirigersi in direzione opposta, e così diventa lei stessa parte di una partita di scacchi.

Ma Dodgson non scrisse solo romanzi per bambini[10]: si dilettò anche con poesia e naturalmente con la matematica. La consistente produzione matematica fu però meno fortunata del ciclo di Alice, e in fondo non particolarmente originale, a parte il suo "*Euclide e i suoi rivali moderni*" (1879), in cui l'autore cerca di utilizzare gli "Elementi" di Euclide per insegnare la geometria, e immagina che il fantasma di Euclide stesso appaia per difendere le proprie teorie contro le geometrie moderne, discutendo con i diversi autori. L'opera propone ottimi argomenti per entrambe le parti, anche se l'autore sembra prediligere la visione geometrica classica. Il tutto scritto con l'umorismo tipico di Carroll e con la precisione del divulgatore scientifico.

Le innovazioni di Dodgson furono comunque molte: nei suoi testi di logica introduce dei diagrammi molto simili a quelli successivamente usati da Venn e soprattutto il materiale mai pubblicato contiene tecniche[11] che furono sviluppate ed utilizzate solo in seguito, come le tavole di verità e i diagrammi ad albero, oltre ad una forma di matrici. Pubblicò contributi significativi alla teoria delle elezioni, che contengono già elementi della teoria dei giochi che nascerà solo in seguito.

In realtà l'autore vittoriano per bambini per antonomasia era un vero matematico ricreativo: inventava indovinelli, giochi di parole, di numeri, esercizi mnemonici, ed era l'intrattenitore dotato di arguzia e creatività della sua cerchia di amicizie,: una delle sue invenzioni fu il *metagramma* (*Word Ladder*), un gioco in cui vengono fornite la parola iniziale e la finale e bisogna trovare il modo di passare da una all'altra aggiungendo, togliendo o cambiando una lettera per volta[12] (per esempio, da *testa* a *coda*, una soluzione può essere *testa*-cesta-costa-cosa-*coda*[13]).

Così come il regno di Vittoria, così come la letteratura vittoriana e la morale del tempo, tante sono state le letture di quest'uomo dai molteplici interessi, e parecchie non positive. I nostri contemporanei ne hanno visto un pedofilo adducendo prove come la

[10] In merito, Rudy e Martin (Gardner) sembrano preferire i due "Sylvie & Bruno" agli "Alice". Se li trovate, leggeteli. C'è anche un piano proiettivo, da qualche parte. [RdA]

[11] Abbiamo parlato di una di queste nei PM di RM 41 e 42, in particolare nel secondo: "Da Aristotele a Lewis Carrol: da Lewis Carroll a Lewis Carroll". [RdA]

[12] Variazioni sul tema si hanno eliminando la possibilità di aggiungere e togliere lettere – così che la parola iniziale e finale devono essere della stessa lunghezza – e permettendo tra le operazioni possibili l'anagramma.

[13] Se volete divertirvi con uno tutt'altro che facile, provate a passare da "*Rudi*" a "*Mathematici*"…

frequentazione e l'affetto che aveva per le bambine[14], le tante foto di bambini nudi[15] che aveva scattato, le pagine di diario strappate e mai ritrovate di tutto un periodo della sua vita. Addirittura Richard Wallace ha scritto un intero libro con il solo intento di dimostrare che Dodgson ed un suo collega sarebbero stati i veri colpevoli degli assassini attribuiti a Jack lo Squartatore, e il metodo era basato su letture tra le righe e anagrammando[16] parte dei lavori di Carroll: il fatto che entrambi avessero alibi per almeno tre degli omicidi, era considerato del tutto irrilevante.

Ancora, ci fu un periodo in cui letture psicanalitiche del lavoro di Carroll furono piuttosto in voga: era noto che il matematico aveva dovuto far uso di antidolorifici (quello in uso ai suoi tempi era il laudano – un oppiaceo) durante i periodi di cattiva salute, e le figure come quelle del Bruco con il Narghilé avevano suggerito una certa dipendenza dalle droghe, ma stiamo parlando di una lettura dei recenti anni sessanta.

Come se non bastasse, le pagine mancanti del diario – a quanto pare eliminate dalla famiglia di Dodgson per evitare scandali – avrebbero contenuto infamanti informazioni riguardanti la relazione segreta tra l'autore e Alice Liddell (undicenne ai tempi), oppure con la sorella maggiore, o con la madre delle due, e non sapremmo dire cosa sarebbe peggio. Secondo più recenti interpretazioni si trattava più che altro di amicizie con donne sposate e di buona posizione; con il senno di poi si può pensare che forse i parenti avrebbero fatto un servizio migliore al povero Charles se non avessero distrutto i diari.

Sia come sia, le storie di Lewis Carroll e la sua tecnica di inventare parole nuove piacevano a corte (pare che la regina Vittoria le amasse particolarmente, e del resto anche lei aveva una figlia di nome Alice – un nome veramente comune) ed influenzarono la sua e le successive generazioni di autori. E favolosi esempi di logica illogica ci sono giunti che mai potrebbero essere intaccati dall'imitazione:

> *«Se viceversa,» continuò Tweedledee, «così fosse, potrebbe essere; e se così non fosse, sarebbe; ma dato che non è, non si dà. È logico.»*[17]

Sia come sia, inseguire e trovare una spiegazione per tutto ed inquadrare ogni personaggio non è il nostro scopo: ci limitiamo a ricordare che alcuni Grandi hanno camminato su cammini diversi dai contemporanei – e per questo ne abbiamo visto una traccia.

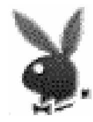
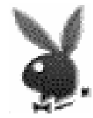
[14] Recentemente si è scoperto che aveva relazioni anche di non semplice amicizia con donne adulte, le cui tracce erano state cancellate per evitare scandali.

[15] Le foto di bambini nudi erano molto in voga in epoca vittoriana, rappresentando la purezza e l'innocenza, quindi la prova resta un po' debole.

[16] Qualche partigiano di Dodgson si è premurato di ottenere gli stessi anagrammi da un libro di Winnie-the-Pooh per dimostrare che il metodo non era certo rigoroso. Dopodichè qualche burlone è anche riuscito ad applicare il metodo di Wallace allo stesso libro di Wallace.

[17] Da "Attraverso lo specchio e quello che Alice vi trovò".

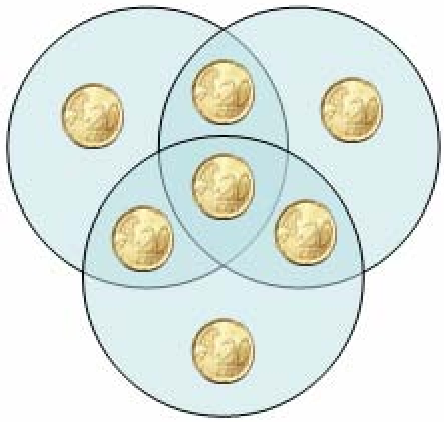
2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Il gioco della fontana			
Arrivati tardi			
Il contratto di SKY			

Il secondo problema è, evidentemente, frutto dei saldi di fine anno. Per questo ve ne rifiliamo tre.

2.1 Il gioco della fontana

Caso mai vi chiediate con quanto anticipo a Rudy vengano le idee per i problemi, sappiate che hanno appena "pinzato" il tizio che ha dipinto di rosso l'acqua della fontana di Trevi.



C'è da dire che sembra siano di moda le fontane, in questo periodo; vicino a casa di Rudy ce n'è una (moderna: lui la giudica abbastanza carina, anche se tende a passare sempre dall'altro lato) che sta suscitando un certo dibattito tra i soliti nullafacenti; sembra infatti che il suo unico ruolo sia quello di *toilette* (nel senso peggiore del termine) per i piccioni satollati dal vicino mercato.

E chi siamo noi, per esimerci da questa dilagante moda? Infatti, abbiamo trovato un problema su una fontana. Tipo Trevi, a vasche multiple con le monete dentro, solo più piccola. Ne trovate una rappresentazione schematica in figura. Per le monete, Rudy ha usato il *recto* del venti centesimi, che per quanto riguarda la forma è il conio che gli sta più simpatico (per il *verso* è fortemente indeciso: comunque il due euro finlandese, l'euro greco[18], il due centesimi italiano e qualunque pezzatura irlandese sono molto in alto).

[18] Conserva ancora quello regalatogli da Doc che lo aveva illegalmente acquisito da un taxista ateniese (mancava qualche minuto a mezzanotte, per questo era illegale).

Ora, il nostro problema è questo: vorremmo girare le monete in modo tale che, alla fine, le sei più esterne mostrino tutte il *recto*, mentre quella interna, comune a tutte e tre le vasche, mostri il *verso*.

Pere fare questo, abbiamo a disposizione due tipi di mosse:

FLIP: gira tutte le quattro monete di una vasca.

CANC: gira tutte le quattro monete di una vasca portandole a *recto* visibile

Secondo voi, ce la facciamo prima della fine dell'anno? E se no, perché? E se fossero solo le quattro monete di una vasca girate di *recto*, con le altre in diverse orientazioni?

Sconsigliate le prove pratiche: l'acqua è freddissima.

2.2 Arrivati tardi

C'è gente che prova un piacere sadico a porre problemi inutilizzabili. Ad esempio, alcuni *soi-disant* amici di Rudy hanno accuratamente atteso la pubblicazione dell'ultimo numero del 2007 per rifilargli due problemi che, dodici mesi prima, avrebbero dato una certa soddisfazione nel presentarli. Non sono difficili ma, soprattutto il secondo, Rudy lo trova piuttosto simpatico.

In quanti modi potete scrivere 2007 come somma di interi positivi *consecutivi*?

Visto che siamo da queste parti, quanti triangoli a lati interi e perimetro 2007 sono *equilateri*? E quanti *isosceli*? E, giacché ci siamo, quanti *scaleni*?

No, non ve li rifaccio con il 2008. Se vi rifilo merce dell'anno scorso, ho l'onestà di dirvelo. E poi abbiamo detto che sono in saldo, no?

2.3 Il contratto di SKY

Come sapete, dopo anni di elettronico siamo finiti anche su protonico e neutronico (leggasi "su carta"). Quello che pochi di voi sanno è che, per certi versi, in elettronico ci andiamo in svariati modi.

Infatti da un po' di tempo forniamo problemi (e soluzioni, tranquilli...) ad una piccola ma combattiva radio in quel di Bologna, *Radio Città Fujiko*: Rudy è sicuro di avere il logo da qualche parte, ma al momento non lo trova "Ma come fanno a mandare il logo via radio?" "Ve l'avevamo detto, che è una radio combattiva."

Comunque, siamo in attesa che qualcuno ci proponga il prossimo passo; in effetti, ci pare che nel *bouquet* di offerte delle varie TV digitali terrestri o spaziali manchi un programma monotematico di matematica.

Alberto e Fred si sono mostrati entusiasti di questa idea ("Che bello! Il papà va sul satellite! E quanto stai su?") e quindi si sono proposti come manager dell'intera operazione (col che potete dormire sonni tranquilli: non se ne farà mai nulla); per, dicono loro, *esplorare l'ambiente commerciale* hanno immediatamente richiesto l'allargamento del numero di canali disponibili su SKY. Siccome una volta che sono scesi dal letto hanno chiuso con l'attività fisica per tutta la giornata, la loro scelta è caduta sui canali sportivi, e Rudy si è trovato a dover scegliere tra la marea di offerte incrociate possibili; intendendo analizzare la cosa da tutte le parti, ha provato a pensare a come SKY vende i canali.

Dunque, qui abbiamo un'offerta di due canali; supponiamo anche che il *costo marginale* sia ignorabile (forse ne riparliamo quest'anno: in pratica, la spesa grossa di decoder & parabola li avete quando stabilite il contratto).

Possiamo supporre anche che il "valore" per il cliente di un canale sia una variabile distribuita uniformemente tra 0 e 1: A&F non si perdono una partita, mentre a Rudy non potrebbe fregargliene di meno; inoltre, possiamo anche supporre che questo valore sia additivo, ossia che il valore per il cliente del contratto con due canali sia la somma di quelli che ritiene i valori di ogni singolo canale.

Supponiamo anche che, con le opportune unità di misura e pagando tutti i mesi, il cliente potenziale acquisti il tutto solo quando il valore (del canale in più) è maggiore del prezzo (del canale in più).

Prima domanda: supponiamo i due canali siano prezzati indipendentemente; quale dovrebbe essere il prezzo di ogni canale per massimizzare i guadagni, e quanto ci si aspetta di guadagnare in media per ogni cliente?

Seconda domanda: supponiamo la politica inversa, ossia o ti prendi due canali o non ti prendi niente; sempre volendo massimizzare i profitti, quale dovrebbe essere in questo caso il prezzo e quanto vi aspettate di guadagnare?

Ora, prima di farvi la terza domanda, definiamo *surplus* (per il cliente) la differenza tra quello che il consumatore potenziale sarebbe stato disposto a pagare in base al "valore" definito sopra e il costo effettivo, con la nota che se questo valore è negativo assumiamo non se ne faccia nulla (il cliente non compra) e quindi valga zero.

Terza domanda: qual è il *surplus* per i due piani finanziari prospettati sopra?

Prendetevela pure calma: l'analisi di mercato di quei due è ferma, dato il sequestro di SIM per (de)meriti scolastici...

3. Bungee Jumpers

Dimostrate che se due lati adiacenti e la diagonale di un rettangolo possono essere espressi come numeri interi, allora l'area del rettangolo è divisibile per 12.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Questa sezione del numero di gennaio è sempre dedicata ai ringraziamenti per gli auguri ed complimenti che ci arrivano sotto le feste e che per noi sono i migliori regali di Natale possibili. Non faremo eccezione quest'anno: l'anno decimo di RM non esisterebbe senza il supporto e conforto dei nostri lettori, e non smetteremo mai di ripeterlo.

Tanto per cominciare, il grande Dario Bressanini ci ha citato sul suo blog scientifico-culinario (http://bressanini-lescienze.blogautore.espresso.repubblica.it/2007/12/10/la-pizza-di-platone/) e l'evento ha generato un'esplosione delle iscrizioni alla rivista. Non c'è modo di ringraziare Dario, che non solo ha spesso contribuito alle nostre pagine, ma ora ci fa anche conoscere ai suoi innumerevoli lettori.

Poi, sempre per ricordare i nostri sostenitori, ma anche gli amanti della matematica che per passione continuano a diffonderla in rete, ringraziamo tutti coloro che hanno citato il fortunatissimo Calendario di RM (sul sito è a disposizione nella sezione Bookshelf – anche in inglese!), ed in particolare ***.mau.*** (http://xmau.com/) e ***Ubaldo*** (www.pernigo.com), con il loro entusiasmo e capacità di raccontare la matematica.

Scale di Giacobbe

Ancora, non ci stancheremo mai di ringraziare i tanti lettori che leggono tutti i pezzi della rivista e ci fanno avere commenti e suggerimenti per migliorare: nella foto a sinistra ***Gianni***, ***Marco*** e ***Marta*** ci mostrano le loro scale di Giacobbe create qualche anno fa; le altre foto che ci hanno inviato non ve le facciamo vedere, non si sa mai che il Capo riesca a ricavarci un altro PM quando avrà finito di schiattare di invidia[19].

E poi, la versione del sito RM per ipo- e non-vedenti (http://rudimathematici.com/braille/) è ormai ultimato dal nostro ottimo webmaster ***Yan***, ed invitiamo tutti gli interessati ad andarci a fare un giro. ***Yan*** sta pensando ad un modo per rendere anche le formule più leggibili – vedremo come andrà a finire.

Infine, il nostro beneamato ***Zar*** ha pubblicato sul suo blog (http://proooof.blogspot.com/) una meravigliosa dimostrazione del funzionamento del Gioco del Quindici, che abbiamo ottenuto il permesso di pubblicare in testa alle nostre soluzioni e comincia proprio alla fine di questa frase.

4.1 Il Gioco del Quindici

Il classico enigma di Loyd

Il gioco del 15 è famoso: si tratta di riordinare 15 caselle numerate da 1 a 15 disposte in una griglia 4×4. Anche l'immagine qua a lato è abbastanza famosa: è un enigma proposto da Sam Loyd relativo al gioco in questione. Riuscite a riordinare i numeri del gioco rappresentato in figura?

Se ancora non sapete la soluzione, non leggete oltre. Se invece sapete già che la risposta è... (siamo sicuri che volete saperlo? bé, magari lo scrivo sotto, se sapete già la risposta è inutile che la ripeta proprio qua).

Comunque, se uno prova a cercare in giro la soluzione trova, su vari siti, che la risposta dipende da un problema di parità, ma la dimostrazione completa non la si trova quasi mai.

Ebbene, eccola qua. Una dimostrazione seria, come fanno i Veri Matematici.

Sia N il numero di coppie di numeri che non sono nel loro ordine naturale. Nell'esempio della figura N=1, perché la coppia (15,14) non è ordinata (mentre tutte le altre sono in ordine—occhio che bisogna considerare tutte le possibili coppie, cioè (1,2), (1,3), (1,4), ... , (2,3), (2,4), ... , (3,4), ... , (15,14). In sostanza, quando si parla di coppia si intende che si devono scegliere due numeri a caso, procedendo secondo il verso di lettura).

Invece di ragionare su spostamenti di caselle, conviene ragionare su spostamenti del *buco*.

Teorema dello spostamento orizzontale. Ogni spostamento del buco di uno spazio verso destra o verso sinistra lascia N costante.

Dimostrazione: uno spostamento a destra o a sinistra del buco non cambia l'ordine secondo cui sono disposte le caselle. CVD.

[19] *La buona notizia è che, riordinando la scrivania, ho ritrovato l'anello per le string figures! [RdA]*

Teorema dello spostamento verticale. Ogni spostamento del buco di uno spazio verso l'alto o verso il basso fa aumentare o diminuire *N* di 3 unità.

Dimostrazione: uno spostamento del buco verso il basso cambia l'ordinamento della tessera spostata rispetto alle tre tessere precedenti. Viceversa, uno spostamento del buco verso l'alto cambia l'ordinamento rispetto alle tre tessere successive. CVD.

Teorema del ritorno. Qualunque movimento di tessere che riporti il buco nella posizione iniziale altera *N* di un numero *pari* di unità.

Dimostrazione: siccome il movimento orizzontale del buco è ininfluente, possiamo porre l'attenzione solo sui movimenti verticali. Perché il buco possa ritornare nella posizione di partenza, deve essere stato fatto un numero pari di movimenti verticali. Dunque *N* viene modificato secondo la formula

$$\sum_{i=1}^{n\ \text{pari}} (-1)^{a_n} \cdot 3 = 3 \sum_{i=1}^{n\ \text{pari}} (-1)^{a_n}$$

(dove a_n è uguale a 0 oppure a 1, a seconda di come viene cambiato l'ordinamento: abbiamo detto che *N* aumenta o diminuisce di 3, ma non sappiamo distinguere i due casi in generale, dipende dalle mosse che vengono fatte).

Anche se non sappiamo quanti sono gli a_n uguali a zero e quanti, invece, gli a_n uguali a uno, sappiamo però che questi sono sempre un numero pari. Possiamo pensare, allora, di accoppiare i valori di $(-1)^{a_n}$, cioè di sommarli due alla volta. Possono presentarsi solo quattro possibilità:

$+1+1 = 2$,

$+1-1 = 0$,

$-1+1 = 0$,

$-1-1 = -2$,

e questi sono tutti numeri pari. CVD.

Allora possiamo dare una risposta al quesito iniziale: è possibile riordinare i numeri della figura? La disposizione iniziale ha N=1, quella richiesta ha N=0, e siccome *N* può variare soltanto di un numero pari di unità la disposizione iniziale *non* può essere riordinata come richiesto.

4.2 [106]

4.2.1 Non dovrebbe stare qui

Probabilmente il problema non era difficilissimo come impostato, ma l'estensione proposta da ***Antonio*** non è stata tentata da nessuno. Lui stesso fornisce un tentativo, ma confidando nell'aiuto dei bravi solutori di RM rimandiamo la pubblicazione al mese prossimo.

4.3 [107]

4.3.1 "Lego" o "Plastic City"?

Se mai qualcuno aveva il dubbio che si sarebbe generata una polemica, niente da fare: forse a Natale sono tutti più buoni. Comunque le soluzioni sono arrivate, in particolare da ***RM²***, ***Zar***, ***Franco***, ***Trekker*** e ***Cid***. La prima arrivata e senz'altro la più "pratica" è quella di ***RM²***:

> Problema interessante, non fosse altro che per la totale assenza di dimensioni e misure dei pezzi dei quali è richiesta una accurata misurazione dell'angolo.

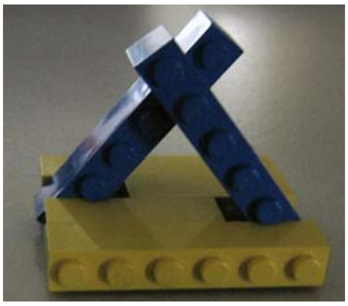
Curiosamente, la storia di von Neumann e della sua macchina mi ricorda i bei tempi in cui ero riuscito, col lego, a costruire degli ingranaggi meccanici facenti funzione di porte logiche!

Con una serie di incastri, anche in diagonale (!), ruote e pulsanti ero riuscito a creare dei congegni in lego tali per cui premendo dei pulsanti dal lato di input, veniva prodotto un risultato, nel lato di output, sollevando un pulsante dalla parte opposta. Alla luce di queste passate esperienze, ritengo di possedere i requisiti per poter risolvere il problema. Mi armo dei due pezzi indicati dal problema, quelli 1x4, li unisco per il piolo estremo, e li faccio ruotare fino all'angolo minimo, quando il pezzo superiore viene arrestato dal secondo piolo del pezzo inferiore.

Come si fa a calcolare matematicamente quell'angolo?

Il primo istinto è stato quello di proiettare il tutto su un foglio di carta e poi con il goniometro vedere quanto misura l'angolo.

Poi, un po' perché chissà dov'è il goniometro, un po' per istinto, ho voluto provare a vedere se si riusciva a comporre un triangolo connettendo con un altra barretta di lego le due barrette (avendo attaccato un'altra barretta a partire dal terzo piolo, sul prolungamento della barretta inferiore, in modo da portare le due parti allo stesso livello).


La soluzione di RM²

Ebbene, casualmente è stato possibile ottenere un triangolo, neanche troppo grande, con lati di lunghezza intera di unità di lego!

Ad essere sinceri, non è proprio preciso preciso, l'incastro, ma rientra nella tolleranza permessa agli incastri del lego. Il triangolo così ottenuto è isoscele e ha la base lunga 5 unità lego. (Per unità lego si intende la distanza tra i centri di due pioli consecutivi, che dovrebbe essere equivalente al lato di un mattoncino 1x1) Dicevamo, la base è lunga 5 unità e il lato è lungo 4 unità.

Pertanto possiamo determinare con buona approssimazione per via empirica che, detto alpha l'angolo cercato, sin(alpha) = 5/8.

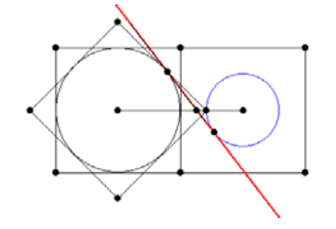
Zar si è dato da fare per fare un disegno accurato...

Il quesito sui lego è molto carino... Avevo sottovalutato Rudi, mi ero detto "ma guarda un po' che brutti quesiti che ci propone", e invece devo ricredermi[20]. Inizialmente pensavo che l'angolo formato dai due pezzi di lego dipendesse dalla dimensione del cerchio in rilievo (cilindretto?) sul quale si agganciano i pezzi. Pensavo (ignaro!) che i progettisti dei lego avessero scelto a caso il diametro del cerchio. Invece no: un riscontro con la realtà (smontaggio di due pezzi di lego da una costruzione dei figli) mi ha fatto capire che il diametro del cerchio non è stato scelto a caso; quel diametro è il più grande possibile. Mi spiego: se noi prendiamo un "pezzo da uno" e lo incastriamo su un cilindretto qualsiasi di un "piano", e poi proviamo a farlo ruotare con le dita, notiamo che gli spigoli del pezzo da uno sfiorano tutti i cilindretti adiacenti del piano. Se i cilindretti fossero solo un pochino più grandi, non sarebbe possibile fare ruotare il pezzo da uno. Spero di essermi spiegato, qua intorno c'è un via-vai di bimbi con addobbi natalizi, mi rendo conto di non essere in grado di mantenere il massimo della concentrazione :-)

[20] *Anche a me, sembrava brutto. Però avevo una soluzione generalizzata molto carina; e so che i lettori di RM sono molto più bravi di me, a capire quando un problema è bello. [RdA]*

Veniamo alla soluzione (della quale allego una figurina, ho sperimentato un programma di disegno geometrico che non conoscevo, si chiama kseg, per linux, che è un clone di Cabrì).

Nella figura si vede un mattoncino “due per uno”; nella parte destra è evidenziato, in blu, il cilindretto che serve per l’incastro. Nella parte sinistra ho disegnato un quadrato ruotato di 45 gradi rispetto al mattoncino. Si osserva che il vertice del quadrato sta sulla circonferenza blu (se la circonferenza fosse leggermente più grande, il quadrato non potrebbe ruotare liberamente).



La soluzione di Zar

Nella parte sinistra è disegnata anche una circonferenza: è la circonferenza inscritta nei due quadrati, quella intorno alla quale ruotano i bordi del pezzo di lego che si incastra sopra al primo. Per rispondere al quesito occorre dunque disegnare la retta tangente comune alle due circonferenze, che ho disegnato in rosso.

Dal punto di vista algebrico non è difficile calcolare l’angolo che la retta rossa forma con il bordo del mattoncino: si fa con una proporzione, che vado ad enunciare.

Se indichiamo con R1 il raggio della circonferenza grande, R2 quello della piccola, D il punto in cui la tangente cercata incontra la congiungente i due centri delle circonferenze, d1 la distanza tra il centro della circonferenza grande e D, d2 la distanza tra il centro della piccola e D, otteniamo:

R1:R2=d1:d2.

Ora, d1 e d2 sono incogniti, ma una simpatica proprietà delle proporzioni (che si impara in seconda media e si dimentica in terza, circa, e che corrisponde a una semplice proprietà delle frazioni), ci permette di scrivere:

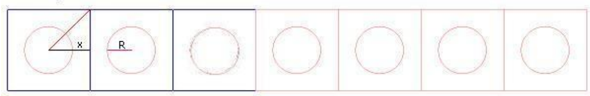
(R1+R2):R1=(d1+d2):d1.

Siccome d1+d2 è una quantità nota, si può ricavare d1, e da qui tutto il resto. Risulta quindi che l’angolo è uguale a arcsin[(3−sqrt(2))/2], pari a circa 52.4567 gradi.

Ma il bello di questo quesito è questo: la figura che vi ho mandato è stata costruita con un programma di geometria euclidea, ovvero un programma che simula le costruzioni con riga e compasso. Quindi l’angolo in questione può essere rappresentato semplicemente usando la riga e il compasso, e questo quesito è risolubile nel senso che davano gli antichi greci alla parola. Insomma, si può fare tutto senza calcoli. Il risultato che si ottiene è irrazionale algebrico, non trascendente. (Se è irrazionale algebrico, forse si riesce a calcolare anche esplicitamente, mediante radicali? Mah, i greci sarebbero stati in grado di farlo...).

Forse sì. Inutile dire che ***Cid*** non ha avuto problemi a provarci:

Nella figura seguente è rappresentato il gradino lungo 7 attacchi.



Il gradino di Cid

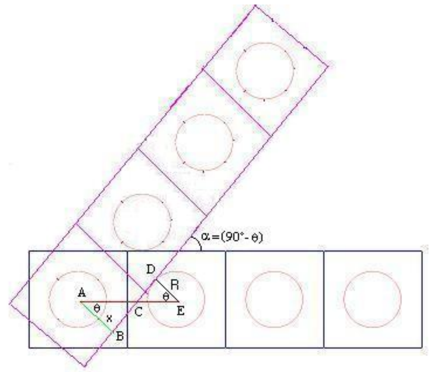
Chiamo x il semilato di un quadrato del blocchetto, la semidiagonale (disegnata in rosso in figura sarà quindi lunga: $x\sqrt{2}$. Chiamando R il raggio del cerchio, avremo che lo spigolo di un blocchetto sfiora la sporgenza circolare dell’altro blocchetto se: $x\sqrt{2} = (2x - R)$.

Risolvendo: $R = x\left(2-\sqrt{2}\right)$.

Ruotiamo ora i blocchetti.

Il triangolo rettangolo ABC ha un cateto (quello di colore verde) di lunghezza *x*, per cui essendo l'angolo BAC uguale a θ, l'ipotenusa AC è uguale a: $\dfrac{x}{\cos\theta}$.

Il triangolo rettangolo CDE ha un cateto (quello di colore nero) di lunghezza *R*, per cui essendo l'angolo CED uguale a θ, l'ipotenusa CE è uguale a: $\dfrac{R}{\cos\theta}$, e quindi



I blocchi ruotati di Cid

essendo $R = x\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)$, l'ipotenusa CE è uguale a: $\dfrac{x\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)}{\cos\theta}$.

Siccome AE è lungo $2x$ abbiamo:

$$\text{AE} = \text{AC} + \text{CE} = \frac{x}{\cos\theta} + \frac{x\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)}{\cos\theta} = 2x\,.$$

L'equazione: $\dfrac{x}{\cos\theta} + \dfrac{x\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)}{\cos\theta} = 2x$ può essere semplificata dividendo tutti i termini per *x* e moltiplicandoli per $\cos\theta$ ottenendo: $1+\left(2-\sqrt{2}\right)=2\cos\theta$.

Semplificando: $\cos\theta = \dfrac{3-\sqrt{2}}{2}$, e quindi poiché l'angolo cercato α è uguale a $\left(90°-\theta\right)$, in quanto α è uguale all'angolo DCE:

$$\alpha = 90° - \arccos\left(\frac{3-\sqrt{2}}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{3-\sqrt{2}}{2}\right).$$

Di certo ***Franco*** è stato il più sintetico:

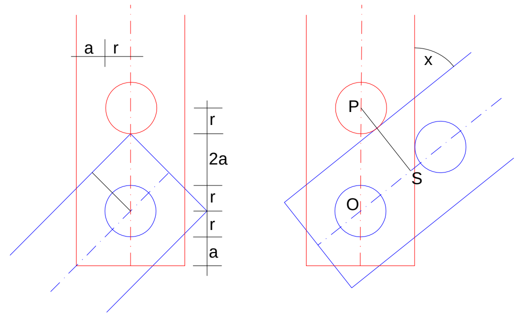
Faccio riferimento a questa figura a lato. Dalla seconda figura ricavo:

$$\overline{OP} = 2r + 2a$$

$$\overline{SP} = 2r + a$$

$$x = \arcsin\frac{2r+a}{2r+2a} = \arcsin\frac{2+k}{2+2k}$$

$$k = \frac{a}{r}$$



Le figure di Franco

$$(r+2a)^2 = 2(r+a)^2$$

$$r^2 + 4ra + 4a^2 = 2r^2 + 4ra + 2a^2$$

Dalla prima invece:

$$2a^2 = r^2$$

$$2k^2 = 1$$

$$k = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ed infine:

$$x = \arcsin\frac{2+k}{2+2k} = \arcsin\frac{4+\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}$$

$$x \cong 0{,}9155423 rad \cong 52°27'14''$$

E con questo, lasciamo a voi la decisione su come scrivere meglio il risultato. ***Trekker*** ha fatto di più ed ha misurato il diametro dei "bottoni" e le dimensioni dei blocchetti... ottenendo dei valori interessanti, che non vi diamo.

4.3.2 Distratto come tutti i grandi geni...

Ancora una volta il Capo è riuscito a raccontarci qualche spezzone di vita quotidiana con le Pesti: gli sono stati grati ***Trekker***, ***FraPao*** e ***Cid***, che gli hanno trovato una soluzione. Cominciamo con ***Trekker***.

> Indichiamo con le iniziali dei nomi degli amici di Rudy le incognite che andiamo cercando, precisamente: con le lettere maiuscole A,C,F,H ed L gli € di credito nei confronti di Rudy rispettivamente di Alberto, Consuelo, Fred, Hymen e Luigi e analogamente con le lettere minuscole a,c,f,h,l i centesimi di €.
>
> Con queste posizioni le prime quattro condizioni si traducono in:
>
> $$a + \frac{A}{100} - \frac{5}{100} = 2\cdot\left(A + \frac{a}{100}\right)$$
>
> $$c + \frac{C}{100} - \frac{5}{100} = \frac{1}{2}\cdot\left(C + \frac{c}{100}\right)$$
>
> $$f + \frac{F}{100} - \frac{11}{100} = 2\cdot\left(F + \frac{f}{100}\right)$$
>
> $$h + \frac{H}{100} - \frac{11}{100} = \frac{1}{2}\cdot\left(H + \frac{h}{100}\right)$$
>
> Semplificando si ottiene:
>
> $$98\cdot a = 199\cdot A + 5$$
>
> $$199\cdot c = 98\cdot C + 10$$
>
> $$98\cdot f = 199\cdot F + 11$$
>
> $$199\cdot h = 98\cdot H + 22$$
>
> Le soluzioni intere sono infinite, precisamente se j_1, j_2, j_3, j_4 sono interi le soluzioni sono rappresentabili con:

$$a = 63 + 199 \cdot j_1 \quad A = 31 + 98 \cdot j_1$$
$$c = 36 + 98 \cdot j_2 \quad C = 73 + 199 \cdot j_2$$
$$f = 59 + 199 \cdot j_3 \quad F = 29 + 98 \cdot j_3$$
$$h = 40 + 98 \cdot j_4 \quad H = 81 + 199 \cdot j_4$$

Trascurando le soluzioni tali per cui il numero di cent sia < 0 e > 100 otteniamo i seguenti crediti:

Alberto: 31.63 €

Consuelo: 73.36 €

Fred: 29.59 €

Hymen: 81.40 €

Imponendo ora la condizione che come gruppo non abbiano perso né guadagnato nulla dall'errore di Rudy otteniamo:

$$31.63 + 73.36 + 29.59 + 81.40 + L + \frac{l}{100} = 63.31 + 36.73 + 59.29 + 40.81 + l + \frac{L}{100}$$

cioè

$$l = L + 16$$

Nelle tasche di Luigi, dopo la spesa di 75 cent, rimane:

$$l + \frac{L}{100} + \frac{75}{100} = l + \frac{L - 75}{100} = l + \frac{l - 91}{100}$$

Caso 1

Ipotizziamo che per distrazione, causa di tutto quanto, il testo del problema dovesse essere "Luigi dopo aver speso settantacinque cent si accorge di avere un numero **dispari (non pari!)** e intero di euro in tasca". In questo caso, posto che k sia un intero non negativo, basta risolvere l'equazione a numeri interi seguente:

$$l + \frac{l - 91}{100} = 2k + 1$$

Si vede "ad occhio" che l=91 (e quindi L=75) e k=45 rappresenta una soluzione. Per trovare le altre basta riscrivere l'equazione come:

$$101 \cdot l = 200 \cdot k + 191$$

Quindi nota la soluzione l=91 e k=45 per trovare le altre basta "scambiare" i coefficienti interi delle incognite. Posto quindi che j sia un intero, tutte le soluzioni intere sono esprimibili con:

$$l = 200j + 91, \quad k = 101j + 45 \quad \Rightarrow L = 200j + 75$$

L'unica soluzione con 0≤l<100 e k≥0 si ottiene per j=0. In questo caso il credito di **Luigi ammonta a 75.91€** (Nota: questo risultato si ottiene anche direttamente osservando che affinché i cent residui di Luigi siano zero – dopo aver tolto 75 cent – bisogna che Rudy avesse un debito di **75 € e 91 (=75+16) cent**).

Caso 2

Supponiamo ora che nelle tasche di Luigi restino **2k €** (un numero pari di Euro quindi) ed **h cent**. L'equazione da considerare è la seguente:

$$l+\frac{l-91}{100}=2\cdot k+\frac{h}{100}$$

Le soluzioni intere di questa equazione a tre incognite (l,k,h) sono rappresentabili (con p e q interi) con:

$$l=200p-99q; \quad k=101p-50q-5; \quad h=q \quad \Rightarrow L=200p-99q-25$$

Ora diamo, sempre ipotizzando una distrazione, due interpretazioni della condizione su Luigi:

1. Luigi dopo la spesa di 75 cent ha un numero pari ed intero di euro (**inteso come numero di monete da 1 € e cioè non come valore complessivo residuo rimasto nelle sue tasche**). Questa affermazione nulla dice su quanti cent sono rimasti nelle tasche di Luigi, ovvero non possiamo assumere che Luigi abbia zero cent in tasca. Anzi assumiamo che Luigi abbia veramente dei cent in tasca (cioè h=q≥1) residui.

   Dalla soluzione generale possiamo trovare alcune soluzioni particolari:

   con q=1 (**h=1 cent in tasca**) e p=1 si ha: **76.92 €**

   con q=3 (**h=3 cent in tasca**) e p=2 si ha: **78.94 €**

   con q=5 (**h=5 cent in tasca**) e p=3 si ha: **80.96 €**

   con q=7 (**h=7 cent in tasca**) e p=4 si ha: **82.98 €**

2. Luigi dopo la spesa di 75 cent ha un numero pari ed intero di euro (**inteso come valore complessivo**), cioè, in particolare, Luigi ha esattamente 0 cent in tasca. Affinché Luigi abbia h=0 cent in tasca bisogna che q=0. Pertanto il credito di Luigi è rappresentabile con

   $$l=200p-9 \quad \Rightarrow L=200p-25$$

   cioè ad esempio **175 € e 191 cent** (p=1), **375 € e 391 cent** (p=2), etc.

   In questo caso probabilmente Rudy ha chiesto più prestiti a Luigi, annotando separatamente Euro e cent, sommandoli successivamente in modo distinto (senza conversione dei cent in Euro). Per un genio distratto, questo è possibile!

La versione di ***FraPao*** è veloce e sintetica:

Dunque, il nostro distrattone ha consegnato per errore ad Alberto ***A*** euro e ***a*** centesimi, quando invece avrebbe dovuto dargli ***a*** euro e ***A*** centesimi.

E la stessa cosa ha fatto per gli altri 4 amici: a Consuelo ***C*** euro e ***c*** centesimi, a Fred ***F*** euro e ***f*** centesimi, a Hymen ***H*** euro e ***h*** centesimi, a Luigi ***L*** euro e ***l*** centesimi. Il problema ci dice che

$$100\cdot A+a-5=2\cdot(100\cdot a+A) \qquad [1]$$

$$100\cdot C+c-5=\frac{1}{2}\cdot(100\cdot c+C) \qquad [2]$$

$$100\cdot F+f-11=2\cdot(100\cdot f+F) \qquad [3]$$

$$100\cdot H+h-11=\frac{1}{2}\cdot(100\cdot h+H) \qquad [4]$$

$$l=75 \qquad [5]$$

e inoltre, poiché lo scambio è stato ininfluente agli effetti della somma degli importi:

$$A + C + F + H + L = a + c + f + h + l \qquad [6]$$

Ogni variabile è un intero compreso fra 0 e 99 estremi inclusi. Dalla [1] si ricava: $98 \cdot A - 199 \cdot a - 5 = 0$, da cui si deduce che $A > 2 \cdot a$.

Poniamo quindi $A = 2 \cdot a + k$ (*k* intero positivo).

Sostituendo nella nostra equazione arriviamo alla seguente

$$a = \frac{98 \cdot k - 5}{3}$$

Il valore k=1 fa proprio al caso nostro, perché rende il numeratore divisibile per 3 e ci fornisce

a=31 A=63

Con procedimento del tutto simile per altri 3 amici :

c=73 C=36

f=29 F=59

h=81 H=40

mentre per Luigi dovremo ricorrere alla [5] e alla [6], ottenendo :

l=75 L=91

Ed infine, l'approccio di ***Cid***:

Se ci fosse stato il vincolo che il numero di centesimi che Rudy doveva dare a ciascuno dovesse essere inferiore a 100, allora il problema non avrebbe ammesso soluzioni valide. Siccome (fortunatamente) questo vincolo non compare nel testo del problema, abbiamo un numero infinito di soluzioni valide.

Tutte le soluzioni valide hanno la seguente forma:

Rudy doveva dare a:	Alberto	Consuelo	Fred	Hymen	Luigi
Numero di: €uro	$31+98M_1$	$73+199M_2$	$29+98M_3$	$81+199M_4$	$75+100M_5$
Numero di: €uroCent	$63+199M_1$	$36+98M_2$	$59+199M_3$	$40+98M_4$	M_6

In cui le variabili M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 e M_6 devono rispettare le seguenti tre condizioni:

1) Le variabili M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 e M_6 sono numeri interi non negativi
2) La somma $(M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5)$ deve essere un numero dispari
3) $M_6 = 91 + 100 \cdot M_5 + 101 \cdot (M_4 - M_3 + M_2 - M_1)$

Esempio di soluzione valida:

Rudy doveva dare a:	Alberto	Consuelo	Fred	Hymen	Luigi
Numero di: €uro	31	272	29	81	75
Numero di: €uroCent	63	134	59	40	192

Dimostrazione

"Alberto dopo aver speso 5 cent si accorge di avere in tasca esattamente il doppio della cifra che Rudy avrebbe dovuto dargli."

Chiamo X_1 il numero di € che Rudy doveva dare ad Alberto e Y_1 il numero di €-cent che Rudy doveva dare ad Alberto. Ne ricavo l'equazione:

$$100 \cdot Y_1 + X_1 - 5 = 2 \cdot (100 \cdot X_1 + Y_1)$$

Risolvendo:

$$Y_1 = \frac{199 \cdot X_1 + 5}{98} = \frac{196 \cdot X_1 + 3 \cdot X_1 + 5}{98} = 2 \cdot X_1 + \frac{3 \cdot X_1 + 5}{98}$$

Occorre che Y_1 sia un numero intero, quindi occorre che $(3X_1 + 5)$ sia divisibile per 98, quindi: $3 \cdot X_1 + 5 = 98 + 3 \cdot 98 \cdot M_1$ (dove M_1 è un numero intero), da cui:

$$3 \cdot X_1 = 93 + 3 \cdot 98 \cdot M_1$$

e quindi:

$$X_1 = 31 + 98 \cdot M_1$$

e di conseguenza:

$$Y_1 = 2 \cdot X_1 + \frac{3 \cdot X_1 + 5}{98} = 2 \cdot (31 + 98 \cdot M_1) + \frac{3 \cdot (31 + 98 \cdot M_1) + 5}{98}$$

$$Y_1 = 62 + 196 \cdot M_1 + \frac{93 + 5 + 3 \cdot 98 \cdot M_1}{98} = 62 + 1 + 196 \cdot M_1 + 3 \cdot M_1 = 63 + 199 \cdot M_1$$

In modo analogo si procede per trovare quanto Rudy doveva dare a Consuelo, Fred e Hymen.

Per quanto riguarda Consuelo: chiamo X_2 il numero di € che Rudy doveva dare a Consuelo e Y_2 il numero di €-cent che Rudy doveva dare a Consuelo. Ne ricavo l'equazione:

$$100 \cdot Y_2 + X_2 - 5 = \frac{100 \cdot X_2 + Y_2}{2}$$

moltiplicando ambo i membri per 2 si ottiene:

$$200 \cdot Y_2 + 2 \cdot X_2 - 10 = 100 \cdot X_2 + Y_2$$

Risolvendo:

$$X_2 = \frac{199 \cdot Y_2 - 10}{98} = \frac{196 \cdot Y_2 + 3 \cdot Y_2 - 10}{98} = 2 \cdot Y_2 + \frac{3 \cdot Y_2 - 10}{98}$$

Occorre che X_2 sia un numero intero, quindi occorre che $(3Y_2 - 10)$ sia divisibile per 98, quindi: $3 \cdot Y_2 - 10 = 98 + 3 \cdot 98 \cdot M_2$ (dove M_2 è un numero intero). Da cui:

$$3 \cdot Y_2 = 108 + 3 \cdot 98 \cdot M_2$$

e quindi:

$$Y_2 = 36 + 98 \cdot M_2$$

e di conseguenza:

$$X_2 = 2 \cdot Y_2 + \frac{3 \cdot Y_2 - 10}{98} = 2 \cdot (36 + 98 \cdot M_2) + \frac{3 \cdot (36 + 98 \cdot M_2) - 10}{98}$$

$$X_2 = 72 + 196 \cdot M_2 + \frac{108 - 10 + 3 \cdot 98 \cdot M_2}{98} = 72 + 1 + 196 \cdot M_2 + 3 \cdot M_2 = 73 + 199 \cdot M_2$$

Per quanto riguarda Fred:

Chiamo X_3 il numero di € che Rudy doveva dare a Fred e Y_3 il numero di €-cent che Rudy doveva dare a Fred. Ne ricavo l'equazione:

$$100 \cdot Y_3 + X_3 - 11 = 2 \cdot (100 \cdot X_3 + Y_3)$$

Risolvendo ottengo:

$$Y_3 = 2 \cdot X_3 + \frac{3 \cdot X_3 + 11}{98}$$

Occorre che Y_3 sia un numero intero, quindi occorre che ($3X_3$ + 11) sia divisibile per 98, quindi: $3 \cdot X_3 + 11 = 98 + 3 \cdot 98 \cdot M_3$ (dove M_3 è un numero intero). Da cui ottengo:

$$X_3 = 29 + 98 \cdot M_3$$

e di conseguenza:

$$Y_3 = 2 \cdot X_3 + \frac{3 \cdot X_3 + 11}{98} = 58 + 196 \cdot M_3 + \frac{87 + 11 + 3 \cdot 98 \cdot M_3}{98} = 59 + 199 \cdot M_3$$

Per quanto riguarda Hymen: chiamo X_4 il numero di € che Rudy doveva dare a Hymen e Y_4 il numero di €-cent che Rudy doveva dare a Hymen. Ne ricavo l'equazione:

$$100 \cdot Y_4 + X_4 - 11 = \frac{100 \cdot X_4 + Y_4}{2}$$

moltiplicando ambo i membri per 2 si ottiene:

$$200 \cdot Y_4 + 2 \cdot X_4 - 22 = 100 \cdot X_4 + Y_4$$

Risolvendo:

$$X_4 = 2 \cdot Y_4 + \frac{3 \cdot Y_4 - 22}{98}$$

Occorre che X_4 sia un numero intero, quindi occorre che (3 Y_4 − 22) sia divisibile per 98, quindi: $3 \cdot Y_4 - 22 = 98 + 3 \cdot 98 \cdot M_4$ (dove M_4 è un numero intero). Da cui ottengo:

$$Y_4 = 40 + 98 \cdot M_4$$

e di conseguenza:

$$X_4 = 2 \cdot Y_4 + \frac{3 \cdot Y_4 - 22}{98} = 80 + 196 \cdot M_4 + \frac{120 - 22 + 3 \cdot 98 \cdot M_4}{98} = 81 + 199 \cdot M_4$$

Infine, per quanto riguarda Luigi sappiamo che dopo aver speso 75 cent resta con un numero intero di €uro in tasca. Ciò significa che il numero di centesimi che ha ricevuto è uguale a 75 (modulo 100); per cui il numero di € che Rudy doveva dargli è uguale a ($75+100M_5$) dove M_5 è un numero intero.

Siccome nel testo del problema è affermato che: "Rudy doveva fornire dei ben precisi importi..." si deduce che *le variabili M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 e M_6 sono numeri interi non negativi*, infatti se fossero numeri interi negativi Rudy avrebbe dovuto ricevere (e non fornire) dei ben precisi importi. Risulta dunque dimostrata la (Condizione 1).

Analizziamo ora il fatto che: "l'importo totale delle finanze" del gruppo non risulta influenzato dall'errore di Rudy.

Chiamo M_6 il numero di €-cent che Rudy doveva dare a Luigi. Ricavo l'equazione:

$(31+98M_1) + (73+199M_2) + (29+98M_3) + (81+199M_4) + (75+100M_5) = (63+199M_1) + (36+98M_2) + (59+199M_3) + (40+98M_4) + M_6$

Semplificando ottengo:

$$91+98M_1+199M_2+98M_3+199M_4+100M_5=199M_1+98M_2+199M_3+98M_4+M_6$$

$$91+101M_2+101M_4+100M_5=101M_1+101M_3+M_6$$

$$M_6=91+100M_5+101M_4-101M_3+101M_2-101M_1$$

$$M_6=91+100M_5+101(M_4-M_3+M_2-M_1)$$

Risulta dunque dimostrata anche la (Condizione 3).

Infine, siccome il testo del problema afferma che: "Luigi dopo aver speso settantacinque cent si accorge di avere un numero pari e intero di euro in tasca". Luigi ha: M_6 € + ($75+100M_5$) centesimi, dopo aver speso 75 centesimi gli restano M_6 € + $100M_5$ centesimi = ($M_6 + M_5$) €; ($M_6 + M_5$) deve quindi essere un numero pari. Quindi la somma: $91+100M_5+101\cdot(M_4-M_3+M_2-M_1)+M_5$ deve essere un numero pari. Cioè: $91+101\cdot(M_4-M_3+M_2-M_1+M_5)$ deve essere un numero pari e quindi: $101\cdot(M_4-M_3+M_2-M_1+M_5)$ deve essere un numero dispari; che equivale a dire che: $M_4-M_3+M_2-M_1+M_5$ deve essere un numero dispari; cioè:

$(M_4 - M_3 + M_2 - M_1 + M_5)$ Modulo 2 = 1

$(M_4 + M_3 + M_2 + M_1 + M_5)$ Modulo 2 = 1

Che è la dimostrazione della (Condizione 2) che afferma che: *La somma (M_1+ M_2 + M_3 + M_4 +M_5) deve essere un numero dispari.*

Nota finale:

Per avere una soluzione in cui tutte le quantità in €-cent che Rudy doveva dare siano inferiori a 100, dovremmo avere:

$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = 0$ e $M_6 < 100$

Da ($M_6 < 100$) consegue che: $91 + 100M_5 + 101\cdot(M_4 - M_3 + M_2 - M_1) < 100$, e dovendo essere: $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = 0$ avremmo: $91 + 100M_5 < 100$.

Quindi: $100M_5 < 9$. Ma dovendo essere M_5 un numero intero non negativo, ciò equivale a dire che anche M_5 deve essere uguale a zero.

Per cui dovremmo avere: $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = 0$.

Ma in tal caso avremmo: $(M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5) = 0$, ed essendo tale somma pari questa soluzione non risulta valida.

Quindi in qualsiasi soluzione valida Rudy doveva dare, ad almeno una persona, una quantità in centesimi non inferiore a 100.

Siamo arrivati alla fine, al mese prossimo!

5. Quick & Dirty

Il nostro nuovo mazzo da 120 carte, acquistato appositamente per essere divisibile per un mucchio di numeri, è formato da 60 carte rosse e 60 carte nere. Lo abbiamo mescolato e adesso che è in disordine ci poniamo una domanda. Consideriamo le seguenti disposizioni, estese all'intero mazzo (solo per i divisori di 120, evidentemente):

Una rossa, una nera, una rossa, una nera...

Due rosse, due nere, due rosse, due nere...

Tre rosse, tre nere, tre rosse, tre nere...

...

Sessanta rosse, sessanta nere (e basta).

... Ma secondo voi, qual è la più probabile?

Siccome queste configurazioni sono tutte completamente specificate, sono equiprobabili. Ognuna di esse ha probabilità $\frac{60!\cdot 60!}{120!}$*, suppergiù pari a* 10^{-35}. *Quindi, vi sconsigliamo di scommetterci.*

6. Zugzwang!

6.1 Il Re della Collina

Un giochino facile, questa volta. Prima una domanda balorda.

Quante carte ci sono in un mazzo da cinquantadue? Se fate attenzione, vi accorgete che sono cinquantacinque: due Jolly più l'ultima, assolutamente inutile, che contiene i punteggi del bridge[21]. Vogliamo sperare l'abbiate tenuta, perché per questo gioco oltre al mazzo da cinquantadue (sì, proprio le cinquantadue) vi servono tre Jolly; oltre ai due regolari, usate la carta dei punteggi.

Visto che a noi l'ha insegnato un tedesco (e la cosa è evidente: quelli che si chiamano "German Games" sono, al confronto, di una semplicità incredibile), procediamo in modo pragmatico.

Giocatori: Due (...e già è complicato così.).

Materiale: Mazzo da cinquantadue più tre jolly, come detto sopra.

Avvio: Un giocatore fa il Mazziere; prima separa i tre Jolly dal mazzo e quindi mescola le carte restanti distribuendone 11 (coperte) ad ognuno dei giocatori. Ogni giocatore, quindi, si prende un jolly; il jolly restante viene messo a centro tavola, per storto.

[21] Rudy e Doc sono stati, per un certo periodo di tempo, entusiasti giocatori di bridge (come amano dire, hanno sempre avuto più entusiasmo che capacità) e possono quindi testimoniare l'assoluta inutilità della suddetta carta con il seguente ragionamento: o non sapete giocare a bridge o sapete giocare a bridge; se non sapete giocare a bridge, la carta è inutile perché non vi serve conoscere i punteggi; se sapete giocare a bridge i punteggi li sapete calcolare senza la carta e quindi è inutile. Q.E.D.

A questo punto sempre il mazziere mette due pile di 4 carte ciascuna coperte al di sotto del Jolly, girando la carta in cima. Totale di riga, otto carte.

Figura 1 – Adesso si comincia

Sotto queste due pile, il Mazziere crea una riga di tre pile di 3 carte ciascuna iniziando la formazione della collina e girando la carta in cima. Totale di riga, nove carte.

E poi una riga di quattro pile di 2 carte (totale di riga otto), e quindi una riga di cinque pile da una carta (totale di riga, cinque[22]). Sempre con la carta in cima girata.

Se non avete sbagliato i conti a questo punto dovreste aver finito le carte, quindi è ora di cominciare a giocare. La situazione dovrebbe essere una cosa del tipo in *Figura 1*.

La Riserva: A questo punto, ogni giocatore guarda le carte che gli sono state distribuite e ne mette quante vuole nella *Riserva* (incluso il jolly, se lo ritiene necessario). Quando hanno finito, chi ha distribuito le carte gioca per primo

Il Gioco: A questo punto, il giocatore di turno sceglie una delle pile della piramide da attaccare; può scegliere solo una pila con almeno un angolo inferiore esposto; quindi, nella figura, all'inizio del gioco, solo dalla riga inferiore. Supponendo sia scelto (e rimosso) il "mucchio" (di una carta) con l'otto di quadri, si possono mettere le mani sul fante di fiori; se invece si fosse scelto il dieci di cuori, allora avreste potuto fare guai con l'otto di fiori o con il due di quadri. Il giocatore di turno annuncia pubblicamente che pila ha intenzione di attaccare.

L'eccezione a questa regola è rappresentata dal Jolly in cima alla collina: entrambi gli angoli inferiori devono essere esposti.

Una volta che si sia scelta una pila da attaccare in questo turno, i giocatori iniziano l'attacco giocando ***a faccia in giù*** le carte che hanno in mano, tenendole nascoste in modo tale che l'avversario non capisca quante sono; si possono giocare le carte secondo regole particolari ("oppure", qui, significa "or esclusivo": o l'una o l'altra o l'altra ancora, non assieme):

- Una carta isolata qualsiasi, oppure
- Una *sequenza*: due o più carte dello stesso seme, in sequenza senza "buchi" e tutte minori di 8, oppure
- Il Jolly

Quest'ultima giocata significa che il giocatore non intende competere per conquistare la pila in gioco; se (come avevamo accennato sopra) il Jolly è nella Riserva e il giocatore deve scavarci dentro per recuperarlo, evidentemente renderà palese il suo sotterfugio.

A questo punto, i giocatori girano le carte: chi ha il valore maggiore (si veda il prossimo capitolo) vince, e si prende la pila in gioco; le carte giocate vengono scartate, con

[22] Lo sappiamo che certi conti li sapete fare. Semplicemente, Rudy si chiedeva dove finisse il massimo supponendo un *continuum* di righe e un numero *reale* di carte per ogni mazzo.

l'eventuale eccezione del Jolly che torna in mano al giocatore. A questo punto, l'altro giocatore (indipendentemente da chi ha vinto) sceglie la pila da attaccare.

Valore delle carte *(e uso della riserva)*: Le carte valgono il loro valore numerico, con l'eccezione delle figure che valgono 10 (anche se, come carte singole la Donna vince il Fante ed è vinta dal Re) e dell'Asso che vale 15; il valore di una sequenza è dato dalla somma delle carte che la compongono (ricordatevi che non possono avere valori maggiori di 8). I jolly valgono zero.

In caso di parità, le carte in mano vengono messe da parte (coperte) e i giocatori giocano una mano regolare utilizzando la riserva; in caso di ulteriore parità, continuano a giocare pescando dalla riserva. ***Ogni carta giocata, con la sola eccezione del jolly, viene scartata alla fine della mano***.

Se entrambi i giocatori durante un giro giocano il jolly, la pila in gioco viene scartata e si riparte.

Vincere una pila: Quando un giocatore vince una pila, la può suddividere tra le proprie carte in mano e la riserva: ***non può***, però, mettere una carta qualsiasi di quelle che ha in mano nella riserva o viceversa; solo quelle vinte in quel momento vanno suddivise.

Variante: Tutte le figure hanno lo stesso valore anche quando sono carte singole. La cosa sembra una stupidaggine, ma aumenta in modo incredibile l'importanza della riserva, visto che molti più primi giri giocati con le carte di mano hanno la possibilità di finire pari.

Non vi chiediamo di dirci se vi piace: vi chiediamo solo di dirci se l'avete capito...

7. Pagina 46

Indichiamo i lati del rettangolo con x e y. Il nostro scopo è di mostrare per prima cosa che il prodotto xy è divisibile per 3, e quindi che è divisibile per 4.

Essendo:

$$(3k+1)^2 = 3(3k^2+2k)+1,$$

e

$$(3k+2)^2 = 3(3k^2+4k+1)+1,$$

il quadrato di qualsiasi intero che non sia multiplo di 3 dà un resto 1 quando diviso per 3. Allora, se né x né y sono divisibili per 3, allora x^2+y^2 darà un resto 2 quando venga divisa per 3 e quindi non può essere il quadrato di alcun intero. Da cui, condizione necessaria affinché x^2+y^2 sia il quadrato di un intero z è che almeno uno tra x e y sia divisibile per 3, il che implica che xy sia divisibile per 3.

Si ha poi che x e y non possono entrambi essere numeri dispari, in quanto se $x=2m+1$ e $y=2n+1$, allora

$$x^2+y^2 = 4m^2+4m+1+4n^2+4n+1 = 4(m^2+m+n^2+n)+2,$$

che non può essere il quadrato di un intero in quanto i quadrati dei dispari sono dispari e i quadrati dei pari sono divisibili per 4.

Se sia x che y sono pari, allora il loro prodotto sarà divisibile per 4.

Supponiamo, come ultimo caso, $x=2m$ e $y=2n+1$; in questo caso $z=x+y$ è dispari, e quindi deve esserlo anche z^2. Se $z=2p+1$ abbiamo:

$$(2m)^2 = (2p+1)^2 - (2n+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 - 4n^2 - 4n - 1,$$

ossia

$$m^2 = p(p+1) - n(n-1).$$

Quindi m^2 è un numero pari, in quanto entrambi i prodotti sono dati da numeri consecutivi (e quindi almeno uno è pari); quindi, se m è pari, $x = 2m$ deve essere divisibile per 4 e quindi deve esserlo anche il prodotto xy.

Quindi, se xy è divisibile sia per 3 che per 4 sarà anche divisibile per 12, che è la tesi.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Dato un pianeta, non necessariamente sferico...

Questo pezzo nasce da una cosa che per il momento non possiamo dirvi, ma che farà crescere a un buon numero di voi una robusta ruota di pavone.

Recentemente il nostro Sempre Valido Postino ha incontrato un tizio-che-voi-conoscete-non-vi-diciamo-chi-è-ma-tra-qualche-mese-se-ne-riparla (tcvcnvdcèmtqmsnr per gli amici); questo ci ha portato a rivedere alcuni concetti matematici e Rudy ha ritrovato alcune cose di cui voleva (ri)parlare.

Per prima cosa, contrariamente alla norma matematica, costruitevi un aggeggio. Trovate lo schema nella *Figura 1*, il consiglio è di ingrandirlo un paio di volte e di farlo con quei fogli di acetato che sino a qualche anno fa servivano per stamparci le presentazioni dell'ufficio; oggi, con l'imperare dei proiettori, giacciono abbandonati negli uffici di mezzo mondo e le segretarie probabilmente vi ringrazieranno se glie ne portate via qualcuno: il fatto che resistano al calore delle stampanti (i fogli, non le segretarie) rendono l'operazione semplicissima.

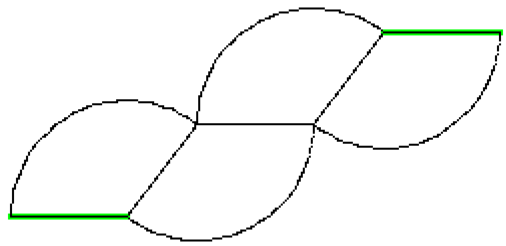


Figura 1 – Lo schema dello sphericon

Per i più ardimentosi che vogliono disegnarselo su carta, tenete presente che l'angolo che sottende il settore circolare vale $\pi\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ma potevate anche calcolarvelo da soli); per la costruzione, incollate assieme i due lati verdi; questo porta i lati curvi a contatto tra di loro (la loro linea di incontro è detta in inglese *zip-locus*: non ci risultano traduzioni decenti altrettanto sintetiche) due a due, e potete a questo punto fissare il tutto con un paio di colpi di nastro adesivo.

Tecnicamente, quello che ottenete è un doppio cono con una torsione. Più semplicemente, costruite due coni la cui altezza sia pari al raggio di base, incollateli per la base, segateli secondo un piano passante per i due vertici, date un quarto di giro (novanta gradi) e reincollate il tutto. Chiaro? Se no (come per gli autori, che hanno sbagliato una definizione), usate lo schema che vi abbiamo dato.

OK, adesso posatelo sulla scrivania e tenetelo lì a futura ispirazione, che parliamo d'altro.

Se dovete cartografare un'area di un pianeta a caso (non necessariamente sferico), diventa importante per voi riuscire a misurare le aree anche nelle zone in cui la curvatura è diversa da zero; grazie a Gauss[23], sappiamo dell'esistenza di linee comode per effettuare queste misurazioni; infatti, basta seguire le *geodesiche*, essendo noto che:

- Su un piano, le geodesiche sono linee rette.
- Se arrotolate un piano e formate un cilindro, le linee restano geodesiche, anche se smettono di essere rette[24].
- Su una sfera, le geodesiche sono archi di cerchio massimo.

[23] Confessiamo che all'inizio volevamo scrivere un pezzo su un aggeggio di Eulero; dopo le prime righe però abbiamo cominciato a pensare che forse non era il caso, e che sarebbe stato meglio cercare qualcuno un po' meno inflazionato. Contenti?

[24] E adesso dovreste ormai aver capito che stiamo (ri)parlando della curvatura, già affrontata in RM083

Bene, il lavoro di Gauss in questo caso è consistito nel dimostrare che *se un poligono geodesico di n lati racchiude un'area A, allora la somma (misurata in radianti) degli angoli interni del poligono diminuita di $(n-2)\pi$ è pari alla curvatura totale di A.*

Qualche esempio? Beh, tracciate un poligono sul piano; anche senza grosse cognizioni di calcolo si vede che in questo caso la curvatura vale zero. La somma degli angoli interni vale $(n-2)\pi$ e, se la diminuite di $(n-2)\pi$ ottenete zero.

Se preferite qualcosa di più complicato, prendete una sfera di raggio R e quindi avente curvatura $\frac{1}{R^2}$; se tracciamo il meridiano zero, quello a novanta gradi e l'equatore otteniamo un triangolo (e quindi qui $n=3$) sferico i cui angoli interni sono tutti retti. L'area di questo triangolo è un ottavo dell'area totale della sfera, ossia è pari a:

$$\frac{1}{8}4\pi R^2 = \frac{\pi R^2}{2},$$

e quindi la curvatura totale risulta $\pi\frac{R^2}{2}\frac{1}{R^2}=\frac{\pi}{2}$, che è pari alla somma dei tre angoli retti visti prima diminuiti di π.

Ora, già da questo esempio dovreste aver apprezzato la complicazione della vita dei geografi; non solo devono essere dei valenti matematici, ma devono anche cavarsela con l'alpinismo. Infatti, andare a cartografare una montagna perfettamente conica non è facile: essendo la cima un punto, non ci staremo mai tutti per la foto di gruppo (fuor di metafora alpinistica, sareste interessati ad evitare la singolarità girandoci attorno).

Cerchiamo di fare un esempio un po' più pratico: partendo dalla classica "fetta di torta" decisamente abbondante costruiamo un cono avente (ad esempio) altezza tripla rispetto al raggio di base; l'ampiezza della fetta di torta sarà un angolo β (che questa volta vi calcolate voi: se ci è riuscito Rudy ce la può fare chiunque) e i nostri valenti cartografi disegnano un triangolo geodesico attorno alla punta; per comodità, mettiamo uno dei vertici sulla linea di incollatura e quindi riapriamo la fetta di torta.

Ora, potendo usare un normale foglio di carta per fare questo lavoro, quando svolgete il tutto non dovete stiracchiare nulla; le nostre linee si sono trasformate in un *pentagono* (tre lati sono quelli del triangolo geodesico, gli altri due sono i "bordi" della fetta di torta; se, invece di fare l'esperimento a mente l'aveste fatto con carta e forbici, ve ne sareste accorti subito); se calcolate la somma degli angoli interni del pentagono, considerando che due angoli si sommano per dare l'angolo che si troverà sulla cucitura, vi accorgete che sono pari alla somma degli angoli del triangolo geodesico più β.

Sappiamo che la somma degli angoli interni di un pentagono vale $(5-2)\pi = 3\pi$ radianti, quindi la somma degli angoli interni del triangolo (geodesico) deve valere $3\pi-\beta$.

A questo punto Gauss ci dice che la *curvatura totale* all'interno del triangolo deve essere pari a $(3\pi-\beta)-\pi = 2\pi-\beta$.

E qui arriva il tiro mancino: abbiamo per caso detto qualcosa sulle dimensioni che deve avere il triangolo? No, quindi, la cosa deve essere valida anche per triangoli comunque piccoli, purché comprendano il vertice del cono (altrimenti non diventano pentagoni); quindi, *tutta la curvatura del cono, che vale $2\pi-\beta$, è* **concentrata nel vertice**. Tutto il resto, giustamente, ha curvatura zero. E questo semplice calcolo vi ha evitato di sedervi su una scomoda singolarità, semplicemente girandoci attorno.

Adesso non cominciate a fare i saputelli; se vi sembra di avere capito tutto, riprendete lo sphericon e provate.

Effettivamente, qui la cosa si fa complicata: lavoriamo sullo sphericon aperto, che il mio è venuto un obbrobrio e ci capisco qualcosa solo io.

Per prima cosa, tracciamo un quadrilatero che attraversi lo *zip-locus*, come indicato in *Figura 2*; attenzione che i lati di colore uguale sono uno la prosecuzione dell'altro e lo *zip-locus* biseca esattamente il nostro quadrilatero[25].

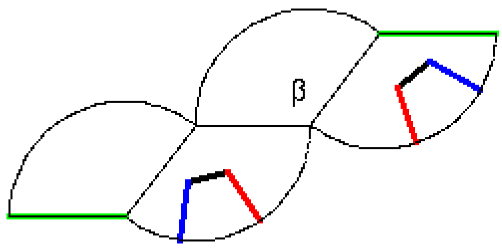


Figura 2 – Il Quadrilatero sul Bordo del Mondo

Se tracciamo i segmenti rossi e blu usando delle rette che si incontrano nel vertice dei coni, queste rette incroceranno lo zip-locus ad angolo retto; in questo modo, quando richiudete lo sphericon, i segmenti dello stesso colore sono uno la prosecuzione dell'altro e quindi li possiamo considerare come lati unici di un quadrilatero, togliendoci dai piedi due ulteriori angoli decisamente pelosi da calcolare; in definitiva, otteniamo effettivamente un quadrilatero con *un lato rosso, uno blu e due neri*.

Bene, si tratta di calcolare gli angoli. Andiamo di radianti, che è più facile.

Se le nostre quattro "fette di torta" hanno raggio R e se l'arco di circonferenza intercettato dai segmenti rossi e blu ha lunghezza L, estendendo le rette sino al vertice del cono queste si incontreranno con un angolo $\gamma = \frac{L}{R}$.

Inoltre, se il triangolo è tracciato in modo simmetrico, i quattro angoli saranno uguali e pari a $\frac{(\gamma + \pi)}{2}$; da cui, la somma degli angoli interni vale $2(\gamma + \pi)$.

Applicando il Teorema di Gauss (qui usiamo un quadrilatero, quindi $n = 4$) si ha che la curvatura vale $2\gamma = 2\frac{L}{R}$.

Discorso simile a quello di prima: *l'altezza del quadrilatero non c'entra niente*. Quindi, tutta la curvatura è concentrata sullo zip-locus.

Non pensate di esservela cavata con questi pochi calcoletti. Qui le punte dei coni sono piuttosto strane, visto che oltre ad essere punti di cono rappresentano anche i punti terminali degli zip-locus.

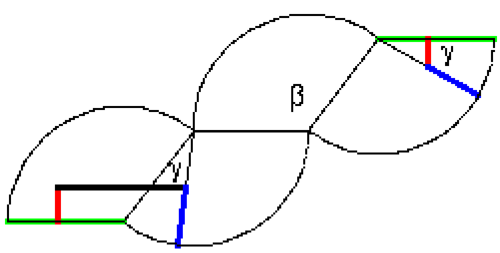


Figura 3 – Il Triangolo sull'Orlo del Bordo del Mondo

Questa volta, disegniamo un triangolo rettangolo. Per quanto riguarda il lato blu, sappiamo che essendo tracciato usando due raggi della fetta di torta è una linea geodesica e i due "pezzi" sono uno la prosecuzione dell'altro oltre lo zip-locus.

[25] Vorremmo farvi notare che gli *sphericonestri* (insomma, gli abitanti di un mondo avente questa forma balorda) possono tracciare l'aggeggio **senza essere costretti ad attraversare la singolarità dello zip-locus**.

Il lato rosso lo tracciamo perpendicolare alla linea di incollatura, da entrambe le parti; questo fa sì che anche lui sia una geodesica.

La linea nera, semplicemente, la tracciamo perpendicolare alla linea rossa; in un'accezione piuttosto libera del termine, quello che otteniamo è un triangolo rettangolo.

Calcoliamo un po' di angoli, adesso. Quello formato dai segmenti nero e blu, se considerate l'angolo γ indicato, vale $\gamma + \pi - \beta$; quello rosso-blu, invece, vale $\gamma + \frac{\pi}{2}$ e quindi abbiamo che la somma degli angoli interni vale $2\pi - \beta + 2\gamma$ e quindi (Gauss) la curvatura sul punto balordo sembra valere $\pi - \beta + 2\gamma$. Però, attenzione! Il contributo di γ arriva tutto dallo zip-locus! Quindi, man mano che il nostro triangolo diventa sempre più piccolo questo contributo si riduce; alla fine, nei vertici, ci resterà unicamente un contributo pari a $\pi - \beta$.

Adesso, proviamo a mettere assieme il tutto.

Ogni "punta" contribuisce con una curvatura $\pi - \beta$; totale, visto che le punte sono quattro, $4(\pi - \beta)$.

Se tutti i coni hanno raggio R, ogni componente dello zip-locus ha lunghezza $R\beta$; siccome ogni parte di lunghezza L dello zip-locus contribuisce alla curvatura con un fattore $\frac{2L}{R}$, avremo che ogni componente dello zip-locus fornisce una curvatura $\frac{2}{R}R\beta = 2\beta$; siccome lo zip-locus è formato da due parti, il totale è 4β, e quindi la curvatura totale dello sphericon vale $4(\pi - \beta) + 4\beta = 4\pi$.

...Certo, con un paio di integrali si risolveva il tutto, ma volete mettere la soddisfazione di decorare l'albero di Natale con degli sphericon tutti pieni di rigacce colorate?

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms