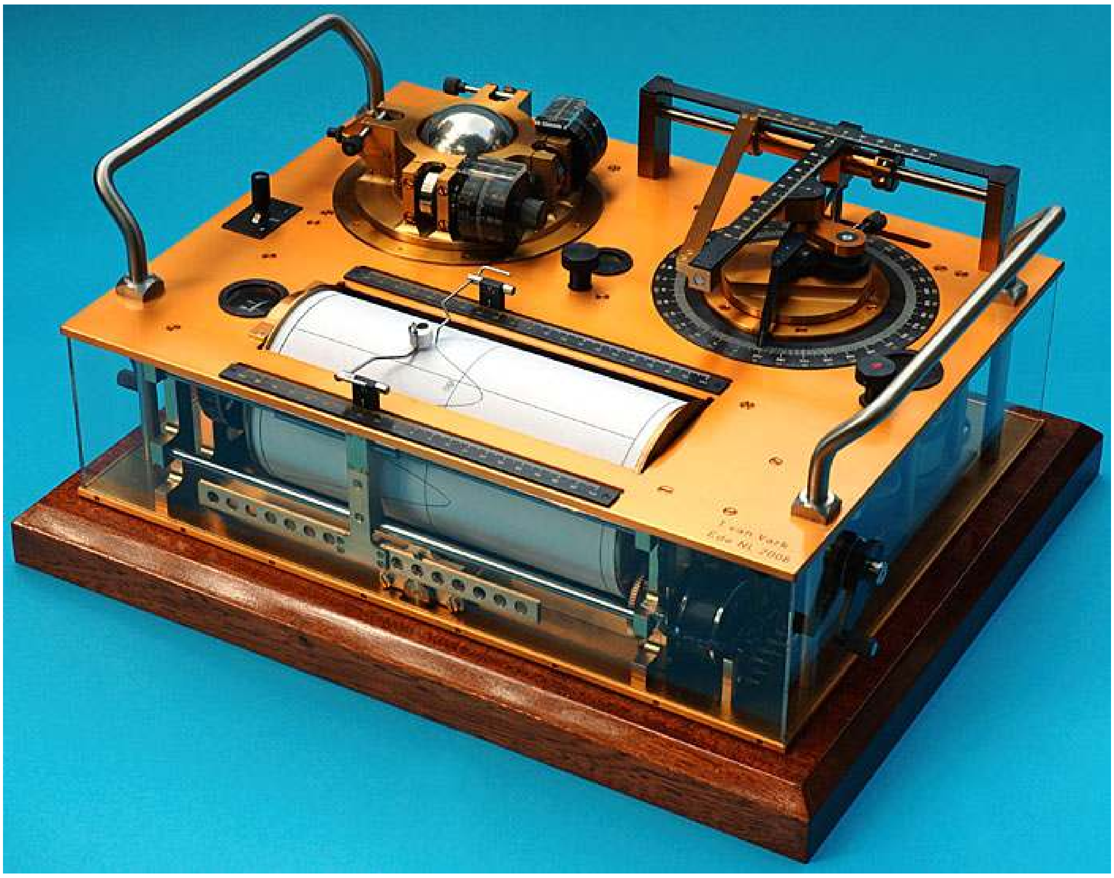
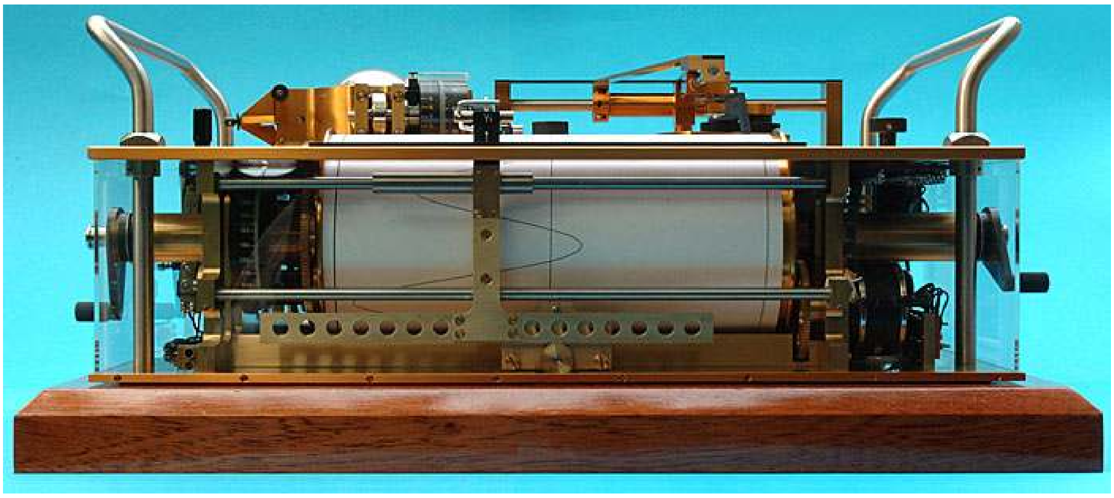
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 107 – Dicembre 2007 - Anno Nono





Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com
RM 106 ha diffuso 1480 copie e il 02/12/2007 per Google eravamo in 3'100 pagine.

Ci pare di aver già detto che non apprezziamo particolarmente il termine ***steampunk***, anche se i suoi risultati (a dosi omeopatiche) sono gradevoli. A occhio e croce, ***Tatjana van Mark*** è d'accordo con noi, e quando il capo le ha detto "Montami un analizzatore di Fourier", lei si è presentata con la meraviglia a manovella che vedete in copertina.

1. Dottor Stranamore

In matematica, non è che le cose si capiscano: semplicemente, ci si abitua ad usarle.

Chiunque sia implicato nei metodi aritmetici per la produzione di numeri casuali è in evidente stato di peccato.

Sia dato l'insieme infinito A, non troppo grande…

Non ha senso essere precisi, quando non sai neppure di cosa stai parlando.

Sembrerebbe di aver raggiunto il limite di quanto è possibile ottenere per mezzo della tecnologia dei computer. Comunque, bisognerebbe andarci piano con certe affermazioni: tendono a suonare ridicole nel giro di cinque anni (detto nel 1949)

Prevederemo tutti i processi stabili. Quelli instabili, li controlleremo.

È abbastanza diffusa l'opinione che il secolo che ci ha visti nascere[1] sia stato tra i più disgraziati della storia. A dar voce a questa convinzione è stato soprattutto il premio Nobel per la Letteratura William Golding[2], che a suo tempo dichiarò esplicitamente che il Novecento è stato "*il secolo più violento della storia dell'umanità*". Altri pensatori non si distolgono da questa linea di giudizio: Isaiah Berlin lo ha definito "*il secolo più terribile della storia occidentale*", mostrando quantomeno una moratoria geografica rispetto al pessimismo di Golding, mentre Renè Dumont si ritrova quasi a fare la figura del timido, in questa augusta compagnia, quando si limita a definirlo "*un secolo pieno di massacri e di guerre*". In maniera più o meno esplicita, anche il celebre testo di Hobsbawm, *Il secolo breve*[3], tutto dedicato al Novecento, ribadisce la medesima idea.

Per quanto assolutamente d'accordo (e come potremmo non esserlo?) con cotanti luminari, confessiamo che a volte ci domandiamo come si riesca, in maniera oggettiva, a decretare certi giudizi. Questo non certo per sfiducia negli storici e negli intellettuali o, meno che mai, per una sorta di volontà di redenzione del famigerato Novecento: piuttosto per una sorta di remora ereditata dalla lettura dei quotidiani, che regolarmente fanno uso e abuso di simili classifiche esoteriche. Quasi inevitabilmente le città che figurano in testa alle classifiche (*qualsiasi* classifica, purché ordinata per città) sono Roma, Milano e Napoli; nelle classifiche per regioni in testa si trova (*sempre*) la Lombardia, tallonata da Lazio e Campania. È insomma del tutto evidente che, in genere, i giornalisti non si preoccupano troppo di pesare gli eventi in base alla popolazione: se fa notizia il numero degli scippi, si fa un articolo dove si elencano le città con il maggior numero di occorrenze di scippi, e la cosa finisce lì: ne consegue inevitabilmente che in testa ci siano sempre le città con il maggior numero di abitanti, per ovvie ragioni, e che la classifica pubblicata lascia allora il tempo che trova. Non che i dati puntuali siano "falsi": sono semplicemente poco significativi; una metropoli di tre milioni di abitanti difficilmente potrà vedere meno scippi di una cittadina di ventimila residenti[4], anche se in quest'ultima quella dello scippatore fosse professione più diffusa di quella del fornaio. Può allora nascere il sospetto che alla triste nomea del Novecento possano contribuire anche fattori non direttamente

[1] Detto a nome anche dei lettori, non solo degli autori di RM. Dubitiamo fortemente di avere lettori nati nel XIX o nel XXI secolo, almeno per il momento; se avete di che smentirci, saremmo davvero lieti di saperlo.

[2] Il Nobel lo vinse nel 1983 per il suo romanzo più celebre, *"Il Signore delle Mosche",* (Lord of the Flies, ed. 1954).

[3] Eric J. E. Hobsbawm*, "Il Secolo Breve – 1914-1991",* (The Age of the Extremes – The Short Twentieth Century 1914-1991, ed. 1994)

[4] Per un'analisi in un altro senso della differenza statistica tra una megalopoli e un paesotto, andate a rivedervi su Le Scienze di ottobre "L'equazione più pericolosa", di Howard Wainer [RdA].

connessi alla violenza in sé e per sé, ma di ordine più generale, quali la crescita esponenziale della popolazione e la maggiore disponibilità di informazione. In altri termini, forse l'uomo è sempre stato crudele alla stessa, selvaggia maniera, solo che nel secolo scorso c'erano a disposizione più esseri umani da martoriare, e che le notizie su quelle violenze giungevano più veloci e numerose. O forse no, forse il giudizio è davvero obiettivo: ma di abomini è certo piena tutta la storia, e ci piacerebbe vedere come si piazza in classifica il XVII, che riuscì, con la Guerra dei Trent'anni, a ridurre la popolazione di certe zone d'Europa anche in ragione di una persona su quattro. Quel che è comunque certo, a prescindere dall'eventuale poco invidiabile primato, è che la "quantità di violenza" prodotta dal secolo appena trascorso è veramente impressionante. Due conflitti mondiali, sempre più spesso visti dagli storici come due fasi di un unico evento bellico, devono il loro nome alla loro devastante estensione geografica, mai raggiunta prima: tutto il pianeta, seppur in misura diversa da continente a continente e da nazione a nazione, era coinvolto. Dal punto di vista dell'intensità del massacri, la tecnologia ha svolto alla perfezione i suoi mortiferi servizi: le prime guerre del secolo furono caratterizzate da mitragliatrici e filo spinato, cose che oggi non danno certo l'impressione di essere il massimo della tecnologia militare, ma che a loro tempo rivoluzionarono radicalmente il modo di darsi battaglia, aumentando a dismisura il numero dei morti ammazzati. Nel seguito del secolo, poi, un vero florilegio di porcherie ad uso bellico ha visto la luce: dai bombardamenti a tappeto delle città (per definizione piene di civili, più che di militari) ai gas venefici, fino alle porcherie chimiche e batteriologiche; e così via, sempre in crescendo, con bombe sempre più sofisticate e intelligenti, fino alle testate atomiche e nucleari d'ogni ordine e grado. A ripassare velocemente l'escalation tecnologica degli armamenti, c'è davvero da stupirsi di essere sopravvissuti al XX Secolo.

Poi, come sempre, più che le armi e i loro sofisticati grilletti, contano le dita che su quei grilletti si appoggiano. Senza bisogno di eccessiva tecnologia, il Novecento ha archiviato anche un bel numero di genocidi, più o meno riusciti. Singoli personaggi (Hitler, Stalin, Mao, Pol Pot, e molti altri) hanno il privilegio di poter essere ricordati dalla storia per la diretta e personale responsabilità della morte non di migliaia, ma proprio di *milioni* di persone; eppure sarebbe un errore pensare che solo loro facciano parte della squadra dei cattivi. Genocidi di varie dimensioni, pulizie etniche più o meno riuscite sono state perpetrate durante tutto il secolo, in parti diversissime del mondo, e quasi da ogni nazione cui si sia presentata l'occasione di farlo: spesso il genocidio si muove non sull'onda della malsana guida d'un tiranno, ma proprio da un ragionato, spesso perfino democraticamente eletto, collettivo di persone. Può darsi che sia sempre stato così: certo anche i secoli precedenti hanno il loro buon numero di massacri nell'armadio, ma la sensazione è che il Novecento abbia fatto un salto di qualità, nelle tecniche e nella crudeltà degli ammazzamenti.

D'altro canto, questo secolo appena sepolto ha generato anche un numero strepitoso di meraviglie. Scoperte scientifiche impressionanti, conquiste tecnologiche meravigliose, in grado di cambiare davvero la qualità della vita a milioni, anzi a miliardi di persone. La medicina ha di molto allungato la vita media – almeno a coloro che hanno accesso alla medicina – e molti milioni di persone hanno vissuto e vivono una vita finalmente liberata dalla fame e dall'indigenza, cosa che era un sogno forse per 95 terrestri su 100, quando il secolo era in fasce. Non è certo un bilancio o un contrappasso, quello che vogliamo prefigurare: piuttosto, è la banale constatazione dell'esistenza di una smisurata contraddizione che percorre tutto il Novecento. Non fosse che è così integralmente parte di noi stessi (come ognuno di noi è parte di esso, del resto), faremmo certo fatica a contenere in un unico giudizio un secolo così complesso. In parte perché la mente cerca sempre di categorizzare, se non proprio di semplificare, e si trattiene dall'emettere giudizi troppo articolati; in parte perché è davvero difficile etichettare il XX secolo con un singolo giudizio di merito. È stato un secolo esaltante, ma pieno di esaltati. È stato devastante, ma soprattutto devastato. È stato il secolo in cui il maggior numero di persone della storia ha ricevuto almeno un minimo di istruzione, quello che ha visto il riconoscimento di almeno alcuni diritti fondamentali a larghi strati di popolazione. Storici eminenti e demografi ritengono poi che nel futuro sarà ricordato soprattutto per essere stato il secolo dove, per la prima volta nella storia, si è registrato che più della metà della popolazione umana non è dedita all'agricoltura, come era sempre stato in passato. E, ciò nonostante, è stato anche il secolo capace delle peggiori efferatezze. A stupire è anche il fatto che, tutto sommato, gli uomini sembrano meno complessi dei loro tempi: esistono, sono sempre esistiti i criminali e i santi, i geni e i dementi, i saggi e gli sciocchi, i buoni e i cattivi; ma il XX Secolo sembra essere tutte le cose ad un tempo. Proprio per questo sembra davvero impresa impossibile riuscire a trovare un personaggio capace di rappresentare, di portare con sé tutte le folli caratteristiche e le devastanti contraddizioni del Novecento. Forse questo è del tutto normale: un periodo storico non ha certo le medesime necessità di coerenza di un essere umano. E poi non dovrebbe davvero esserci di che stupirsi se non si trova un rappresentante ideale, perché è notorio che gli ideali, proprio in quanto tali, non esistono in realtà.

Però possiamo avere delle ottime approssimazioni. La città di Budapest sembra essere un manifesto a favore della complessità, o quantomeno della "molteplicità": è formata infatti dall'unione di tre città diverse, Buda e Obuda sulla riva destra e occidentale del Danubio, e Pest, situata invece sulla riva sinistra. E il Danubio stesso, in queste zone, sembra intenzionato a contraddire se stesso, visto che nell'immaginario degli Europei esso è il grande fiume che nasce ad Ovest per morire ad Est; ma in terra ungherese è una netta cesura azzurra e verticale che scende perfettamente da Nord verso Sud[5]. L'attuale capitale d'Ungheria all'inizio del ventesimo secolo era una capitale condivisa, una delle due teste del bicipite regno austro-ungarico, nato nel 1867 dal "Compromesso"[6]. Nell'Ottocento, Napoleone e soprattutto la Prussia tolgono all'Austria ogni residua speranza di diventare la nazione guida delle nazioni germaniche, ed è per questo che Vienna si rivolge ad Oriente, e celebra le nozze con l'Ungheria.


John von Neumann

Budapest assurge quindi al rango di capitale imperiale, anche se, fuori dall'ufficialità, sembra restare sempre mezzo passo indietro rispetto a Vienna; è infatti il lato orientale di una potenza che voleva essere occidentale, è la testa di ponte verso le terre slave e balcaniche di un impero che sognava d'unire sotto gli Asburgo le nazioni settentrionali ed europee di Germania. Ma quasi tutte queste tensioni di fine Ottocento si scioglieranno da sole, con il fluire del nuovo secolo, sotto il calor bianco di altre e ben più drammatiche tensioni. Ma nel 1903, la modernità del ventesimo secolo era ancora invisibile e imprevedibile, specie da una città come Budapest. Ed è in questa splendida e controversa città, proprio all'inizio di questo splendido e controverso secolo, che nasce Jànos (detto Jancsi) Neumann il 28 dicembre 1903, da una famiglia ungherese assai benestante di origine ebrea. Il padre Max, banchiere, riesce ad ottenere[7] dall'Imperatore Francesco Giuseppe un titolo nobiliare; ma eviterà poi di fare troppa pubblicità alla cosa,

[5] Altra contraddizione intrinseca è che dovrebbe chiamarsi diversamente. Claudio Magris, "Danubio", Longanesi 1986. Primo capitolo (ma leggete anche il resto, che vale la pena) [RdA]

[6] "Compromesso" è la usuale traduzione del termine tedesco "Ausgleich" (e dell'ungherese "Kiegyezès") con il quale è indicata la riforma costituzionale che trasformò l'Impero d'Austria nel complicato impero-regno austro-ungarico.

[7] Curioso come le fonti siano equamente suddivise, a questo proposito. Una metà asserisce che il titolo nobiliare è stato acquistato – nel senso letterale di "comprato": l'altra metà che sia stato attribuito al banchiere Max Neumann (che pertanto al massimo lo avrebbe "acquisito", non "acquistato") dall'Imperatore per "meriti economici".

rinunciando ad usare la particella nobiliare “von” che avrebbe ora diritto di anteporre al cognome. Suo figlio Jànos, invece, sarà sempre orgoglioso di mostrarla, firmandosi sempre come “von Neumann”. Particella o meno, nobiltà meritata o comprata che fosse, quel che è certo è che Jànos era un bambino decisamente fuori dal comune. Bambino prodigio e calcolatore prodigio, riusciva a scambiare battute in famiglia in greco antico già all’età di sei anni; aveva memoria prodigiosa, al punto che i genitori organizzavano spesso piccoli show a beneficio degli ospiti, dando a Jànos qualche secondo per memorizzare una pagina a caso dell’elenco telefonico, e lasciando che il piccolo poi rispondesse puntualmente a domande sui numeri e sui nomi in essa riportati. Gli elementi per capire che il cervello del giovane ungherese fosse fuori norma c’erano già tutti: è piccolissimo quando impara a parlare francese e tedesco, certo con la complicità della sua bambinaia e dei familiari, ma indubbiamente soprattutto grazie alla sua voracità intellettuale. Non tutti i bambini si portano da leggere qualcosa in bagno, anche se la maggior parte sfoglia volentieri un fumetto durante la piccola clausura volontaria: sono pochi quelli che si trascinano dietro un libro. Jànos se ne portava spesso due, per timore di finirne uno e non avere di che leggere per il tempo residuo. Crescendo, non smentì le premesse dell’infanzia: esce dal Ginnasio Luterano nel 1921, e già nell’anno successivo pubblica la sua prima memoria matematica. Sembra un buon viatico per la scelta della facoltà universitaria, ma il pragmatico padre non è troppo d’accordo. Ci sarebbe di che scatenare un conflitto generazionale, per un giovane di intelligenza normale; ma von Neumann non è di intelligenza normale. Non obbedisce alla volontà paterna che aspirava a veder il figlio impegnato in economia e finanza, ma raggiunge un compromesso col genitore indirizzandosi verso la chimica. Tanto, che problemi ci sono? Per non farsi mancare nulla, né il dovere né il piacere, Jancsi frequenta in contemporanea le Università di Berlino e di Budapest e, per non rimanere troppo sfaccendato, anche il celeberrimo ETH di Zurigo. Ottiene la laurea in ingegneria chimica e il dottorato in matematica quando è ancora ventitreenne.

Eccezionale? Certo che lo è. È dannatamene eccezionale, il giovane ungherese: del resto, stiamo cercando di paragonarlo ad un secolo parimenti eccezionale, travolgente, esplosivo. Un secolo che abbiamo già detto essere pieno di orrori e meraviglie: il secolo delle rivoluzioni in matematica e in meccanica quantistica, il secolo della bomba atomica e dei calcolatori elettronici, della scoperta del DNA e della Guerra Fredda. Non sarebbe possibile neanche tentare un paragone, se non ci fosse un elevato coefficiente di eccezionalità. Ma, visto che l’eccezionalità è evidente e che abbiamo appena imbastito un piccolo elenco di meraviglie secolari, cerchiamo di vedere come si possa coniugare il nome di von Neumann ad ognuna di esse.

La matematica, per cominciare? La sua tesi di dottorato completa il processo dell’assiomatizzazione della Teoria degli Insiemi. In altri termini, completa il lavoro di Zermelo e di Fraenkel che avevano cercato di risolvere la crisi del settore iniziata da Bertrand Russell con il suo celebre paradosso, ottenendo risultati interessanti per la teoria delle misure e delle variabili reali. Pochi anni dopo, nel 1930, von Neumann è forse il primo a comprendere pienamente le conseguenze del Primo Teorema di Gödel, al punto che nel giro di qualche settimana scrive al logico per raccontargli come sia giunto ad elaborare, sulle basi del suo teorema, delle conseguenze che implicano una sorta di connaturata inconsistenza dei sistemi assiomatici. Quello cui allude è sostanzialmente il secondo (e più famoso) Teorema di Incompletezza di Gödel, che mantiene questo nome solo perché comunque il logico di Brno era già giunto ad elaborarlo per proprio conto, prima che von Neumann gli segnalasse l’implicazione.

Basta, per la matematica? No, forse no: in fondo questa è soprattutto logica, disciplina consorella e fondatrice, ma non proprio matematica. Allora, forse è meglio considerare la teoria dei gruppi e la topologia, che devono al suo lavoro degli anni Trenta i loro fondamenti e la loro rapida evoluzione: già nel ’29 Jànos introduce le algebre auto-coniugate di operatori lineari limitati su uno spazio di Hilbert: forse per semplificarne la denominazione, da allora vennero chiamate W*-algebre o anche più esplicitamente “algebre di von Neumann”. Troppo tecnico? Allora si può parlare della Teoria dei Giochi, di cui Jànos è il padre, insieme a Oskar Morgenstern[8]. Ma se parliamo di questo, dovremmo allora cominciare a chiamarlo non più Jànos, ma John, come decise di farsi chiamare quando emigrò negli Stati Uniti, nel 1933: a quel tempo, colui che trenta anni prima era nato come l'ungherese Jànos Neumann era finalmente diventato l'americano John von Neumann. Ma nomi e cognomi a parte, il cervello è sempre lo stesso, e quel cervello cambia una volta per tutte il burrascoso rapporto tra matematica ed economia, grazie al Teorema del Minimax che finalmente convince gli economisti della reale importanza della matematica. Ma il contributo di von Neumann all'economia non si limiterà alla Teoria del Giochi; del resto, le applicazioni della Teoria dei Giochi – purtroppo – non si limiteranno alla sola economia.

Nel nostro elenco di meraviglie, forse la logica e l'economia possono già bastare: la matematica moderna, la matematica del ventesimo secolo, non è forse celebrata soprattutto da queste due discipline, che sono una l'origine teorica e purissima, l'altra l'applicazione rigorosa e realistica della scienza dei numeri? Forse. Ma a molti la matematica del ventesimo secolo fa venire in mente, più o meno congruamente, le conquiste stregonesche della Meccanica Quantistica, i tangibilissimi e strepitosi successi dell'Informatica. La Meccanica Quantistica, già; l'Informatica, già.

Meccanica Quantistica? Forte dell'esperienza avuta nella assiomatizzazione della teoria degli insiemi, John non si spaventa troppo all'idea di provare ad assiomatizzare l'intera Meccanica Quantistica, soprattutto visto che il problema era uno dei famosi ventitrè problemi di Hilbert. Un veloce sguardo originale al problema gli basta a capire che una feroce semplificazione di tutto il corpus teorico finora prodotto nel campo si può ottenere con un rivoluzionario cambio di coordinate, passando cioè a considerare gli "spazi di Hilbert" in sostituzione dello spazio ordinario; tra le altre cose, quest'approccio risolveva l'apparente contrasto tra l'approccio ondulatorio di Schrödinger e quello matriciale di Heisenberg. Pubblica le sue scoperte nel '32 su "*Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*", una solida base per l'assiomatizzazione della nuova teoria, anche se l'approccio più accreditato resterà quello successivo di Dirac. Tra l'altro, vi si trova la traduzione del Principio di Indeterminazione di Heisenberg nel fatto che i corrispondenti operatori di posizione e momento non sono commutativi

Informatica? Beh, aprite il calcolatore che avete adesso sotto mano. Non lasciatevi distrarre dai dettagli poco significativi, dai tecnicismi dalle sigle difficili, dalle marche commerciali e dalle convenzioni: andate a vedere il nocciolo essenziale, l'architettura di base. Quell'architettura che prevede due diversi tipi di memorie, ROM e RAM; una unità centrale di calcolo (CPU) dotata di una specifica unità logico-algebrica (ALU), e naturalmente le porte di accesso e uscita (input & output). Vi siete mai chiesti chi l'abbia progettata per prima? Può aiutare sapere che questo tipo di architettura si chiama "architettura di von Neumann"? La cosa probabilmente più curiosa di questo contributo di von Neumann alla scienza è che fu proprio la progettazione della struttura dei calcolatori ad intrigarlo nel progetto di un "automa cellulare", un sistema in grado di autoriprodursi. L'idea che riuscì infine a produrre per i suoi automi cellulari risultò essere clamorosamente simile ai meccanismi di replicazione del DNA, scoperti solo diversi anni più tardi da Watson e Crick.

E verrebbe da dire, come fanno i bravi presentatori, "non finisce qui". Non finisce perché di scoperte e applicazioni trovate dal mostruoso ingegno di John von Neumann ce ne sono ancora, altrettanto geniali e poliedriche; ma per essere promossi al rango di rappresentante di un secolo non basta dimostrare d'avere la spaventosa intelligenza e l'incredibile capacità di calcolo[9] che aveva John von Neumann: occorre qualcosa di più.

[8] J. von Neumann & O. Morgenstern "*Theory of Games and Economic Behaviour*" (1944).

[9] In merito alle capacità di calcolo di von Neumann esistono svariati racconti e aneddoti, tra cui è famoso il seguente. A Los Alamos un giornalista di passaggio aveva provato a confondere un certo numero di matematici con il quesito del tipo: "*Il treno A viaggia a 240 Km/h verso il treno B, che a sua volta viaggia verso A a 150Km/h. Una mosca percorre la distanza tra i due treni a 300Km/h partendo da A e torna indietro non*

Occorre essere in grado di rappresentare la disperazione del Novecento. E Jànos può ben farlo: la sua storia fluisce nel solco delle grandi tragedie, pur avendo la fortuna di non esserne mai travolta del tutto. Gli anni centrali della sua adolescenza, dai dodici ai sedici, sono quelli in cui l'Europa è devastata dalla Prima Guerra Mondiale. La sua Budapest e soprattutto la sua famiglia non subiscono impatti diretti, ma la geografia politica di quelle regioni cambia, e cambia radicalmente. L'Ungheria, subito dopo la guerra, viene governata per un breve periodo da Béla Kun, che impone un governo comunista: i von Neumann sono ricchi e borghesi, e quindi diventano un bersaglio per le persecuzioni del regime di Kun. Ma questi cade in fretta, e la famiglia von Neumann può quindi ben sperare di essere nuovamente ben accolta nella società di Budapest; non sarà così. Béla Kun era comunista ed ebreo, e il nuovo potere, per reazione, se la prende non solo con in comunisti, ma anche con gli ebrei. Jànos e i suoi, per quanto appena rientrati in patria perché perseguitati da un governo tirannico, devono comunque subire il disprezzo impietoso del nuovo regime a causa della loro religione.

Queste persecuzioni, per quanto senza effetti tragici, non possono non colpire e incidere sul carattere del giovane matematico. La cronaca non registra disperazioni o tormenti, ma non è certo facile capire fino in fondo i sentimenti degli uomini. Negli anni venti, Jànos diventa celebre e stimato: ha per insegnanti dei veri mostri sacri: Hilbert, Weyl, Polya, e quest'ultimo era solito raccontare di quanto fosse difficile, per un professore, avere tra i banchi uno studente che, quando gli veniva illustrato un problema complicato e enfatizzato come molto difficile, solitamente arrivava a fine lezione con un pezzo di carta con sopra scarabocchiata una veloce soluzione. Non c'è quasi soluzione di continuità tra la carriera di studente e quella di professore: nel 1926 tiene lezioni a Berlino, nel 1929 è invitato negli Stati Uniti, a Princeton; si sposa allora con la fidanzata Marietta Kovesi, e parte per l'America, pronto a cessare di essere Jànos per diventare Johnny. Non era un rifugiato politico, ma il suo attraversare l'Atlantico in quegli anni era lo stesso tragitto che effettuavano molti scienziati che perseguitati politici invece erano. Non era disperato, privo degli affetti, ma il Novecento gli faceva percorrere le medesime strade dei disperati.

E però, la sua maniera di vivere non fu mai guidata dalla compassione.

Princeton intendeva raccogliere i protagonisti più geniali del tempo, non imponeva loro troppi impegni didattici, e John insegnò a Princeton per anni. Di certo non era tagliato per l'insegnamento: il suo modo di pensare era di difficile interpretazione per i meno dotati ed era famoso per le equazioni scarabocchiate in un angolo della lavagna e cancellate prima che gli studenti potessero copiarle. Al contrario era in grado di spiegare espressioni ed idee fisiche molto complesse. All'inizio continuò a viaggiare in Europa e a tenere la sua cattedra in Germania, fino alla salita al potere dei nazisti. È il 1933, quando proprio a Princeton viene creato l'Istituto per gli Studi Avanzati: i sei matematici fondatori sono J.W.Alexander, A. Einstein[10], M. Morse, O. Veblen, H. Weyl[11] e von Neumann, ma oltre a loro in breve a Princeton arriverà anche Gödel[12]. Nello stesso anno diventa coeditore degli *Annals of Mathematics* (a quei tempi lo era anche Tamarkin[13]), e pochi anni dopo di *Compositio Mathematica*, e continuerà ad esserlo per il resto della sua vita. Quest'elenco di attività professionali potrebbero dare l'idea di uno scienziato

appena raggiunge il treno B, salvo subito invertire nuovamente la marcia e tornare indietro: continua così finché non viene spiaccicata tra i due treni che si scontrano giusto un'ora dopo la partenza della mosca. Quale distanza ha percorso la mosca?". Von Neumann fornisce istantaneamente la risposta esatta al giornalista (300 km, naturalmente, visto che la mosca vola per un'ora a 300 km/h), e questi, soddisfatto della rapidità che lo rassicurava che il matematico avessi intuito il trabocchetto, ridendo rivelò che parecchi altri eminenti scienziati erano cascati nella trappola, e avevano provato a risolvere la questione mettendosi a sommare la serie. Al che John aggrottò preoccupato le sopracciglia e chiese "Perchè, c'è un altro modo?".

[10] Di lui si parla nel compleanno di RM074

[11] RM082.

[12] Molto più su di lui si trova in RM087.

[13] RM101. Va bene, adesso la smettiamo con le note autoreferenziali.

totalmente dedito alla professione, integralmente preso tra formule e diagrammi, magari seguendo il solito stereotipo del genio distratto, spettinato e un po' sciatto. Sarebbe un'impressione sbagliata: John von Neumann portava la giacca e la cravatta anche in spiaggia, o quasi. Adorava integrarsi perfettamente nella vita sociale, essere popolare, ammirato come genio: dava delle feste ricchissime e lussuose, amava bere e corteggiare le donne, e lo faceva anche in maniera indiscreta, al punto che le segretarie di Los Alamos si videro costrette a schermare le loro scrivanie con del cartone perché imbarazzate dagli sguardi troppo espliciti di John verso le loro gambe.

Già Los Alamos. Forse è qui che John paga il suo tributo per assurgere definitamene ad icona scientifica del Novecento: perché se la citazione di Golding che abbiamo ricordato all'inizio ha un minimo di esattezza, bisogna possedere anche un certo grado di crudeltà per essere definito il figlio perfetto del XX Secolo. A Los Alamos si lavora al Progetto Manhattan, alla creazione della bomba atomica: ci lavorano quasi tutti i migliori scienziati alleati, e quelli che sono scappati dalla Germania nazista e dall'Italia fascista. Costruiscono l'arma che dovrà mettere fine alla guerra, e in genere è proprio questo aspetto di terminazione, crudele ma quantomeno decisivo, a convincere molti cervelli a dare il loro contributo alla creazione d'un pezzo d'inferno. Ci lavorano Fermi, Oppenheimer, Feynman, e centinaia di altri. Tutti, o quasi, sentono il peso etico delle loro azioni, e fanno fatica a bilanciare le contrastanti esigenze di vincere e far finire la guerra con la spaventosa devastazione di innocenti che la loro superarma è in grado di causare. Un ungherese di genio e di grande cuore, Leo Szilard, si spende all'inizio totalmente a favore del progetto, quando lo vede come unica possibile arma contro il dominio della follia tirannica; ma si spenderà poi ancora di più, ancor più veementemente quando si accorgerà che il pericolo imminente è passato, quando si convincerà che la pace si può raggiungere anche senza far assaggiare al Giappone e al mondo gli artigli della guerra nucleare. Lo stesso Oppenheimer, capo del progetto, cercherà di bloccare l'escalation verso i sempre maggiori armamenti nucleari.

John von Neumann no. Per quanto sfiorato dagli orrori del comunismo e del nazismo, per quanto uomo di genio assoluto e testimone diretto dei tempi più crudeli della storia, in tali tempi si trovava bene. Applicava il suo genio sconfinato tanto ai problemi di scienza pura (ed innocente), come si è visto, quanto alle azioni più abiette. Suo è lo studio della lente di implosione, ovvero la scoperta che le grandi bombe atomiche e nucleari riescono ad "ottimizzare"[14] l'effetto distruttivo se esplodono non a contatto con il suolo, ma prima. Ed è difficile e faticoso immaginarlo, eppure è proprio quel che accadde: una delle menti più geniali del secolo si concentrava e faceva calcoli, cancellava errori e seguiva lunghi calcoli al fine di capire in quale maniera si potessero ammazzare più innocenti possibile. Era amico e condivideva gli ideali di Edward Teller, come lui ungherese e come lui scienziato dalle maestose possibilità, e come lui non meno spietato in fatto di armi e distruzione. Teller è il padre della bomba all'idrogeno, von Neumann colui che ne studiò il metodo di ignizione. Erano entrambi in grado di calcolare le probabilità (certo piccole, ma diverse da zero) che l'atmosfera del pianeta potesse incendiarsi interamente e rendere la Terra simile ad una patata bruciacchiata, con l'esperimento nucleare di Bikini, e lottare comunque strenuamente perché fosse realizzato.

Sembra che sia stato proprio il test di Bikini a costargli la vita. Poco tempo dopo aver assistito (in condizioni troppo esposte, ma che lui credeva sicure) all'esplosione, gli fu diagnosticato un cancro alle ossa e al pancreas, che arrivò presto al cervello. E qui il contrappasso dantesco sembra davvero ripagare con fredda crudeltà ogni azione dell'ungherese: sembra più una sceneggiatura cinematografica che realtà, il dover immaginare un genio militarista che continua a partecipare alle più decisive riunioni strategiche della maggior potenza militare del mondo costretto su una sedia a rotelle, e allo stesso tempo considerare che la sua infermità gli è causata dagli esiti della sua stessa

[14] Mai virgolette furono eticamente più necessarie.

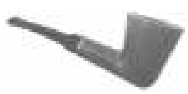
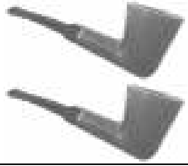
anima guerrafondaia. E le sceneggiature cinematografiche non si sono lasciate scappare l'occasione di sbeffeggiarlo se è e vero, come sembra indubitabilmente che lo sia, che fu proprio John von Neumann ad ispirare la figura del Dr. Strangelove, il dottor Stranamore dell'omonimo film di Stanley Kubrick magistralmente interpretato da Peter Sellers. Anche lui spietatamente desideroso di cancellare i sovietici dalla faccia della Terra a colpi di bombe nucleari, anche lui bloccato su una sedia a rotelle.

Il Dottor Stranamore

I testimoni narrano di quanto intollerabile fu per lui sopportare il dolore, e soprattutto la perdita del controllo della sua mente ad un tempo eccezionale e spietata. E questa morte crudele e simbolica, arrivata nel 1957 sotto stretto controllo militare, perché era a conoscenza dei più grandi segreti strategici di allora, lo corona definitivamente come Uomo del Secolo.

Del secolo che forse è stato il più crudele della Storia, e che certamente ne è stato il più contraddittorio.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
"Lego" o "Plastic City"?			
Distratto, come tutti i grandi geni...			

2.1 "Lego" o "Plastic City"?

Stupisce che questo dilemma non sia stato mai affrontato dal punto di vista filosofico; solo l'innocenza infantile, probabilmente, ha impedito che nella nostra gioventù si scatenassero guerre sanguinarie tra le due Weltanshauung: da una parte (PC) una grossa semplicità costruttiva, data dalla scarsissima disponibilità di forme diverse[15]; dall'altra (L), la possibilità, anche con pochi pezzi, di creare forme degne di un incubo dei Kraftwerk.

Ma stiamo divagando. Recentemente, Rudy ha trovato alcuni pezzi abbandonati di un vecchio Lego dei Validi Assistenti; tra questi, erano presenti due blocchetti "1x4" (nel senso di "attacchi"), che lo hanno immediatamente spinto a compiere un'impresa impossibile con il Plastic City[16] (nel quale i blocchetti avevano dimensione "2xqualcosa"): unirli in modo tale che solo un attacco fosse in comune: in pratica, ottenendo una barretta con un gradino lunga 7 attacchi.

La costruzione, evidentemente, non era particolarmente stabile, anche per il fatto che il sistema di attacco era decisamente diverso da quello del Plastic City: in questo ogni sporgenza aveva un buco in cima in cui andava ad incastrarsi una sporgenza più piccola nel sotto del mattone; nel Lego, invece, la parte sotto era libera ed era l'intera sporgenza del sopra ad incastrarsi.

Comunque, i due pezzi ruotavano. E lo spigolo di quello sopra, ruotando, strisciava appena contro la seconda sporgenza di quello sotto, permettendo di "chiuderli" sino a formare un angolo piuttosto acuto.

...Ma *quanto* acuto?

2.2 Distratto, come tutti i grandi geni...

Forse ve lo abbiamo già detto, ma se c'è una cosa che manda silenziosamente in bestia Rudy è l'abitudine (di sua moglie e sua suocera) di continuare a convertire dopo tutti questi anni gli importi in euro in lire, al cambio di duemila lire per un euro; la sua vendetta, di solito, consiste nel trasformare gli importi in ghinee e, se ci si trova in macchina, di comunicare le distanze in verste, sagene ed archine.

---

[15] Motivo per il quale l'estensore di queste note appartiene alla categoria dei "Plastici": regalatogli in tenera età, il Plastic City era considerato più semplice (e quindi in grado di sviluppare maggiormente le capacità creative) e più "smontabile" (nel senso che era più facile, per l'adulto di turno, staccare i pezzi), almeno nell'opinione di suo zio (perito meccanico). Un po' di invidia per le quasi infinite possibilità dei "Leghisti", comunque, l'ha sempre avuta.

[16] Alice, che di Plastic City non aveva mai sentito parlare, può tranquillamente affermare che il Lego l'ha avuta vinta nella vita reale: facendo una ricerca in google appare solo come giocattolo da collezione.

Capite che con tutti questi calcoli è facile distrarsi e l'ultima volta la cosa ha causato una certa confusione; Rudy doveva fornire dei ben precisi importi ad Alberto, Consuelo, Fred, Hymen e Luigi; come la moglie di Rudy parte per le conversioni in vecchie lire ("vecchie" nel senso che proprio volendo sarebbe un bel po' che andrebbe usato il fattore di conversione *mille*, anziché duemila...), Rudy cerca di fare al volo la conversione in ghinee e, come previsto, sbaglia qualcosa da qualche altra parte. Infatti fornisce a ciascuno dei cinque qui sopra l'importo "scambiato": euro al posto dei cent e cent al posto degli euro, nel senso che se, ad esempio, doveva dare ad Alberto quindici euro e trentadue cent, gli passa trentadue euro e quindici cent.

Siccome anche i nostri cinque sono piuttosto distratti, non si accorgono dello scambio se non dopo aver fatto alcune spese:

> Alberto dopo aver speso cinque cent si accorge di avere in tasca esattamente il doppio della cifra che Rudy avrebbe dovuto dargli.
>
> Consuelo spende cinque cent e si accorge di avere in tasca esattamente la metà della cifra che avrebbe dovuto dargli Rudy.
>
> Fred dopo aver speso undici cent si accorge di avere in tasca esattamente il doppio della cifra che avrebbe dovuto dargli Rudy
>
> Hymen dopo aver speso undici cent si accorge di avere in tasca esattamente la metà della cifra che avrebbe dovuto dargli Rudy
>
> Luigi dopo aver speso settantacinque cent si accorge di avere un numero pari e intero di euro in tasca.

I nostri verificano l'importo totale delle finanze e si accorgono che, come gruppo, non hanno perso nè guadagnato nulla dall'errore di Rudy.

Ora, la domanda è: ma quanto doveva dare Rudy a ciascuno di loro?

Il risultato in normali euro, per favore... Adesso non mettetevi anche voi a fare come sua moglie.

3. Bungee Jumpers

a) Siano A e B ($A > B$) due interi distinti di sette cifre, ciascuno dei quali formato dalle cifre da 1 a 7. Mostrate che A non è divisibile per B.

b) Utilizzando tutte le cifre tra 1 e 9 costruite tre numeri di tre cifre che stiano tra loro nel rapporto $1:2:3$.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Anche se questo è il numero di Natale, siamo di corsa, perché al solito siamo in ritardo su tutto, compreso il calendario. Cerchiamo di sbrigarci, quindi, questo mese siamo stati sommersi dalla posta.

Il primo argomento è ovviamente quello che portiamo ormai avanti da mesi, l'auto-pubblicità: la rivista concorrente (www.matematicamente.it/magazine/index.html) ha pubblicato una recensione del Best Seller di Matematica Ricreativa uscito in agosto ed ormai dichiarato successo editoriale dell'anno, vi invitiamo ad andarla a leggere perché ci hanno recensito meglio di noi stessi.

A proposito di gente che ci riempie di complimenti, ci ha scritto ***Loba*** dopo un bel po' di tempo: malgrado l'immenso piacere che ci dà ricevere complimenti non esagereremo nel riportarli, ma il sito che nel frattempo ci segnala è molto interessante per tutti i giovani studenti, e lo raccomandiamo un po' a tutti quelli che hanno sentito dire che con una laurea in matematica non si può fare molto mestieri.dima.unige.it.

Michele ci fa notare un lapsus meraviglioso nel compleanno del mese scorso – talmente bello che riportiamo le sue parole:

> "il sesso femminile (...) tende a rendersi più attraente e deduttivo nei confronti del sesso maschile." (pag. 9, riga 2). Non so dire se "deduttivo" e "seduttivo" hanno una stessa radice semantica. Ma sono certo che per un matematico ogni evento deduttivo abbia in qualche modo uno slittamento semantico verso la sfera della seduzione!

Il nostro Postino Tuttofare, invece di notare quanto la "s" e la "d" siano vicine sulla tastiera, ha subito improvvisato un'etimologia: "…sono pronto scommettere che entrambi vengano dal latino "ducere", condurre, il primo con la particella "de" nel senso di moto da luogo ("conduco da questo punto", giusto al contrario dell'induzione che mi aspetto venire da "in+duco", "conduco in questo punto"), la seconda con un più interessante "sé", nel senso di "condurre verso di sé"…". In ogni caso, se non si capisce, anche chi ci scrive per notare gli errori ci fa un mondo di piacere, soprattutto se sono interessanti. Purtroppo non avremo mai tempo (o almeno è molto improbabile) di ritoccare i pdf in archivio, ma gli errori sul sito sono con pazienza sistemati dal nostro grande webmaster ***Yan***, ogni volta che glielo segnaliamo. Al momento ***Yan*** è impegnato in un progetto di cui andiamo estremamente orgogliosi, che consiste nel rendere il sito leggibile a ipo- e non-vedenti. Ne siamo veramente contenti e speriamo che tutti gli interessati contribuiscano con suggerimenti: ***Yan*** è sempre molto disponibile.

Ed ora, prima di passare ai problemi, una quantità incommensurabile di auguri a tutti i nostri lettori e a tutti quelli che ci leggeranno prima o poi.

4.1 [106]

4.1.1 Non dovrebbe stare qui

Questo problema ha causato molte proteste e commenti, prima di tutto il titolo lo diceva "non dovrebbe stare qui", ma non spiegava perché: in realtà il Capo lo aveva trovato molto difficile in un primo momento, poi illuminato dalla soluzione, aveva abbassato il numero di pipe. Alice, al contrario, aveva annusato probabilità e senza nemmeno finire di leggerlo decretato tre birre: alla protesta veemente "ma è deterministico!" del Capo, dopo un paio di minuti di lettura, una birra sembrava già troppa, e il Doc, per sicurezza, invocava neutralità. Ve lo diciamo perché una buona *summa* dei commenti ricevuti è quella che ci manda ***Cid***:

> Lo avete chiamato giustamente: "Non dovrebbe stare qui...", ed infatti starebbe meglio in un libro di matematica della scuola media. Ma in ogni caso sta bene anche su una prestigiosa rivista di matematica ricreativa; l'unico dubbio è capire perché soltanto Alice abbia valutato come molto semplice questo problema.

Sta di fatto che di solutori ce ne sono stati tanti, e tutti più o meno con lo stesso procedimento: ***.mau.***, ***Emanuele***, ***Franco***, ***FraPao***, ***Cid***, ***Fausto***, ***Trekker***, ***Antonio***. Lasciando stare il commento sprezzante di ***.mau.***, pubblichiamo la soluzione di ***Antonio***, per dargli il benvenuto tra i solutori visto che il mese scorso era arrivato fuori tempo massimo: tra l'altro il Nostro procede a suggerire un'espansione interessante.

> **Ma…, avrò capito bene il testo del problema?**
>
> Sia $a_0 = a$ la nostra posizione iniziale. Le nostre future posizioni, ogni volta che scopriamo una carta, saranno date da una successione del tipo:

$$a_0 = a$$

$$a_1 = a_0 + \frac{(-1)^{n_1}}{k} a_0$$

$$a_2 = a_1 + \frac{(-1)^{n_2}}{k} a_1$$

$$a_3 = a_2 + \frac{(-1)^{n_3}}{k} a_2$$

e più in generale

$$a_i = a_{i-1} + \frac{(-1)^{n_i}}{k} a_{i-1} = \left[1 + \frac{(-1)^{n_i}}{k}\right] a_{i-1}$$

con $i = 1, \dots, 2n$ e con $n_i = \begin{cases} 2 \text{ se la carta estratta è Nera} \\ 1 \text{ se la carta estratta è Rossa} \end{cases}$

da cui

$$a_{2n} = a_0 \prod_{i=1}^{2n} \left[1 + \frac{(-1)^{n_i}}{k}\right]$$

Posto $q = 1 + \frac{1}{k}$ e $p = 1 - \frac{1}{k}$, risulta evidente che, data la successione finita di passi concessi dal numero 2n di carte, n Nere e n Rosse, la posizione finale sarà, indipendentemente dal colore della carta di volta in volta estratta e poi scartata in successione, $a_{2n} = q^n p^n a_0$ ovvero

$$\bar{a} = a\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^n$$

che dovrebbe essere il punto di arrivo, posizione indipendente dal modo in cui sono estratte le carte dal mazzo.

Per esempio, riferendoci alle scelte di prova di Rudy, n=5, a=100, k=1/2, la posizione finale dovrebbe essere $\bar{a} = 23{,}73046875$ ...

Ed ecco l'espansione promessa:

E se....invece, il movimento dopo aver estratto la k-esima carta fosse di 1/(k+1)-esimo della distanza dall'origine, in un senso o nell'altro, dove potrei arrivare?

In questo caso le cose si complicano non poco, ritengo, perché ora il punto di arrivo non è più indipendente da come estraggo le carte. Tecnicamente il risultato finale sarebbe

$$a_{2n} = a_0 \prod_{k=1}^{2n} \left[1 + \frac{(-1)^{n_k}}{k+1}\right]$$

Con $n_k = \begin{cases} 2 \text{ se la } k-\text{esima carta estratta è Nera} \\ 1 \text{ se la } k-\text{esima carta estratta è Rossa} \end{cases}.$

Già, ma chi sa calcolare la produttoria per una qualsivoglia estrazione delle $2n$ carte? Nel termine in produttoria ho considerato al denominatore k+1 per evitare, se la prima carta estratta fosse rossa, di restare bloccato nell'origine già dopo il primo passo k=1. Elaboriamo 4 possibili scenari semplici di estrazione delle $2n$ carte.

Primo scenario:

sono estratte prima tutte le n carte Rosse, quindi le n carte Nere (*RRRRRR...R, NNNNNN...N*). Allora la produttoria si scioglie in

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)=(\textit{dopo le semplificazioni})\frac{2}{n+2}$$

E quindi

$$a_{2n}=\frac{2}{n+2}a_0$$

Secondo scenario:

sono estratte prima tutte le n carte Nere, quindi le n carte Rosse (*NNNNNN..., RRRRRR... R*). Allora la produttoria si scioglie in

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=$$
$$=(\textit{dopo le semplificazioni})\frac{(n+2)(n+1)}{2(2n+1)}$$

E quindi

$$a_{2n}=\frac{(n+2)(n+1)}{2(2n+1)}a_0$$

Terzo scenario:

sono estratte, nelle estrazioni di posto dispari, carte Nere, nelle estrazioni di posto pari, carte Rosse (*NRNRNRNRNRNR...NR*). Allora la produttoria si scioglie in

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=(\textit{dopo le semplificazioni})\ 1$$

E quindi

$$a_{2n}=a_0$$

Quarto scenario:

sono estratte, nelle estrazioni di posto dispari, carte Rosse, nelle estrazioni di posto pari, carte Nere (*RNRNRNRNRNRN...RN*). Allora la produttoria si scioglie in

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)=(\textit{dopo le semplificazioni})\ \frac{n+1}{2n+1}$$

E quindi

$$a_{2n}=\frac{n+1}{2n+1}a_0$$

Si potrebbe proseguire con altri scenari, ma ogni volta il risultato sarebbe diverso, così come ci si potrebbe divertire a considerare per ogni scenario il punto finale cui si giunge quando il numero di carte tende a infinito.

E anche ***FraPao*** suggeriva la difficoltà che si sarebbe incrementata di molto, se k non fosse stata una costante arbitraria definita come nel testo... forse sentiremo ancora parlare di questo problema...

4.1.2 In che senso?

Molti contributi per il problema delle frazioni, e tutti validissimi: ***drako84***, ***Zar***, ***Fausto***, ***Trekker*** dal Colorado, ***FraPao***, ***Cid***, ***Allanon***, ***Val316***. Non sapendo proprio scegliere, vi facciamo leggere quasi tutto – cominciando con ***drako84***:

Prima di tutto vorrei farvi notare un paio di cosette...

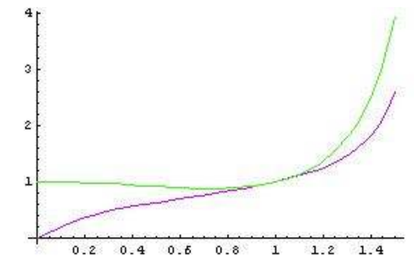
Prima: l'operazione di elevamento a potenza "dall'alto al basso", in pratica, a^b^c diventa a^(b^c), quando tutti i termini sono uguali, si chiama torre di potenze o power tower, all'inglese. Per indicarla si usa il simbolo x^^n, dove x è l'elemento ripetuto n volte (^ indica una freccetta verso l'alto, non l'accento circonflesso tipico dell'elevamento a potenza). Per esempio, x^^5 sarebbe proprio x^x^x^x^x. (fonte: Wolfram MathWorld, http://mathworld.wolfram.com/PowerTower.html).

Seconda: l'operazione "dal basso all'alto" è, in realtà molto più semplice di quello che sembra: se scriviamo x^x^x^x come (x^x)^x^x, poi come [(x^x)^x]^x, possiamo sfruttare le proprietà delle potenze, quindi diventa x^(x^3), in questo caso. Le equazioni che scrivete quindi diventano

x^^5=x^(x^3)

x^^4=x^(x^3)

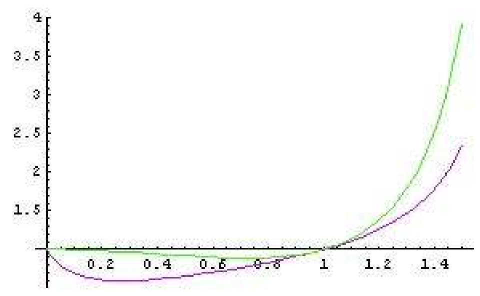
x^^3=x^(x^3)



1° grafico

Risolvendo graficamente (1° grafico) si vede che la soluzione alla prima equazione è x=1.

Analogamente (2° grafico) si vede che le soluzioni alla seconda sarebbero x=0, x=1, ma 0^0 non ha senso, quindi la soluzione è ancora x=1.



2° grafico

Per la terza equazione, possiamo supporre x>0, quindi (logx sarebbe il logaritmo in base x)

logx x^^3=logx x^(x^3)

x^^2=x^3

logx x^^2=logx x^3

x^^1=3

ma x^^1=x, quindi x=3. Poiché anche x=1 soddisfa l'equazione, allora le soluzioni sono x=1, x=3.

Di ***Zar*** abbiamo parecchio da dire. Intanto anche lui ci richiama all'ordine:

Prima di tutto osserviamo che tutte le equazioni sono soddisfatte per x=1; questo fatto ci servirà più avanti quanto applicheremo qualche logaritmo. Ora analizziamo le singole equazioni.

Quella con tre x in discesa si traduce in x^x^x = x^(x^3). Applicando il logaritmo (va bene uno qualunque, facciamo il logaritmo naturale, visto che siamo Veri Matematici) a destra e sinistra otteniamo x^x*ln(x)=x^3*ln(x). Se x è diverso da 1 (il caso x=1 l'abbiamo già analizzato prima) possiamo semplificare i logaritmi e ottenere x^x = x^3. Applicando una seconda volta i logaritmi a destra e a sinistra otteniamo x=3.

Passiamo ora all'equazione con quattro x in discesa, che si traduce in x^x^x^x = x^(x^3). Se applichiamo due volte i logaritmi otteniamo x^x=3. Questa è un'equazione "mista", cioè non è né polinomiale né esponenziale, e non si può risolvere esplicitamente per x. Comunque una soluzione esiste, anzi, possiamo dimostrare che essa è unica: vediamo come.

La funzione y=x^x tende a 1 quando x tende a zero. La sua derivata è uguale a y'=x^x(ln(x)+1), che risulta decrescente da 0 a 1/e, poi diventa crescente. Questo significa che l'equazione x^x=a ha due soluzioni se a è compreso tra (1/e)^(1/e) e 1 (1 escluso), mentre ha una sola soluzione se a è maggiore o uguale a 1. Il fatto che questa soluzione non sia esprimibile in forma chiusa tramite funzioni elementari ci

> dà un po' fastidio, ma possiamo ovviare al problema facendo come di solito si fa nel mondo dei Veri Matematici: se la funzione non c'è, la si definisce.
>
> Definiamo quindi la funzione di zar z pari alla funzione inversa di y=x^x (ben definita se x>1, multivoca invece se 0<x<1). Dunque la soluzione di x^x=3 diventa x=z(3). Se proprio vogliamo sapere quanto vale z(3), un valore approssimato è 1.82546.
>
> Ok, ho barato. Qualcun altro ci aveva già pensato, un tale Lambert.
>
> Lui ha definito la funzione inversa di y=x*e^x, indicandola con la W (si vede che non era megalomane, oppure che l'iniziale l'ha messa qualcun altro). La soluzione di x^x=3 può essere scritta attraverso la funzione di Lambert in questo modo: se x^x=3 allora x*ln(x)=ln(3).
>
> Sostituendo x=e^t si ottiene t*e^t=ln(3), quindi t=W(ln(3)).
>
> Risostituendo t si ha x=e^(W(ln(3))).
>
> Analogamente si procede per l'equazione con cinque x in discesa, che si traduce in x^x^x^x^x = x^(x^3). Applicando un po' di logaritmi si arriva a x^x^x=3. Ora, la derivata di x^x^x è una cosa inguardabile, ma uno studio spannometrico ci dice che è sempre positiva, e che la funzione x^x^x è sempre crescente. Possiamo quindi definire (con meno problemi del caso precedente) la funzione di zar di livello 2, indicata con Z, che sarebbe la funzione inversa di y=x^x^x. La soluzione cercata è dunque Z(3), pari circa a 1.63508. Confesso che non mi è ben chiaro come esprimere il risultato mediante la funzione di Lambert.

Zar ci fornisce anche un certo numero di informazioni sulla funzione di Lambert

> Ho fatto una ricerchina sulla funzione, e ho trovato una storia meravigliosa. Il primo che ha studiato l'inverso di xe^x è stato, indovinate un po'?, Eulero, che l'ha studiata nel 1779. Ma non pareva una funzione degna di ulteriori studi, e fino al 1980 nessuno l'ha più considerata. Che è successo nel 1980? È uscita la prima versione di Maple, che implementava la funzione inversa di y=xe^x, definendola "funzione di Lambert" e attribuendole il simbolo W. Fu scelto il nome di Lambert invece di quello di Eulero per due motivi: primo, perché già Eulero aveva fatto riferimento a Lambert nel suo lavoro del 1779, poi perché dare ancora una volta il nome di Eulero a una funzione non sembrava molto pratico.

Non contento di aver scoperto la funzione di Lambert, ha anche trovato una citazione inglese che tocca il nostro italianissimo modo di semplificarci la vita, e che non esitiamo a pubblicare. La traduzione segue in nota, non vi preoccupate, ma il testo in inglese è una chicca così com'è:

> *My own misgivings about Lambert W pertain not to the function itself but to the name. Again: Why W? Over the years, English-speaking people have inflicted far too many Ws on the rest of the world, from the Wicked Witch of the West to the W boson to the World Wide Web. (Again I forgo comment on the current occupant of the White House.) We purse our lips painfully to pronounce doubleyou, doubleyou, doubleyou. With 26 letters to choose from, why do we keep fixing upon the only letter in the English alphabet with a polysyllabic name? (...)*
>
> *It's not too late to right the wrong. On a bus in Italy—a country that doesn't even have a w in its alfabeto—I overheard a fragment of a conversation: Someone was reading a URL and pronounced the first part "woo woo woo." It's a shrewd accommodation to linguistic wimperialism. We should all adopt it. Let us keep the*

> *letter but change the way we say it. Whether it's Lambert W or George W. or www, it's woo all the way.*[17]

La fonte è: www.americanscientist.org/template/AssetDetail/assetid/40804 in caso vi vada di leggere il resto dell'articolo. Ora passiamo la parola a ***Fausto***:

Calcolare le potenze al contrario, di fatto significa mettere delle parentesi tra un livello e l'altro, in pratica:

$3\uparrow = x \wedge x^2$ (x elevato a x quadro)

$4\uparrow = x \wedge x^3$ (x elevato a x cubo)

detto ciò, procediamo a botte di logaritmi, limiti e "de l'Hopital", e analisi numerica (ovvero calcoli a occhio). Ancora prima di partire, diamo per scontata la soluzione 1, valida in tutti i casi.

1) 5↓ = 4↑

applicando il logaritmo a entrambi i membri e semplificando si ottiene:

$4\downarrow = x^3$

riapplicando il logaritmo: $3\downarrow = 3$, cioè x alla x alla x =3. Applicando metodi numerici (nel mio caso andando a occhio) si ottiene circa 1,6.

Rimane interessante il caso x= 0. Può essere una soluzione? In effetti il numero 0^0 di per sè non ha senso, ma possiamo avvicinarci con i limiti. Comiciamo con

$\lim (x \Rightarrow 0)\ x^x$

credo sia un limite notevole, comunque si può risolvere applicando il logaritmo e derivando numeratore e denominatore (de l'hopital), ottenendo come limite del logaritmo 0, per cui il limite originale è 1. Di conseguenza

$\lim (x \Rightarrow 0)\ x\wedge x\wedge x = \lim (x \Rightarrow 0)\ x\wedge 1=0$

$\lim (x \Rightarrow 0)\ x\wedge x\wedge x\wedge x = \lim (x \Rightarrow 0)\ x\wedge x =1$

$\lim (x \Rightarrow 0)\ x\wedge x\wedge x\wedge x\wedge x = .. = 0$

al contrario, da considerazioni simili (logaritmi e de l'hopital)

$\lim (x \Rightarrow 0)\ n\uparrow = \lim (x \Rightarrow 0)\ x \wedge x^n = 1$ sempre per n>=1

Per cui, secondo me, per la 1) 0 è una soluzione.

2) 4↓ = 4↑

applicando il logaritmo a entrambi i membri e semplificando si ottiene:

$3\downarrow = x^2$

riapplicando il logaritmo si ottiene

$x^x = 2$, cioè più o meno 1,56

[17] Sfortunatamente la traduzione perde molta dell'ironia, ma più o meno il messaggio è questo: "Il mio disappunto per la W di Lambert non ha niente a che fare con la funzione stessa ma con il nome. Perché *W*? Con l'andare degli anni gi anglofoni hanno inflitto fin troppe *W* al resto del mondo, dalla "Strega Malvagia dell'Ovest [*Wicked Witch of the West*] al Bosone W, al World Wide Web. (E rinuncio ancora ai commenti sull'attuale occupante della casa bianca [*White House – ovvio si riferisce a George W. Bush (AR)*]). Contraiamo le nostre labbra dolorosamente per pronunciare dabbliu-dabbliu-dabbliu [*e qui sto provando a rendere l'idea di come gli inglesi pronuncino www (AR)*]. Con 26 lettere tra cui scegliere, perché ci accaniamo sull'unica lettera dell'alfabeto inglese dal nome polisillabico? (...) Non è troppo tardi per raddrizzare la situazione: su un bus in Italia – un paese che non ha nemmeno la w nel suo alfabeto – ho sentito un frammento di una conversazione: qualcuno stava leggendo una URL e pronunciava la prima parte "vu-vu-vu". È un'astuta soluzione al w-imperialismo. Dovremmo adottarlo tutti. Che sia la W di Lambert, o George W., o www, è sempre e solo "vu"."

0, in questo caso, vedendo le considerazioni precedenti sui limiti, può essere considerato una soluzione, infatti sia 4↓ che 4↑ tendono a 1 per x che tende a 0.

3) 3↓ = 4↑

applicando il logaritmo a entrambi i membri e semplificando si ottiene:

2↓ = x^3

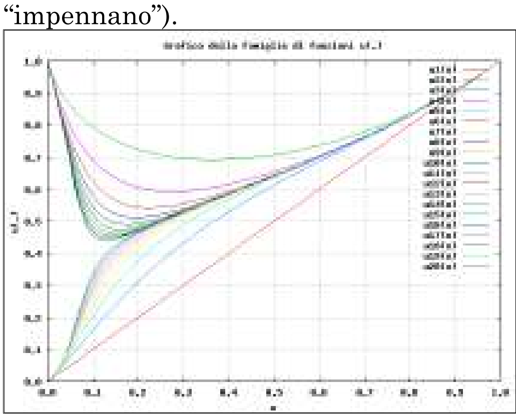
riapplicando il logaritmo si ottiene x = 3 , cioè più o meno 3 (scherzavo ...). Per le considerazioni fatte sopra 0 non è soluzione.

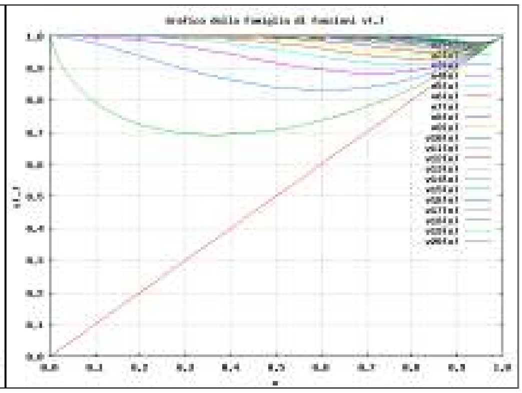
Trekker, al solito, ha molto da dire:

Cominciamo con l'osservare che le equazioni proposte ammettono le soluzioni **x=1** e **x=-1**. Cerchiamo ora altre soluzioni, se esistono, con $x \in \mathbb{R}^+$. Visto che si richiede di "inventare" notazioni alternative adatte comunque a scrivere le equazioni del problema, propongo le seguenti due successioni di funzioni, definite in modo ricorsivo per $x \in \mathbb{R}^+$ e "n" intero > 1 con:

$$u_0(x)=1$$
$$u_1(x)=x \qquad v_1(x)=x$$
$$u_n(x)=x^{u_{n-1}(x)} \quad \text{e} \quad v_n(x)=v_{n-1}(x)^x$$

Nei due grafici che seguono si mostra l'andamento nell'intervallo [0,1] delle prime dieci curve delle due famiglie (oltre il punto di ascissa =1 le curve letteralmente si "impennano").





Si noti che le prime due curve di ogni famiglia coincidono (è evidente dalla definizione) e che, nell'intervallo considerato, le successive curve v(.) sono sempre "sopra" (esclusi gli estremi) le curve u(.) (in pratica, cioè, non ci sono intersezioni fra le u(.) e le v(.) nell'intervallo aperto considerato).

Con le successioni introdotte le equazioni proposte si possono scrivere rispettivamente con:

$u_5(x)=v_4(x)$, cioè cinque=orttauq, 5 ↓= 4 ↑

$u_4(x)=v_4(x)$, cioè quattro=orttauq, 4 ↓= 4 ↑

$u_3(x)=v_4(x)$, cioè tre=orttauq, 3 ↓= 4 ↑

Facciamo qualche osservazione preliminare.

In base alle definizioni è immediato constatare che:

$$u_n(1)=1$$
$$v_n(1)=1$$
$$\log u_n(x)=u_{n-1}(x)\cdot\log x$$
$$\log v_n(x)=x\cdot\log(v_{n-1}(x))=\ldots=x^{n-1}\cdot\log x$$

Mnemonicamente il “logaritmo” opera su:

u(.) “abbassandone” l'indice e lasciando “la sua traccia” con log x;

v(.) “sostituendola” con un log x moltiplicando per una potenza di x con esponente inferiore di uno all'indice della funzione stessa;

Consideriamo ora l'equazione generale seguente:

$$u_M(x) = v_N(x)$$

con M ed N ≥ 1 e valutiamone le soluzioni **positive** al variare di M ed N. Prendendo il logaritmo di entrambi i membri si ottiene:

$$u_{M-1}(x) \cdot \log x = x^{N-1} \cdot \log x$$

cioè:

$$\left(u_{M-1}(x) - x^{N-1}\right) \cdot \log x = 0$$

Le soluzioni di questa equazioni si ottengono ponendo a zero i singoli fattori.

Perciò da log x=0 si deduce **x=1**. Procediamo ora ipotizzando log x≠0 e risolviamo l'equazione:

$$u_{M-1}(x) = x^{N-1}$$

se M=1, allora si ha $1 = x^{N-1}$ che ammette le sequenti soluzioni:

se N=1, si ha un'identità che vale ∀x>0

se N>1, allora x=1

se M=2, allora $u_1(x) = x^{N-1}$, cioè $x = x^{N-1}$ che ammette le seguenti soluzioni:

se N=2, si ha un'identità che vale ∀x>0

se N≠2, allora x=1

se M ≥ 2 e N=1, allora si ha $u_{M-1}(x) = 1$che ha come soluzione x=1

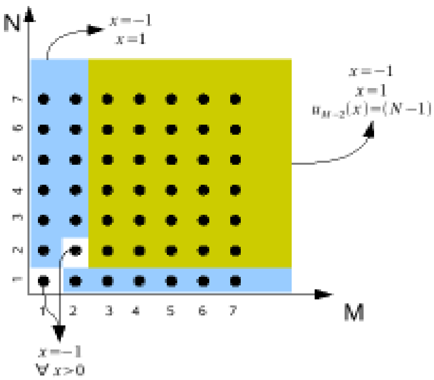
se M ≥ 3 e N≥ 2, allora applichiamo ancora l'operazione di logaritmo su entrambi i membri ottenendo:

$$u_{M-2}(x) \cdot \log x = (N-1) \cdot \log x$$

e poiché log x≠0 questa equivale a:

$$u_{M-2}(x) = (N-1)$$

Essendo $u_{M-2}(x)$ una funzione continua che tende a +∞ per x che tende a +∞ e che vale 1 per x=1, **ci sarà sicuramente un punto di ascissa > 1** in cui la funzione assume il valore di N-1.



Il grafico che illustra i vari casi discussi è qui a sinistra.

Ritornando ai problemi proposti:

- $u_5(x) = v_4(x)$ha come soluzioni **x=1** e la soluzione di $u_3(x) = 3$.

Essendo $u_3(1) = 1 < 3$ e $u_3(2) = 2^{2^2} = 16 > 3$ si deduce che c'è una soluzione nell'intervallo [1,2]. Si può stimare **x≈1.6350...**

- $u_4(x) = v_4(x)$ ha come soluzioni **x=1** e

$u_2(x)=3$.

Essendo $u_2(1)=1<3$ e $u_2(2)=2^2=4>3$ si deduce che c'è anche una soluzione nell'intervallo [1,2]. Si può stimare **x≈1.8254...**

- $u_3(x)=v_4(x)$ ha come soluzione **x=1** e la soluzione di $u_1(x)=3$ cioè **x=3**.

FraPao ci fa notare che... "*contrariamente alla convenzione universalmente accettata, Excel calcola l'espressione x^y^z partendo dal basso verso l'alto*[18]". E ovviamente risolve:

Per la notazione di queste amene espressioni possiamo usare il comodo simbolo "^" (detto amichevolmente cappelletto) per l'elevamento a potenza e le sempiterne parentesi per l'ordine di esecuzione dei calcoli.

Così la vostra equazione "cinque = orttauq" diventa

x^(x^(x^(x^x))) = ((x^x)^x)^x;

e così "quattro = orttauq" è

x^(x^(x^x)) = ((x^x)^x)^x;

e infine "tre = orttauq" è

x^(x^x) = ((x^x)^x)^x.

Ora si dà il caso che il nostro "orttauq" può essere espresso in questo modo, senz'altro più pratico:

((x^x)^x)^x = x^(x^3)

Le tre equazioni diventano così, rispettivamente :

x^(x^x) = 3

x^x = 3

x = 3

Applicando i logaritmi naturali nelle prime due (visto che della terza abbiamo la soluzione immediata):

x^x = ln 3 / ln x

x = ln 3 / ln x

Graficamente (e con l'aiuto di Saint Excel) le soluzioni delle due equazioni si ottengono dalle intersezioni delle curve

y = x^x e y = x

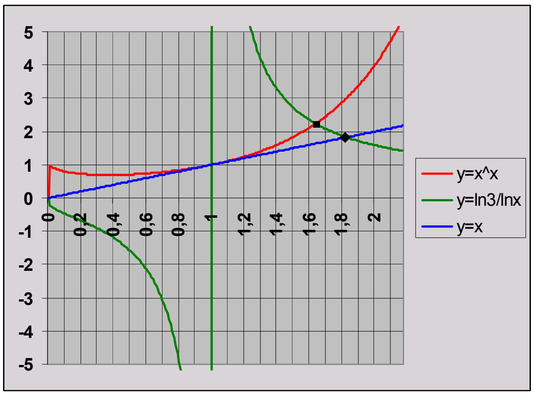
con la

y = ln 3 / ln x

Con una tabulazione abbastanza fine di valori x abbiamo :

per l'equazione
x^(x^(x^(x^x))) = ((x^x)^x)^x

x=1,63508



[18] Excel fa le cose al contrario anche da altre parti: la funzione ATAN(X/Y), fondamentale per chiunque voglia calcolarsi una meridiana, è sempre stata espressa (dal FORTRAN in poi) come ATAN(X,Y). Il (non-tanto-)buon Billy ha deciso che i parametri vanno immessi come ATAN(Y,X). [RdA]

per l'equazione x^(x^(x^x)) = ((x^x)^x)^x

x=1,82545

Si legge? Ah dimenticavo… le 3 equazioni originarie hanno anche l'ovvia soluzione x=1.

Di ***Cid*** prendiamo la spiegazione delle funzioni di Lambert:

La funzione di Lambert (che prende il nome dal matematico Johann Heinrich Lambert) è la funzione inversa di: $f(w) = w \cdot e^w$

Questa funzione viene denotata con la lettera *W* e non può essere espressa come combinazione di funzioni elementari.

E le espressioni finali delle prime due soluzioni (per C ha comunque trovato un valore numerico):

A) Le soluzioni reali dell'equazione: $x^{x^x} = \left(\left(x^x\right)^x\right)^x$

sono: $x = 1$ e $x = 3$

B) Le soluzioni reali dell'equazione: $x^{x^{x^x}} = \left(\left(x^x\right)^x\right)^x$

sono: $x = 1$ e $x = \frac{\ln(3)}{W(\ln(3))}$ (dove W è la funzione di Lambert)

$x = \frac{\ln(3)}{W(\ln(3))}$ è approssimativamente uguale a 1,825455...

Allanon, dopo un certo periodo di silenzio, ci ha inviato parecchi contributi, che riportiamo qui tutti insieme:

Mi sono imbattuto in di questo tipo di funzioni un paio di anni fa, per le ragioni che verranno un poco chiarite nel seguito. Espongo subito le notazioni che all'epoca avevo utilizzato nello studio. Sono le seguenti: (utilizzo caratteri esistenti da tastiera anche se quelli tracciati originariamente a mano libera erano leggermente differenti e forse più significativi…)

1. f(x;y) = x ┌y in luogo della notazione "a freccia in su" IPERNALE SUPERIORE
2. f(x;y) = x └y in luogo della notazione "a freccia in giù" IPERNALE INFERIORE

NB in (1) e (2) graficamente y "sta sopra" la linea orizzontale del simbolo

3. f(x;y) = x ┌/y inversa della (1)
4. f(x;y) = x └/y inversa della (2)

NB in (3) e (4) y graficamente y "sta sotto" la linea orizzontale del simbolo, e si potrebbe omettere il simbolo "/".

Si scrivono x e y (quindi variabili reali) poiché l'interesse di queste "pile" di esponenti risiede nella loro estensione al continuo […] In questo senso le vostre equazioni potrebbero essere scritte ad esempio in modo più compatto nelle forme seguenti:

x └5 = x ┌5; x └4 = x ┌4; x └4 = x ┌3; etc.

^^^^^^^

Le questioni che portarono a considerare queste funzioni furono inizialmente due: la “struttura” delle operazioni aritmetiche e la struttura dell medie elementari di n valori.

1)

Ad esempio, se si scrive: x+x+x+x+x+…+x n-volte, cioè se si ripete n-volte l’operazione di livello 1 “SOMMA” si ottiene la operazione di livello 2 “MOLTIPLICAZIONE”, ovvero

x+x+x+x+x+…+x = nx

procedendo allo stesso modo :

x x x x …x = x^n

cioè ripetendo l’operazione di livello 2 si ottiene l’operazione di livello 3 “POTENZA“; a questo punto è naturale chiedersi cosa si ottiene ripetendo l’operazione di livello 3: si ottiene una operazione di livello 4 “IPERNALE” che, nella forma “a freccia in su” potrebbe quindi essere scritta come

((((x^)x^)x^)x…)^x = x ┌n IPERNALE SUPERIORE

Tuttavia, mentre le operazioni « + » e « * » sono commutative, e quindi il “senso” di calcolare queste operazioni non è importante, questo non vale per l’operazione « ^ » ; quindi poteva essere altrettanto lecito pensare ad una sequenza di calcolo ricorsiva tipo “freccia all’ingiù” cioè:

x^(x^(x^(x^(…)))) = x └n IPERNALE INFERIORE

2)

Una ulteriore considerazione deriva dall’osservare le seguenti regolarità: se definiamo per comodità LO=k il livello di una “operazione” ed LO=-k il “livello” della sua inversa, allora possiamo scrivere:

SOMMA (LO=1) di n termini ➔ DIVISIONE (LO=-2) ➔ MEDIA ARITMETICA

MOLTIPLICAZIONE (LO=2) ➔ RADICE (LO=-3) ➔ MEDIA GEOMETRICA

POTENZA (LO=3) ➔ IPERNALE INVERSO (LO=-4) ➔ MEDIA IPERNALE

Etc.

Nasce così la necessità di introdurre le inverse delle operazioni IPERNALI, cioè delle operazioni con LO=-4; per es. se:

((((a^)b^)c^)d) = W, la sua MEDIA IPERNALE SUPERIORE che indicheremo sarà:

μ(a,b,c,d) tale che μ ┌ 4 = W e si scriverà W ┌/4 = μ

ovvero, se

(a^(b^(c^)d)))) = Z, la sua MEDIA IPERNALE INFERIORE che indicheremo sarà:

ж(a,b,c,d) = ж tale che ж └ 4 = Z e si scriverà Z └/4= ж

^^^^^^^

Interessante osservare l’estensione al caso continuo dell’ipernale di un reale; cosa rappresenta ad esempio l’espressione x ┌y se y è un reale e non un intero? Si osserva innanzitutto che (semplicemente per il fatto che esponente di esponente equivale in <u>questo caso</u> al prodotto degli esponenti)

x ┌n = x(x^(n-1))

per cui in modo ovvio

x ┌y = x(x^(y-1))

la dimostrazione rigorosa di questa estensione, che io non ho fatto, credo sia più o meno da condurre sulla falsariga delle classiche dimostrazioni che nei corsi di analisi elementare vengono mostrate per estendere il concetto di potenza da esponente intero ad esponente reale, etc.

Un po' più complicato è invece trattare la funzione

x └y

in quanto nonostante tutti i tentativi fatti fino ad oggi non sono ancora riuscito a trovare (sempre che esista) una formula chiusa in termini di operazioni con LO<4, che sia NON RICORSIVA;

Tuttavia anche in questo caso qualcosa di assimilabile ad una inversa esiste, pur se con restrizioni maggiori della precedente.

Lo studio delle funzioni x ┌ y ed x └y, sia come funzioni di x che di y, è stato molto interessante e mi ha occupato per diversi mesi negli ultimi due anni; prometto entro pochi giorni di farvi avere una panoramica dei maggiori risultati trovati…

PARTE SECONDA - IPERNALE

Definizione: Definiamo IPERNALE di base x reale >0 ed IPERANTE n intero

f(x;n) = x ┌n = (((((x)^x)^x)^x..)^x) = x^(x^(n-1))

in base a questa definizione è abbastanza semplice determinare ad esempio le seguenti relazioni fondamentali : (n, k interi)

0. x ┌(n+1) = (x ┌n)^x   formula di ricorsione
1. (x ┌n)^k = x^(k*(x^(n-1)))
2. (x^k) ┌n = x^(k*(x^(k*(n-1)))
3. (x ┌n) ┌k = x ┌(n+(k-1)*x^(n.1))
4. (kx) ┌n = (k ┌n)^(x^((n-1))*(x ┌n)^(k^(n-1))
5. x ┌(n+k) = (x ┌k)^(x^n) = (x ┌n)^(x^k)
6. ln(x ┌n) = (x^(n-j))*ln(x^j)   dove j=1,…,(n-1)
7. D((x ┌n) = (x ┌n)/(x*(1-(x ┌n)*ln(x))) = (x ┌n)*(x^(n-1))*((n-1)*ln(x)+1)

Etc.

In particolare dalla (5) si osserva che, posto n = a+b con a, b reali si può scrivere:

x ┌(a+b) = (x ┌a)^(x^b) = x ┌n da cui segue ad esempio

(x ┌a) = (x ┌n)^(1/(x^b)) ove a reale, che può essere utilizzata come definizione di IPERNALE con IPERANTE reale.

Inoltre, come casi particolari abbiamo:

8. x ┌0 = x ┌(n-n) = x^(1/x)
9. x ┌(-n) = x^(x^(-n-1))
10. x ┌(1/n) = x^((x^(1-n))^(1/n))

DEFINIZIONE: Definiamo IPERNALE di base x reale >0 ed IPERANTE y reale

f(x;y) = x ┌y = x^(x^(y-1))

cerchiamo di studiare brevemente questa funzione almeno nelle linee essenziali

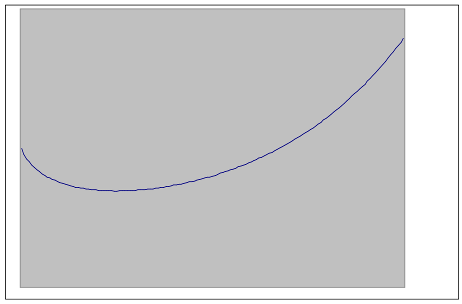


grafico tipico per n>1

******* limiti

y>=1	lim (x➔∞) = ∞
y<1	lim (x➔∞) = 1
y>1	lim (x➔0) = 1
y<=1	lim (x➔0) = 0

******* massimi/minimi

attraverso la derivata otteniamo

D((x ┌n) = (x ┌n)/(x*(1-(x ┌n)*ln(x))) = (x ┌n)*(x^(n-1))*((n-1)*ln(x)+1)

Poichè (x ┌n) >0 e (x^(n-1))>0 l'annullamento della derivata dipende dall'annullamento del terzo fattore;

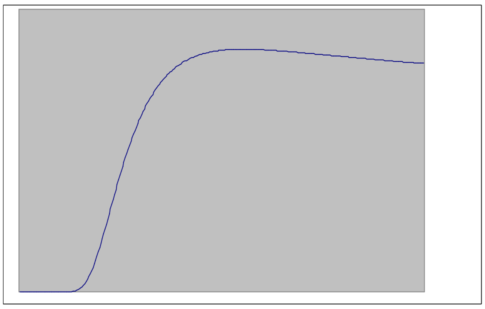


grafico tipico per n<1

Pertanto :

D=0 ➔➔ ln(x) = -1/(n-1) (con n<>1)

n>1 si tratta di un minimo, ascissa compresa fra 0 ed 1 , ordinata <1

n<1 si tratta di un massimo, ascissa > 1, ordinata >1

n=1 (x ┌n)=x non ammette ne massimi nè minimi.

PARTE TERZA - SUPERNALE

Definizione: Definiamo SUPERNALE di base x reale >0 e SUPERNANTE n intero

f(x;n) = x └n = x^(x^(x^(x^(….x))))

in base a questa definizione sussistono le seguenti relazioni fondamentali:

0. x └ (n+1) = x^(x └n) formula di ricorsione
1. ln(x └n) = x └ (n-1)*ln(x)
2. D((x └n) = (x └n)*(D(x └ (n-1))*ln(x)+(x └ ((n-1))/x)
3. x └n = x ┌((x └(n-2)) formula supernale/ipernale

In particolare dalla (1) si osserva che:

4. ln(x └1) =ln(x) = x └ (n-1)*ln(x) = x └ (0)*ln(x)

da cui si può ricavare

x └ (0)=1

x └ (-1)=0

e non ho trovato modo di estendere la formula ad altri numeri negativi.

Estensione al caso di SUPERNANTE reale; sia y = [y]+{y}, somma di parte intera e decimale;

DEFINIZIONE: Definiamo SUPERNALE di base x reale >0 ed SUPERNANTE y reale

f(x;y) = (x └ y) = x^(x^(x^(x^(….x^(x^{y}))))

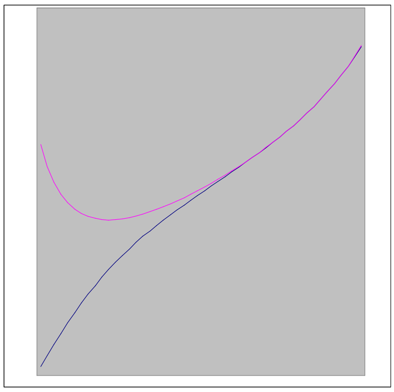
____n-termini___

Ove compare n+1 volte il simbolo x della base ma l'ultimo elevato alla parte decimale di y.

Si vede che questa definizione è consistente, cioè in y intero sono continue TUTTE le derivate di x └ y così definita;

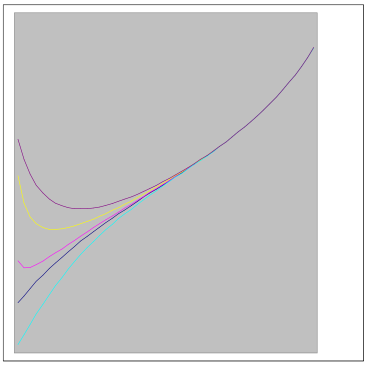
Convergenza.

Se si studia la funzione x └ n con n intero, per n➔∞, si osserva un comportamento un po' fuori del comune:



andamento per n pari ed n dispari (3 e 4); x variabile

- per x > e^(1/e) diverge
- per e^(-e) < x < e^(1/e) converge ad un valore limite « t »
- per 0 < x < e^(-e) oscilla fra due valori w e z



transizione per n intermedi fra 3 e 4: 3,25; 3,35; 3,6

Il limite t sarà tale per cui x^t=t e se x rientra nel caso 2) è completamente definito.

I valori di oscillazione z e w saranno tali per cui x^w = x^z; ossevo solo che anche nel terzo caso esisterebbe un valore t* tale che x^t* = t*, ma la funzione, che ricordo essere ricorsiva, x └ n, non riuscirà a convergere verso t* ma convergerà ad una oscillazione fra due valori appunto z e w.

Quanto sopra è ovviamente dimostrabile, ma non lo riporto qui per brevità.

Si osservi infine che, studiando la funzione x └ y per diversi y, il grafico della funzione è sostanzialmente diverso se n è pari o dispari.

E qui siamo all'ultimo contributo, quello di ***Val316***, arrivato proprio il 30 verso mezzanotte, e fortunato perché Alice, in questo novembre, era molto in ritardo a raccogliere le soluzioni.

Devo dire che quella sequenza di esponenziazioni successive di X presentate nel problema di Rudy mi ha fatto tornare in mente una curiosa notazione che avevo avuto modo di leggere in un bel libro di divulgazione matematica scritto da Rudy Rucker dal titolo *La mente e l'infinito*. Nel capitolo "I numeri transfiniti" Rucker, nel tentativo di produrre ordinali transfiniti sempre più grandi applicando ripetutamente le note operazioni aritmetiche elementari, parla di un'operazione che chiama *tetrazione*. Tetrazione, dalla radice greca tetra, per indicare quattro, sta ad indicare la quarta operazione aritmetica dopo l'addizione, la moltiplicazione e l'esponenziazione. Per quell'operazione Rucker di fatto conia una sua notazione simile all'esponenziazione, con l'esponenete a sinistra invece che a destra. Egli scrive che "a tetrato b" sta ad indicare una torre di b-1 esponenti uguali ad a:

$$ {}^{b}a \equiv \left. a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}} \right\} b\, copie\ di\ a $$

Il calcolo degli esponenti deve essere inteso con precedenza a destra o a freccia in giù per dirla alla Rudy. La precedenza con cui si applicano gli esponenti ovviamente non è irrilevante e abbiamo una effettiva torre di esponenti solo per la precedenza a destra. Infatti mentre ad esempio $a^{\left(a^{\left(a^{(a)}\right)}\right)}$ è irriducibile, l'altra $\left(\left((a)^a\right)^a\right)^a$, con precedenza a sinistra, è uguale, per la regola di moltiplicazione degli esponenti a $(a)^{a^3}$. Da questo punto vista le equazioni del problema possono essere riscritte come:

$$ {}^5X = (X)^{X^3} \qquad {}^4X = (X)^{X^3} \qquad {}^3X = (X)^{X^3} \qquad [1] $$

La notazione di Rucker non è l'unica apparsa in letteratura e già un personaggio di rilievo dell'informatica teorica come Donald Knuth negli anni settanta aveva fornito una sua proposta. Anche per poter convivere con i terminali a carattere degli albori dell'informatica, Donald Knuth propose la sua notazione a freccia in su (*up-arrow notation*). In dettaglio:

$$ a \uparrow b \equiv a^b $$

$$ a \uparrow\uparrow b \equiv {}^b a \equiv \underbrace{a \uparrow a \uparrow \ldots \uparrow a}_{b\ copie\ di\ a} $$

Ancora l'operatore $\uparrow$ deve essere inteso con precedenza a destra. Quindi la tetrazione viene ad essere rappresentata da una coppia di frecce in su e le equazioni (1) potremmo scriverle come:

$$ X \uparrow\uparrow 5 = X \uparrow X \uparrow 3,\ X \uparrow\uparrow 4 = X \uparrow X \uparrow 3,\ X \uparrow\uparrow 3 = X \uparrow X \uparrow 3 $$

Knuth estese ulteriormente la sua notazione definendo ricorsivamente operatori a tripla freccia, a quadrupla freccia e così via:

$$ a \uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow a \uparrow\uparrow \ldots \uparrow\uparrow a}_{b\ copie\ di\ a}, $$

$$ a \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow\uparrow a \uparrow\uparrow\uparrow \ldots \uparrow\uparrow\uparrow a}_{b\ copie\ di\ a} $$

e quindi in generale

$$ a \uparrow^n b = \begin{cases} a^b & per\ n = 1 \\ 1 & per\ n = 0 \\ a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^n (b-1)) & altrimenti \end{cases} $$

Tanto per dare un esempio della potenza espressiva di questa notazione è divertente scrivere in termini di potenze esplicite un'espressione apparentemente innocua come $3 \uparrow\uparrow\uparrow 5$.

Per definizione $3 \uparrow\uparrow\uparrow 5 = 3 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow 3$

Operiamo per costruzioni successive:

$$ 3 \uparrow\uparrow 3 = 3^{3^3} $$

$$3\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow 3) = \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{3^{3^{3}}\ (\mathit{copie\ di}\ 3)}$$

$$3\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow 3)) = \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{\underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{3^{3^{3}}}}$$

$$3\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow 3))) = \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{\underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{\underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{3^{3^{3}}}}}$$

Un numero inimmaginabile!

Esiste un'altra notazione creata dal matematico John Horton Conway. Di fatto è semplicemente una sequenza di interi separati da frecce a destra. Questa notazione è detta a catene concatenate ed è ricorsivamente definita nella seguente maniera:

Ogni intero positivo è una catena di lunghezza 1

2) Se X è una catena di lunghezza n-1 allora $X \to q$, con q intero positivo, è una catena di lunghezza n. Il valore espresso da una catena si ricava applicando le regole che seguono:

$X \to p \to (q+1)$ è equivalente a $X \to (X \to (...(X \to (X) \to q)...) \to q) \to q$, con p copie di X e p-1 copie di q

$X \to 1$ è uguale a X

$p \to q$ è uguale a p^q

Con questa notazione le equazioni (1) verrebbero scritte

$X \to 5 \to 2 = X \to (X \to 3)$,

$X \to 4 \to 2 = X \to (X \to 3)$,

$X \to 3 \to 2 = X \to (X \to 3)$.

Infatti $X \to (X \to 3) = X \to (X^3) = X^{X^3}$ e ad esempio

$$X \to 4 \to 2 = X \to 4 \to (1+1) = X \to (X \to (X \to (X) \to 1) \to 1) \to 1 =$$
$$X \to (X \to (X \to X) \to 1) \to 1 = X \to (X \to (X^X) \to 1) \to 1$$
$$X \to (X \to X^X) \to 1 = X \to (X^{X^X}) \to 1 =$$
$$X \to (X^{X^X}) = X^{X^{X^X}}$$

Al di là delle notazioni l'operazione di tetrazione è ben definita per valori dell'iperesponente interi positivi, ma che cosa si può dire se estendessimo il campo di variabilità dell'esponente ai numeri razionali o ai reali o ai complessi?

Cioè hanno senso espressioni del tipo ${}^{1/3}x$, ${}^{\sqrt{2}}x$, ${}^{i}x$? È questo un problema sostanzialmente aperto in quanto i matematici coinvolti hanno fornito diverse versioni anche discordanti tra loro.

Nelle mie ricerche in Internet ho scovato un bell'articolo, scritto da un ricercatore italiano(Romerio) e da uno russo (Rubtsov), ospitato dal sito web del Rotary Club di Saluzzo (www.rotarysaluzzo.it/Iperoperazioni.htm) (incredibile dictu!), in cui viene affrontata una questione di questo tipo.

L'articolo contiene una quantità notevole di riferimenti sulla tetrazione. Ad esempio in esso si cita che l'addizione, la moltiplicazione, l'esponenziazione e la tetrazione possono essere viste come casi particolari di una gerarchia di iperoperazioni: *la gerarchia di Grzegorczyk*. In breve si definisce un iper-operatore $\lceil s \rceil$ di rango s che segue lo schema seguente:

$$a\lceil 1 \rceil b = a + b$$
$$a\lceil 2 \rceil b = a * b$$
$$a\lceil 3 \rceil b = a^b$$
$$a\lceil 4 \rceil b = {}^{b}a$$
$$\ldots$$

Gli autori dichiarano che si può assumere tutti i valori naturali dando luogo così ad una gerarchia infinita, ciò non toglie che si possa osare anche immaginare l'esistenza di operatori con s=1,5 tra l'addizione e la moltiplicazione, oppure con s=π o s=*i*. La parte più attraente della gerarchia è che ogni iper-operatore di rango s si definisce a partire dall'iper-operatore di rango s-1 secondo la regola:

$$a\lceil s \rceil(b+1) = a\lceil s-1 \rceil(a\lceil s \rceil b)$$

Ad esempio

$$a\lceil 2 \rceil(b+1) = a*(b+1) = a*b + a = a\lceil 1 \rceil(a*b) = a\lceil 1 \rceil(a\lceil 2 \rceil b),$$

$$a\lceil 3 \rceil(b+1) = a^{b+1} = (a^b)*a = a\lceil 2 \rceil(a^b) = a\lceil 2 \rceil(a\lceil 3 \rceil b).$$

Inoltre appare una formula molto bella.

$$Se \quad z = x^y \Rightarrow \begin{cases} y \equiv \log_x(z) \\ x \equiv \sqrt[y]{z} \end{cases}$$

Anche per la tetrazione possiamo definire delle inverse analoghe:

$$Se \quad z = {}^{y}x \Rightarrow \begin{cases} y \equiv s\log_x(z) & (\sup er \log) \\ x \equiv {}^{y}\!\!\left.\right) z & (\sup erroot) \end{cases}$$

Allora è valida la formula

$$\lim_{n\to\infty} {}^{n}\!\!\left.\right) x = \sqrt[x]{x}$$

Ovvero

$${}^{\infty}\!\!\left.\right) x = \sqrt[x]{x} \quad \text{(non male!)}$$

Comunque la tetrazione a iper-esponenti razionali o reali viene affrontata solo in termine di bozza senza darne una definizione soddisfacente, anche perché a dire il vero lo scopo principale dell'articolo è quello di indietreggiare sulla gerarchia di Grzegorczyk per poter definire un nuovo operatore di rango 0 (zerazione!). Un tentativo sicuramente più deciso ho potuto leggerlo in un lavoro (http://ioannis.virtualcomposer2000.com/math/papers/Extensions.pdf) di un ricercatore greco di nome Ioannis Galidakis. Il suo metodo è consistito nel trovare un'estensione della tetrazione agli iper-esponenti razionali trovando un prolungamento continuo che per iper-esponenti interi produce gli stessi valori dell'operazione standard. Ecco in breve la sua proposta:

$$Per\ z \in C \setminus \{x \in R : x < 0\}\ e\ n \in N$$

$$^{n}(z,w) = \begin{cases} z^{w} & per\ n = 1 \\ z^{(^{n-1}(z,w))} & per\ n > 1 \end{cases}$$

Allora se $r \in Q^{+}$

$$^{r}x = \begin{cases} ^{1}(x,r) = x^{r} & [r] = 0 \\ (^{[r]}x, x^{\{r\}}) & [r] > 0 \end{cases}$$

Dove [r]e {r} sono rispettivamente la parte intera e frazionaria di r.

Termino qui questo breve excursus sulla tetrazione riservando un'ultima nota a margine: nei vari riferimenti che ho letto appaiono costantemente un paio d'identità stabilite da Eulero

$$\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$$

$$\int_0^1 x^{x}dx = \sum_{n=1}^{\infty} -(-1)^{n} n^{-n}$$

Mi chiedo perché gli statunitensi chiamino le due identità sophomorès dream[19]? Cioè più o meno il sogno del saggio-stupido? Boh! *Hypotheses non fingo*...

Veniamo alle soluzione delle equazioni proposte. Mi pare abbastanza scontato brandire a mo' di accetta l'operazione logaritmo in modo da abbattere le torri di esponenti presenti. Però in quale campo cerchiamo le soluzioni? Rudy non sembra

[19] Il "sophomore" negli USA è, se non sbaglio, lo studente suppergiù universitario del secondo anno. Quando ci si scontra con Analisi 2, dove queste "formulette" fanno molto comodo. [RdA]

porre limiti. Allora mi son divertito a cercare le soluzioni nel campo complesso in cui sembrano essercene di più di quello, scontato, reale.

Ho preso in esame l'equazione $X^{X^{X^X}} = X^{X^3}$.

Oltre alle soluzioni banali X=0 e X=1, le altre soluzioni sono le stesse dell'equazione $X^X = 3$ (*)

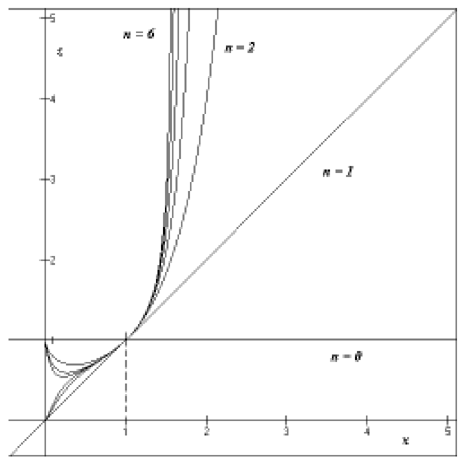


Grafico di $^n x$ al variare di n intero non negativo

Dal grafico di cui sopra si vede che nel campo reale essa ammette un'unica soluzione X~1,825.

Nel campo complesso ne esistono infinite. Infatti sia $X = re^{i\theta}$ con $r > 0$ e $0 \le \theta < 2\pi$. Applicando il logaritmo a $X^X = 3$, otteniamo

$XLnX = Ln3$ quindi

$$X^X = 3 \quad \Rightarrow$$

$$Posto\ X = re^{i\theta} \quad \Rightarrow$$

$$re^{i\theta} Ln(re^{i\theta}) = Ln3 \quad \Rightarrow$$

$$re^{i\theta}(Ln\,r + i\theta) = Ln3 \quad \Rightarrow$$

$$(r\cos\theta + ir\sin\theta)(Ln\,r + i\theta) = Ln3 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} rLn\,r\cos\theta - r\theta\sin\theta = Ln3 \\ rLn\,r\sin\theta + r\theta\cos\theta = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$r\theta = -rLn\,r\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Allora possiamo concludere che nel campo complesso le soluzioni sono tutte quelle che soddisfano quella seguente (in coordiante polari)

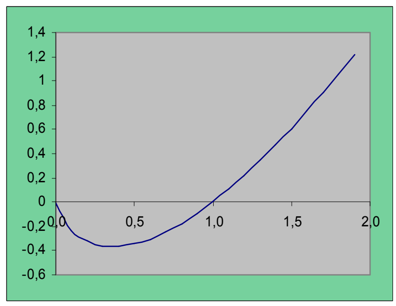


Grafico di rLn r

$$rLn\,r\cos\theta + rLn\,r\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = Ln3 \quad \Rightarrow$$

$$rLn\,r\left(\frac{1}{\cos\theta}\right) = Ln3 \quad \Rightarrow$$

$$rLn\,r = Ln3\cos\theta \quad (**)$$

$Ln3\cos\theta$ assume tutti i valori compresi tra *–Ln3* e *Ln3*, *rLnr* (vedi grafico) ammette un minimo *-1/e>-Ln3* per *r=1/e* dopodichè tende a cresce monotonamente. C'è un valore $r=\underline{r}$ tale per cui $\underline{r}Ln\underline{r}=Ln3$. Allora per ogni $r \in [0,\underline{r}]$ esiste almeno un $\underline{\theta}$ per cui $\underline{r}Ln\,\underline{r} = Ln3\cos\underline{\theta}$, cioè esistono infinite soluzioni per $X^{X^{X^X}} = X^{X^3}$ nel campo complesso.

Val316 ci ha proprio stupito con effetti speciali.

Siamo arrivati alla fine, allora buone feste da tutta la Redazione!

5. Quick & Dirty

Il nostro nuovo mazzo da 120 carte, acquistato appositamente per essere divisibile per un mucchio di numeri, è formato da 60 carte rosse e 60 carte nere. Lo abbiamo mescolato e adesso che è in disordine ci poniamo una domanda.

Consideriamo le seguenti disposizioni, estese all'intero mazzo (solo per i divisori di 120, evidentemente):

> Una rossa, una nera, una rossa, una nera...
>
> Due rosse, due nere, due rosse, due nere...
>
> Tre rosse, tre nere, tre rosse, tre nere...
>
> ...
>
> Sessanta rosse, sessanta nere (e basta).

... Ma secondo voi, qual è la più probabile?

6. Pagina 46

Parte a)

La somma delle cifre di ognuno dei due numeri vale $1+2+3+4+5+6+7=28$, quindi entrambi i numeri danno un resto 1 quando vengono divisi per 9. Ma se $A/B = n$ (ossia se $A = Bn$), dove n è un intero maggiore di 1, dovendo essere $B = 9N+1$, segue dal fatto che $A = nB = 9M + n$ che n deve dare un resto 1 quando venga diviso per 9: quindi il valore minimo che n può assumere è 10.

Deve però essere $A/B < 10$, essendo sia A che B due numeri di 7 cifre. Quindi, i due numeri non sono divisibili tra loro.

Parte b)

Indichiamo i tre numeri con $N, 2N, 3N$.

Dovendo un intero e la somma delle sue cifre mantenere lo stesso resto una volta che siano divisi entrambi per 9, il numero $N+2N+3N$ deve dare lo stesso resto di $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$.

Quindi $6N$ e (quindi) $3N$ devono essere divisibili per 9.

Siccome $3N$ deve essere un numero di 3 cifre, la prima cifra di N non può essere maggiore di 3; da cui si deduce che l'ultima cifra di N non può essere 1, in quanto in questo caso $2N$ terminerebbe per 2 e $3N$ per 3, impedendo a ciascuna di queste cifre di essere quella più significativa di N.

N non può terminare con 5, in quanto in questo caso $2N$ terminerebbe con 0.

Supponiamo allora che l'ultima cifra di N sia 2; allora le cifre meno significative di $2N$ e $3N$ dovranno essere rispettivamente 4 e 6.

Le restanti tre cifre di N allora dovranno essere scelte tra $\{1,3,5,7,8,9\}$.

Siccome la somma di tutte le cifre di $3N$ deve essere un multiplo di 9, le prime due cifre di $3N$ possono solo essere $\{3,9\}$ oppure $\{5,7\}$.

Verificando tutte le possibilità, si vede che solo $\{192,384,576\}$ soddisfano le condizioni del problema.

Analogamente, possiamo verificare i casi in cui N termina per una cifra nell'insieme $\{3,4,6,7,8,9\}$; questa ricerca produce altre tre soluzioni: $\{273,546,819\}$, $\{327,654,981\}$ e $\{219,438,657\}$.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Qualcuno ha un paio di forbici?

Rudy è convinto che questa sia la stagione giusta per parlarne; farlo con i guanti è difficilissimo, ma è estremamente semplice liberarsi dal risultato.

Cominciamo richiamando alcuni vecchi concetti[20].

Un *nodo* (nel senso matematico del termine) è un nodo (nel senso comune del termine) le cui estremità libere sono collegate tra di loro; questo serve ad imporre il fatto che non si possa trasformare un nodo in un *non-nodo*, ossia in un anello; dovreste, da qualche parte, tagliare la corda e poi ricongiungerla. La cosa, se vi piacciono le parole difficili, si sostanzia nella frase che un nodo è un'*invariante topologica*: ossia, una volta che è lì l'unico modo per toglierselo dai piedi è invocare dimensioni superiori o barare (come disse un noto comico, "la seconda che hai detto" è il metodo preferito).

Comunque, resta il fatto che se avete un anello di corda, avete un non-nodo che resterà tale per tutto il tempo; ciononostante, può presentare alcune caratteristiche decisamente interessanti.

Tra le varie cose che suscitano l'invidia di Rudy, una delle meno note è la capacità di fare i disegni di corda o, come preferiscono chiamarli gli anglofoni, le *string figures*; tra l'essere mancino, la scarsa manualità e le difficoltà con le istruzioni, ha impiegato tre mesi per impararne una (facile), e quindi ha perso l'anello di corda; in attesa di ritrovarlo o costruirsene un altro (corda di nylon piuttosto spessa, saldata alle estremità con un temerario lavoro di accendino), ha optato per un'elaborazione teorica.

Per prima cosa, cerchiamo di stabilire le condizioni iniziali; vi serve un anello di corda, e dovete metterlo attorno alle dita. Già questo porta ad alcune piacevoli complicazioni; infatti, la prima domanda è: "Come lo metto?". Bene, secoli (anzi, millenni: tra i più vicini a noi, i Greci antichi già si dilettavano con questi giochini) di tentativi hanno mostrato che i risultati decenti si ottengono principalmente da ***tre*** aperture: l'***anello***, nel quale la corda passa dietro i pollici, dietro i mignoli e davanti alle altre dita; e il ***double loop***, che (se indicate il pollice con 1 e il mignolo con 5) assume l'aspetto in *Figura 1*, dove inoltre "L" sta per "sinistra" e "R" per "destra.

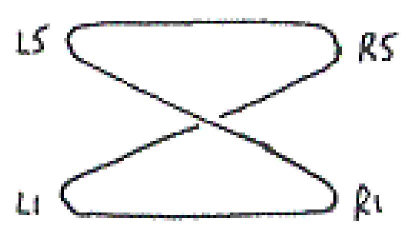


Figura 1 – Il Double Loop

"Rudy, avevi detto tre!" Vero. La terza deriva in realtà dall'anello, nel momento stesso nel quale inserite il medio destro sotto la passante davanti alle dita della mano sinistra e tirate, compiendo poi la manovra simmetrica con la mano sinistra; il risultato finale, noto come ***apertura A***, lo trovate nella *Figura 2*. Allenatevi, che è la base di partenza delle figure più carine: dalla "*Scala di Giacobbe*" (l'unica che sa fare Rudy, come dicevamo) sino a immagini estremamente poetiche (almeno per gli eschimesi) come la "*Luna piena dietro la carcassa di balena*". Prima della fine ve le facciamo vedere, non fosse altro che crediamo sia più facile capire l'arte astratta piuttosto che individuare cosa sta cercando di dire il tipo con quel garbuglio[21].

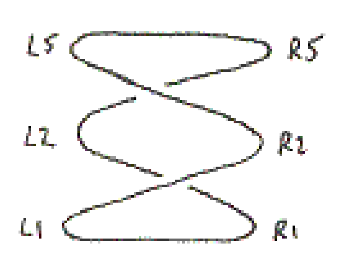


Figura 2 – Apertura "A"

[20] "Il Polinomio di Jones", PM su RM026. Correte a rileggervelo, apprezzando la fatica nel fare i disegni.

[21] Giusto per far arrabbiare gli amici dell'Oulipo: Calvino, con i tarocchi, ha preso la strada più facile.

E, in effetti, qui salta fuori un po' di matematica interessante. Guardate ad esempio la *Figura 3*: rappresenta, almeno in base a quanto ci dice ***Jayne***, che nel 1902 ha visitato le Isole Caroline, una ***Moneta di Pietra***[22]; siccome intuitivamente le parti importanti del disegno sono dove due o più tratti di corda si incrociano, si rigirano o comunque ne combinano qualcuna, li abbiamo indicati con le lettere maiuscole da "A" a "H".

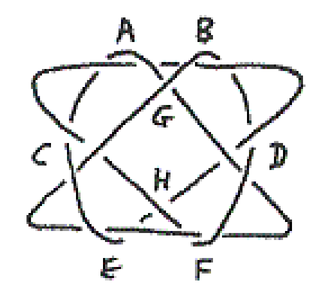


Figura 3 – Stone Money

E adesso guardate la *Figura 4*. Secondo ***Roth***, che nel 1924 passava dalle parti della Guyana (lì come stavano, a dieta?), questo aggeggio era nota come ***La Stella***.

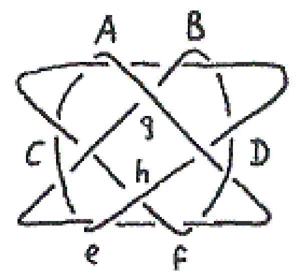


Figura 4 - Star

Prego notare: praticamente lo stesso disegno, praticamente gli stessi incroci, ma qualcuno è *al contrario*. E, per evidenziare la cosa, a quelli "al contrario" abbiamo rifilato la lettera minuscola.

Prescindiamo dal fatto che si chiami diversa, e prescindiamo anche dal chiederci come, in tempi palesemente pre-internet, popolazioni così lontane siano riuscite a sviluppare disegni così simili; quello che ci chiediamo è: ma ***quanto*** sono simili? O, per usare un americanismo, questi ***look-alikes***, sono tutti ottenibili?

Bene, per prima cosa cominciamo a definire i termini; data una figura espressa, secondo l'etichettatura vista qui sopra, come ABCDEFGH, ci chiediamo se esista (nel senso che *sia ottenibile*) una figura, ad esempio, descritta come ABCDeFGH, in cui il passaggio "E" (e solo lui) diventa inverso.

Sino a poco tempo fa, l'unico modo per verificare una cosa del genere era quello di intrecciare la figura con una stringa *aperta*, chiudere la stringa e poi cominciare (come dice un amico di Rudy) a *ravanare* sin quando non si otteneva un anello o un nodo; nel primo caso la figura si poteva ottenere per "intreccio con le dita", nel secondo niente da fare; fortunatamente, all'inizio di questo millennio ***Probert*** ha trovato un interessante metodo; come al solito, partiamo da alcune definizioni, che sono sempre la parte più interessante.

Per prima cosa, i punti A...H che abbiamo visto poco sopra sono noti come ***motivi***; nonostante le enormi possibilità di figure diverse, i motivi, come potete facilmente verificare, sono abbastanza pochi; quindi, data una figura, se l'antropologo riesce a evitare di confondersi con l'antropofago per un tempo ragionevole, è possibile analizzare la figura e capire quali sono i motivi.

Torniamo un attimo indietro, e cerchiamo di definire cosa sia una figura; la miglior definizione che abbiamo trovato è quella data da Probert (bella forza: ha fatto tutto lui, in questo campo!), che la definisce come un ***non-nodo sotto tensione***; nella sua ingannevole semplicità, questa definizione ci dice alcune cose: tanto per cominciare, che l'aggeggio è topologicamente equivalente ad un anello senza nodi; indi, che la struttura è visibile solo sotto tensione e quindi che, in definitiva, il tutto è una struttura sorretta (solitamente) dalle dita; se la rilasciate, la girate e la ritendete ottenete un'altra cosa che, nella maggior parte dei casi, richiede un metodo di costruzione completamente diverso[23].

[22] Ci pare di ricordare che all'epoca le Isole Caroline fossero popolate da cannibali; riteniamo che Jayne in realtà non abbia afferrato completamente il concetto, in quanto quello che gli indigeni gli stavano mostrando era la "legatura della rolata di antropologo"

[23] Esempio facile: l'Apertura "A" si può fare in quattro modi, e due portano a universi (sinora) inesplorati.

Andiamo avanti con le definizioni, che adesso tocca ad un paio balorde: supponiamo che la nostra corda sia strettamente unidimensionale; se i *punti di supporto* possono essere tutti quanti sullo stesso piano, allora definiamo la figura come ***bidimensionale***; in caso contrario, la figura risulta "tridimensionale".

Se quello prima era difficile da digerire, aspettate il prossimo; si definisce infatti ***cluster di contatto*** un insieme di segmenti di corda tali che:

1. Ogni segmento, per tutta la sua lunghezza, è in contatto con uno o più segmenti appartenenti allo stesso cluster.
2. Ogni segmento del cluster è in contatto direttamente o attraverso uno o più altri segmenti del cluster con ogni altro segmento del cluster
3. Ogni segmento che può essere raggiunto attraverso una sequenza di contatti fa parte del cluster.

Se ora decidete di tradurre "cluster" con "garbuglio", siamo d'accordo. Andiamo avanti.

Una sottostruttura è detta ***riflettibile*** se esiste il suo riflesso; per capirci, la sottostruttura `efgh` in *Figura 4* è la riflessione della struttura `EFGH` di *Figura 3*; se la guardate allo specchio, capite cosa vogliamo dire; in questo caso si parla anche di ***sottostrutture ad opposta parità***. Comunque, se vi piacciono le definizioni formali, si definisce ***sottostruttura riflettibile***:

1. Un insieme di ***cluster di contatto*** e di ***segmenti liberi*** che connettono i cluster uno all'altro e al resto della figura.
2. L'insieme è ***bidimensionale***, ossia esiste un insieme di punti, uno per ogni ***segmento libero*** che supporta l'intera sottostruttura, giacente su un unico piano (*NotaBene*: l'intera figura può essere tridimensionale, ma la sottostruttura no).
3. La ***silhouette*** della sottostruttura su un piano parallelo all'intera figura non è alterata dalla sostituzione della sottostruttura con quella di opposta parità.

Se l'ultima vi risulta poco chiara, andate a rivedervi il punto "D" di una delle due figure, tenendo solo due segmenti qualsiasi: se provate a riflettere questa (parte della) struttura, il tutto "collassa" ossia, in parole meno catastrofiche, cambia la sua *silhouette*; per quanto riguarda il secondo punto, basta notare che una sottostruttura tridimensionale non è riflettibile in quanto i segmenti liberi che connettono la sottostruttura al resto della figura non la connetterebbero più dopo la riflessione[24].

Questo ci permette di ridefinire i motivi: `A`, `B`, `C`, `D`, `E`, `F` e `G` sono tutte strutture riflettibili e *non esistono strutture riflettibili più piccole*; possiamo quindi definire i motivi come le ***sottostrutture riflettibili minimali***. Quindi, per definizione, bidimensionali. A questo punto, possiamo dire che i ***look-alike*** sono strutture che differiscono tra di loro solo per la parità di uno o più motivi; la cosa sembra banale, ma siamo riusciti a toglierci di torno alcuni imbarazzanti concetti come i punti di supporto (che restano identici), e quindi possiamo andare avanti. Il bello è che a questo punto possiamo cominciare a definire dei teoremi che aiutano a capire come funzionano i look-alike.

Ad esempio, il *Teorema Decostruzionista* sostiene che se un sottoinsieme bidimensionale di motivi S_1 di una figura F può essere svolto lasciando un sottoinsieme S_2 inalterato, allora l'insieme S_1 può essere sostituito costruendo la sua riflessione; ad esempio, l'***Orso Bruno*** (secondo Jenness lo hanno inventato gli Esquimesi, ma Rudy lo attribuisce agli

[24] Giusto per dare un punto di "riflessione" (nell'altro senso della parola): due qualsiasi dei tre segmenti formano una struttura (che abbiamo definito come) tridimensionale, ma tutti e tre assieme formano una struttura (che abbiamo definito come) bidimensionale...

Irochesi) può essere "svolto" e "ricostruito" in modi diversi; ne trovate qualcuno in *Figura 5*.

Un altro esempio più complicato (nel senso che, essendo l'unica che Rudy sa fare, ha la complicazione della prova pratica) è dato dalla ***Scala di Giacobbe***: trovate la versione "pulita" in *Figura 6*, e non ci sogniamo neanche di darvi i disegni dei risultati; vi basti sapere che `ABCDEFG` si snoda completamente lasciando `HIJKLM` e che quindi potete ritrovarvi un oggetto descritto da `abcdefgHIJKL`; quindi, potete svolgere `gHIJKLM` per ritrovarvi dopo averlo rimontato al contrario `abcdefGhijklm` che a sua volta può diventare (per lo smontaggio di `abcdefGhij`) `ABCDEFgHIJklm`; non solo, ma potete ritrovarvi in guai grossi del tipo del cercare di svolgere i sette motivi sulla sinistra: la cosa è possibile da `ABCDEFGHIJKLM`, ma non ce la farete mai da `abcdefGhijklm`!

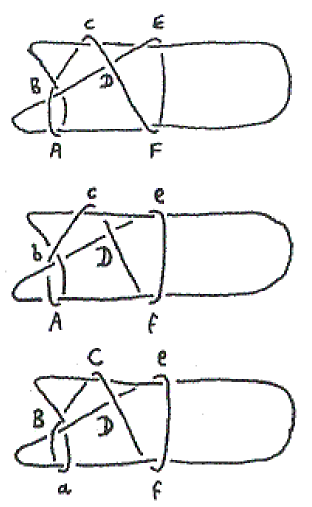


Figura 5 – Orsi Bruni: `ABCDEF, AbcDef, aBCDef`

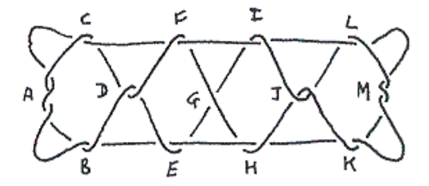


Figura 6 – La Scala di Giacobbe

Anche se il tutto sin qui sembra piuttosto elementare, è sorprendente come con così poco possa svilupparsi il *Teorema dei look-alike scopribili*; infatti, se una figura può essere completamente svolta svolgendo U sottoinsiemi di motivi bidimensionali, allora:

1. Gli U sottoinsiemi bidimensionali possono essere riformati in ordine inverso, ciascuno in uno dei due stati di opposta parità.
2. Attraverso questo processo, si può scoprire un sottoinsieme di 2^U look-alike.

Si noti che, se vi ritrovate tra i piedi un sottoinsieme bidimensionale, dovete ricostruirlo nel punto corretto della sequenza e, soprattutto, nello stato originale.

Si impone l'invenzione di una notazione. Cerchiamo di farla semplice.

Supponiamo di voler indicare che BC possono essere svolti (congiuntamente), e quindi è possibile svolgere il resto della figura; la notazione più semplice è quella di indicare il nostro processo con la formula: $((A)BC)$, in cui è chiaro che gli ultimi due termini vanno svolti per primi e in contemporanea lasciandoci solo A, che può quindi essere svolto (lasciandoci presumibilmente una apertura ad anello, visto che le altre sono svolgibili). Non solo, ma potremmo anche indicare con $\{((A)BC)\}$ l'insieme dei motivi $\{ABC, Abc, aBC, abc\}$; qui non abbiamo intenzione di parlarne, ma se trovate una coppia di parentesi quadre è un motivo tridimensionale.

Facciamo un esempio con qualcosa di noto.

L'***Orso Bruno*** (quello degli Irochesi) può essere completamente svolto partendo da EF poi D, poi BC e infine A; quindi, il sottoinsieme scopribile dei suoi look-alike è $\{((((A)BC)D)EF)\}$, che contiene 16 look-alike (potreste calcolarveli da soli, ma se proprio insistete... $ABCDEF$, $ABCDef$, $ABCdEF$, $ABCdef$, $AbcDEF$, $AbcDef$, $AbcdEF$, $Abcdef$, $aBCDEF$, $aBCDef$, $aBCdEF$, $aBCdef$, $abcDef$, $abcdEF$ e $abcdef$. Siccome a scrivere sequenze del genere è sicuro che un errore lo faccio, ve lo trovate voi); in alternativa, è possibile srotolare secondo lo schema $\{(((AB(C))D)EF)\}$, del quale i 16 look-alike ve li calcolate da soli; una volta calcolati, confrontateli con quelli qui sopra, e vi accorgerete che un sottoinsieme di 8 (più specificatamente, indicabile come $\{(((ABC)D)EF)\}$: adesso ricavatevi la regola) è in comune tra i due; questo significa che il nostro orsetto ha $16+16-8=24$ look-alike.

"E le altre?" Vero, visto che ci sono 6 motivi, ci si aspetterebbero $2^6=64$ look-alike. Semplice, gli altri (ad esempio $ABCDeF$) sono impossibili: non potete arrivarci, invertendo motivi.

Per portarsi dietro l'intero catalogo degli insiemi scopribili di look-alike, purtroppo, è stata inventata una notazione estremamente insoddisfacente: l'insieme dell'Orso Bruno, infatti, si indica con $\{((((A)BC)D)EF)\}\cup\{(((AB(C))D)EF)\}$; estremamente insoddisfacente, ma è quello che passa il convento...

Beh, andiamo avanti.

Gli *stati validi* di un sottoinsieme S dei motivi sono, come dovremmo aspettarci, i diversi aspetti che S può assumere al variare dei look-alike; ora, si definisce ***frammento***[25] il sottoinsieme S nella figura per cui:

1. Per ogni stato valido assunto dalla parte restante della figura, S può assumere uno qualsiasi dei suoi stati validi
2. Nessun sottoinsieme proprio di S ha la proprietà sopra indicata.

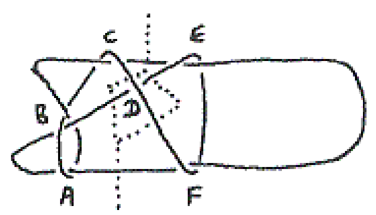


Figura 7 – Un Orso con le elitre?

Ad esempio, l'Orso Bruno (che riportiamo in *Figura 7*) ha tre frammenti ABC, D e EF, i cui cataloghi sono evidentemente $\{ABC, ABc, Abc, aBC, abC, abc\}$, $\{D,d\}$ e $\{EF, ef\}$, e ogni Orso Bruno, e ogni look-alike dell'Orso Bruno è composto scegliendo uno stato valido da ognuno dei tre cataloghi generati dai frammenti.

Bene, ora dovremmo avere abbastanza materiale per iniziare un'analisi, almeno degli oggetti più semplici. Proviamo, ad esempio, con l'***Apertura A***, che abbiamo visto in *Figura 2*.

- Il suo insieme dei look-alike è $\{((A)B)\}=\{AB, Ab, aB, ab\}$.
- Ci sono due frammenti, A e B con cataloghi $\{A,a\}$ e $\{B,b\}$.

La sequenza dello svolgimento per motivi, possiamo darla in un grafico: lo trovate in *Figura 8*.

```
AB ------ A ------ Ab
|         |         |
|         |         |
B ------ [] ------ b
|         |         |
|         |         |
aB ------ a ------ ab
```

Figura 8 – Come snodare una "A"

Non potremmo lasciare questo pezzo, però, senza fornirvi il disegno più romantico che abbiamo trovato: in *Figura 9*, infatti, trovate la ***Luna Piena che sorge dalla Carcassa della Balena***; non è facile trovare la balena, ma la luna dovrebbe essere piuttosto evidente. Per gli antropologi, è stata raccolta da Jenness nel 1914 e pubblicata (sbagliata, a quanto pare... sempre più antipatico, 'sto tizio) nel 1924.

[25] Solo l'intercessione di Doc e Alice ha fatto scegliere questa traduzione per il termine *shard*. Rudy, perfido come sempre (e supportato dall'Hazon –Triestino, quindi mettete l'accento giusto e aspirate l'"h") proponeva "elitra". Molto poetico, ma purtroppo assolutamente non significativo.

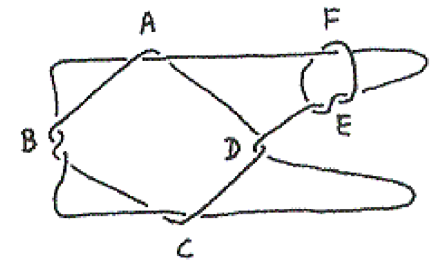


Figura 9 – Luna piena che sorge dietro la carcassa di balena

L'insieme dei look-alike è $\{(((AB)CD)EF)\} \cup \{((A(BC)D)EF)\}$, mentre ci sono due frammenti che hanno cataloghi $\{ABCD, ABcd, AbcD, aBCd, abCD, abcd\}$ e $\{EF, ef\}$.

Le figure impossibili sono $2^6 - 12 = 52$.

E, sempre per gli antropologi, Jenness aveva tracciato la $ABCdEF$ (che non è raggiungibile).

"...e quella della *Scala di Giacobbe*, non ce la dai?"

Ci ho provato... secondo voi, perché prima chiedevo le forbici?

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms