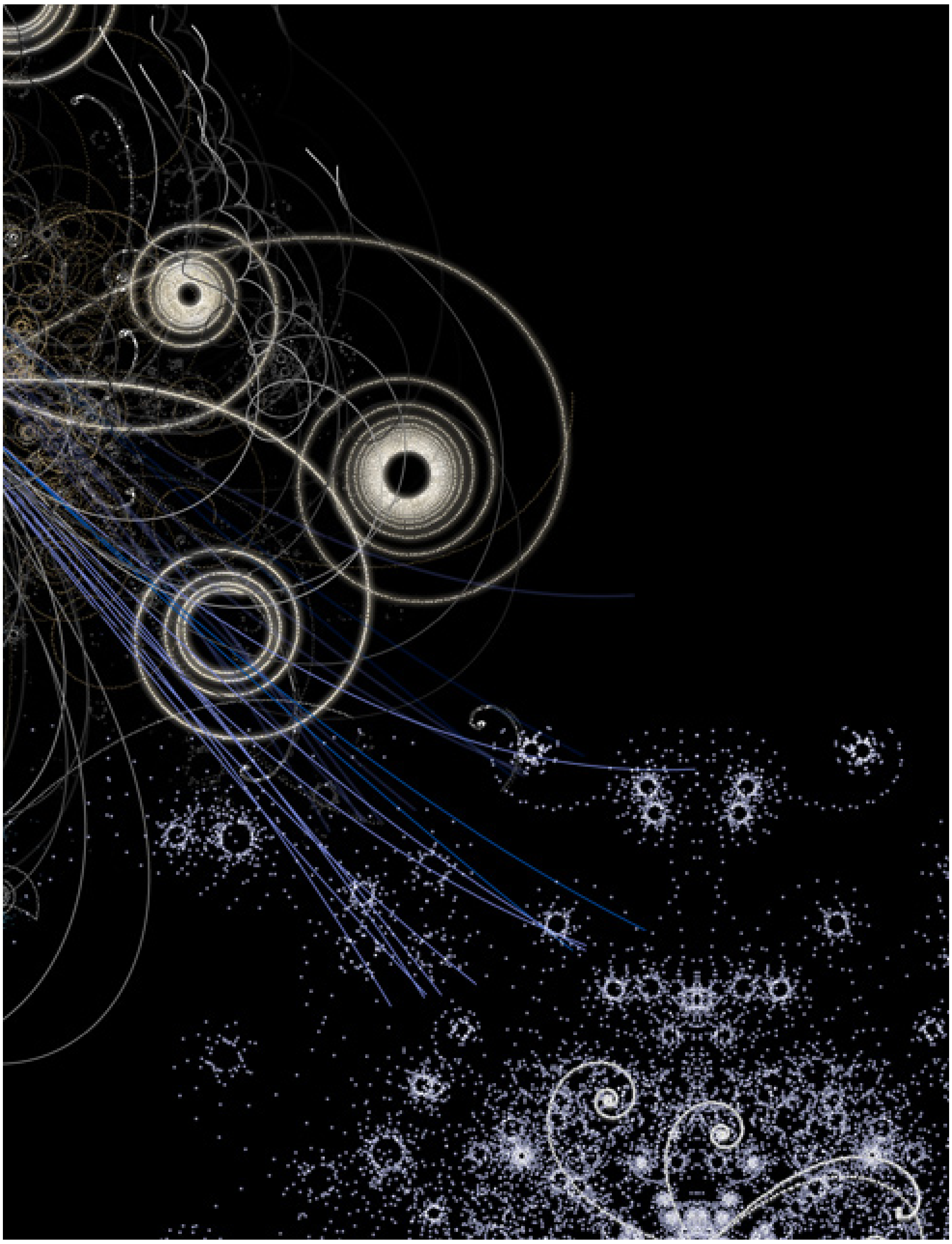
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 106 – Novembre 2007 - Anno Nono



1. Topoi **3**

2. Problemi **14**

2.1 Non dovrebbe stare qui 14
2.2 In che senso? 14

3. Bungee Jumpers **15**

4. Soluzioni e Note **15**

4.1 [104] 16
4.1.1 Deserto Simmetrico Monodimensionale 17
4.1.2 (Iper-)Evidenti Ragioni di Simmetria 18
4.2 [105] 35
4.2.1 Tempo d'esami 35
4.2.2 Senza attaccarci niente in testa 40
4.2.3 Quick and Dirty 43

5. Quick & Dirty **44**

6. Pagina 46 ..... **44**

7. Paraphernalia Mathematica **46**

7.1 Il romanzo della Partita Doppia 46

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 105 ha diffuso 1467 copie e il 31/10/2007 per Google eravamo in 32'200 pagine.

Tutto quanto pubblicato dalla rivista è soggetto al diritto d'autore e in base a tale diritto *concediamo il permesso di libera pubblicazione e ridistribuzione* alle condizioni indicate alla pagina `diraut.html` del sito. In particolare, tutto quanto pubblicato sulla rivista è scritto compiendo ogni ragionevole sforzo per dare le informazioni corrette; tuttavia queste informazioni non vengono fornite con alcuna garanzia legale e quindi la loro ripubblicazione da parte vostra è sotto la vostra responsabilità. La pubblicazione delle informazioni da parte vostra costituisce accettazione di questa condizione.

Ogni artista conosce la "sindrome da pagina bianca", quando cerchi l'ispirazione e non arriva; ***Carter Odgkin*** simula al computer alcune reazioni tra particelle subatomiche e si lascia ispirare da quelle. Se ci passate il pessimo gioco di parole, le coppie elettrone-positrone sono piuttosto "inflazionate", ma in molti casi il risultato finale è meritevole.

1. Topoi[1]

Nessuna opinione, vera o falsa, ma contraria all'opinione dominante e generale, si è mai stabilita nel mondo istantaneamente e in forza d'una dimostrazione lucida e palpabile, ma a forza di ripetizioni e quindi di assuefazione.
(Giacomo Leopardi)

Seriamente, il fatto che un'opinione sia largamente accettata, non è prova, peggio, non costituisce nemmeno una maggiore probabilità, che l'opinione sia corretta.
(Arthur Schopenhauer)

Il luogo comune è un mezzo potente per attirare la simpatia dell'interlocutore, e non a caso è uno dei sistemi più utilizzati dai politici; si basa su affermazioni che sono ritenute vere perché sono comunemente accettate, e non disturbano il quieto vivere. Sono una sicurezza, dal punto di vista del consenso: nell'affermare qualcosa che universalmente viene accettato come vero non si può sbagliare, e si acquista fiducia e ascendente presso chi ascolta. Sono anche una difesa: trovarsi allo stadio il giorno del derby nel mezzo di un gruppo di sfegatati tifosi di una delle squadre in campo è poco raccomandabile, se per disgrazia ci si è presentati con la sciarpa di un colore tragicamente vicino a quello sociale della squadra avversa: un ben mirato insulto nei confronti della compagine meno popolare in quella zona delle gradinate, detto con la dovuta cattiveria e convinzione, può tornare assai utile. E se vi trovate d'accordo con tutto quanto appena detto, siete probabilmente caduti vittima di un altro luogo comune, quello che dipinge tutti i tifosi di calcio come violenti e intolleranti.

Il bello dello stereotipo è che non ha affatto bisogno di una dimostrazione di verità: in genere si limita ad associare ad una caratteristica umana (sesso, religione, altezza, interessi, etnia) un giudizio sommario di qualità (positivo o negativo). Ogni prova contraria, per quanto smaccata ed evidente possa essere, può sempre essere interpretata come "eccezione che conferma la regola"[2], senza minimamente inficiare la supposta validità generale dell'asserto. Del resto, come si può seriamente pensare che i neri non abbiano la musica nel sangue?

Alcune campagne elettorali svizzere.

Per mantenere questo articolo nei sacri binari del politically correct (che rischia di continuo, a sua volta, di cadere nel meno nobile luogo comune), prenderemo in prestito alcuni esempi dai vicini elvetici. Nell'esempio della campagna elettorale sulla destra si ritrovano due luoghi comuni tra i più sfruttati nella politica Svizzera: il *fatto* che appartenere all'area Schengen voglia dire trovarsi invasi da lavoratori stranieri, pronti ad accettare paghe più basse (l'uomo sulla destra ha le mani tra i capelli per la perdita della sua sicurezza e del suo lavoro) e il *fatto* che la maggior parte dei criminali sono stranieri (le pecorelle bianche cacciano quella nera perché – è palese, basta guardare il colore della lana – ha certo compiuto qualche crimine).

[1] Che poi sarebbero, a sentire gli antichi greci, i luoghi. Che poi sarebbero, a sentire i moderni, quei "luoghi comuni" nel senso storico, letterario e positivo del termine, come l'idillio, la ricerca, l'amor cortese, Eros e Tanatos, il viaggio. Che poi, naturalmente, noi invece usiamo nel senso piccino e negativo, quello del luogo comune *comunemente* detto.

[2] È consolante notare come questa giustificazione sia essa stessa un luogo comune. Per quali ragioni una regola dovrebbe essere confermata dalle sue eccezioni? La logica elementare tenderebbe a sostenere – ingenua! – il contrario.

Per entrambi i casi abbiamo parlato di *fatto*, seppur con l'attenuante del corsivo, perché è come tale che queste cose vengono percepite. Sono cose che "si sanno", e si sanno perché sono banalmente vere, la cui dimostrazione non è necessaria solo perché basta e avanza l'evidenza[3]. Dovrebbe bastare la verifica dei dati, in casi come questi. Dovrebbe essere sufficiente andare a leggere le statistiche, e vedere come il mercato del lavoro in Svizzera sia cresciuto con il boom del dopoguerra sostanzialmente solo grazie all'apporto dei lavoratori stranieri; che il tasso di disoccupazione in Svizzera sia al 3,1% (ed è davvero difficile immaginare che un valore del genere non sia fisiologico); che il tasso di stranieri nella popolazione globale è pari al 20%, mentre il tasso di stranieri tra gli occupati arriva al 25,6%, il che non fa pensare a che gli stranieri in terra d'Elvezia mirino a fare gli scansafatiche[4].

In realtà, la lettura dei dati non basta mai. Il luogo comune parla direttamente alla pancia dei destinatari, non al loro cervello; e la pancia è assai più libera, perché non deve rispettare il vincolo della coerenza: anzi, è assai brava nel raccogliere solo il dettaglio significativo, importante, quello a favore della sua propria tesi, e a buttare a mare tutto il resto. Perché il luogo comune e l'intolleranza riescono spesso ad agire di concerto, senza neanche darlo a vedere: non esiste telegiornale che non riporti diligentemente le nazionalità dei protagonisti dei fattacci di cronaca, qualora questi siano stranieri, mentre non sono mai riportati nel caso di malviventi italiani. Sia ben chiaro, esiste un ben chiaro principio di economia dell'informazione che richiede che non vengano riportati dettagli non significativi: quindi non sarebbe buon giornalismo introdurre la notizia di una rapina in banca con la frase "Stamattina, due rapinatori italiani sono entrati armi in pugno nell'agenzia della banca centrale di Firenze…". Il termine "italiano" è certo ridondante, presupposto, inutile in quanto scontato[5]. Sarebbe un po' come dire "Stamattina, sono entrati armi in pugno in banca due uomini, del genere homo sapiens-sapiens, erano vestiti e sembravano in grado di parlare…"; e certo non è questo che ci si attende da un pezzo di cronaca: ci bastano le cose significative. Ed è a questo livello che agisce il luogo comune, quando agisce di soppiatto: se i rapinatori sono stranieri, la loro nazionalità è un fatto significativo. Per i cantanti e gli attori, invece, no. Il risultato finale che presumibilmente permane nella memoria dell'ascoltatore distratto è che la quasi totalità dei criminali sia straniera, e questo a prescindere dalla verità o falsità della cosa.

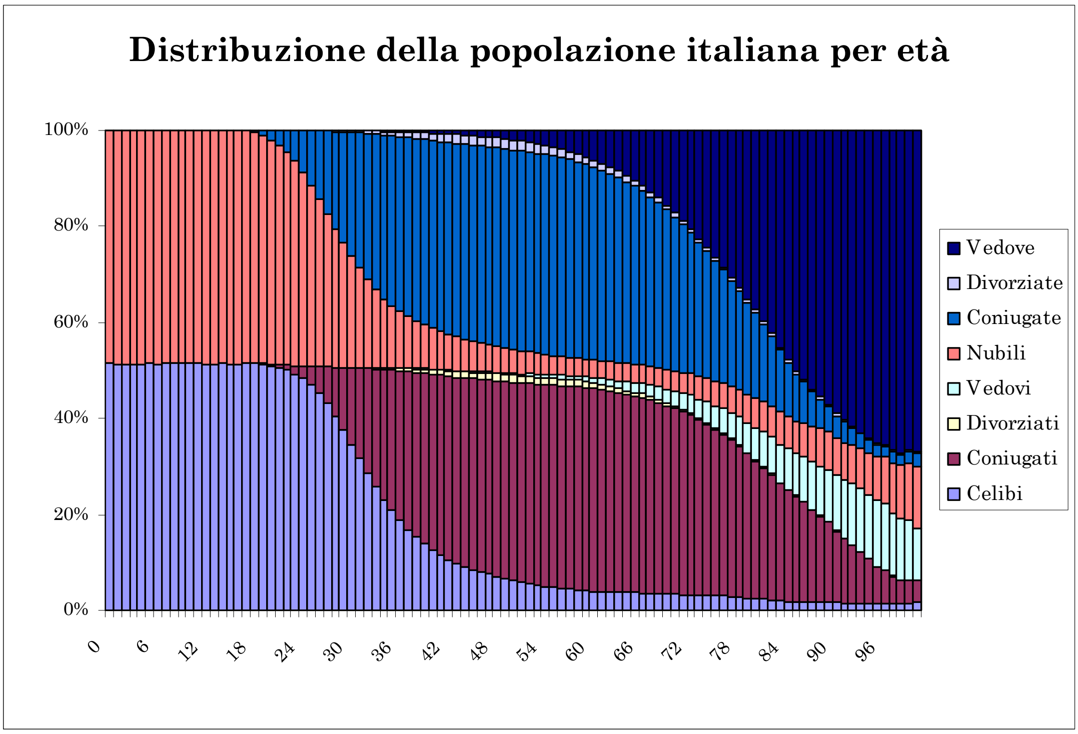
Non necessariamente il luogo comune ha un secondo fine politico o sociale. Talvolta è semplicemente innocente, per quanto sbagliato. Una vecchia barzelletta recita che per ogni uomo ci sono sette donne, per dare la possibilità al protagonista di urlare "Se becco quello che ne ha quattordici…", e non crediamo che qualcuno pensi davvero che esista una tale disparità tra sessi. Però in Italia le donne sono davvero di più, e non è affatto insolito scoprire che l'idea di un forte squilibrio tra sessi sia realtà. Mentre vi guardate intorno per fare un rapido conteggio del tasso locale, vi facciamo vedere un grafico sulla situazione italiana (dati ISTAT): ci auguriamo che non sia troppo sorprendente notare come, alla nascita, la distribuzione maschietti/femminucce si attesti ad un quasi perfetto

[3] È possibile – anzi speriamo che sia piuttosto probabile – che nel caso dei lettori di questa rivista *l'evidenza* non sia poi così tanto evidente. Questo perché di solito i lettori di matematica sono un po' più difficilmente prede dei luoghi comuni (la matematica è piena di imprevisti contro-evidenti, e costituisce un buon allenamento), un po' perché prevalentemente italiani, e quindi non pienamente vittime delle paure standard degli svizzeri. Ma un esempio è solo un esempio, e non dubitiamo affatto che, senza troppa fatica, i lettori siano in grado di trovare gli italici equivalenti alle idiosincrasie svizzere.

[4] I dati provengono dallo stesso Istituto Nazionale di Statistica svizzero, come a dire l'ISTAT elvetica. Perché la Svizzera è nazione avanzatissima e perfettamente informata di sé stessa, naturalmente. Questo non basta a proteggerla dalla banalità aggressiva dei luoghi comuni, ma in questo campo non c'è davvero nessuna nazione immunizzata.

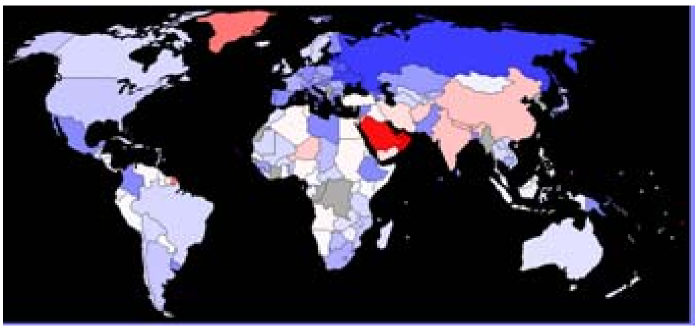
[5] Per dirla come la direbbero i cultori dell'informatica, "è un default". Termine che, anche nel senso indicato, si può tradurre correttamente nell'italiano "per difetto" (proprio nel senso "nel caso difettino ulteriori informazioni, allora il tale valore è quello corretto"), ma si corre il rischio di non essere compresi.

50/50. Lo squilibrio si sente solo tra le fasce alte del grafico, quando la maggiore longevità delle donne comincia ad avere effetto.



Distribuzione uomini/donne per età e stato civile al 01/01/2006

In conclusione, in Italia nascono più o meno tanti uomini quante donne, e il rapporto totale è vicinissimo a uno. Ma magari l'Italia è un caso particolare, e se si considera il mondo intero la faccenda forse cambia; del resto, è notorio che esistono delle regioni in cui è diffusa la poligamia[6], e questa ha senso solo laddove il numero delle donne supera quello degli uomini, con conseguente invenzione degli harem. Non sarà una grande sorpresa, soprattutto considerando il tema di cui stiamo discettando fin dall'inizio, scoprire che il rapporto maschi/femmine, su scala mondiale, sembra assestarsi sul valore 1,01. Come dire cento donne per centouno uomini, con buona pace dei maschietti che si attendevano le famose sette femminucce. E, a guardare la distribuzione dei sessi riportata su planisfero, c'è di che continuare a stupirsi, visto che parlavamo di harem.



*In **blu** dove ci sono più donne e in **rosso** più uomini rispetto alla media mondiale di 1.01. In bianco la media.*

In realtà, i dati che sono in ballo sono attendibili fino ad un certo punto, perché in molte parti del nostro bel pianeta continuano ad essere praticate attività che inficiano i dati, per quanto la corruzione del campione sia davvero il minore degli effetti negativi. Stiamo parlando di cose come la banale mancata registrazione delle nascite, ma anche dell'ancora diffuso

[6] Che, a voler tentare l'etimologia dal greco, dovrebbe significare solo "molte nozze", senza ulteriori indicazioni sessiste. Però il termine è monopolizzato, nel significato, dalla versione "un maschio con molte femmine" (poliginia), e quasi mai nel complementare significato "una femmina con molti maschi" (poliandria). A meno che non vengano considerate poligame le api e le formiche regine…

infanticidio. Inoltre, il valore sopra riportato pari a 1,01 è di per sé una media generale, visto che la diversa longevità dei sessi rende il dato tutt'altro che omogeneo con il passare dell'età, tanto che il rapporto maschi/femmine scende brutalmente a 0,70 se si considera solo la popolazione sopra i 65 anni di età. Tenendo conto di ogni elemento, la miglior stima è che nelle culle arrivino ben 105-107 maschietti per ogni 100 femminucce[7].

È opinione degli esperti che in natura i due sessi siano sempre in una proporzione vicina a uno nella maggior parte delle specie[8]. Questo fatto aveva disturbato parecchio Darwin, che considerando le popolazioni tipo harem, con un capobranco maschio e diverse compagne femmine (per esempio gli elefanti marini, in cui il quattro per cento della popolazione maschile è responsabile per l'ottantotto per cento degli eventi riproduttivi), si chiedeva come fosse possibile che la natura consentisse un tale spreco: ovvero che così tanti individui (i maschi non capobranco) consumassero risorse senza però contribuire a nuove generazioni. Il fondatore delle teorie evolutive lasciò il problema ai posteri, e in particolare a Fisher e Dawkins[9], che hanno in proposito avanzato un'ipotesi piuttosto ragionevole. La prima osservazione, per quanto banale possa sembrare, stabilisce comunque un parametro essenziale: ogni neonato ha una madre ed un padre, quindi se il "successo riproduttivo" di un sesso rispetto all'altro dovesse misurarsi dal numero dei piccoli generati, allora non può che essere identico per i due sessi. Per quanto possa sembrare sentenza degna di Jacques II de Chabannes de La Palice, è in realtà densa di significato: stabilisce che – appunto – è verosimile che la proporzione tra i due sessi debba sempre essere prossima ad uno, a meno che non si rinunci al criterio del successo riproduttivo come guida per stabilire il fluire evolutivo. Per controprova, basta considerare che se in una popolazione la proporzione tra maschi e femmine fosse, tanto per dire, 1:2, questo renderebbe in media il "successo riproduttivo" dei maschi doppio rispetto a quello delle femmine. In termini evolutivi questo li rende dei privilegiati – perché se hanno un maggiore successo riproduttivo significa che devono in qualche modo essere meglio protetti rispetto ai propri simili, se non addirittura favoriti dal resto della popolazione. Questo però implica necessariamente che, a lungo termine, dovrebbero aumentare di numero, e in conclusione a ristabilire una proporzione 1:1. dei due sessi. Questo lascia aperta la questione delle popolazioni organizzate come quelle dei leoni marini? Non esattamente: il punto è che, secondo Dawkins, la natura non tende per suo conto all'ottimizzazione delle risorse, e perde di senso il concetto di "spreco" ipotizzato da Darwin. Sono piuttosto i singoli geni che invece tendono a massimizzare la propria sopravvivenza, generando animali e modificando il loro comportamento senza alcun interesse per il bene generale della Natura in quanto tale[10].

Ciò che maggiormente caratterizza la spiegazione di Dawkins-Fisher sulla tendenza ad 1 del rapporto maschi/femmine di un popolazione fa uso di un principio di feedback che torna spesso nella spiegazione dei meccanismi evolutivi. Per ben comprenderlo, bisogna innanzitutto avere ben chiaro il principio di base dell'evoluzione darwiniana, che è invece spesso male interpretato. Tanto per utilizzare un esempio classico e forse noioso, la giustificazione della lunghezza del collo delle giraffe non è del tipo "le foglie degli alberi sono in alto, e allora le giraffe si adattano all'ambiente facendosi crescere il collo". Una spiegazione del genere è sbagliata perché applica in maniera ingenua – ed erronea – un ipotetico principio di causa-effetto, se non addirittura una temeraria idea di azione-reazione. L'idea in proposito dell'evoluzionismo darwiniano è diversa, e più o meno

[7] A buon intenditor, poche parole. Adesso sapete su cosa puntare, quando la raggiante coppia di amici apre le scommesse sul sesso del nascituro.

[8] Contando solo le specie a riproduzione sessuata, beninteso. Della partenogenesi e di quel che combinano le amebe non ci interessiamo, per il momento.

[9] Richard Dawkins, autore de "*Il gene egoista*", che è ormai più di un libro, una vera e propria teoria scientifica.

[10] Se nell'esposizione dell'ipotesi di Fisher e Dawkins sulla tendenza al rapporto 1:1 dei sessi avete avuto un lontano sentore matematico, non siete lontani dalla realtà. John Maynard Smith si occupò seriamente dei meccanismi evolutivi, applicandovi la *Teoria dei Giochi* e ottenendo risultati notevoli.

riassumibile come "in un ambiente con foglie alte degli alberi, quelle giraffe che, per mutazione casuale, sono più altre delle consorelle hanno qualche chance in più di sopravvivere e, soprattutto, di riprodursi, trasmettendo così alle generazioni future la loro caratteristica". Questo, a lungo termine, porta a giraffe dal collo lungo invece che giraffe dal collo corto, ma senza che ci sia una sorta di scelta condizionata o volontaria[11]. Una volta appurata la natura del meccanismo, si produce una sorta di circolo – virtuoso o vizioso è difficile dire – dato dal fatto che una mutazione che inizialmente è solo "casualmente" vantaggiosa col progredire delle generazioni riafferma il suo ruolo per il semplice fatto che il successo riproduttivo è esso stesso un elemento importante nella scelta del partner. Come dire che, a prescindere dal fatto che il collo lungo si sia dimostrato utile per sopravvivere consentendo di raggiungere le foglie alte degli alberi, alla fine le giraffe tendono a scegliere partner dal collo lungo proprio perché questo è ormai riconosciuto come elemento di successo riproduttivo, e ogni individuo tende ad accoppiarsi con partner in grado di garantire le migliori possibilità di successo alla prole[12]. In quest'ottica, può perfino diventare superfluo – o più semplicemente obsoleto – il connotato di "utilità" della mutazione, a patto che sia ormai stabilizzata come caratteristica vincente.

A partire da queste premesse, si riesce a giustificare tutta una serie di interrogativi biologici, dalla organizzazione degli insetti sociali (che, dal punti di vista dell'economia del successo riproduttivo degli individui, potrebbero a prima vista sembrare un pessimo affare), fino alla spiegazione delle incredibili livree di corteggiamento, apparentemente pochissimo adatte alla sopravvivenza[13]. Ma non c'è scelta, per i maschietti: in generale, le differenze morfologiche tra sessi sono dovute al fatto che quando la femmina della specie sostiene la maggior parte del lavoro per l'allevamento dei piccoli (soprattutto per i mammiferi ed in molte specie di uccelli), si riserva quantomeno il consolatorio diritto della scelta del partner.


Il pavone

E allora gli uccelli maschi sviluppano piumaggi coloratissimi per attirare l'attenzione della femmina; in altri casi la femmina, più che scegliere, si lascia serenamente scegliere dal maschio che si dimostra più forte, e da qui traggono origine tutti tratti fisici che possono essere messi in relazione con la lotta e la competizione, come le corna per gli scontri rituali. Il processo di evoluzione ha comunque riscontri, seppur meno evidenti, anche nell'altro sesso, che tende a sviluppare il gusto per il tratto maschile che deve provocare l'attrazione: è il feedback cui accennavamo poco sopra: non solo il pavone avrà un piumaggio più bello e più sviluppato rispetto al suo antenato, ma anche la pavonessa prova un'attrazione rispetto a quel piumaggio superiore rispetto alla sua antenata.

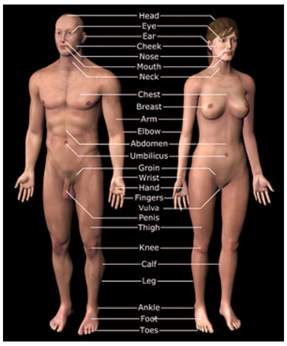
Da qui avrebbe origine il fenomeno detto dimorfismo sessuale, cioè quello per cui i due sessi della stessa specie sviluppano differenze morfologiche oltre a quelle ovvie degli organi genitali. Un maggiore dimorfismo è stato notato in specie ad alta poligamia, in cui diventa essenziale ottenere il favore del partner per quel breve momento che è

[11] Un audace parallelismo con la fisica può forte aiutare a mettere a fuoco il principio essenziale. La critica più forte alla teoria della Gravitazione Universale di Newton è sempre stata quella basata sul fatto che è difficile accettare l'idea dell'azione a distanza, perché obiettivamente non si capisce come possa il Sole essere informato sulla posizione della Terra, e mettere in atto una forza attrattiva perfettamente commisurata a questa distanza. La Relatività Generale di Einstein risolve concettualmente l'obiezione, assimilando la forza di gravità di un corpo alla "deformazione" del tessuto spazio-temporale nelle sue vicinanze. La Terra quindi si muove in base a principi in ogni caso "locali" e non remoti. In maniera analoga, alcune mutazioni casuali di una popolazione sopravvivono meglio e pertanto si perpetuano, in una sorta di economia puramente "locale" e non teleologica, e non certo in base ad un principio volontario di causa-effetto.

[12] Che poi, sempre secondo Dawkins, non è tanto per amor parentale, quanto per il solito motivo che sono i geni a voler preservare sé stessi, prima di ogni altra cosa.

[13] Provate a scappare velocemente da un predatore portandovi addosso una coda di pavone, o a galoppare veloci nel sottobosco con degli ingombrantissimi palchi di corna.

l'accoppiamento in sé. Per specie principalmente monogame, altre caratteristiche diventano importanti, come la capacità di costruire un nido o proteggere i piccoli, come nel caso dei pinguini, che passano mesi senza mangiare alternandosi alla cura della prole[14].



Dimorfismo umano

Nel caso degli esseri umani, in generale gli uomini presentano fattezze più massicce, una maggiore quantità di peli sul corpo, una maggiore massa muscolare; ma il dimorfismo nella specie umana è relativamente poco sviluppato, per quanto molto celebrato dalle arti e dalle letterature. Alcune conclusioni delle ricerche in merito sono comunque intriganti: ad esempio, sembra che la diversa distribuzione del grasso corporeo tra uomini e donne dipenda dai diversi ruoli ricoperti dai due sessi nei vari stadi evolutivi. Come sanno molti maschietti di mezza età, negli uomini il grasso tende ad accumularsi sulla pancia, perché in questo modo l'uomo, che a suo tempo era – e per quel che riguarda Madre Natura forse dovrebbe essere ancora – principalmente un cacciatore e quindi abile corridore, riduce al minimo il fastidio e l'impedimento dei movimenti; in più, la pancetta può comunque garantire una protezione extra degli organi interni. Alle donne la corsa è meno richiesta, e quindi il grasso tende a distribuirsi piuttosto uniformemente; inoltre la donna è più brava nell'assimilazione delle sostanze perché deve poter fornire nutrimento anche alla prole, e se deve portare un peso tenderà a bilanciarlo sul bacino, mentre l'uomo tende a trasportare oggetti con le braccia lungo il corpo.

Anche se il dimorfismo è sostanzialmente solo fisico, c'è chi non ha perso tempo nell'analizzare le ipotetiche differenze nelle capacità intellettive: sono stati effettuati un'enorme quantità di studi sull'intelligenza degli uomini e delle donne, solo al fine di confrontarle. Evitando di entrare in diatribe vecchie come il mondo sul concetto di Quoziente d'Intelligenza[15], il massimo che si riesce ad ottenere dagli esperti sono affermazioni riguardo a una maggior attitudine degli uomini per le abilità spaziali, compensata sul fronte opposto da una migliore familiarità delle donne per quelle mnemoniche e sociali. Dallo studio squisitamente fisico del cervello umano, inoltre, si è scoperta una percentuale in media più alta di materia grigia nei cervelli maschili e di materia bianca in quelli femminili, e dato che la seconda sembra essere associata alle connessioni neurali, questo spiegherebbe perché nelle donne si riscontra in media una maggiore attitudine alle capacità verbali e sociali. Per quanto riguarda le dimensioni, non è stata trovata alcuna connessione diretta tra il volume e la massa del cervello umano e le abilità intellettive dell'essere che quel cervello porta in giro; in compenso, esistono diversi studi che sembrano indicare che le capacità del cervello siano di molto superiori a quelle che in realtà vengono normalmente misurate[16].

In realtà, se non esiste alcuna evidenza che il dimorfismo sessuale umano abbia degli effetti distintivi nelle capacità intellettive dei sessi, esistono comunque delle peculiarità della specie Homo Sapiens che dovrebbero far riflettere, visto che rimangono un mistero dal punto di vista etologico e biologico. Soprattutto, la violazione della regola generale sopra esposta, che spiega proprio la genesi del dimorfismo sessuale. Nell'uomo è in genere

[14] È difficile non riconoscere, in questi distinti comportamenti, gli omologhi per la specie umana: per incontri poco impegnativi e niente affatto duraturi, l'elemento dominante della scelta è l'aspetto, che perde invece un po' d'importanza nel caso di scelte di partner "definitivo".

[15] Anche perché è territorio davvero minato. Proprio mentre scriviamo uno dei padri della scoperta del DNA, l'americano J.D. Watson, ha avuto un'infelice uscita in merito al QI di certe razze umane. Noi ne abbiamo già parlato diffusamente nel compleanno di Hamilton (RM079), e non torneremo sull'argomento. Men che mai per mettere a confronti ipotetici QI maschili contro i corrispondenti femminili.

[16] E questo, di per sé, è anche un celeberrimo luogo comune; ma è bene ricordare che un luogo comune è certo noioso, ma non necessariamente falso; e questo, forse, falso non è.

il sesso femminile che, pur accollandosi di fatto la quasi totalità del gravoso impegno della procreazione, tende a rendersi più attraente e deduttivo nei confronti del sesso maschile. Ovviamente un'analisi generale è resa difficile dalle grosse interferenze culturali che rendono le società umane assai più difficili da indagare dal punto di vista meramente biologico, ma la tendenza delle femmine umane a ricorrere ad artifici per rendersi desiderabile agli occhi del compagno sembra diffusa praticamente in ogni gruppo umano. È un atteggiamento che si sviluppa quasi nello stesso modo in tutte le società – dai piedi legati agli anelli che allungano il collo, a corsetti e reggiseno, fino alle moderne torture alimentari, e di conseguenza non è peregrino ipotizzare anche ragioni biologiche e non solo culturali.

Il vantaggio di "scelta del partner" sembra pertanto ridotto, nel caso della femmina umana, rispetto alle altre specie. E questo entra parzialmente in conflitto con un'altra curiosa caratteristica della nostra specie: sempre Dawkins, che sembra avere una teoria per spiegare quasi ogni dettaglio, ipotizza che l'evoluzione abbia imposto al maschio dell'Homo Sapiens una sfida ulteriore, eliminando l'ossatura interna al suo organo riproduttivo: elemento che è invece presente ad esempio nello scimpanzè, che è uno dei nostri parenti più prossimi nel ramo evolutivo. In altri termini, l'affidare il passaggio dei geni alla prossima generazione ad un meccanismo esclusivamente idraulico, e quindi più fragile e sensibile a fluttuazioni dovute per esempio al diabete o la sopportazione dello stress, renderebbe certo il confronto individuale più difficile, ma offrirebbe anche alla femmina un ulteriore parametro di scelta del partner[17]. Solo che, appunto, è strano questo proliferare di criteri di scelta se di fatto il potere di scelta viene delegato all'altro sesso. Del resto, la giustificazione di comportamenti specifici è sempre frutto di analisi complessa, e rimane per lungo tempo nel campo dell'opinabilità: secondo molti evoluzionisti il cervello stesso deve essere un elemento di attrattiva sessuale, perché altrimenti non si giustificherebbe il consumo sproporzionato di energia di quest'organo rispetto ad altri (stimato tra un quarto ed un quinto dell'ossigeno e dell'energia totale). In realtà, dal punto di vista culturale è perfettamente spiegabile, visto che tutte le caratteristiche che non hanno a che fare direttamente con la sopravvivenza dell'individuo – come il senso dell'umorismo, dell'arte, alcune forme di altruismo e di corteggiamento – contribuiscono a comporre il "fascino" d'un individuo.

Quest'ultima ipotesi è un altro esempio di come lo studio delle caratteristiche evolutive e biologiche della specie umana confluisca infine in una più specifica analisi anche culturale della società dell'Homo Sapiens-Sapiens. È un po' come se ci si dovesse confrontare con la "fretta" di arrivare ai tempi nostri, dopo aver ripercorso le possibili evoluzioni della specie. Anche perché i tempi dell'evoluzione sono estremamente lenti, visto che l'unità di misura significativa del loro tempo è la generazione. Nel momento in cui l'essere umano ha iniziato ad uscire dalla preistoria, ha indotto cambiamenti – certo culturali e non biologici, ma certo non meno significativi – la cui velocità di propagazione è estremamente più veloce. Dawkins, dopo aver ipotizzato l'egoismo del gene, ha tentato la lettura della storia culturale umana attraverso una sorta di alter-ego culturale del gene: il meme. Con questo termine, che gioca sia sulla somiglianza con "gene" che sulla radice di "memoria" Dawkins intende una sorta di "idea collettiva", che è pertanto l'unità dell'informazione culturale. Il tempo, Dio, lo spazio, il denaro, l'arte, tutte le idee condivise, dalle più grandi alle più piccole, se attecchiscono e vengono riconosciute dalla gran parte dell'umanità sono dei memi, degli atomi culturali, che prolificano, si propagano, mutano a velocità estremamente maggiori rispetto ai geni. Ed è sostanzialmente per questo che possiamo ragionevolmente attenderci di essere testimoni, pur avendo a disposizione solo il tempo limitato di una vita, quindi solo di due o tre generazioni, di avvenimenti di portata significativa nell'evoluzione umana. Beninteso,

[17] Parametro la cui importanza subisce un'ulteriore esasperazione in alcune culture, e che, almeno per quel che riguarda quella in cui viviamo, sembra interessare moltissimo i distributori di spam.

evoluzione culturale, ma questo non è riduttivo: perché una volta innescata l'evoluzione culturale, quella naturale diventa così lenta a confronto da risultare trascurabile.

Così, se anche fosse vero, come sembra da alcuni studi recenti, che la donna si è evoluta ottimizzando il suo corpo alla raccolta della frutta, alla crescita dei piccoli e sviluppando una certa empatia per comprendere i fenomeni sociali, mentre l'uomo è il risultato d'un corpo atto alla caccia, alla possibilità di sopravvivere per un po' anche isolato, resta da vedere come i due sessi possano accelerare o ridurre il "dimorfismo sessuale culturale" nel prossimo futuro. Su scala biologica, un millennio non è davvero un tempo significativo. Eppure, negli ultimi tre o quattromila anni i ruoli del maschio e della femmina umana nella loro società sono cambiati parecchio in funzione delle conquiste culturali.

Qui e ora, nell'occidente del ventunesimo secolo, le attività umane – sia maschili che femminili – sono quasi tutte molto distanti dalla cacciagione e dalla raccolta occasionale di frutta, ma non si può ancora affermare che vi sia piena parità e intercambiabilità dei ruoli. Quantomeno, non ancora in pratica: il principio della totale eguaglianza è stato recepito dal punto di vista del diritto, cosa che è conquista tutt'altro che trascurabile, ma la sua puntuale applicazione è ancora non pienamente realizzata. Il permanere di grandi differenze tra il ruolo del maschio e della femmina è causato non più da specializzazione e adattamento all'ambiente, ma da ragioni essenzialmente di interazione reciproca. In altri termini, il maschio, forte dei suoi muscoli e della convinzione che il suo ruolo di guerriero sia il più importante per la sopravvivenza della società cui appartiene e che difende a spada tratta, si è riservato in essa un ruolo privilegiato relegando la femmina in posizioni socialmente meno appariscenti. Ma se è vero che i memi lavorano più in fretta dei geni, questa situazione che è rimasta virtualmente statica e ferma per qualche millennio dovrebbe rapidamente mutare: e forse, esaminando la vita di qualche persona eccezionale, questo mutamento in atto potrebbe manifestarsi con chiara evidenza.


Elizabeth Scott

Elizabeth Scott nacque il 23 novembre 1917 a Fort Hill, in Oklahoma. Quando aveva quattro anni il padre andò in pensione e la famiglia si trasferì in California, a Berkley, dove lei visse tutta la vita.

Suo padre si iscrisse all'università per ottenere una laurea in legge e la vita di Elizabeth cominciò fin da allora a ruotare attorno all'ambiente universitario, finché, raggiunta l'età adatta, frequentò la scuola superiore di Oakland. Si trattava di un'istituzione orientata alla preparazione di insegnanti e alla fornitura di materiali per il college; per quanto ben bilanciata dal punto di vista delle provenienze socio-culturali, lei era l'unica ragazza a partecipare ai corsi avanzati di matematica. Fin da molto giovane aveva mostrato interesse per l'astronomia, ma la disciplina non sembrava affatto aperta alle donne. Del resto, non aveva avuto nessuna esperienza diretta con insegnanti donne – eccetto quelle di educazione fisica; era già da considerare evento eccezionale se veniva talvolta consentito ad insegnanti di sesso femminile di sostituire temporaneamente colleghi maschi di ruolo. Fu infatti solo grazie a un breve periodo di supplenza che ebbe modo di conoscere Pauline Sperry, una delle uniche due donne presenti nel Dipartimento di Matematica dell'università di Berkeley. L'ateneo "dietro l'angolo" fu comunque una scelta obbligata per la giovane Betty: era il tempo della Grande Depressione, e il risparmio nel poter vivere a casa durante gli studi era considerevole, oltre che una vera e propria fortuna.

Si dedicò quindi completamente al suo programma di astronomia, pubblicando all'età di 22 anni il suo primo scritto, che trattava soprattutto di comete. Nelle pubblicazioni di quegli anni (una dozzina) il suo interesse primario era il calcolo delle posizioni di una cometa in diversi momenti dell'anno; l'astronomia fu la sua prima passione e rimase sempre uno dei suoi interessi.

Anche durante gli anni della Seconda Guerra Mondiale il numero di donne che raggiungevano la laurea era molto basso rispetto a quello dei maschi, e la differenza era ancora più marcata nelle materie scientifiche. Anche se l'astronomia raccoglieva più adesioni della matematica, le donne che volevano entrare a far parte dell'ambiente dovevano sopportare una forte discriminazione: di fatto non era loro consentito di accedere alla strumentazione, e men che mai ai telescopi. Betty dovette riconoscere che coloro che avevano tentato di dissuaderla dall'ottenere il dottorato in astronomia avevano le loro buone ragioni: nonostante la fortuna di aver trovato un direttore piuttosto ragionevole che aveva trovato il modo di farla accedere ad un telescopio, la miglior posizione a cui poteva aspirare non andava oltre quella di assistente di un collega maschio.

Decise allora di dedicarsi alla matematica: nel 1951 ottenne un posto al Dipartimento di Statistica di Berkley, dove lavorò per il resto della sua carriera. Già durante gli studi si era interessata di Statistica ed era stata coinvolta in un progetto militare con il capo del Dipartimento Jerzy Neyman. Neyman era un brillante statistico moldavo, arrivato a Berkeley dopo una carriera eccezionale malgrado l'Europa fosse dilaniata dalle guerre e dalla lotta per la sopravvivenza alle persecuzioni. Il suo sogno era quello di creare un nodo d'importanza mondiale per l'applicazione e lo studio della Statistica, ed era proprio in questi anni che si realizzava, con la creazione del Dipartimento nel 1951. Iniziò allora una collaborazione tra Betty e Jerzy destinata a durare per la lunghezza delle loro vite, e si scambiarono le passioni: lui fu affascinato dall'astronomia e lei dalla statistica. Per questo Elizabeth ebbe l'idea originale di utilizzare metodi statistici per l'analisi di fenomeni astronomici: nel 1949 aveva pubblicato uno studio sulle stelle binarie che si rivelò di importanza fondamentale per la disciplina.

Successivamente la giovane matematica si lasciò sedurre dalle idee di un famoso astronomo, il direttore del Lick Observatory Charles Shane. Questi indagava sulla natura della distribuzione delle galassie: aveva osservato che le galassie non erano distribuite uniformemente, ma apparivano in gruppi e ammassi; lo scienziato aveva anche ipotizzato dei superammassi. Un approccio statistico alla questione sembrava promettente, e per questo chiese la collaborazione di Elizabeth. Era certo un progetto di ampio respiro e lunga durata: con il supporto di Neyman, Betty trascorse una decina d'anni a studiare il problema e pubblicò parecchio materiale. È in questa fase che scoprì quello che ora si chiama *effetto Scott*: gli astronomi definiscono la distanza di un ammasso calcolando la distanza dalla galassia in esso più luminosa, ma lei osservò che per ammassi particolarmente lontani la galassia più luminosa doveva essere *eccezionalmente* luminosa, e propose quindi un metodo di correzione.

Nel 1958 presentò i risultati alla Royal Statistical Society di Londra. Si trattava di una completa teoria stocastica per la spiegazione della distribuzione delle galassie nell'universo: "*il proposito di questo studio è di suggerire che si potrebbe ottenere un considerevole avanzamento nello studio della cosmologia se si abbandonasse l'approccio deterministico per sostituirlo con un approccio statistico e non-deterministico*". L'idea era fresca e fu ben accolta dall'ambiente, e così Elizabeth potè concedersi una vacanza dall'astronomia per tornare ad un altro suo interesse giovanile: il clima. Negli anni Sessanta la principale concentrazione degli studi di Elizabeth e Jerzy fu dedicata alla meteorologia e alla ricerca di tecniche per influenzare le precipitazioni. Malgrado gli studi non ebbero risultati pratici, furono moltissime le pubblicazioni che scaturirono dallo studio dei due statistici.

Betty Scott, nel frattempo, era diventata un membro attivo del Consiglio di Ricerca Nazionale, e collaborava ad innumerevoli studi per diverse agenzie governative. Quando partecipò ad un comitato che studiava gli effetti ambientali degli aerei supersonici, venne in contatto con prove frammentarie e in conflitto tra di loro che potevano far pensare ad un incremento del cancro della pelle. Perseverante e precisa, guidò il comitato di esperti con diverse specializzazioni e si buttò a capofitto nell'eliminazione di tutti i dati irrilevanti o ambigui. Inaspettatamente i dati alla fine portarono a risultati così chiari da mutare lo studio da qualitativo a quantitativo: il comitato ormai doveva predire non più se, ma in che proporzioni il cancro della pelle era provocato dall'assottigliamento dell'ozono. Questo fu solo uno dei casi in cui lo straordinario talento di Betty nel far lavorare insieme scienziati con interessi e linguaggi completamente diversi fu messo alla prova.

Nel 1970 Elizabeth fu uno dei coordinatori di un sottocomitato del Senato di Berkeley che pubblicò uno studio completo dello stato delle donne nell'ambiente accademico: era un'analisi che non esaminava soltanto salari e condizioni d'impiego, ma anche assunzioni, promozioni, opportunità nella ricerca, partecipazione attiva a comitati. Comprendeva inoltre informazioni sull'ambiente studentesco: ammissioni, supporti finanziari e percentuali di laureati. La caratteristica saliente del ruolo di Betty fu nel passo successivo: una volta dimostrata l'esistenza e l'entità delle disparità ed ingiustizie, passò all'azione per porvi rimedio. Scrisse studi di metodi di interpolazione e correlazione che vennero presto utilizzati per correggere i salari nelle università, ed in seguito considerati validi in procedimenti legali: fu una pioniera dell'uso della statistica per migliorare lo stato delle donne accademiche.


Elizabeth Scott

Il suo studio del 1981 "*Career outcomes in a matched sample of men and women Ph.D.'s: an analytical report*", scritto con N.C Ahern, analizzava il risultato della raccolta di informazioni su cinquantamila dottorandi (non solo in matematica, ma anche in scienze, ingegneria e materie umanistiche) condotta nel 1979 dal Consiglio Nazionale delle Ricerche Americano. Esaminava 5164 gruppi di due uomini ed una donna raggruppati per caratteristiche il più vicine possibile che includevano età, anni di esperienza, supporto finanziario agli studi, stato civile, tipo di impiego, promozioni, salario, stato accademico. L'idea era di rivelare le tendenze e le differenze nello sviluppo delle carriere nell'ultimo decennio, ed in effetti lo studio dimostrò l'esistenza di barriere per le donne in possesso di dottorati, in ogni disciplina. I fatti che emersero furono:

1. percentuale di disoccupazione involontaria due volte e mezzo superiore per le donne rispetto agli uomini, anche nel caso dei dottorati più recenti;
2. grandi e diffuse differenze nel trattamento dei dottorandi in base al sesso in tutti i campi studiati (promozioni, stato accademico, possibilità di impiego);
3. significative differenze di salario a tutti i livelli e tutti i tipi di istituzioni.

Non contenta del successo dello studio, spese molti anni ad insegnare e a promuovere il coinvolgimento femminile nelle attività scientifiche a cui partecipava, creando comitati femminili per lo studio della Statistica. Betty era convinta che, soprattutto nell'ambiente accademico, la lotta contro le ingiustizie dovesse essere combattuta con razionalità e utilizzando prove scientifiche e precise.

Non solo era una ricercatrice eccellente, ma anche un'insegnante con un attento interesse verso gli studenti, che ispirò nell'arco di più di quindici anni centinaia di studenti, maschi e femmine che fossero. Nel 1992 a lei fu dedicato il premio Scott, "The Elizabeth Scott Award", la cui descrizione è: "*In riconoscimento dello sforzo di una vita nell'avanzamento della carriera delle donne, questo premio è assegnato ad individui che abbiano contribuito a creare opportunità per donne nel campo della statistica, sviluppando programmi che incoragginino donne a intraprendere carriere nella statistica; a essere mentori coerenti e efficaci di studentesse o ricercatrici; a ricercare ed identificare differenze di impiego basate sul sesso; o a servire come esempio in una varietà di abilità. Questo premio, assegnato per* *la prima volta nel 1992 è assegnato ogni due anni negli anni pari, e consiste in una piastra e un premio in denaro."*


Florence Nightingale David

La prima a ricevere il premio fu Florence Nightingale[18] David, che a sua volta aveva avuto una carriera simile a quella di Betty in Inghilterra, e che negli anni settanta aveva lavorato nel dipartimento di statistica di Berkeley al fianco di Elizabeth.

Florence era riuscita ad ottenere una certa notorietà nell'ambiente scientifico londinese grazie ai suoi studi statistici sulle mine e sulle traiettorie dei bombardamenti, ed era stata la Seconda Guerra Mondiale, con tutta la forza distruttiva che solo una guerra può avere, a permettere a una scienziata di diventare un così importante consigliere militare. Anche nella sua storia appare Jerzy Neyman; quando era ancora in Europa, trovò il modo di raccomandarla per un dottorato. Il centinaio di pubblicazioni e la decina di libri prodotti nell'arco della carriera, più il premio a lei intitolato nel 2001 per le eccezionali scoperte nell'ambito della statistica dovrebbero bastare a dimostrare che Jerzy aveva decisamente un buon intuito per scoprire scienziate di talento.

Non sappiamo quanto Elizabeth e Florence abbiano realmente accelerato il cammino dell'evoluzione – sia essa genetica, culturale, o addirittura memica. Non sappiamo neppure, perché è davvero impossibile saperlo, se sui tempi biologici che si misurano in millenni, in centinaia di secoli e in ere, questo loro impegno lascerà davvero una traccia permanente. Ma ci accontentiamo di testimoniare, qui e adesso, la giustezza della loro battaglia. Che, come sappiamo tutti, non è ancora terminata.

[18] I genitori di Florence le scelsero questo nome perché amici della precedente Florence Nightingale, che morì un anno dopo la sua nascita. Di lei abbiamo parlato diffusamente in RM104.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Non dovrebbe stare qui...			
In che senso?			

2.1 Non dovrebbe stare qui...

Questa volta abbiamo un mazzo di $2n$ carte, n rosse e n nere (per cominciare Rudy ha provato con $n=5$, giusto per fare un esempio). Siamo riusciti a portarle sulla retta dei numeri e ci troviamo a a metri di distanza dall'origine (sempre primo tentativo di Rudy: $a=100$). Mescoliamo le carte e cominciamo a girarle una per volta; se estraiamo una carta rossa andiamo verso l'origine; se estraiamo una carta nera ci allontaniamo. Quando abbiamo eseguito l'operazione indicata dalla carta, comunque, la buttiamo via.

Vorremmo tranquillizzare quelli che stanno preoccupandosi per la nostra incipiente demenza senile; infatti, la risposta che vi sta arrivando alla mente in questo momento è "Guarda che se fai un passo alla volta in una direzione o nell'altra non è che sia molto complicato, come problema...".

Già, è proprio qui, il guaio. Quando tiro una carta mi muovo (in un senso o nell'altro) di $1/k$-esimo della distanza dall'origine (primo tentativo: 1/2 della distanza).

L'avete capita, ormai: *dove vi aspettate di arrivare?*

2.2 In che senso?

Il tutto nasce, come al solito, da una serie di eventi completamente scorrelati tra di loro.

Rudy sta riordinando la sua collezione di Prestigiose Riviste di Matematica Ricreativa sfruttando il lavoro minorile per quanto concerne la rilegatura: la cosa non è particolarmente grave in quanto il Valido Assistente meno anziano sembra divertirsi e poi siamo tutti più tranquilli, se Rudy non usa l'ago; date le sue grandi abilità di *bricoleur*, riesce a ferirsi con qualsiasi cosa più appuntita di una palla di gomma. Verificando il lavoro compiuto, gli è caduto l'occhio su un vecchio problema in cui compariva l'espressione a^{b^c} (lo sappiamo benissimo che non si vede: a elevato b a sua volta elevato c) nella cui soluzione qualcuno si chiedeva "ma in che senso si fanno, i conti?". Ora, qualcuno calmi ***Zar*** e i suoi colleghi; come abbiamo spiegato all'epoca, per convenzione universalmente accettata calcoli del genere si fanno dall'alto in basso, quindi prima calcolate b^c e poi elevate a al presumibile mostro ottenuto.

Il secondo evento è che, come i più attenti di voi avranno notato, stiamo avendo qualche problema con Equation Editor nel momento stesso in cui generiamo il PDF del giornalino; con un ben preciso PDF-atore infatti alcuni simboli vengono balordi (delle "K" al posto dei puntini, ad esempio), e Rudy si è messo a giocherellare con delle formule assolutamente senza significato ma che utilizzino più simboli possibili.

Mentre giocherellava con aggeggi del genere, giustappunto, gli è capitato sott'occhio il vecchio problema, e ha cominciato a porsi delle domande; la prima, "ma come cavolo si può scriverle decentemente in EqEd?" ha avuto la risposta "non si può", quindi da adesso in poi le scriviamo in PowerPoint. La seconda non è altro che il titolo di questo problema: come si comportano i calcoli quando "cambiamo il senso"? Le risposte sono piuttosto facili, quindi non è questo il problema.

In realtà (finalmente!) il problema è se si possano costruire delle equazioni esteticamente piacevoli, cambiando il senso; Rudy ritiene di esserci riuscito, quindi vi chiede di risolvere (in x) queste; se poi riuscite ad inventarvene (e a risolverle) delle altre, ben felici di proporle ai lettori. La freccia (che è quello che "ci mancava" in EqEd) indica il senso del calcolo.

$$\overleftarrow{X^{X^{X^{X^{X}}}}} = \overrightarrow{X^{X^{X^{X}}}} \qquad \overleftarrow{X^{X^{X^{X}}}} = \overrightarrow{X^{X^{X^{X}}}} \qquad \overleftarrow{X^{X^{X}}} = \overrightarrow{X^{X^{X^{X}}}}$$

Ora, sapete tutti che a Rudy non piace urlare, quindi quelle "**X**" gli danno un fastidio tremendo. Qualcuno se la sente, di inventare una notazione per espressioni di questo genere? Nella prima cinque variabili sono eguagliate a quattro variabili uguali calcolate al contrario, nella seconda quattro uguale quattro, nella terza tre uguale quattro; o meglio, nella prima *cinque=orttauq*, nella seconda *quattro=orttauq*, mentre nella terza *tre=orttauq*, o forse meglio $5\downarrow = 4\uparrow$, $4\downarrow = 4\uparrow$, $3\downarrow = 4\uparrow$ ...

Aiuto!

3. Bungee Jumpers

Trovare un numero di sei cifre i cui prodotti per 2, 3, 4, 5 e 6 contengano le stesse cifre del numero originale.

In ordine diverso, evidentemente.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

L'autunno sembra essere decisamente una stagione adatta alla matematica, almeno a giudicare da questa parte della casella postale di RM. La cosa, di per sé, potrebbe anche essere prevedibile, quanto meno se decidessimo di rifugiarci nei soliti luoghi comuni: freddo, umido, pioggia, ritorno dell'ora solare: cosa c'è di meglio di una calda scrivania vicino al caminetto ricoperta di problemi di matematica ricreativa? (No, okay, va bene, non rispondete, lo sappiamo anche noi che qualcosa di meglio, a ben cercare, si riesce pure a trovare, era solo una domanda retorica…) ma, pur rifuggendo i luoghi comuni, rimaniamo lo stesso con una gran quantità di posta da evadere. E sì, che, proprio verso la metà del mese, il nostro efficientissimo sistema postale ha avuto un colpo a vuoto, perdendo dalle due alle quattro ore di posta. La colpa è quasi certamente più umana che meccanica, ma sia come sia, se ci avete scritto e non avete avuto risposta, partite dal presupposto che non sia stata colpa nostra, per favore.

Che fosse un mese indaffarato, lo si è capito fin dall'inizio: la prima mail del mese era infatti quella di ***Aurelio***, al quale era giunta la strana notizia che il valore di π potesse essere cambiato a causa della raggiunta dimostrazione della quadratura del cerchio. Ci siamo permessi di rispondere che la cosa ci sembrava improbabile, ma se fossi in voi eviterei di allargare troppo i sorrisetti di sufficienza: un buon compito per le vacanze di Ognissanti potrebbe proprio essere ripassare la ragione per la quale le due cose – π e quadratura del cerchio – sono così strettamente interallacciate; o più direttamente, per quale motivo il valore di π cambierebbe davvero, se la quadratura del cerchio fosse dimostrabile.

Un altro chiarissimo sintomo è stato il numero spropositato di mail di ***.mau.***; normalmente si limita ad approcciare in via superbamente teorica un problema in una riga e mezzo, ma stavolta ci ha stupito. Non solo ha mandato dotte risposte ad entrambi i quesiti, ma si è peritato di inviarci il codice ISBN del Ghersi (che in RM di Ottobre avevamo dato per inesistente: per i curiosi, EAN: 9788820304690) e una bella citazione matematica in anteprima ("*La matematica è la parte della fisica dove gli esperimenti costano poco*", V.I. Arnold). E se vi state chiedendo cosa significhi "in anteprima", la risposta è semplicemente "in anteprima rispetto alla pubblicazione nella sua ormai celeberrima raccolta di aforismi matematici, forse la più grande del web in italica lingua". Se non la conoscete ancora, un giro su http://xmau.com/mate/citazioni/index.html vale tutto il tempo che deciderete di restarci.

Per restare sulla sottile linea di confine tra la matematica e le belle lettere, riportiamo delle osservazioni giunte in redazione dentro una mail di ***Alessandro*** da Bergamo:

> Che la matematica o – come piacevolmente rivelato nel nr. 59 di Rudi Matematici – l'aritmetica NON sia un'opinione è anche questa un'opinione.
>
> Chiaramente, non la condivido anche perché per non essere, l'aritmetica, un'opinione i risultati di ogni operazione dovrebbero avere un unico significato. Invece ognuno di noi sperimenta quotidianamente il fatto che al risultato – seppur esatto – di qualsiasi operazione aritmetica viene data un'enorme varietà di significati.
>
> Del resto, mi domando come faccia, la matematica, a non essere un'opinione se esiste solo il vocabolario delle parole ma non quello dei numeri. Le parole infatti possono avere più di un significato ma il numero di significati di ogni parola è, per dirla con i matematici, finito (e comunque riportato nel dizionario). Per i numeri, invece, non c'è dizionario e, cosa ancor più devastante, esiste un'unica, sciagurata, modalità di interpretazione, la percentuale.
>
> Ogni risultato numericamente misurabile, da quelli di bilancio alle vendite, dall'inflazione alle perdite in borsa, viene infatti immediatamente percentualizzato perché questo è il modo più semplice per far passare una determinata – e sempre molto interessata – interpretazione.
>
> Sentir parlare di "uno splendido meno 42%" non è infatti cosa rara e non solo nel mondo del lavoro che di certo è secondo, con ampio distacco, a quello della politica.
>
> Peccato che facendo una percentuale si possano ottenere diversi risultati a seconda del termine di paragone che si sceglie per il medesimo risultato

Prima di passare alla lussuriosa disamina delle "Soluzioni", dobbiamo però chiudere le "Note" ringraziando ***Aloisia***: nella Newsletter di Ottobre avevamo lanciato un grido di dolore per la piaga dello scarso numero di iscrizioni a facoltà scientifiche; ebbene, non basterà magari a risolvere il problema su scala nazionale, ma lei ha davvero fatto tutto quanto era nelle sue possibilità. Si è iscritta a Matematica.

4.1 [104]

Quando dicevamo, poco sopra, che la mailbox è stata sottoposta ad un involontario test di stress, non stavamo mica scherzando. A dimostrarlo c'è anche il fatto che non solo sono arrivate molte belle soluzioni dei problemi proposti nel numero scorso, ma anche delle trattazioni dei problemi del numero ancora precedente, RM104, che non possono essere passate sotto silenzio, proprio no.

4.1.1 Deserto Simmetrico Monodimensionale

Ad esempio, questa soluzione di ***FraPao*** è arrivata tardi, ma "tardi" era un concetto relativo prima ancora che Einstein rivoluzionasse il concetto di tempo. Figuriamoci quanto può valere qui, fra noi di RM, specialmente se si tratta di una soluzione che nomina neintepopodimeno che l' "*eternità*":

> Ragionamento di tipo poco matematico e molto intuitivo. Supponiamo di spostarci a sinistra o a destra sempre con pari probabilità, ma con differenze di ampiezza esasperate (ed esagerate): s=1; d=10^9.
>
> In pratica quindi mi sposterò di miliardo in miliardo a destra, e di una unità a sinistra, con probabilità 50 e 50 ad ogni passo. Sembrerebbe lecito aspettarsi, dopo un numero molto grande di passi:
>
> 1. mediamente, zero o qualche unità di visite nel semiasse negativo dei numeri interi
> 2. mediamente, in ogni intervallo di un miliardo di interi, fra $k \cdot 10^9$ e $(k+1) \cdot 10^9$, 2 visite: una "in avanti" (provenendo dal miliardo prima) e una "all'indietro" (di una unità precedente la visita in avanti).
>
> Da notare che le visite all'indietro potranno essere anche più di una: ad esempio $10^9 - 1$, $10^9 - 2$, $10^9 - 3$ (teoricamente si potrebbe regredire fino a 0, ma con quale probabilità?).
>
> Ma se è lecito aspettarsi intervalli così ricchi di regressioni, sarà lecito anche aspettarsi che molti intervalli da un miliardo contengano una sola visita "in avanti" (es. $7 \cdot 10^9 - 5$ nell'intervallo fra sei e sette miliardi).
>
> Pertanto intervalli densi di visite all'indietro saranno compensati "statisticamente" da intervalli con una sola visita in avanti, per arrivare ad una situazione media in cui la frazione di visite è: F = 2/d. In questo caso particolare, un numero su 500 milioni del semiasse positivo verrà visitato. Frazione zero per i negativi.
>
> Nel caso del problema in esame (d=2), la frazione di numeri <u>positivi</u> visitati sarà: F=2/2=100%, cioè tutti i numeri positivi saranno mediamente visitati. Frazione zero per i negativi, anche se ci saranno moltissimi numeri negativi visitati.
>
> Fin qui il ragionamento statistico su un numero grande quanto si voglia di passi.
>
> **Ma che succede se la passeggiata diventa infinita**? Casi analoghi di ragionamenti "all'infinito" hanno mostrato aspetti controintuitivi.
>
> L'"eternità" infatti può sempre consentire che, anche con d=10^9, una volta raggiunta una quantità di miliardi grande quanto si voglia, si possa regredire in maniera consecutiva per un numero enorme di passi all'indietro fino a raggiungere un numero negativo piccolo quanto si voglia.
>
> <u>E finché esiste una probabilità non nulla di ottenere questo, dobbiamo concludere che in una passeggiata infinita nessun numero (anche negativo) può rimanere tagliato fuori</u>. E se questo è vero per d=10^9, lo è a maggior ragione per d=2. Quindi copertura totale, <u>anche sui negativi</u>.
>
> Diverso sarebbe il caso con s=2 e d=4, in cui rimarrebbero comunque tagliati fuori tutti i numeri dispari. Ma questo è un altro problema, giusto?

Certo che sarebbe un altro problema, ***FraPao***. E se ci fosse qualcuno affamato di problemi con voluttà di estendere la soluzione, è il benvenuto. Noi abbiamo già dimostrato che non ci spaventa affatto pubblicare soluzioni a problemi dei numeri precedenti, e lo faremmo ancora. Non per niente, anche ***Val316*** ritorna sul medesimo problema:

> La passeggiata negli interi di 2 unità positive e di un'unità negativa con uguale probabilità può essere vista come una successione di variabili aleatorie $\{X_N\}_{N\geq 0}$, dove $X_N : \Omega \to [-N, 2N]$, con Ω spazio di probabilità in cui si realizzano due eventi equiprobabili. X_N può essere espressa in funzione di una variabile aleatoria del tipo di una schema di Bernoulli o prove ripetute. Se indichiamo con $N_+ : \Omega \to \{-1,1\}$ la variabile aleatoria a valori −1 o 1 con uguale probabilità, possiamo scrivere $X_N = 2N_+ - (N - N_+) = 3N_+ - N$. Conoscendo la media e la varianza di N_+ possiamo ricavare le analoghe grandezze per X_N. Sappiamo dalla teoria che uno schema di Bernoulli a *n* prove, essendo *p* e *q* le probabilità dei due eventi complementari, ammette come media *pn* e come varianza *pqn*. Allora per quanto riguarda il valore medio di X_N:
>
> $$\langle X_N \rangle = \langle 3N_+ - N \rangle = 3\langle N_+ \rangle - N = \frac{3}{2}N - N = \frac{N}{2}.$$
>
> Per il calcolo della varianza possiamo usufruire della formula
>
> $$\sigma^2_{X_N} = \langle X_N^2 \rangle - \langle X_N \rangle^2.$$
>
> Per cui
>
> $$X_N^2 = (3N_+ - N)^2 = 9N_+^2 - 6NN_+ + N^2$$
>
> $$\langle X_N^2 \rangle = 9\langle N_+^2 \rangle - 6N\frac{N}{2} + N^2$$
>
> $$\langle N_+^2 \rangle = \sigma^2_{N_+} + \langle N_+ \rangle^2 = \frac{N}{4} + \frac{N^2}{4}$$
>
> Quindi
>
> $$\langle X_N^2 \rangle = \frac{9}{4}N + \frac{9}{4}N^2 - 3N^2 + N^2 = \frac{N^2}{4} + \frac{9}{4}N$$
>
> Infine
>
> $$\begin{cases} \sigma^2_{X_N} = \dfrac{9}{4}N \\ \langle X_N \rangle = \dfrac{1}{2}N \end{cases}$$
>
> quando $N \to \infty$ anche $\sigma^2_{X_N} \to \infty$. Questo mi sembra sufficiente per dire che nessun numero intero rimanga fuori dalla passeggiata casuale.

"Sembra sufficiente", dice ***Val316***. Figuriamoci se osiamo contraddirlo, noi. Ma se qualcuno osa, che ce lo faccia sapere.

4.1.2 (Iper-)Evidenti Ragioni di Simmetria

Certo, anche questo è un problema del 104. Alcune delle soluzioni migliori hanno bisogno di tempo, per maturare. In questo caso specifico, poi, Rudy comincia a sospettare in

Qfwfq una timidezza nascosta, che lo spinge a cercare di rendere non pubblicate le proprie soluzioni. Saputo che Rudy è riuscito a convincere il proprio OpenOffice non solo a tradurre i testi in Word ma a fargli tradurre anche le formule in Equation Editor (sul quale abbiamo qualche problemino... ma di questo ne parliamo un'altra volta), si inventa una notazione che costringe Bill Gates e la comunità Open Source a gettare la spugna. Il messaggio era un qualcosa del tipo "capito niente, non ce la faccio...", e compariva una bellissima finestra bianca, il che trasmetteva l'implicito messaggio "riscrivitelo da solo". Il che è esattamente quello che ha fatto Rudy. E la cosa, evidentemente, è successa per le due formule più lunghe di tutta la soluzione.

> Un generico vertice dell'ipercubo *N*-dimensionale è identificato da una stringa lunga *N* di 0 e 1. L'origine in particolare è indicato da O=(0,0,…,0) ed il vertice opposto da V=(1,1,…,1). Un generico passo consiste nello scegliere una qualunque coordinata e cambiarle stato: se 0 diventa 1 e viceversa. Un generico cammino di lunghezza *k* consiste in una stringa lunga *k* di numeri compresi tra 1 e *N* che indicano passo per passo quale coordinata cambiare. Tutti questi cammini sono per ipotesi equiprobabili ed il loro numero è N^k . Consideriamo adesso $p_O(k)$ e cioè la probabilità di essere nell'origine al tempo *k*. Devo contare i cammini che tornano nell'origine dopo *k* passi. Caratterizzo un cammino con i numeri $i_{1,}i_{2,\dots},i_N$ che mi indicano quante volte una certa coordinata è contenuta nel cammino. Il numero di questi cammini è il coefficiente multinomiale
>
> $$\binom{k}{i_{1,}i_{2,\dots},i_N}$$
>
> I cammini che sono nell'origine dopo *k* passi sono quelli per i quali tutti gli i_l sono pari, quindi
>
> $$p_O(k) \quad = \quad \frac{1}{n^k} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots i_N=k \\ i_l\ pari}} \binom{k}{i_{1,\dots},i_N}$$
>
> Con un incredibile trucco combinatorio (che per non interrompere il discorso mostrerò alla fine) si può dimostrare che
>
> $$\sum_{\substack{i_1+i_2+\dots i_N=k \\ i_l\ pari}} \binom{k}{i_{1,\dots},i_N} \quad = \quad 2^{-N}\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}(N-2\mathrm{j})^k \qquad \textbf{[1]}$$
>
> e quindi
>
> $$p_O(k) \quad = \quad n^{-k}\,2^{-N}\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}(N-2\mathrm{j})^k$$
>
> Per calcolare il cammino medio prima di tornare nell'origine, è necessario però la probabilità $\pi_O(k)$di essere per la prima volta nell'origine dopo *k* passi. Vale evidentemente la formula
>
> $$p_O(k) \quad = \quad \sum_{j=0}^{k}\pi_O(j)p_O(k-j)+\delta_{k,0} \qquad \textbf{[2]}$$
>
> Dove il termine con la delta serve a far valere la formula anche per *k*=0. Quando vi sono convoluzioni conviene passare alla funzione generatrice. Infatti introducendo

$$F_O(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k p_O(k) \quad ; \quad G_O(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \pi_O(k) \qquad \textbf{[3]}$$

Dall'eq.**[2]** segue immediatamente

$$F_O(x) = G_O(x) F_O(x) + 1 \quad ; \quad G_O(x) = 1 - \frac{1}{F_O(x)} \qquad \textbf{[4]}$$

$G_O(x)$ genera la media che ci serve, infatti la lunghezza media l_1 prima di tornare nell'origine si può scrivere.

$$l_1 = \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_O(k) = \left(\frac{dG_O(x)}{dx}\right)_{x=1}$$

$$l_1 = \left(\frac{dF_O(x)/dx}{F_O(x)^2}\right)_{x=1}$$

$F_O(x)$si calcola facilmente essendo una serie geometrica:

$$F_O(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k p_O(k) = 2^{-N} \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(N-2\mathrm{j})x}{N}\right)^k = 2^{-N} \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} \frac{N}{N(1-x)+2\mathrm{j}x} \qquad \textbf{[5]}$$

Si noti che $F_O(x)$ è singolare per $x \to 1$ così come le sue derivate. Nel limite $x \to 1$ il termine con *j*=0 nella sommatoria domina, e si ha

$$F_O(x) \underset{x \to 1}{=} \frac{2^{-N}}{1-x}$$

Quindi

$$l_1 = \left(\frac{dF_O(x)/dx}{F_O(x)^2}\right)_{x=1} = 2^N \qquad \textbf{[6]}$$

Introduciamo adesso in maniera analoga $p_V(k)$ come la probabilità di essere nel vertice opposto dopo *k* passi. Il calcolo è simile al caso precedente, ma adesso tutti i numeri $i_{1,}i_{2,\dots},i_N$ devono essere dispari. Con una piccola variante allo stesso incredibile trucco combinatorio si ottiene

$$p_V(k) = n^{-k} 2^{-N} \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} (-1)^j (N-2\mathrm{j})^k \qquad \textbf{[7]}$$

Anche in questo caso la funzione generatrice si calcola facilmente:

$$F_V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k p_V(k) = 2^{-N} \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} (-1)^j \frac{N}{N(1-x)+2\mathrm{j}x} \qquad \textbf{[8]}$$

Introduciamo adesso le seguenti probabilità:

- $\overline{p}_O(k)$probabilità di essere in O al tempo k condizionata a non essere mai passato per V;

- $\overline{p}_V(k)$ probabilità di essere in V al tempo k condizionata a non essere mai passato per O;
- π probabilità di essere in O per la prima volta al tempo *k* condizionata a non essere mai passato per V;
- $\pi_V(k)$ probabilità di essere in V per la prima volta al tempo *k*;
- π probabilità di essere in V per la prima volta al tempo *k* condizionata a non essere mai passato per O;

Si hanno le seguenti relazioni simili a quella già descritta in **[2]**

$$
\begin{aligned}
p_0(k) &= \overline{p}_0(k) + \sum_{j=0}^{k} \pi_V(j) p_V(k-j) \\
\overline{p}_0(k) &= \sum_{j=0}^{k} \overline{\pi}_0(j) \overline{p}_0(k-j) + \delta_{k,0} \\
p_V(k) &= \sum_{j=0}^{k} p_V(j) p_0(k-j) \\
p_V(k) &= \overline{p}_V(k) + \sum_{j=0}^{k} \pi_0(j) p_v(k-j) \\
\overline{p}_V(k) &= \sum_{j=0}^{k} \overline{\pi}_V(j) \overline{p}_0(k-j)
\end{aligned}
\qquad \textbf{[9]}
$$

Si ha quindi per le funzioni generatrici (con ovvia notazione)

$$
\begin{aligned}
F_O(x) &= \overline{F}_O(x) + G_V(x) F_V(x) \\
\overline{F}_O(x) &= 1 + \overline{G}_O(x) \overline{F}_O(x) \\
F_V(x) &= G_V(x) F_O(x) \\
F_V(x) &= \overline{F}_V(x) + G_O(x) F_V(x) \\
\overline{F}_V(x) &= \overline{G}_V(x) \overline{F}_O(x)
\end{aligned}
\qquad \textbf{[10]}
$$

Le 6 equazioni in **[4]** e **[10]** permettono di scrivere tutte le funzioni generatrici in termini di $F_0(x)$ e $F_V(x)$. In particolare abbiamo

$$
\begin{aligned}
\overline{G}_0(x) &= 1 - \frac{F_0(x)}{F_0^2(x) - F_V^2(x)} \\
\overline{G}_V(x) &= \frac{F_V(x)}{F_0^2(x) - F_V^2(x)}
\end{aligned}
\qquad \textbf{[11]}
$$

Introduciamo ora la funzione che genera la probabilità di essere per la prima volta in O o in V

$$
\overline{G}(x) = \overline{G}_0(x) + \overline{G}_V(x) = 1 - \frac{1}{F_0(x) + F_V(x)} \qquad \textbf{[12]}
$$

Notiamo che poiché per $x \to 1, F_V(x)$ si comporta esattamente come $F_0(x)$ (infatti il termine dominante è quello con j=0 nella sommaria), si ha allora per la lunghezza media di finire in O o in V

$$l_2 = \left(\frac{d\overline{G}(x)}{dx}\right)_{x=1} = \frac{1}{2}\left(\frac{dG_O(x)}{dx}\right)_{x=1} = \frac{1}{2}l_1 = 2^{N-1} \qquad \textbf{[13]}$$

Infine per calcolare l'ultima cosa richiesta, cioè la probabilità ρ di terminare in V prima che in O, si ha

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_{k=0}^{\infty}\overline{\pi}_V(k)\\ &= \left(\overline{G}_V(x)\right)_{x\to1}\\ &= \left(\frac{F_V(x)}{(F_0(x)+F_V(x))(F_0(x)-F_V(x))}\right)_{x\to1}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{F_0(x)-F_V(x)}\right)_{x\to1}\end{aligned}$$

Scrivendo esplicitamente il comportamento per *x* vicino a 1

$$\begin{aligned}F_0(x) &= 2^{-N}\left(\frac{1}{1-x}+\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}\ \frac{N}{2j}\right)\\ F_V(x) &= 2^{-N}\left(\frac{1}{1-x}+\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}\ (-1)^j\ \frac{N}{2j}\right)\end{aligned} \qquad \textbf{[14]}$$

abbiamo che nella differenza solo i termini con *j* dispari sopravvivono. Otteniamo quindi

$$\rho = \frac{2^{N-1}}{N\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j dispari}}^{N}\binom{N}{j}\frac{1}{j}} \qquad \textbf{[15]}$$

Per N=2 abbiamo $\rho=\frac{1}{2}$ poi ρ raggiunge il valore minimo per N=4 e N=5 $\rho=\frac{3}{8}$ quindi ricomincia a crescere molto lentamente per $N\to\infty$ verso il valore asintotico $\rho=\frac{1}{2}$. Descriviamo adesso l'incredibile trucco combinatorio. Si consideri la seguente espressione

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_N) = (x_1+x_2+\ldots x_N)^k = \sum_{i_1+\ldots+i_N=k}\binom{k}{i_1, i_2, \ldots, i_k}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_N^{i_N} \qquad \textbf{[16]}$$

Questa formula genera molte relazioni utili per i coefficienti multinomiali. Dobbiamo selezionare i termini con tutte le potenze pari e sommarle. Per fare questo immaginiamo di assegnare alle variabili x_i il valore +1 oppure −1. Indico con α una possibile assegnazione. È chiaro che per qualunque assegnazione il termine con tutte le potenze pari ha sempre il segno positivo. Sommiamo allora su tutte le 2^N possibili assegnazioni. I termini con tutte le potenze pari si prenderanno un fattore 2^N mentre quelli con almeno una potenza dispari avranno per metà assegnazioni il segno + e per metà il segno −, la somma sarà quindi nulla. Abbiamo cioè

$$\sum_{\alpha} \sum_{i_1+\ldots+i_N=k} \binom{k}{i_1, i_2, \ldots, i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_N^{i_N} = 2^N \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_N=k \\ i_l \, pari}} \binom{k}{i_1, i_2, \ldots, i_k} \qquad \textbf{[17]}$$

Sommare su α il primo membro dell'eq. **[16]** è semplicissimo, infatti per ogni assegnazione quello che conta è solo il numero *j* di *x* che prendono il segno −, mentre le restanti *N*−*j* prenderanno il segno +. Si ha dunque

$$\sum_{\alpha} h(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} (N - 2j)^k \qquad \textbf{[18]}$$

e l'eq. **[1]** ne consegue immediatamente.

Per calcolare l'analoga espressione con le i_l dispari, si procede con lo stesso identico trucco ma partendo dall'espressione

$$N$$

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_N) = (x_1 + x_2 + \ldots x_N)^k x_1 x$$

I termini con le potenze pari di *x* adesso avranno il coefficiente multinomiale con le i_l dispari.

Ora, per quanto sia facile rendersi conto che i solutori dei problemi del numero 105 stiano scalpitando in attesa di vedere le relative soluzioni, non possiamo comunque lasciar briglia sciolta e correre a trattare quesi temi senza aver prima parlato della *piccola soluzione perduta*. La piccola soluzione perduta è quella di ***GaS***, che per ragioni ancora del tutto misteriose non è giunta a destinazione nei tempi canonici, anzi non c'è giunta per niente. Solo uno scrupolo del nostro lo ha indotto a scriverci una seconda volta, allegando questo piccolo gioiello. Ah, è superfluo dire che la *piccola soluzione perduta* non solo non è più *perduta*, adesso, ma anche che *piccola* non lo è mai stata.

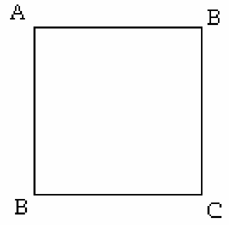
Un chiarimento prima di iniziare: nel seguito considererò, di default, il problema in cui ci si ferma solo tornando al vertice di origine, alla variante (fermata anche in caso di approdo al vertice opposto) sarà eventualmente dedicata la fine di ogni paragrafo.

1. Iper-Cubi

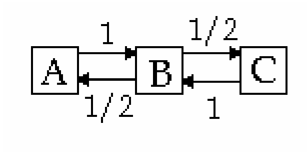
Per facilità di esposizione cominciamo con i semplici casi bi e tri-dimensionali per familiarizzare con il metodo da me utilizzato, dopo generalizzeremo il tutto.

a. 2D – Il quadrato

Sia A il vertice di partenza, da questo posso raggiungere due diversi vertici, chiamiamoli B, e rimane fuori un unico vertice, quello opposto alla partenza, C.



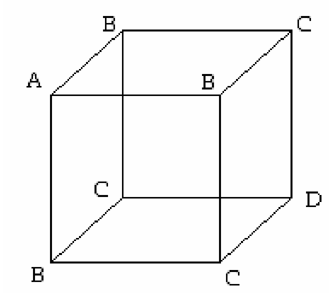
Se stiamo in A andiamo con probabilità P=1 in un vertice B, se stiamo in uno dei vertici B andiamo con P=1/2 in A e con P=1/2 in C, se stiamo in C andiamo con P=1 in un vertice B. Riassumiamo queste transizioni con il diagramma di seguito riportato.



Definizione: Sia M_x il numero medio di mosse per andare da un vertice X ad A (o viceversa), M_a è il valore che ricerchiamo (supponendo, in questo caso, che dobbiamo fare almeno una mossa).

In questo modo si ha:

- M_a=1+M_b in quanto, partendo da A, dopo una mossa mi ritrovo in B e da qui farò, in media, M_b mosse per tornare in A
- M_b=1+1/2•M_c in quanto, partendo da B, dopo una mossa sarò in C una volta su due, e mi mancheranno quindi M_c mosse per tornare in A), mentre nell'altra metà dei casi mi ritroverò in A e quindi sono arrivato.
- M_c=1+M_b



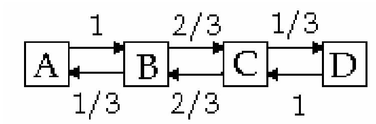
Risolvendo il sistema di 3 equazioni si ottiene M_a=4

In 2D neanche calcolo il numero medio di mosse per la variante: mi fermo sempre e comunque in **2** mosse.

b. 3D – Il cubo

Sia A il vertice di partenza, posso raggiungere tre diversi vertici, chiamiamoli B, da questi tornare in A o andare in uno dei tre vertici che chiamiamo C da cui possiamo tornare in B o approdare nel vertice D opposto a quello di partenza.

Se stiamo in A andiamo con probabilità P=1 in un vertice B, se stiamo in B andiamo con P=1/3 in A e con P=2/3 in C, ecc... Riassumendo si ha:



Lavorando come nel caso bidimensionale si possono ricavare le 4 equazioni:

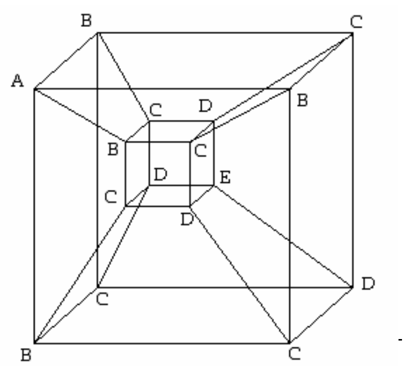
- M_a=1+M_b
- M_b=1+2/3•M_c
- M_c=1+1/3•M_d+2/3•M_b in quanto, parendo da C, dopo una mossa sarò in D una volta su 3 (e mi mancheranno quindi M_d mosse per tornare in A), mentre due volte su 3 mi ritroverò in B (e mi mancheranno quindi M_b mosse per tornare in A).
- M_d=1+M_c

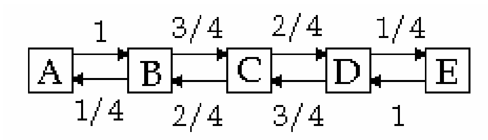
E, risolvendo il sistema di 4 equazioni, si ottiene M_a=8

Per risolvere la variante del problema basta considerare solo le prime due equazioni ponendo, per simmetria, M_c=M_b da cui ricavo una media di 4 mosse.

c. 4D – Tesseratto

Sì, lo so, è una schifezza di tesseratto ma vi dovete accontentare: l'importante è che si riescano a vedere le 5 diverse tipologie di vertici. Da cui si ricavano le seguenti probabilità di transizione:





[scrivendo quegli “1” come “4/4” si nota qualche interessante regolarità...] da cui si tirano fuori le 5 equazioni:

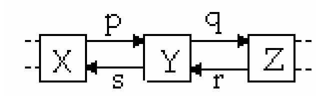
- M_a=1+M_b
- M_b=1+3/4•M_c
- M_c=1+2/4•M_d+2/4•M_b
- M_d=1+1/4•M_e+3/4•M_c
- M_e=1+M_d

Da cui si ottiene M_a=16.

Per risolvere la variante del problema basta sostituire nella terza equazione M_b=M_d da cui si ricava una media di 8 mosse.

d. Generalizzando

In N dimensioni si avranno, in generale, N+1 tipologie di vertici (A, B, C,...) da ognuno dei quali partono N strade verso altri N vertici. Sia Y una generica tipologia di vertice con probabilità di transizione date in figura:



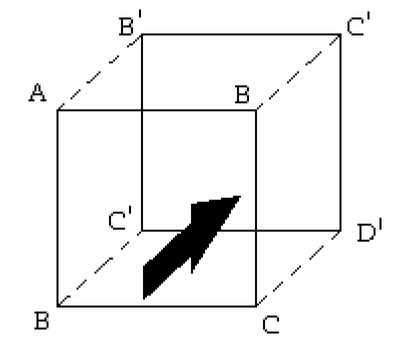
Da queste si ricava l’equazione M_y=1+q•M_z+s•M_x

Scrivendo un’equazione per ogni tipologia di vertice si avranno N+1 equazioni in N+1 incognite da cui ricaviamo M_a.

Ma quanti vertici di tipo A, B, C,... esistono in N dimensioni? E come si ricavano le probabilità di transizione? Finché si riesce a fare il disegno dell’iper-solido si calcolano facilmente a manina, ma per cubi a molte dimensioni?

Vediamo di capire che cosa succede passando da (N−1) ad N dimensioni immaginando di prendere l’ipercubo (N−1) dimensionale e traslarlo verso la N−esima dimensione: la A “genererà” una B, le B “generano” delle C, le C “generano” D etc...

Se per esempio prendiamo il quadrato ABBC e lo trasliamo verso la terza dimensione otteniamo il quadrato B’C’C’D’:

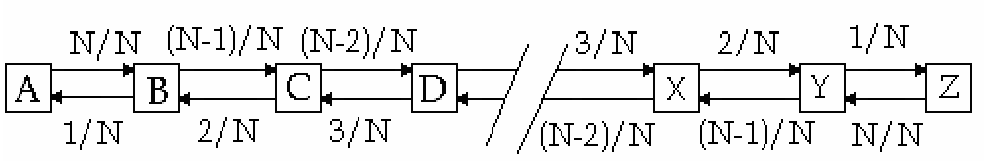


In N dimensioni ci saranno quindi tante B quanto è la somma delle A e delle B in N−1 dimensioni, tante C quanto è la totalità di B e di C in N−1 dimensioni, etc...: in definitiva si ha che le quantità di vertici di tipo A, B, C,... sono date semplicemente dalla (N+1)-esima riga del triangolo di Tartaglia[19]!

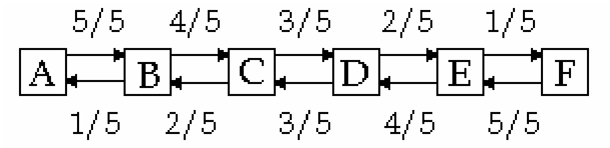
E per le probabilità di transizione? Semplice, da quanto detto sopra si ricava che, detto p/q la probabilità di andare da un vertice X ad uno Y in N−1 dimensioni, quando passo ad N dimensioni da ogni vertice X faccio “spuntare” un nuovo collegamento verso un nuovo vertice Y e quindi si avrà P=(p+1)/(q+1).

[19] Risultato che non serve assolutamente a niente ai fini del problema, non mi sembra però una buona scusa per passarlo sotto silenzio (N.d.***GaS***).

Dati questi risultati "ricorsivi" e partendo da uno dei casi gia studiati è ora possibile disegnare gli schemi di transizione per ogni dimensione N:



Per esempio per N=5 si avrà:



A questo punto si scrivono le 6 equazioni da cui si ricava $M_a=32$ nel caso del problema originale e 16 mosse per la variante[20].

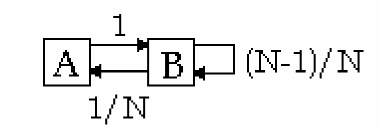
Una sospetta regolarità spunta all'orizzonte: per dimensioni N=2, ...,5 abbiamo ricavato che $M_a=2^N$, mentre per la variante si hanno $2^{(N-1)}$ mosse, sarà vero per qualsiasi N? Per ora, lascio "a quelli bravi" l'ardua sentenza...

2. Altri Iper-Solidi

a. Simplessi

Sicuramente l'iper-solido più facile da generalizzare è il simplesso che rappresenta il tetraedro in N dimensioni. Il grafo di un N-simplesso è semplicemente un grafo completo di N+1 vertici, pensate ad es. al triangolo o al tetraedro stesso, e quindi avrò solo due tipologie di vertici, A e B.

Lo schema di transizione sarà quindi:



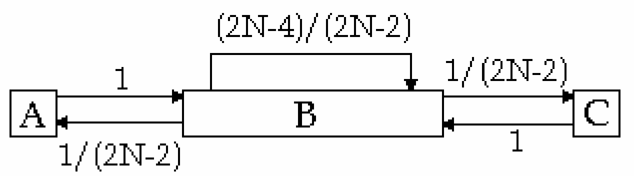
che da luogo alle due equazioni:

- $M_a=1+M_b$
- $M_b=1+(N-1)/N \cdot M_b$

Da cui si ricava $M_b=N$ e $M_a=N+1$ per qualsiasi dimensione N.

b. Iper-Ottaedri

Non so come si chiami la generazione N-dimensionale di un ottaedro[21] ma questi iper-solidi hanno dei grafi che sono grafi completi di 2N punti tranne per il fatto che non sono connesse le coppie di vertici opposti, pensate ad es. al quadrato o all'ottaedro stesso. Si avranno quindi 3 tipologie di vertici da ognuno dei quali partono 2N−2 strade. Lo schema di transizione sarà il seguente:



[20] Notiamo che la variante è molto più semplice da risolvere in quanto, data le Iper-Evidenti Ragioni di Simmetria dell'ipercubo, bisogna risolvere un sistema di (N+1)/2 [o (N+2)/2]equazioni contro le N+1 del problema originale (N.d.***GaS***).

[21] Dopo una ricerca sul web ho scoperto che gli yankee li chiamano Cross-Polytope tradotto con Cross Politopi nella nostra terra natia (N.d.***GaS***). *Ma **GaS** lo legge, RM? Il PM di RM082! [RdA]*

- $M_a=1+M_b$
- $M_b=1+1/(2N-2)\cdot M_c+(2N-4)/(2N-2)\cdot M_b$
- $M_c=1+M_b$

da cui si ricava: $M_a=2N$ per qualsiasi dimensione N. Nel caso della variante le equazioni diventano:

- $M_a=1+M_b$
- $M_b=1+(2N-4)/(2N-2)\cdot M_b$
- $M_c=1+M_b$

da cui si ricava: $M_a=N$.

3. Che cosa manca?

Mancano ancora dodecaedro e icosaedro per quanto riguarda i solidi regolari in 3D e qualcosa in 4D (24, 120 e 600-Cell). I primi due sono ancora abbordabili e trovate i risultati che ho ricavato nella tabella sottostante, gli altri hanno troppi vertici per i miei gusti...

N	Solido	N° medio di mosse (Problema originale)	N° medio di mosse (Variante)
3D	Tetraedro	4	
	Cubo	8	4
	Ottaedro	6	3
	Dodecaedro	16	10
	Icosaedro	12	6
4D	Simplesso	5	
	24-Cell	?	?
	Tesserato	16	8
	Cross-Politopo	8	4
	120-Cell	?	?
	600-Cell	?	?
>4D	Simplesso	N+1	
	Ipercubo	2^N (Hp.)	$2^{(N-1)}$ (Hp.)
	Cross Politopo	2N	N

Eccoci qua. ***GaS*** è perfino riuscito a dire che il suo tesseratto era una schifezza, il che mostra quanto sia più bravo, nel disegno, di tutta la redazione. A noi sembrava stupendo, quel disegno, e la leggera asimmetria dava all'insieme una leggiadria insolita, in una nota di matematica. Comunque, se pensate che un simile trattato sia più che sufficiente per chiudere il discorso, vi state sbagliando. La soluzione di ***Val316*** a questo problema, ad esempio, meriterebbe la soluzione fosse anche solo per il grafo del paragrafo "16.celle", ma la citazione latina ci manda davvero in brodo di giuggiole. Un abbonamento biennale gratuito a chi ci scrive il nome della scrittrice che scriveva *parvula vagula blandula*, così galantemente citata da ***Val 316***:

> Diciamo che per affrontare il problema delle passeggiate casuali per i vari politopi appare abbastanza scontato che le catene di Markov siano il contesto più naturale. Dopo tutto abbiamo i vari vertici/stato e le probabilità di transizione da un

vertice/stato ad altri. Ovviamente la transizione verso un vertice dipende sempre dall'ultimo vertice raggiunto e non dall'intero percorso effettuato per arrivarci. Essendomi chiaro questo punto, le domande poste circa le probabilità di raggiungere certi punti e i tempi di percorrenza mi son sembrate, come dire, troppo "accademiche" per essere casuali ed non essendo chiaramente un esperto di queste cose mi son chiesto se in letteratura non fossero già state prese in considerazione. Quindi mi son lanciato nella ricerca in rete di materiale sulle catene di Markov e tra un freescience.info, un wikipedia e quant'altro mi son imbattuto nel solito professore che mette sul suo sito personale dei preprint di libri. Scrollando, stampando e a volte anche studiando (non tutti gli argomenti erano di quelli da apprendere a volo!) posso dire che sì in letteratura questo tipo di domande sono state già formulate e la risposta sta in due concetti semplici, semplici: *hitting probability* e *mean hitting time* (probabilità di raggiungimento/attraversamento e tempo medio di raggiungimento/attraversamento). *Ecce paraphernalia parvula* (*vagula et blandula).*

Sia $\{X_n\}_{n\geq 0}$ una catena di Markov con matrice di transizione $P = \{p_{ij}\}_{i=0,\dots,S;\, j=0,\dots,S}$

Il tempo di attraversamento (*hitting time*) di un sottoinsieme $A \subseteq I$ è una variabile aleatoria $H^A : \Omega \to \{0,1,2,\dots\} \cup \{\infty\}$ definita come:

$$H^A(\omega) = \inf\{n \geq 0 : X_n(\omega) \in A\}$$

La probabilità che partendo da uno stato i la catena $\{X_n\}_{n\geq 0}$ attraversi A è data da

$$h_i^A = P_i(H^A < \infty \,|\, X_0 = i) \equiv P_i(H^A < \infty).$$

Il numero medio di passi impegati dalla catena per raggiungere A è invece

$$k_i^A = E(H^A \,|\, X_0 = i) \equiv E_i(H^A) = \sum_{n<\infty} nP_i(H^A = n) + \infty P_i(H^A = \infty)$$

Risulta che le due grandezze definite sopra possono essere calcolate esplicitamente mediante dei sistemi di equazioni lineari con i coefficienti presi dalla matrice di transizione.

In dettaglio abbiamo che le probabilità di attraversamento si ottengono risolvendo il sistema seguente

$$\begin{cases} h_i^A = 1 & i \in A \\ h_i^A = \sum_{j\in I} p_{ij} h_j^A & i \notin A \end{cases}$$

Mentre per il numero medio di passi:

$$\begin{cases} k_i^A = 0 & i \in A \\ k_i^A = 1 + \sum_{j\notin A} p_{ij} k_j^A & i \notin A \end{cases}$$

(...)

Forti di questo impianto teorico, per risolvere i problemi sulla passeggiata casuale non dobbiamo far altro che scrivere per le figure geometriche d'interesse le matrici di transizioni di Markov, mettere i coefficienti nei sistemi suddetti e il gioco è fatto.

Nella pletora inquietante dei politopi a 4 e più dimensioni, ho sottoposto questo metodo al tessaratto(4-cubo), al n-simplesso ed al 16-celle.

Tessaratto (4-cubo)

Il tessaratto sappiamo possiede 16 vertici. Da ogni vertice partono 4 spigoli. Le coordinate dei vertici sono rappresentate dalle seguenti quadruple

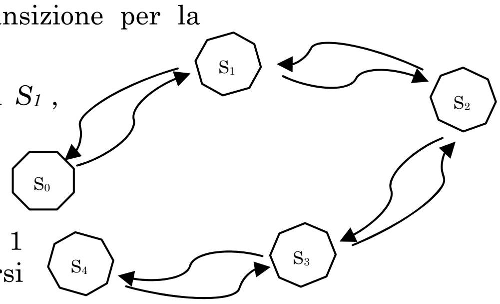
$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \quad con\ x_i = 0{,}1$$

In linea teorica quindi la catena di Markov che stiamo cercando è definita in uno spazio di stati di cardinalità 16. Quindi avremmo dei sistemi lineari risolutivi a 16 equazioni. Un po' troppe. Sfruttando le simmetrie in gioco però possiamo ridurre la cardinalità del modello solamente a 5 vertici. Questo si ottiene identificando quei vertici che contengono lo stesso numero di 1.

$$\begin{aligned}
S_0 &= \{(0,0,0,0)\} \quad ,1\,vertice \\
S_1 &= \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\} \quad ,4\,vertici \\
S_2 &= \{(1,1,00),(1,0,1,0),(1,0,0,1),\ldots\} \quad ,6\,vertici \\
S_3 &= \{(1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(0,1,1,1)\} \quad ,4\,vertici \\
S_4 &= \{(1,1,1,1)\} \quad ,1\,vertice
\end{aligned}$$

È ovvio che partendo da (0,0,0,0), preso come origine, possiamo sportarci in uno dei vertici con un solo 1: cioè da S_0 passiamo a S_1. Da uno dei vertici di S_1 possiamo o tornare all'origine oppure transitare in uno dei vertici di S_2: cioè da S_1 passiamo o in S_0 oppure in S_2. E così via…

Schematicamente il tutto procede come in figura.



Bene qual è ora la matrice di transizione per la catena ridotta di cui sopra?

Da S_0 passiamo con probabilità 1 in S_1 , non c'è altro modo.

Da S_1 passiamo con una probabilità tre volte superiore in S_2 che in S_0 (ci sono tre 0 che possono divenire 1 contro un solo 1 che può trasformarsi in 0).

Da S_2 passo con eguale probabilità in S_1 oppure in S_3 (ci sono due 1 come due 0 in S_2).

Da S_3 passiamo con una probabilità tre volte superiore in S_2 che in S_4 (ci sono tre 1 che possono divenire 0 contro un solo 0 che può trasformarsi in 1)

Ed infine da S_4 passo sicuramente in S_3.

Per cui la matrice di transizione è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quante tappe in media prima di tornare all'origine…

Con il formalismo di cui sopra, in questo caso *A={0}* e il numeri cercato è uguale a $1 + k_1^A$, uno più il numero medio di passi da S_1 a S_0.

Sistema di equazioni

$$\begin{cases} k_0 = 0 \\ k_1 = 1 + \frac{3}{4}k_2 \\ k_2 = 1 + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_3 \\ k_3 = 1 + \frac{3}{4}k_2 + \frac{1}{2}k_4 \\ k_4 = 1 + k_3 \end{cases}$$

Quindi $k_1 = 15$, allora 16 è il numero medio di tappe, cioè passiamo per tutti i vertici.

Se ci fermiamo all'origine o al punto opposto… In questo caso *A={0,4}* e la soluzione è $1 + k_1^A$. Risolvendo

$$\begin{cases} k_0 = 0 \\ k_1 = 1 + \frac{3}{4}k_2 \\ k_2 = 1 + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_3 \\ k_3 = 1 + \frac{3}{4}k_2 \\ k_4 = 0 \end{cases}$$

$k_1 = 7$, quindi 8 è il numero medio di tappe.

La probabilità di raggiungere il punto opposto… In questo caso *A={4}* e il valore cercato h_0.

$$\begin{cases} h_0 = h_1 \\ h_1 = \frac{1}{4}h_0 + \frac{3}{4}h_2 \\ h_2 = \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}h_3 \\ h_3 = \frac{3}{4}h_2 + \frac{1}{4}h_4 \\ h_4 = 1 \end{cases}$$

Da cui $h_0 = 1$. Cioè passiamo con probabilità 1 per il vertice opposto.

D'altra parte se la passeggiata dall'origine e ritorno comprende tutti i vertici…

N-simplesso

Un N-simplesso (triangolo, tetraedro, pentacoro(!), …) da questo punto di vista è un caso più semplice. Tutti i vertici (N+1) sono collegati fra loro da N spigoli. La catena ridotta si muove in uno spazio di soli due stati: un vertice (S_0) scelto come origine e gli altri N (S_1).

Da S_0 passiamo sicuramente in S_1.

Da S_1 passiamo con probabilità 1/N in S_0 e con probabilità (N−1)/N rimaniamo nel super stato S_1.

La matrice di transizione è

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{N} & \frac{N-1}{N} \end{pmatrix}$$

Quante tappe in media prima di tornare all'origine…

Ancora una volta in questo caso *A={0}* e il numero cercato è uguale a $1+k_1^A$, uno più il numero medio di passi da S_1 a S_0

$$\begin{cases} k_0 = 0 \\ k_1 = 1+\frac{N-1}{N}k_1 \end{cases}$$

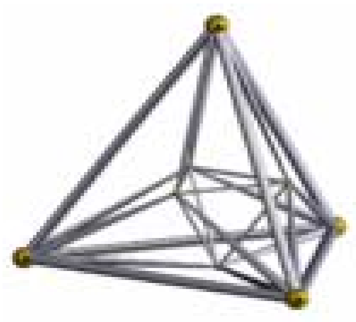
$k_1 = N$, numero medio di tappe = *N+1*. Di nuovo prima di tornare al punto di partenza passiamo per tutti i vertici.

16-celle

Ho affrontato 16-celle perché tra i politopi a quattro dimensioni mi è sembrato il più umano, a parte ovviamente il tessaratto e il pentacoro.

Ci sono 8 vertici per un totale di 24 spigoli, cioè ogni vertice è collegato con altri 6 vertici, per cui uno dei vertici rimane fuori dal collegamento diretto.

In sostanza in questo solido, scelto un punto di origine, posssiamo identificare un suo "diagonalmente opposto". La catena ridotta opera in unp spazio di 3 soli stati: l'origine S_0, i suoi vicini diretti S_1 e il punto diagonalmente opposto S_2.



Se sono in S_0 sicuramente mi sposto nei miei vicini S_1.

Se sono in S_1 ho 6 super-percorsi che posso prendere: 1 verso S_0, 1 verso S_2 e con gli altri rimango dove sono(cioè mi sposto in un vertice omologo)

Come dire che la matrice di transizione è:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 4/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quante tappe in media prima di tornare all'origine…

A={0} e la soluzione è $1+k_1^A$.

$$\begin{cases} k_0 = 0 \\ k_1 = 1+\frac{4}{6}k_1+\frac{1}{6}k_2 \\ k_2 = 1+k_1 \end{cases}$$

$k_1 = 7$. Quindi numero medio di tappe uguale 8, numero totale di vertici.

La probabilità di raggiungere il punto opposto… In questo caso *A={2}* e il valore cercato h_0.

$$\begin{cases} h_0 = h_1 \\ h_1 = \frac{1}{6}h_0 + \frac{4}{6}h_1 + \frac{1}{6}h_2 \\ h_2 = 1 \end{cases}$$

Da cui $h_0 = 1$. Cioè passiamo con probabilità 1 per il vertice opposto a partire dall'origine.

La lezione che sembra trarsi è che per tutti i politopi regolari a qualsiasi dimensione una passeggiata casuale attaversi tutti vertici. Tutto sommato sembra anche attendibile perché altrimenti potremmo classificare i vari vertici con una gerarchia di probabilità che li renderebbe identificabili mentre la natura di punto di origine e di opposto è solo convenzionale.

È ormai evidente che questo problema non genera soluzioni, ma veri e propri trattatelli. Forse è per questo – per il banale tempo necessario alla gestazione – che sono arrivate quasi tutte in questo mese. Il ***Cid*** non fa eccezione:

In generale, per tutte le domande, considero di fissare l'ipercubo in un piano cartesiano con il punto di origine nell'origine degli assi e posizionato in modo tale che tutti gli altri vertici abbiano ogni coordinata uguale a 0 o a 1; di conseguenza il punto diagonalmente opposto sarà quello avente tutte le coordinate uguali a 1 e i vertici saranno tutte le possibili combinazioni di 0 e 1

A) In un ipercubo a 4 dimensioni,

Parto da (0, 0, 0, 0) dopo la prima tappa sicuramente mi troverò in un vertice avente una coordinata uguale a 1 e le altre 3 uguali a 0.

Risolvo con la catena di Markov:

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{3}{4}y \\ y = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \\ z = 1 + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}k \\ k = 1 + z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Che risolto da: x = 15, y = $\frac{56}{3}$, z = $\frac{61}{3}$ e k = $\frac{64}{3}$

Quindi in un ipercubo a 4 dimensioni, le tappe necessarie, in media, per tornare al punto di origine sono una (che è la prima tappa) + 15 che è il valore atteso per ritornare dalla prima tappa al punto di origine. Totale: 1 + 15 = 16 tappe

In generale, le tappe sono 2^N, in quanto nel cubo i vertici sono posizionati in maniera perfettamente simmetrica e quindi dopo infinite tappe ognuno sarà visitato in media una volta ogni 2^N tappe (essendo 2^N il numero dei vertici dell'ipercubo in N dimensioni). Quindi ogni volta che si esce da un vertice, il valore atteso per ritornarvi sarà 2^N

B) In un ipercubo a 4 dimensioni,

Parto da (0, 0, 0, 0) dopo la prima tappa sicuramente mi troverò in un vertice avente una coordinata uguale a 1 e le altre 3 uguali a 0.

Risolvo con la catena di Markov:

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{3}{4}y \\ y = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \\ z = 1 + \frac{3}{4}y \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Che risolto da: x = 7, y = 8, z = 7. Quindi in un ipercubo a 4 dimensioni, le tappe necessarie, in media, per tornare al punto di origine o al punto diagonalmente opposto sono una (che è la prima tappa) + 7 che è il valore atteso dopo la prima tappa. Totale: 1 + 7 = 8 tappe

In generale, le tappe sono $2^{(N-1)}$, in quanto il punto diagonalmente opposto si trova in posizione simmetrica rispetto al punto di origine e quindi il risultato dovrà essere:

$$\frac{2^N}{2} = 2^{(N-1)}$$

C) In un ipercubo a 4 dimensioni

Probabilità di tornare indietro dopo la prima tappa uguale a 1/4. Se non si torna indietro, si raggiunge la zona centrale dove la probabilità di raggiungere il punto diagonalmente opposto prima di passare per l'origine è logicamente uguale a 1/2. Quindi la probabilità è il prodotto di due eventi indipendenti:

- Raggiungere il centro (probabilità = 3/4)
- Dal centro arrivare al punto diagonalmente opposto prima di tornare all'origine (probabilità = 1/2)

Probabilita totale: $P = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

Per $N \to \infty$ risulta abbastanza facile verificare che la probabilità di raggiungere il vertice diagonalmente opposto prima di passare per l'origine tende a quella che si ha nella zona centrale (cioè tende a 1/2 per $N \to \infty$). Con le catene di Markov ho calcolato la seguente tabella:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
P	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{60}{151}$	$\frac{105}{256}$	$\frac{35}{83}$	$\frac{63}{146}$	$\frac{630}{1433}$	$\frac{1155}{2588}$	$\frac{6930}{15341}$	$\frac{12870}{28211}$

Poi ho dimostrato che: La probabilità di raggiungere il vertice diagonalmente opposto prima di passare per l'origine è sicuramente inferiore a: $\frac{N-1}{2 \cdot N}$ (se N>4).

La dimostrazione si basa su quanto ho detto per il caso dell'ipercubo in 4 dimensioni. Infatti, la probabilità di tornare indietro dopo la prima tappa uguale a $\frac{1}{N}$. Se non si torna indietro, si raggiunge un vertice più vicino al vertice di origine che a quello diametralmente opposto all'origine, quindi un vertice dove la probabilità di raggiungere il punto diagonalmente opposto prima di passare per l'origine è sicuramente minore di 1/2. Quindi la probabilità è il prodotto di due eventi indipendenti:

- Non tornare subito all'origine: (probabilità = $\frac{N-1}{N}$)
- Partendo dal vertice raggiunto, passare dal vertice diagonalmente opposto all'origine prima di tornare al vertice di origine (probabilità < 1/2)

Probabilita totale: $P < \frac{N-1}{2 \cdot N}$.

Ho provato in vari modi a dimostrare anche che la probabilità di raggiungere il vertice diagonalmente opposto prima di passare per l'origine è sicuramente superiore a: $\frac{N^2-N-4}{2 \cdot N^2}$. Purtroppo non sono riuscito a dimostrarlo... Comunque, ho trovato moltissimi indizi che fanno supporre che le cose stiano effettivamente così; inoltre, intuitivamente direi che sia anche possibile dimostrarlo per cui:

Congettura: La probabilità P di raggiungere il punto diagonalmente opposto prima di passare per l'origine è tale che: $\frac{N^2-N-4}{2 \cdot N^2} < \mathrm{P} < \frac{N-1}{2 \cdot N}$ e quindi tende a $\frac{1}{2}$ per $N \to \infty$.

Tra l'altro, la media tra $\frac{N^2-N-4}{2 \cdot N^2}$ e $\frac{N-1}{2 \cdot N}$ è un'ottima approssimazione di P per $N \to \infty$, cioé: la probabilità P di raggiungere il punto diagonalmente opposto prima di passare per l'origine, tende a: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2N} - \frac{1}{N^2}$ per $N \to \infty$. Per verificare ciò, ho calcolato (con il computer) quanto vale la probabilità per alcuni valori di N, trovando che:

- per $N = 25$ si ottiene 0,47805027339628...
- per $N = 50$ si ottiene 0,48956343258903...
- per $N = 100$ si ottiene 0,49489573970796...
- per $N = 200$ si ottiene 0,49747448439714...
- per $N = 400$ si ottiene 0,49874368654411...
- per $N = 800$ si ottiene 0,49937342962834...

Grazie a questi dati è possibile anche migliorare l'approssimazione. Ad esempio, se ne deduce che: la probabilità P di raggiungere il punto diagonalmente opposto prima di passare per l'origine, tende a: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2N} - \frac{1}{N^2} - \frac{4}{N^3}$ per $N \to \infty$, e si può ottimizzare ancora di più l'approssimazione ed affermare che: la probabilità P di raggiungere il punto diagonalmente opposto prima di passare per l'origine, tende a: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2N} - \frac{1}{N^2} - \frac{4}{N^3} - \frac{24}{N^4}$ per $N \to \infty$.

E mi sarebbe piaciuto approssimare ulteriormente il risultato... ma i limiti di precisione di calcolo di EXCEL (o meglio: i miei limiti nell'uso di EXCEL) non mi permettono di trovare la probabilità con almeno 15 cifre decimali esatte, per valori di N che siano maggiori di 1000, e quindi mi è risultato impossibile spingere oltre l'analisi dei dati.

D) Siccome tutti i vertici vengono visitati in media una volta ogni 2^N tappe, la probabilità che venga visitato il vertice diagonalmente opposto dopo infinite tappe è uguale a 1.

Avete notato quale evento storico si è compiuto? Il ***Cid*** ha tirato fuori Excel. Come dire neve a Ferragosto, e alle latitudini di Dakar. Poi, certo, Excel è citato quasi solo per mostrarne i limiti, ma diamine, se era un problema coi fiocchi, questo.

4.2 [105]

È probabile che, da bravi lettori di RM come rivista integra e integrale (non integralista, però, eh?), non siate soliti immaginare che ogni "sezione" è inizialmente scritta a sé stante, in un documento isolato dagli altri pezzi. Certo, la cosa è del tutto naturale e niente affatto degna di menzione, se non fosse che stiamo a malapena adesso cominciando la trattazione dei problemi del mese scorso, e il numero di pagine scritte solo per le "Soluzioni e Note" sono già 21. Questo RM106 che tenete in mano – o che brilla sui vostri monitor – quasi certamente non è il numero di RM più "leggero" mai prodotto.

4.2.1 Tempo d'esami

Lo avevamo anticipato. Ha scritto ***.mau.*** Chi lo conosce, riesce a riconoscerlo dallo stile dopo solo sette parole.

Beh, nel testo mancano almeno quattro ipotesi: innanzitutto che X>Y>Z – con tutte queste prese di posizione contro la meritocrazia non si sa mai; poi che Z>=0, visto che non si sa mai di professori sadici che danno punteggi negativi; che non ci siano stati pari-merito; infine che X, Y e Z siano tutti interi. Non ho voglia di vedere cosa succede se queste ipotesi non sono verificate, quindi le prendo per buone.

La somma dei punteggi è 40; quindi ci possono essere i seguenti casi, dove la prima colonna contiene il numero di prove P e la seconda il punteggio totale T.

P	**T**
1	**40**
2	**20**
4	**10**
5	**8**
8	**5**
10	**4**
20	**2**
40	**1**

I casi P=20 e P=40 si escludono perché non si riescono a trovare X,Y,Z voluti. Il caso P=1 si esclude perché altrimenti Alberto avrebbe vinto. Il caso P=2 si esclude perché Paoletto non potrebbe avere preso più di 8+9=17 punti complessivi.

Il caso P=10 porta però già a due soluzioni, il che non è Bello.

Innanzitutto, l'unica possibilità di assegnare (X,Y,Z) è (3,1,0). Se la prima prova è matematica, i casi sono due:

1) Paoletto ha preso (1,1,1,1,3,3,3,3,3,3), Alberto (3,0,0,0,1,1,1,1,1,1) e Fred (0,3,3,3,0,0,0,0,0,0)
2) Paoletto ha preso (1,3,3,3,3,3,3,3,0,0), Alberto (3,0,0,0,0,0,0,0,3,3) e Fred (0,1,1,1,1,1,1,1,1,1).

A questo punto mi trovo costretto ad emendare la seconda ipotesi e richiedere Z>0. Il caso P=10 a questo punto diventa impossibile, così come il caso P=8; infatti la somma di punti minore possibile è 3+2+1=6. Rimangono pertanto i casi P=4 e P=5. Ma per P=4, il punteggio X deve essere al più 6, altrimenti Alberto avrebbe fatto più di nove punti. Ma con X=6, Paoletto avrebbe dovuto prendere (4,6,6,6) che è impossibile perché richiederebbe Z=0; con X<6 Paoletto non sarebbe mai potuto arrivare a 22 punti.

Insomma, P=5; il primo in una prova deve prendere almeno 4 punti, se la distribuzione è 4,3,1, ma (4,1,1,1,1) dà solo 8 e (4,3,1,1,1) dà già 10, quindi non è possibile che Alberto abbia preso 9 punti in totale. Ergo, il primo di una prova deve prendere 5 punti, e Alberto ha ottenuto (5,1,1,1,1); a questo punto è banale scoprire che Paoletto ha preso (2,5,5,5,5) e Fred (1,2,2,2,2).

QED.

Il QED di ***.mau.*** potrebbe mettere rapidamente la parola fine al problema, che era – tutto sommato – non tra i più difficili mai pubblicati. Non possiamo davvero fare a meno di negare la pubblicazione ad alcune meritevoli trattazioni, e limitare perfino le citazioni dei solutori. Tra questi, ritroviamo ancora ***Cid, Luigi R., Zar***, ***Fausto***, ***Val316***, ***GaS***, ***Socram***, ***Davide*** e altri ancora. Tra questi, ***Massimiliano*** che ipotizza che "…probabilmente le materie erano, oltre Matematica, Astronomia, Geometria, Retorica e Poesia". Proprio la non terribile difficoltà del problema ha forse scatenato in alcuni solutori la voglia di risposte ed estensioni creative. Guardate ***Trekker***, ad esempio:

Supponiamo che X, Y e Z siano interi. Dai dati del quesito sappiamo che Z≥1 (=giusto per aver risposto) e, essendo X>Y>Z, possiamo scrivere anche che Y≥2 e X≥3. Viceversa essendo il punteggio di Alberto pari a 9 e, avendo Alberto in Matematica totalizzato X, possiamo anche scrivere che X≤9 e quindi Y≤8 e Z≤7. Sia S la somma S=X+Y+Z rappresentante la totalità dei punti assegnabili in ogni materia. Dalle disequazioni precedenti possiamo subito scrivere che S≥3+2+1=6 e S≤9+8+7=24. Se N sono le materie oggetto di test, essendo S i punti assegnabili per ciascuna di esse, ed essendo i punti raccolti da Alberto, Fred e Paoletto rispettivamente 9,9 e 22, possiamo scrivere NS=N(X+Y+Z)=9+9+22=40. In sintesi S deve soddisfare a:

$$6 \leq S \leq 24$$
$$S = \frac{40}{N}$$

Si noti che **N deve essere un divisore di 40.**

Risolvendo le disequazioni di cui sopra si ottiene: $6 \leq \frac{40}{N} \leq 24$, cioè $2 \leq N \leq 6$.

Analizziamo ora singolarmente i casi N=2,3,4,5,6.

N=2: non valido perché con due sole materie in cui il punteggio massimo al più è 9 non è possibile che Paoletto raggiunga il punteggio di 22;

N=3 e N=6: non validi perché non sono divisori di 40;

N=4: non valido. Infatti: da N=4 si deduce subito che S=10. La somma di tre numeri interi distinti la cui somma è 10 è ottenibile solo con le combinazioni (7,2,1), (6,3,1), (5,4,1) e (5,3,2). Analizziamole singolarmente:

- (7,2,1): non valida perché altrimenti il punteggio di Alberto sarebbe almeno 7+1+1+1=10>9;
- (6,3,1): non valida perché altrimenti la sequenza-punteggio di Alberto potrebbe essere solo 6+1+1+1=9 e quindi, al più Paoletto potrebbe totalizzare 3+6+6+6=21<22;
- (5,4,1) e (5,3,2): non valide perché Alberto, totalizzando 5 punti in Matematica, dovrebbe totalizzare 9−5=4 punti con le altre materie. Ma questo non è ottenibile sommando tre numeri qualsiasi estratti dall'insieme (5,4,1) o dall'insieme (5,3,2);

N=5: è la soluzione. Infatti: da N=5 si deduce subito che S=8. La somma di tre numeri interi distinti la cui somma è 8 è ottenibile solo con le combinazioni (5,2,1) e (4,3,1). Analizziamole singolarmente:

- (4,3,1): non valida perché se così fosse Paoletto al più totalizzerebbe 3+4+4+4+4=19<22;
- **(5,2,1) è la soluzione**. Infatti il punteggio di Alberto è ottenibile soltanto con 5+1+1+1+1=9. Il punteggio di Paoletto deve contenere almeno quattro 5 e quindi la sua sequenza-punteggio può essere solo 2+5+5+5+5=22. Si deduce, per esclusione, che la sequenza di Fred è 1+2+2+2+2=9.

In sintesi **le materie sono 5**, i punti assegnabili per ogni materia sono **(5,2,1)** e le sequenze-punteggi dei tre studenti sono:

- **Alberto : (5,1,1,1,1)**
- **Fred : (1,2,2,2,2)**
- **Paoletto : (2,5,5,5,5)**

Tempo d'esami: Estensione alla Cluedo

Vorrei provare a dare la traccia della soluzione nel caso "diretto", noti che siano cioè il numero delle materie ed il punteggio assegnabile a ciascuna di esse.

Supponiamo che le materie siano m, gli studenti siano N e i punteggi assegnabili in ogni materia siano p_j con j=1,2, ... N, tutti distinti.

Il Caso da Cluedo

La polizia, trovando (sotto la cattedra) due biglietti "sospetti" con in evidenza le sequenze di numeri q_i e l_i con i=1,2,...,M, ha incaricato la "scientifica", subodorando qualcosa di losco, di fare "luce" sul caso. In particolare si "sospetta" che ci siano M≤N studenti "balordi" (già individuati e che ipotizziamo essere i primi M) che hanno imposto (con le "brutte") alla commissione di ottenere almeno un punteggio l_i (i quali punteggi evidentemente sono maggiori del punteggio minimo per essere promossi) essendo "disposti a pagare" q_i per ogni punto in più rispetto agli l_i. La "scientifica" è chiamata a dimostrare che gli M compiti "incriminati" (di cui si ha copia) degli studenti sono in qualche modo correlati con i biglietti ritrovati.

La "scientifica" cerca la "prova" risolvendo un opportuno problema di programmazione lineare binaria (algoritmi a gogo sull'argomento sono già disponibili in letteratura), precisamente: siano P_i i punteggi totali ottenuti dallo i-esimo studente, con i=1,2, ...,N

siano x_{ijk} delle variabili binarie (che cioè possono solo assumere il valore 0 e 1), precisamente:

- se x_{ijk}=1, lo studente i-esimo ha ottenuto nella materia k-esima il punteggio j-esimo p_j ;
- se x_{ijk}=0, lo studente i-esimo NON ha ottenuto nella materia k-esima il punteggio j-esimo p_j.

Si noti che dovendo, per ogni materia k-esima, assegnare una e una sola volta tutti i punteggi p_j deve succedere che:

$$\sum_{j=1}^{j=N} x_{ijk} = 1 \text{ con i=1,2,...N}$$

cioè lo studente i-esimo nella materia k-esima ha preso solo uno ed uno solo dei possibili valori p_j

$$\sum_{i=1}^{i=N} x_{ijk} = 1 \text{ con j=1,2,...N}$$

cioè uno e uno solo studente ha preso nella materia k-esima il punteggio p_j

Fatte queste considerazioni la "scientifica" cerca la soluzione che "massimizza" la "rendita" promessa tenendo conto dei vincoli e cerca di risolvere il seguente problema di programmazione lineare binaria:

$$max\ f=\sum_{i=1}^{M} P_i\ \ q_i - l_i$$

$$P_i=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{N} p_j\, x_{ijk}\geq l_i \text{ con i=1,2, ...M}$$

$$\sum_{j=1}^{j=N} x_{ijk}=1\,,\sum_{i=1}^{i=N} x_{ijk}=1 \text{ con j=1,2,...N}$$

$$x_{ijk}\quad \{0,1\}$$

Se ci fosse una soluzione corrispondente ai compiti "incriminati" la posizione dei "balordi" si complicherebbe...

Cluedo. Chi non ci ha mai giocato alzi la mano. Intere serate sono passate urlando frasi come "Miss Scarlett con la chiave inglese nella veranda!" o "Il colonnello Custard in sala da biliardo col candelabro". Solo chi lo ha fatto davvero può capire. Il GC e Doc ogni tanto tirano in ballo singhiozzanti nostalgie su un gioco di ruolo chiamato "Septima Legio", a cavallo tra l'Impero Romano e l'esplorazione spaziale. Dicono che avesse un libro bellissimo pieno di creature strane, che serviva per il gioco. Mah, sarà. Certo è che classici come Cluedo restano inarrivabili. Ve lo figurate un problema risolto da ***Trekker*** con l'estensione "Il caso da Septima Legio"? Ma figuriamoci.

In tema di creatività, l'unico che può contendere a ***Trekker*** il titolo, su questo problema, è l'*Ambasciatore di RM a Londra*, ovvero ***Marco***. Guardate cosa ci fa arrivare, da Oltremanica:

> Oh, allora, come promesso, il problema delle pagelle.Se supponiamo cose abbastanza ragionevoli per il sistema dei punteggi, allora le materie sono 5, e i punteggi sono 5, 2 e 1. E suppongo che questo fosse il problema che volevate fosse risolto.
>
> Ma è davvero questa la soluzione? Pensiamoci...
>
> ****Soluzione 1****
>
> Supponiamo che matematica sia l'unica materia. Allora c'è poco da dire: Paoletto piglia il suo 22, mentre Fred e Alberto, pigliano 9. (m=1, X=9, Y=9, Z=22).
>
> Mmmh... strana maestra... di solito si cerca di assegnare punteggi maggiori agli studenti migliori. Va bene: questo suggerisce una definizione.
>
> **Proprieta' 1 (Monotonia)** Una soluzione si dice _*monotona*_ se si ha che X >= Y >= Z. Se inoltre vale X > Y > Z si dice che è _*strettamente monotona*_.
>
> Ok. E allora diciamo che cerchiamo una soluzione monotona al problema delle pagelle. Giusto? Perfetto. Guardate questa:
>
> ****Soluzione 2****
>
> Supponiamo che ci siano due materie, che Alberto arrivi primo in mate, ma ultimo nell'altra materia e viceversa che Fred arrivi ultimo in mate e primo nell'altra materia. Allora m=2, X=12, Y=11, Z=−3 è una soluzione monotona del problema.
>
> Anche qui, succedono cose strane. Di solito, a scuola non si vedono voti negativi. Per evitare l'inghippo, definiamo:
>
> **Proprieta' 2 (Positivita')** una soluzione si dice _*non negativa*_ se X, Y, Z sono non negativi. Se sono anche strettamente positivi, allora la soluzione si dice _*positiva*_.

Sembra quindi ragionevole supporre che la candidata soluzione, oltre ad essere monotona debba essere anche positiva, o, alla peggio, non negativa. Tutto a posto? Ripartiamo.

Soluzione 3

Supponiamo che ci siano tre materie, e che Paoletto arrivi secondo in mate e primo in tutte le altre materie, mentre Alberto arrivi ultimo in tutte le materie tranne mate. Allora, m=3 $X = 9 - 2/9$, $Y = 4 + 4/9$, $Z = 1/9$ è una soluzione positiva e monotona.

Anche qui, fatta la legge, trovato l'inganno. Va bene che a scuola i voti possono essere buffi, cosicchè un insegnante che voglia dare un po' meno di sei, ma un po' piu' di cinque puo' sbizzarrirsi con "cinquepiu'", "cinquepiupiu'" "cinquemmezzo", "dalcinquealsei", "seimenomeno" oppure "seimeno", o altri analoghi piu' o meno fantasiosi.

Tuttavia, nel fantastico mondo dei problemi di matematica, possiamo almeno ritenere che i voti siano di sani, onesti e precisi numeri naturali.

Proprieta' 3 (Interezza) Una soluzione si dice _intera_, se X, Y e Z sono numeri interi.

Oh, bene. Ci siamo? Non ancora... c'è un altro modo abbastanza ovvio di stilare i punteggi:

Soluzione 4

Se si dà un punto a chi arriva primo, e zero agli altri, ci sono quaranta materie, e Alberto e Fred primeggiano in esattamente nove di esse, allora si ha la soluzione intera, non negativa e [non strettamente] monotona m=40, X=1, Y=0, Z=0.

Ve l'immaginate una scuola con quaranta materie? Tuttavia, se cerchiamo soluzioni intere, strettamente positive e strettamente monotone, allora effettivamente vale:

Teorema 1 (RM 105.2.1) L'unica soluzione intera, strettamente positiva e strettamente monotona al problema si ha per m=5, X=5, Y=2, Z=1, con Paoletto che arriva secondo in mate e primo in tutte le altre materie, mentre Alberto arriva ultimo in tutte le materie tranne mate.

Dim.: Facile esercizio per il lettore.

A conclusione, alcune cose enunciate alla rinfusa, senza troppe garanzie di correttezza.

Proposizione 1: Se m = 2, allora non esistono soluzioni che siano sia monotone, che non negative.

Dim.: Se esistesse una siffatta soluzione, si avrebbe che $X <= 9$, dato che l'altra materia di Alberto è non negativa. Ma allora, il massimo dei punti possibili sarebbe 18 (=2X), per la monotonia, mentre sappiamo che Paoletto ne ha 22.

Proposizione 2: le soluzioni con m = 2 sono tutte e sole della forma seguente:

	Alberto	Fred	Paoletto
Mate	X	9−X	11
non Mate	9−X	X	11

Proposizione 3: Se m=3, l'unica altra soluzione monotona (oltre alla Soluzione 3 piu' sopra) è $X = 12 - 1/3$, $Y = 3$, $Z = - 1 - 1/3$. Qui Fred si piazza secondo in tutte le materie, Alberto arriva primo in mate, ma ultimo nelle altre materie.

Proposizione 4: Se m>=3, esiste sempre almeno una soluzione monotona e positiva.

**Proposizione 5*:* Se m>=4, esistono sempre infinite soluzioni monotone e positive.

**Proposizione 6*:* Le uniche due soluzioni intere e non negative, in cui due tra X, Y e Z sono uguali tra loro sono: la Soluzione 1 e la Soluzione 4 viste sopra. In particolare, la Soluzione 4 è l'unica che sia intera, non negativa, monotona, ma non strettamente monotona.

Proposizione 7: Le uniche altre soluzioni intere, monotone e non negative, oltre alle soluzioni gia' descritte, sono:

m=5. X=7, Y=1, Z=0.

m=8. X=4, Y=1, Z=0.

m=8. X=3, Y=2, Z=0.

m=10. X=3, Y=1, Z=0.

E con questo, direi che basta così.

Beh, come contraddire quest'ultima affermazione? Anche per noi va bene, basta così. Ma solo per questo problema; abbiamo ancora qualcos'altro di cui parlare.

4.2.2 Senza attaccarci niente in testa

Lo confessiamo: non siamo sicuri di riuscire ad arrivare alla fine di queste Soluzioni e Note. Proviamo adesso un rush finale, non troppo diverso da quello che riescono a fare ancora gli atleti dei diecimila metri, quando nessuno è riuscito a staccare tutti gli altri. Seguiamo ***FraPao***:

Procedura per rispondere al primo quesito ("che cosa va biascicando Fred ?"):

a) si scrivano i quadrati dei numeri naturali da 10 a 31 (i soli a 3 cifre)

b) si eliminino quelli aventi delle ripetizioni nelle cifre (es. 100, 121, ecc.)

c) fra i quadrati restanti si formino tutte le possibili coppie che non abbiano ripetizioni di cifre (es. 361-289, 196-324 ecc.); si indichi il primo numero di ogni coppia come "numero di Alberto", il secondo come "numero di Fred"

d) si formino gruppi di coppie aventi lo stesso numero di Alberto; si indichi ciascuno di tali gruppi come "gruppo-Alberto"

e) all'interno di ogni gruppo-Alberto, si segni a fianco di ogni numero di Fred il corrispondente "residuo sacchetto", cioè le cifre da 0 a 9 rimanenti nel sacchetto dopo aver determinato i numeri di Alberto e di Fred

f) si eliminino tutti i gruppi-Alberto in cui ci sia almeno un residuo sacchetto non avente 3 cifre comuni con tutti gli altri residui del gruppo

g) se non si capisce cosa c'è scritto sotto i punti da *a* a *f*, lo si faccia, perché facendolo lo si capisce

h) si constati che dopo l'eliminazione rimangono solo 2 gruppi, il gruppo "256" e il gruppo "625", in ciascuno dei quali ci sono i numeri di Fred "784" (residuo 1,3,9,0) e "841" (residuo 3,7,9,0)

i) si prenda atto che in conseguenza di h e del fatto che Fred conosce il suo numero, il biascichìo di Fred equivale a: "…bslmntfrt…" = "Tutti!!! Li conosco tutti!!!"

Procedura per rispondere al secondo quesito:

Questa la facciamo più corta, notando che poiché Fred riesce a determinare il numero di Alberto, dobbiamo eliminare all'interno dei gruppi (con 2 cifre comuni in tutti i residui) tutti i numeri di Fred che non siano univoci tra gruppi.

Rimarranno in questo modo i gruppi-Alberto "324", "729" e "841", con i seguenti possibili numeri di Fred e corrispondenti residui:

324 ➔ 169, 196, 961 (tutti con residuo 5,7,8,0)

729 ➔ 841 (3,5,6,0)

841 ➔ 256, 625 (entrambi con residuo 3,7,9,0), 529 (3,6,7,0), 729 (3,5,6,0)

Anche qui, Fred sa tutto.

Ed è un po' quello che sostiene anche ***.mau.***, che sdegnosamente risolve dicendoci che "*…stavolta non si faceva matematica erdösiana, ma banali enumerazioni*".

Il solito ***Trekker***, comunque, dimostra di avere tutti gli strumenti per lanciarsi in enumerazioni, quando serve:

Solo elevando al quadrato i numeri compresi fra 10 e 31 (compresi) si ottengono dei quadrati di tre cifre. Da questa lista di quadrati, depennando quelli che hanno almeno due cifre uguali, troviamo i possibili "candidati", precisamente {169,196,256,289,324,361,529,576,625,729,784,841,961}.

Possiamo ora costruire una tabellina delle possibili combinazioni, cioè:

		I possibili quadrati di Fred												
		169	196	256	289	324	361	529	576	625	729	784	841	961
I possibili quadrati di Alberto	169					X						X		
	196					X						X		
	256											X	X	
	289						X							
	324	X	X						X					X
	361				X			X			X	X		
	529						X					X	X	
	576					X							X	
	625											X	X	
	729						X						X	
	784	X	X	X			X	X		X				X
	841			X				X	X	X	X			
	961					X						X		

In pratica si è messa una X in corrispondenza delle coppie di quadrati che, essendo in mano ad Alberto e Fred , sono distinti. Ad esempio, osserviamo la prima riga: se Alberto avesse {169} allora Fred potrebbe avere solo {324} o {784}.

Aggiungiamo la colonna contenente le cifre che potrebbero essere nelle mani di Fred e la colonna delle cifre che potrebbero essere nel sacchetto nota che sia la "mano" di Alberto. Ad esempio se Alberto avesse {169} allora Fred, come indicato prima, potrebbe avere solo {324} o {784}. Riempiamo quindi la prima riga di questa colonna con {324} U {784} = {23478}. Ne deduciamo che nel sacchetto di sicuro ci sono le cifre {0123456789}-{169}-{23478}={05}, etc.

La tabella che ne risulta è:

		I possibili quadrati di Fred													Possibili cifre in mano a Fred. Stima iniziale di Alberto.	Possibili cifre nel Sacchetto. Stima iniziale di Alberto.
		169	196	256	289	324	361	529	576	625	729	784	841	961		
I possibili quadrati di Alberto	169					X						X			23478	05
	196					X						X			23478	05
	256											X	X		1478	039
	289						X								136	0457
	324	X	X						X					X	15679	08
	361				X			X			X	X			245789	0
	529						X					X	X		134678	0
	576					X							X		12348	09
	625											X	X		1478	039
	729						X						X		13468	05
	784	X	X	X			X	X		X				X	123569	0
	841			X				X	X	X	X				25679	03
	961					X						X			23478	05

Primo quesito

Siccome Alberto sostiene di essere in grado di individuare esattamente tre cifre nel sacchetto, tratteniamo solo le righe che soddisfano questa condizione (in pratica le righe che nell'ultima colonna contengono {039}) e cancelliamo le altre.

La nostra tabella diventa quindi:

		I possibili quadrati di Fred													Possibili cifre in mano a Fred. Stima iniziale di Alberto.	Possibili cifre nel Sacchetto. Stima iniziale di Alberto.
		169	196	256	289	324	361	529	576	625	729	**784**	**841**	961		
I possibili quadrati di Alberto	**256**											X	X		1478	039
	625											X	X		1478	039

Ora è il turno di Fred. Aggiungiamo due righe contenenti rispettivamente le possibili cifre in mano ad Alberto e le possibili cifre nel sacchetto nota che sia la risposta di Alberto. Con un ragionamento analogo al precedente (ma ora per colonne invece che per righe) si ottiene:

		I possibili quadrati di Fred													Possibili cifre in mano a Fred. Stima iniziale di Alberto.	Possibili cifre nel Sacchetto. Stima iniziale di Alberto.
		169	196	256	289	324	361	529	576	625	729	**784**	**841**	961		
I possibili quadrati di Alberto	**256**											X	X		1478	039
	625											X	X		1478	039
Possibili cifre in mano ad Alberto. Stima di Fred dopo risposta di Alberto.												256	256			
Possibili cifre nel Sacchetto. Stima di Fred dopo risposta di Alberto.												**0139**	**0379**			

Cioè Fred è in grado di "predire" le **quattro** cifre rimaste nel sacchetto, precisamente {0139**}** se avesse in mano {784} oppure {0379} se avesse in mano {841}.

Secondo quesito

Nel secondo turno Alberto afferma di essere in grado di individuare esattamente due cifre del sacchetto. Cancellando dal nostro schema le righe che non portano a questa conclusione otteniamo:

		I possibili quadrati di Fred													Possibili cifre in mano a Fred. Stima iniziale di Alberto.	Possibili cifre nel Sacchetto. Stima iniziale di Alberto.
		169	**196**	**256**	289	324	**361**	**529**	576	**625**	**729**	784	841	**961**		
I possibili quadrati di Alberto	169					X						X			23478	05
	196					X						X			23478	05
	324	X	X						X					X	15679	08
	576					X							X		12348	09
	729						X						X		13468	05
	841			X				X	X	X	X				25679	03
	961					X						X			23478	05

Ora è il turno di Fred "per colonne". La nuova tabellina è:

		I possibili quadrati di Fred													Possibili cifre in mano a Fred. Stima iniziale di Alberto.	Possibili cifre nel Sacchetto. Stima iniziale di Alberto.
		169	**196**	**256**	289	324	**361**	**529**	576	**625**	**729**	784	841	**961**		
I possibili quadrati di Alberto	169					X						X			23478	05
	196					X						X			23478	05
	324	X	X						X					X	15679	08
	576					X							X		12348	09
	729						X						X		13468	05
	841			X				X	X	X	X				25679	03
	961					X						X			23478	05
Possibili cifre in mano ad Alberto. Stima di Fred dopo risposta di Alberto.		234	234	148	N/A	15679	279	148	12348	148	148	169	25679	234		
Possibili cifre nel Sacchetto. Stima di Fred dopo risposta di Alberto.		**0578**	**0578**	**0379**	N/A	08	**0458**	**0367**	09	**0379**	**0356**	0235	038	**0578**		

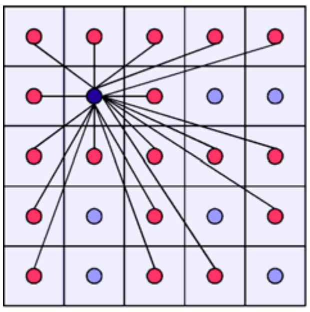
In generale dopo la proposizione (qualunque essa sia) di Alberto è possibile cancellare le celle che NON la rendono vera. Procedere poi analogamente con la proposizione (qualunque essa sia) di Fred cancellando le celle che NON la rendono vera fino a che uno dei due non riesce a rispondere alla domanda di Rudy.

Beh, noi si potrebbe continuare a lungo, sapete? Ci sono ancora ***Cid***, ***Fausto***, ***Val316***, ***GaS***, e volendo si sta qui a scrivere RM di Novembre fino a Natale. Ma forse è meglio di no, vero?

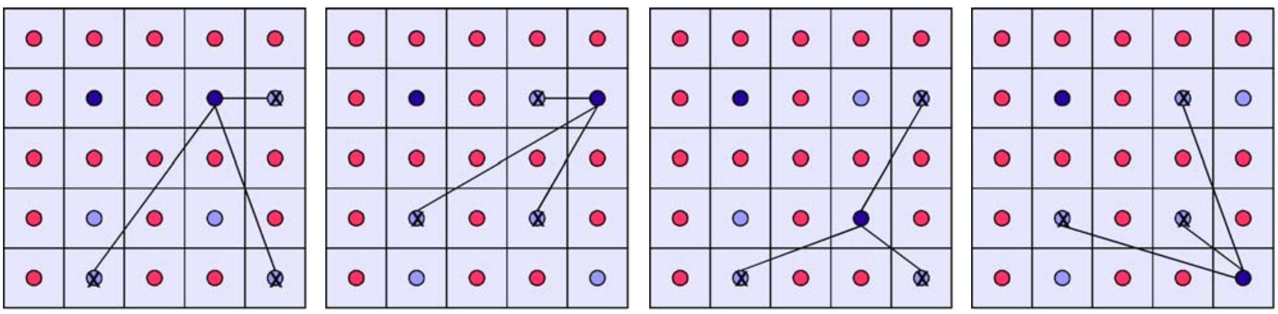
4.2.3 Quick and Dirty

Lo sapevamo, che ci sareste cascati. Pensavate fosse finito tutto, ormai, vero? Invece no, perché ***Trekker*** ci manda una soluzione del Q&D che, anche se più lunga di quella che avevamo noi, ci pare molto più comprensibile. Come non pubblicarla, allora?

Non esiste soluzione. Supponiamo infatti che esista e diciamo che la posizione in seconda riga seconda colonna sia occupata da una moneta di colore (ad esempio) blu. Coloriamo di non-blu (ad esempio rosso) tutte le monete in qualche modo osservabili (in linea retta) da questa posizione. Otteniamo la figura che segue:



Si noti che ci sono solo sei posizioni (di colore lilla) non osservabili dalla moneta blu. Mettiamo ora il nostro "occhio" nelle posizioni delle monete lilla e colleghiamo quelle, fra loro, osservabili via via da ciascuna di esse (per brevità e simmetria tralasciamo di tracciare le linea di vista dalle due posizioni lilla della seconda colonna poiché si trarrebbero considerazioni "simili" a quanto deducibile dalle due posizioni lilla della seconda riga). Otteniamo:



ovvero da ogni posizione "lilla-probabile-blu" si vedono altre tre monete lilla e quindi le posizioni blu non reciprocamente visibili sono al più quattro, non cinque.

E adesso, davvero, non possiamo fare altro che chiudere. Che fatica!

5. Quick & Dirty

Avete una griglia di 5×5 punti, ogni punto dista dall'altro 4 centimetri.

Avete 25 gettoni, di 5 colori diversi, 5 per tipo, del diametro di 1 centimetro.

Volete che nessun gettone possa vedere (lungo una linea di vista qualsiasi, non necessariamente le linee della griglia) altri gettoni del proprio colore (un gettone impedisce la vista attraverso di esso).

Come disponete i gettoni?

> *Numeriamo i punti di incrocio come coordinate: ognuno dei 5 gettoni di ogni colore si troverà in un punto per cui la somma delle coordinate è pari o dispari. Ogni gettone "dispari" di un colore può vedere tutti i gettoni "pari" che non si trovano sulla stessa riga o colonna, e viceversa. Essendoci 12 gettoni dispari e 13 gettoni pari, il quinto gruppo di gettoni non può essere posizionato.*
>
> *Quindi, è impossibile.*

6. Pagina 46

Sia x un numero soddisfacente le condizioni del problema; dovendo essere $6x$ un numero composto (come x) da sei cifre, la cifra più significativa deve essere 1 (e la cifra immediatamente meno significativa non deve essere maggiore di 6); quindi:

1. Le cifre più significative di x, $2x$, $3x$, $4x$, $5x$ e $6x$ devono essere tutte diverse tra loro e quindi, dovendo ciascuna di esse comparire nel numero originale, spaziano su tutte le cifre contenute nel numero x.
2. Tutte le cifre di x sono diverse tra loro.

Nessuna cifra può essere 0, altrimenti uno dei prodotti indicati inizierebbe con 0.

La cifra meno significativa deve essere dispari, altrimenti $5x$ terminerebbe con 0.

La cifra meno significativa non può essere 5, altrimenti $2x$ terminerebbe con 0.

Di conseguenza, le cifre meno significative dei numeri x, $2x$, $3x$, $4x$, $5x$ e $6x$ devono essere tutte diverse tra loro e quindi, dovendo ciascuna di esse comparire nel numero originale, spaziano su tutte le cifre contenute nel numero x.

Quindi, la cifra meno significativa di uno di questi numeri è 1.

$2x$, $4x$ e $6x$ sono pari, quindi non possono terminare per 1.

$5x$ deve terminare per 5, quindi non può terminare per 1.

x ha 1 come cifra più significativa, quindi non può terminare per 1.

Quindi, $3x$ termina con 1, il che implica che la cifra meno significativa di x sia 7.

Da cui, $2x$ ha come cifra meno significativa 4, $4x$ ha come cifra meno significativa 8, $5x$ ha come cifra meno significativa 5, $6x$ ha come cifra meno significativa 2.

Dovendo le cifre più significative essere le stesse, possiamo disporre i diversi prodotti in ordine crescente, considerando che tutti i numeri sono di sei cifre e quindi quelli con cifra più significativa maggiore saranno dati dal prodotto di x per un fattore maggiore:

$$
\begin{aligned}
x \cdot 1 &= 1****7, \\
x \cdot 2 &= 2****4, \\
x \cdot 3 &= 4****1, \\
x \cdot 4 &= 5****8, \\
x \cdot 5 &= 7****5, \\
x \cdot 6 &= 8****2.
\end{aligned}
\qquad \textbf{[1]}
$$

In questa rappresentazione, non solo ogni riga deve contenere le cifre dell'insieme $\{1,2,4,5,7,8\}$, ma ogni colonna deve contenere le stesse cifre in un qualche ordine; infatti:

> Supponiamo che $x \cdot 2$ e $x \cdot 5$ abbiano la stessa cifra a in una qualche posizione, sia per ipotesi la terza (ricordiamo che per ognuno dei due numeri a non può avere valore diverso dalle due restanti cifre una volta che si siano esclusi i valori assunti dalle altre cifre del numero in esame). Allora, la differenza $x \cdot 5 - x \cdot 2 = x \cdot 3$, che deve essere un numero di sei cifre, avrà in terza posizione o la cifra 0 o la cifra 9 (questo secondo caso nasce dal fatto che possiamo avere un prestito durante la sottrazione); ma questo è impossibile, in quanto 0 e 9 non possono far parte di $3x$.

Quindi, nella rappresentazione **[1]** tutte le colonne saranno composte dalle stesse cifre in diverso ordine e quindi la somma di ogni colonna sarà $1+2+4+5+7+8=27$; sommando anche sul lato sinistro, otteniamo $x \cdot 21 = 2\,999\,997$ che, con una semplice divisione, ci dà $x = 142\,857$.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Il romanzo della Partita Doppia

Ci scusiamo con i (dis)interessati, ma questa volta PM è una comunicazione interna; Rudy ha deciso di spiegare come funziona 'sta roba, e l'unico modo per non essere interrotto è quello di scriverlo qui. Siccome anche a lui non è che la cosa sia molto chiara, il pezzo "si ispira ampiamente" ("scopiazza di brutto") da un vecchio articolo.

La Partita Doppia è un metodo per tenere conto delle entrate e uscite di piccole aziende; anche se il metodo risale probabilmente alla Genova del quattordicesimo secolo, la prima descrizione scritta sembra essere quella del 1458 di Benedetto Cotrugli (o, se preferite, *Benedikt Cotrugljevic*, visto che era di Dubrovnik); il buon *Luca Pacioli* ne scrive ampiamente nel capitolo *De Computis et Scripturis*, contenuto nel *Summa de Arithmetica* stampato (metodo Gutemberg) a Venezia nel 1494; la stesura di cui vogliamo parlare, però, risale al 1540 ed è opera di *Domenico Manzoni*[22], sotto il titolo (chilometrico: vi diamo solo l'inizio) "Quaderno doppio col suo giornale..."; ultima edizione nota, "Opere antiche di ragioneria", Milano 1911.

Il "Quaderno" è un libro di testo, ma è anche un testo di divulgazione; infatti è probabilmente il primo testo di ragioneria che cerchi di inquadrare le operazioni contabili in un racconto, presentando un esempio effettivo del suo funzionamento; il libro non fa altro che narrarci un anno di vita di un mercante veneziano, *Alvise Vallaresso*. Come ogni libro contabile, iniziamo con un accurato inventario al primo di marzo del 1540; non solo della sua florida azienda, ma anche di tutti i suoi beni di casa, visto che le due contabilità erano tenute assieme.

Per quanto riguarda la moneta, la cosa si fa complicata: abbiamo che 32 *piccioli* fanno un *grosso*, 12 *grossi* fanno un *soldo*, 20 *soldi* fanno una *lira*. La *lira* (composta da dieci ducati, ma questi li lasciamo perdere) era, molto suppergiù, un migliaio di Euro; vi risparmio le unità di misura delle altre cose, anche perché queste erano peggio degli inglesi: al cambiare del materiale, cambiava l'unità. Ma andiamo a cominciare.

L'universo economico di Alvise è diviso in una serie di *acconti* separati: *Capitale*, *Cassa*, *Banca Priulli*, *Gioielli*, *Argenteria*, *Mobili*, *Banca Commerciale*, *Stato*, *Proprietà Fossalta*, *Proprietà S.Piero*, *Mulino di Uderzo*, *Nave Vallaressa*, *Pepe*, *Zenzero*, *Cotone di Cipro*, *Spese di Casa*, *Spese per Vestiti*, eccetera; ogni possibile ragione di transazione commerciale ha un acconto a sé, e *ogni transazione viene registrata come movimento di denaro da un acconto ad un altro*; un acconto è *addebitato **(P)***, l'altro è *accreditato **(A)***; tutte queste transazioni sono registrate nel *Giornale* di seguito, come avvengono; vediamo alcune registrazioni; in seguito, le metteremo in ordine bene.

Per cominciare, il 15 marzo Alvise *compra* da *Ser Polo Corner* 1200 libbre di *zenzero*, al prezzo di diciotto ducati per cento libbre pagando in *contanti* (fa 21 lire e 12 soldi); questa era la ventiseiesima operazione dell'anno.

###		Debito		Credito	L.	S.	G.	P.
026	P	Zenzero	A	Cassa	21	12	-	-

Quindi, il 2 aprile *vende* le 1200 libbre di *zenzero* a venti ducati per cento libbre ricevendo un pagamento in *contanti* di 24 lire:

###		Debito		Credito	L.	S.	G.	P.
050	P	Cassa	A	Zenzero	24	-	-	-

[22] Non ci risultano parentele con l'omonimo Alessandro.

Se guardate le cifre, vi accorgete che bisogna aggiungere subito un'altra voce; infatti Alvise ha guadagnato 2 lire e 8 soldi, che vanno registrate a *debito* dello Zenzero e a *credito* dell'acconto *Profitti e Perdite*:

###		Debito		Credito	L.	S.	G.	P.
051	P	Zenzero	A	Profitti & Perdite	2	8	-	-

Come dicevamo, al primo marzo la prima cosa che Alvise ha fatto è stato fare un inventario: una parte è data dalla *Cassa*, la registrazione avviene come se Alvise facesse una vendita a sé stesso, e va registrata per prima:

###		Debito		Credito	L.	S.	G.	P.
001	P	Cassa	A	Capitale	250	-	-	-

Alvise però possiede anche una nave, la *Vallaressa*, che va registrata. Vale 250 lire

###		Debito		Credito	L.	S.	G.	P.
018	P	Nave "Vallaressa"	A	Capitale	250	-	-	-

E per adesso fermiamoci qui; anche perché dobbiamo riportare tutto questo nel *Quaderno*.

Il Quaderno è organizzato su due colonne: ogni registrazione compare *due volte* (da cui il nome "Partita Doppia"): nella colonna di *sinistra* dell'acconto per cui è *Debito* e nella colonna di *destra* dell'acconto per cui è *Credito*. Al momento, il nostro Quaderno ha una struttura di questo genere:

Debito						Credito					
###		L.	S.	G.	P.	###		L	S.	G.	P.
Cassa											
001	Capitale	250	-	-	-	026	Zenzero	21	-	-	-
050	Zenzero	24	-	-	-						
Capitale											
						001	Cassa	250	-	-	-
						018	"Vallaressa"	250	-	-	-
Zenzero											
026	Acq. 1200 lb.	21	12	-	-	050	Vend. 1200 lb.	24	-	-	-
051	Profitti & Perd	2	8	-	-						
Nave "Vallaressa"											
018	Capitale	250	-	-	-						
Profitti & Perdite											
						051	Zenzero	2	8	-	-

Tutto chiaro? Chiedo perché non è finita qui.

Infatti, bisogna poi fare anche il *Bilancio*; alla fine dell'anno, se non avete sbagliato a scrivere, il *totale a debito deve corrispondere al totale a credito*; il che evita un notevole numero di errori.

Non solo, ma un ulteriore bilancio viene effettuato all'interno di ogni acconto; se i crediti eccedono i debiti (caso dell'acconto "Zenzero"), una cifra uguale è inserita a credito del conto Profitti e Perdite; viceversa, se i debiti eccedono i crediti, lo inseriremmo a debito. Quindi, per stabilire quanto siano floridi i commerci di Messer Alvise, basta guardare nel punto giusto.

Per quanto riguarda marzo e aprile, il commercio di Alvise ha riguardato principalmente spezie e zucchero; nei magazzini, otto sacchi di pepe per un totale di 3800 *libre* valutati 85 lire e 10 soldi riposavano tranquilli, almeno sino a quando non li abbiamo (a inizio marzo) segnati in inventario (da ora in poi eliminiamo le colonne delle P e A, tanto avete capito come funziona e le colonne hanno il titolo):

###	Debito	Credito	L.	S.	G.	P.
019	Pepe	Capitale	85	10	-	-

...e nel Quaderno, ma questo dovreste saperlo fare da soli.

Proviamo con qualcosa di complicato.

Il 15 marzo, Alvise compra 12 casse di Zucchero di Madera da *Ser Zuanne Bustrun* di Cipro: l'accordo era che le tasse (pari a 15 soldi, 2 grossi e 14 piccioli), anche se a carico del compratore, le avrebbe pagate Ser Zuanne; la transazione ammontava quindi a 37 lire, 4 soldi, 11 grossi e 30 piccioli.

Il 2 aprile Alvise vende lo zucchero a *Zuan Maria d'Alban*; c'è stato un calo in magazzino e Alvise concede uno sconto di metà delle tasse. Non solo, ma la vendita viene fatta a credito, con la mediazione di *Ser Francesco Colonna*, che si accontenta dell'1% del prezzo non scontato.

Risultato sul Giornale:

###	Debito	Credito	L.	S.	G.	P.
029	Zucchero di Madera	Ser Zuanne Bustrun	37	4	11	30
030	Zucchero di Madera	Ufficio Tasse	-	15	2	14
055	Zuan Maria d'Alban	Zucchero di Madera	40	16	9	-
056	Zucchero di Madera	Ser Francesco Colonna	-	8	3	-
057	Zucchero di Madera	Profitti e Perdite	2	8	3	20

E, per quanto riguarda il Quaderno, avremo un mucchio di nuovi ingressi; ad esempio,

Debito						Credito					
###		L.	S.	G.	P.	###		L	S.	G.	P.
Zucchero di Madera											
29	Zuanne Bustrun	37	4	11	30	55	Zu.Ma. d'Alban	40	16	9	-
30	Ufficio Tasse	-	15	2	14						
56	Franc. Colonna	-	8	3	-						
57	Profitti & Perd	2	8	3	20						

...e gli equivalenti in cui la stessa cifra è segnata nell'altra colonna.

Come dicevamo all'inizio, il bilancio di Alvise contiene anche quelle che nel libro vengono divise in due grandi acconti, ossia le *Spese di viver di casa* e *Spese di vestir di casa*; ciascuna di queste ha diverse parti.

Tanto per cominciare, il *cibo*; il 2 maggio Alvise ha comprato, nell'ordine:

- 4 *stara* di farina padovana pagando in contanti 14 soldi.
- 1 *bigonzia* di vino rosso vicentino da *Ser Maphio di Torta* al prezzo di 1 lira, 7 soldi e 1 grosso; in questo caso, paga a credito.
- 20 *miri* di olio buono da *Ser Zuan Francesco Galuppo*; questi era suo debitore, e la transazione annulla parzialmente il debito.

Inoltre, le "Varie ed Eventuali" vengono saldate dal servo *Antonio* (tranquilli, tra un po' torna), che viene pagato in contanti.

Riepilogando, nell'ordine:

###	Debito	Credito	L.	S.	G.	P.
115	Sp. del viver di casa	Cassa	-	14	-	-

###	Debito	Credito	L.	S.	G.	P.
116	Sp. del viver di casa	Ser Maphio di Torta	1	7	1	-
117	Sp. del viver di casa	Ser Zuan Francesco Galuppo	2	6	5	3
118	Sp. del viver di casa	Cassa	1	-	-	-

...Quaderno, certo. E che altro? E doppio, pure: una volta da una parte e una volta dall'altra. La fama di tirchi dei veneziani è perfettamente giustificata... con quel che costava la stoffa! Passiamo alle *spese del vestir di casa*. Alvise compra:

- 7 *braza* di tessuto nero da *Ser Jeronimo Paoluzi*, pagando in contanti.
- 24 *braza* di satin bianco e
- 24 *braza* di velluto cremisi da *Ser Zanantonio di Calvi*, *veludaro*, a credito: questo viene pagato attraverso la *Banca Priulli* sfruttando un credito di *Ser Juanne di Giacomo*.

Questi due ultimi capi, prima che sospettiate strane abitudini in Alvise, servono per sua sorella *Faustina* (zitella ampiamente in età da marito); se fate la somma, due vestiti vi vengono una cosina dalle parti degli ottomila euro solo di stoffa. Roba da sperare che si sposi "prima che presto" (come direbbe un veneziano intendendo "ASAP").

Per fortuna farli cucire era ragionevolmente economico; *Mastro Martino (de San Lio*: non è una calle, è una *salizada*: se non ricordiamo male, è anche il punto più alto di tutta Venezia. Il che, per una salizada, è piuttosto strano) cuce il tutto per un prezzo abbordabile, e viene pagato in contanti.

###	Debito	Credito	L.	S.	G.	P.
116	Sp. del vestir di casa	Ser Zanantonio di Calvi	3	-	-	-
120	Sp. del vestir di casa	Banca Priulli	5	8	-	-
121	Sp. del vestir di casa	Cassa	-	16	-	-

Quaderno!

Una casa del genere, con Alvise sempre impegnato a far quadrare i conti, necessita di una servitù; e infatti il 18 maggio Alvise paga *Antonio* e *Martino* (lo stesso di prima) per l'intero anno. Non solo ma *Lucia*, la fantesca, riceve un vestito (usato, con quel che costano) invernale, che viene opportunamente valutato.

###	Debito	Credito	L.	S.	G.	P.
123	Salari	Cassa, pagati a Antonio	-	8	-	-
124	Salari	Cassa, pagati a Martino	1	4	-	-
126	Salari	Guardaroba	-	9	-	-

Sul Quaderno mettetelo voi, che noi abbiamo da fare. Infatti, *Faustina si sposa!* E, indipendentemente dal *romance*, all'epoca la cosa costava. E quindi andava quadernata sul Quaderno e giornalata sul Giornale.

In totale: bisogna romanticamente elargire quattromila ducati al suocero; tanto per cominciare, contiamo il pranzo di nozze; quindi, il vestito che avevamo comprato a Faustina; poi, mettiamo nel conto come rendita quattro case in *Calle de la Pietà*, aggiungendo per buona misura qualche gioiello e finiamo di pagare con un versamento in contanti; il tutto senza dimenticare il sensale di matrimonio, *Ser Marcho Baldi*, che vuole la sua parte. Romanticismo, se ci sei batti un colpo.

In definitiva:

###	Debito	Credito	L.	S.	G.	P.
208	Capitale	Ser Jacomo Bragadin	400	-	-	-
209	Spese Varie	Cassa, per pranzo di nozze	4	11	-	-

###	Debito	Credito	L.	S.	G.	P.
210	Ser Jacomo Bragadin	Cassa	180	-	-	-
211	Ser Jacomo Bragadin	Spese del Vestir di Casa	9	4	-	-
212	Ser Jacomo Bragadin	Case (Calle de la Pietà)	100	-	-	-
213	Ser Jacomo Bragadin	Gioielli	99	-	-	-
214	Ser Jacomo Bragadin	Banca Priulli	11	16	-	-
215	Spese Varie	Cassa, per Ser Marcho Baldi	2	10	-	-

Il tutto registrato in Quaderno, chiaramente.

Ora, come diceva *Queo de'a Teraferma*[23] (trattasi di Guccini: talmente terraferma da essere quasi su un altro mare), "Settembre è il mese del ripensamento / sugli anni e sull'età / dopo l'estate porta il dono usato / della perplessità". Infatti, a settembre Alvise si sposa anche lui. E, questa volta, la dote è un'entrata (sempre alla faccia del romanticismo).

Il padre di *Lucretia Moresini*, *Philippo*, paga di dote gli usuali quattromila ducati; però, questa volta, Alvise paga una *contro-dote* di cento lire: in pratica, contribuisce anche lui alla dote.

Per quel che ne sappiamo, delle quattrocento lire di dote (meno le cento che ha pagato Alvise), venticinque erano gioielli (con la clausola che fossero usati solo da *Lucretia*), altri venticinque di gioielleria d'oro (senza clausola), trentacinque di vestiti e, per arrotondare il tutto, un trasferimento di fondi attraverso l'onnipresente Banca Priulli. Per l'organizzazione del matrimonio partono altre sette lire e mezzo, senza dimenticare *Ser Marcho Baldi* (che ormai sappiamo tutti come definire, ma non lo diciamo) che si becca una lira.

Riassumendo:

###	Debito	Credito	L.	S.	G.	P.
216	Ser Philippo Moresini	Acconto di Dote	400	-	-	-
217	Capitale	Acconto di Dote	100	-	-	-
218	Spese varie	Cassa	7	10	-	-
219	Spese Varie	Cassa, per Ser Marcho Baldi	1	-	-	-

Non solo, ma Alvise fa anche alcune spese per sua moglie: in particolare, il 10 novembre compra una pezza di satin verde e delle pelli di volpi delle Marche Trevigiane per far fare una *pelizza* (quei vestiti con il bordo di pelliccia); inoltre, a questo si aggiunge una *scuffia* di seta dorata e un collare *a la moderna*[24]. Dal punto di vista della gioielleria, visto che Lucrezia arriva con gioielli inseriti nella dote, ci limitiamo a un *pendant* di rubini e ad un anello di turchesi fabbricati da *Ser Antonio Rizo*.

###	Debito	Credito	L.	S.	G.	P.
224	Spese del vestir di casa, per Lucretia	Cassa	4	4	-	-
225	Gioielli per Lucretia	Cassa, per Ser Antonio Rizo	1	8	-	-

Segnato tutto in Quaderno, sì?

Cattive notizie.

[23] *Quello della Terraferma*, se non si capisce – in questo PM il Capo si sbizzarrisce a citare espressioni veneziane, che noi cercheremo di tradurre in nota. [AR]

[24] Secondo Wikipedia, i colletti del primo cinquecento erano piuttosto generosi nel mostrare scollature, mentre in seguito si irrigidirono per diventare molto più seri e pudichi, a voi immaginare a quale categoria appartenesse il nuovo vestito di Lucretia. [AR]

Il 4 dicembre 1540, dobbiamo segnare alle “Spese Varie” una serie di necessità:

- 20 ducati a *Ser Alessandro di Lanzolo*, per le medicine preparate per Lucretia;
- 25 ducati a *Mastro Valerio Superchio, medico*, per le visite; e, purtroppo:
- 15 ducati per 150 candele, 55 ducati per il servizio e 10 ducati in beneficenza per il funerale di Lucretia. Il tutto, per motivi di delicatezza, torna sotto una sola voce.

###	Debito	Credito	L.	S.	G.	P.
227	Spese varie	Cassa	12	10	-	-

Nonostante la tristezza del momento, i conti vanno fatti quadrare: la dote, infatti, va risuddivisa. L’accordo è che un terzo ritorni ad Alvise, un terzo al padre di Lucretia e un terzo venga distribuito secondo le volontà di Lucretia: queste ultime prevedono che la sua *pelizza* vada alla sorella più giovane *Marietta*; oltre ad un robusto lascito alle *moniche de San Lorenzo*, esistono alcune piccole donazioni che vengono raggruppate sotto voce unica.

###	Debito	Credito	L.	S.	G.	P.
228	Acconto di Dote	Capitale	133	6	8	-
229	Acconto di Dote	Ser Philippo Moresini	133	6	8	-
230	Acconto di Dote	Moniche de San Lorenzo	50	-	-	-
231	Acconto di Dote	Vestiti per Lucretia (a Marietta)	4	4	-	-
232	Acconto di Dote	Varie Donazioni	7	10	-	-
233	Acconto di Dote	Capitale	171	12	8	-

...dove l’ultima voce è la parte che resta ad Alvise della dote di Lucretia, considerata la contro-dote che aveva versato.

E Lucretia esce dalla vita di Alvise con, da un punto di vista freddamente contabile, un bilancio in pareggio. Infatti, la parte che la riguarda del Giornale (*Acconto di Dote*) presenta 500 lire a debito e 500 a credito. Possiamo, purtroppo, chiuderlo per sempre.

Ma la vita (degli altri) continua.

La prossima storia in realtà è cominciata da tempo; più precisamente, il 20 marzo, quando *Ser Venturin de la Vecchia* vende a Alvise 160 *zambelotti* (quella che oggi, nei distretti tessili, va sotto il nome di “lana di cammello”; prodotta con la lana della gola di particolari pecore, pregiatissima). Il tutto vale 64 lire, 6 soldi e 4 grossi, ma Alvise paga in contanti 20 lire e si impegna a pagare il resto “quando il galeone arriverà dalle Fiandre”. La cosa è contabilizzata in questo modo:

###	Debito	Credito	L.	S.	G.	P.
036	Zambelotti	Ser Venturin de la Vecchia	64	13	4	-
037	Ser Venturin de la Vecchia	Cassa	20	-	-	-

Il 6 aprile Alvise vende i *zambelotti* a *Ser Zuan Francesco Galuppo* (che abbiamo già incontrato, o meglio, visto che qui si tratta di una transazione precedente, che incontreremo... insomma, c’è già nel Quaderno). Alvise gli fa uno sconto (pari alle tasse di transazione), Ser Zuan paga 30 lire in contanti e il resto arriverà alla fine di luglio; *Ser Francesco Colonna*, che come al solito fa da intermediario, si prende l’1% della transazione. Se fate i conti vedete che Alvise ci ha perso, in tutto questo rigiro, e per bilanciare la voce “zambelotti” dobbiamo registrare il tutto addebitando la perdita a Profitti e Perdite.

In definitiva:

###	Debito	Credito	L.	S.	G.	P.
065	Ser Zuan Francesco Galuppo	Zambelotti	64	13	7	-

###	Debito	Credito	L.	S.	G.	P.
066	Cassa	Ser Zuan Francesco Galuppo	30	-	-	-
067	Zambelotti	Ser Francesco Colonna	-	12	11	-
068	Profitti e Perdite	Zambelotti	-	12	8	-

...e ci immaginiamo Alvise, piuttosto alterato, sbottare in un "*No vojo più santir parlar de zambelotti!*"[25]. Quindi chiudiamo anche questo conto, con un bilancio di 65 lire, 6 soldi e 3 grossi;

Zambelotti												
036	Ser Venturin de la Vecchia	64	13	4	-		065	Ser Zuan Francesco Galuppo	64	13	7	-
037	Ser Francesco Colonna		12	11	-		068	Profitti e Perdite		12	8	-
		64	25	15	-				64	25	15	-
	Debito	**65**	**6**	**3**	**-**			Credito	**65**	**6**	**3**	**-**

...e i conti tornano.

Gli altri personaggi della transazione, però, continuano a fare affari con Alvise; infatti, il 9 agosto Alvise accetta da *Ser Francesco Galuppo* (che gli era debitore) una nota da 600 ducati firmata da *Ser Antonio da Camera*; Alvise accetta la nota ma, con tutti i passaggi (vi ricordate che si pagava la tassa, sulle transazioni?) la valuta un po' meno del valore nominale; l'intero valore, invece, viene addebitato sull'acconto di Ser Antonio da Camera.

###	Debito	Credito	L.	S.	G.	P.
163	Capitale	Ser Zuan Francesco Galuppo	58	15	9	-
164	Ser Antonio da Camera	Capitale	60	-	-	-

Il 16 agosto Alvise usa la tratta (che è da 60 lire, anche se lui l'ha pagata meno) per saldare un debito con *Ser Venturin de la Vecchia*; siccome il debito era minore, Ser Venturin trasferisce ad Alvise la proprietà di 32 *carisee* (tessuto veneziano di lana leggera molto apprezzato in Oriente), dietro la garanzia di Ser Venturin che la mercanzia arriverà al mercato di destinazione. Alvise effettua un accredito unico, per mercanzia e assicurazione.

###	Debito	Credito	L.	S.	G.	P.
167	Ser Venturin de la Vecchia	Ser Antonio da Camera	15	6	8	-

Il primo di agosto le *carisee* partono sul mercantile *Michiela*, capitanato da *Ser Piero da Liesena* e dirette a *Salonica* (attuale Salonicco); Alvise apre un acconto in merito.

###	Debito	Credito	L.	S.	G.	P.
168	Viaggio a Salonica	Ser Venturin de la Vecchia	15	6	8	-

"*...par mi xe Ser Venturin, che 'l porta scarogna...*"[26] E infatti il primo gennaio 1541 arriva la notizia che la *Michiela* è stata attaccata dai pirati in vicinanza di *Capo Malio*, e ha perso l'intero carico. Siccome Ser Venturin aveva garantito per l'arrivo del carico, l'intero valore gli viene addebitato e paga. In contanti.

###	Debito	Credito	L.	S.	G.	P.
241	Ser Venturin de la Vecchia	Viaggio a Salonica	15	6	8	-
245	Cassa	Ser Venturin de la Vecchia	15	6	8	-

A questo punto, possiamo vedere l'intero Giornale di Alvise:

[25] Questa si capisce: "*Non voglio più sentir parlare di zambelotti*". E nemmeno di cammelli, supponiamo. [AR]

[26] "*Mi sembra che sia Ser Venturin a portare sfortuna*": eufemismo, ma questa volta Alvise è stato scaltro e si è assicurato. [AR]

###	Debito	Credito	L.	S.	G.	P.
1	Cassa	Capitale	250			
18	Nave "Vallaressa"	Capitale	250			
19	Pepe	Capitale	85	10		
26	Zenzero	Cassa	21	12		
29	Zucchero di Madera	Ser Zuanne Bustrun	37	4	11	30
30	Zucchero di Madera	Ufficio Tasse		15	2	14
36	Zambelotti	Ser Venturin de la Vecchia	64	13	4	
37	Ser Venturin de la Vecchia	Cassa	20			
50	Cassa	Zenzero	24			
51	Zenzero	Profitti & Perdite	2	8		
55	Zuan Maria d'Alban	Zucchero di Madera	40	16	9	
56	Zucchero di Madera	Ser Francesco Colonna		8	3	
57	Zucchero di Madera	Profitti e Perdite	2	8	3	20
65	Ser Zuan Francesco Galuppo	Zambelotti	64	13	7	7
66	Cassa	Ser Zuan Francesco Galuppo	30			
67	Zambelotti	Ser Francesco Colonna		12	11	
68	Profitti e Perdite	Zambelotti				
115	Spese del viver di casa	Cassa		14		
116	Spese del viver di casa	Ser Maphio di Torta	1	7	1	
116	Spese del vestir di casa	Ser Zanantonio di Calvi	3			
117	Spese del viver di casa	Ser Zuan Francesco Galuppo	2	6	5	3
118	Spese del viver di casa	Cassa	1			
120	Spese del vestir di casa	Banca Priulli	5	8		
121	Spese del vestir di casa	Cassa		16		
123	Salari	Cassa, pagati a Antonio		8		
124	Salari	Cassa, pagati a Martino	1	4		
126	Salari	Guardaroba		9		
163	Capitale	Ser Zuan Francesco Galuppo	58	15	9	
164	Ser Antonio da Camera	Capitale	60			
167	Ser Venturin de la Vecchia	Ser Antonio da Camera	15	6	8	
168	Viaggio a Salonica	Ser Venturin de la Vecchia	15	6	8	
208	Capitale	Ser Jacomo Bragadin	400			
209	Spese Varie	Cassa, per pranzo di nozze	4	11		
210	Ser Jacopo Bragadin	Cassa	180			
211	Ser Jacopo Bragadin	Spese del Vestir di Casa	9	4		
212	Ser Jacopo Bragadin	Case (Calle de la Pieta`)	100			
213	Ser Jacopo Bragadin	Gioielli	99			
214	Ser Jacopo Bragadin	Banca Priulli	11	16		
215	Spese Varie	Cassa, per Ser Marcho Baldi	2	10		
216	Ser Philippo Moresini	Acconto di Dote	400			
217	Capitale	Acconto di Dote	100			
218	Spese varie	Cassa	7	10		
219	Spese varie	Cassa, per Ser Marcho Baldi	1			
224	Spese del vest. di casa, p. Lucretia	Cassa	4	4		
225	Gioielli per Lucretia	Cassa, per Ser Antonio Rizo	1	8		
227	Spese Varie	Cassa	12	10		
228	Acconto di Dote	Capitale	133	6	8	
229	Acconto di Dote	Ser Philippo Moresini	133	6	8	
230	Acconto di Dote	Moniche de San Lorenzo	50			
231	Acconto di Dote	Vestiti per Lucretia (a Mar)	4	4		

###	Debito	Credito	L.	S.	G.	P.
232	Acconto di Dote	Varie Donazioni	7	10		
233	Acconto di Dote	Capitale	171	12	8	
241	Ser Venturin de la Vecchia	Viaggio a Salonica	15	6	8	
245	Cassa	Ser Venturin de la Vecchia	15	6	8	

Vero, mancano delle voci. Ma, dal fatto che, se verifichiamo sul Quaderno, i debiti e i crediti si equivalgono, significa che abbiamo tenuto, almeno per questo lato, una contabilità corretta.

“Almeno per questo lato” in quanto, se guardiamo il Quaderno, vediamo che i singoli acconti non sono bilanciati; questo può nascere dal fatto che abbiamo ancora transazioni aperte con qualcuno, oppure che non abbiamo effettuato il bilanciamento con il solito “Profitti e Perdite”.

###	Debito	L.	S.	G.	P.	###	Credito	L.	S.	G.	P.
Cassa											
1	Capitale	250				**26**	Zenzero	21	12		
50	Zenzero	24				**37**	Ser Venturin de la Vecchia	20			
66	Ser Zuan Francesco Galuppo	30				**123**	Salari, pagati ad Antonio		8		
115	Spese del viver di casa		14			**124**	Salari, pagati a Martino	1	4		
118	Spese del viver di casa	1				**209**	Pranzo di Nozze	4	11		
121	Spese del vestir di casa		16			**210**	Ser Jacomo Bragadin	180			
224	Spese del vestir di casa (per Lucretia)	4	4			**218**	Spese varie	7	10		
245	Ser Venturin de la Vecchia	15	6	8		**225**	Ser Antonio Rizo	1	8		
						227	Spese varie, per funerale Lucretia	12	10		
Capitale											
163	Ser Zuan Francesco Galuppo	58	15	9		**1**	Cassa	250			
208	Ser Jacomo Bragadin	400				**18**	"Vallaressa"	250			
217	Acconto di dote	100				**19**	Pepe	85	10		
						164	Ser Antonio da Camera	60			
						228	Acconto di Dote	133	6	8	
						233	Acconto di Dote	171	12	8	
Zenzero											
26	Acquisto 1200 lb.	21	12			**50**	Vendita 1200 lb.	24			
51	Profitti & Perdite	2	8								
Nave "Vallaressa"											
18	Capitale	250									
Profitti & Perdite											
68	Zambelotti		12	8		**51**	Zenzero	2	8		
						57	Zucchero di Madera	2	8	3	20
Pepe											
19	Capitale	85	10								
Zucchero di Madera											
29	Ser Zuanne Bustrun	37	4	11	30	**55**	Ser Zuan Maria d'Alban	40	16	9	

###	Debito	L.	S.	G.	P.	###	Credito	L.	S.	G.	P.
30	Ufficio Tasse		15	2	14						
56	Ser Francesco Colonna		8	3							
57	Profitti e Perdite	2	8	3	20						
Ser Zuanne Bustrun											
						29	Zucchero di Madera	37	4	11	30
Ufficio Tasse											
						30	Zucchero di Madera		15	2	14
Ser Francesco Colonna											
						56	Zucchero di Madera		8	3	
						67	Zambelotti		12	11	
Ser Zuan Maria d'Alban											
55	Zucchero di Madera	40	16	9							
Spese del viver di casa											
						115	Cassa		14		
						116	Ser Maphio di Torta	1	7	1	
						117	Ser Zuan Francesco Galuppo	2	6	5	3
						118	Cassa	1			
Ser Maphio di Torta											
116	Spese del viver di casa	1	7	1							
Ser Zuan Francesco Galuppo											
65	Zambelotti	64	13	7		**66**	Cassa	30			
117	Spese del viver di casa	2	6	5	3	**163**	Capitale	58	15	9	
Spese del vestir di casa											
						116	Ser Zanantonio di Calvi	3			
						120	Banca Priulli	5	8		
						121	Cassa		16		
						211	Ser Jacomo Bragadin	9	4		
						224	Cassa (Per Lucretia)	4	4		
Ser Zanantonio di Calvi											
116	Spese del vestir di casa	3									
Banca Priulli											
121	Spese del vestir di casa	5	8			**214**	Ser Jacomo Bragadin	11	16		
Salari											
123	Cassa, pagati ad Antonio		8								
124	Cassa, pagati a Martino	1	4								
126	Guardaroba		9								
Guardaroba											
						126	Salari		9		
Ser Jacomo Bragadin											
210	Cassa	180				**208**	Capitale	400			
211	Spese del Vestir di Casa	9	4								

###	Debito	L.	S.	G.	P.	###	Credito	L.	S.	G.	P.
212	Case (Calle de la Pietà)	100									
213	Gioielli	99									
214	Banca Priulli	11	16								
Spese Varie											
209	Cassa, per pranzo di nozze	4	11								
215	Cassa, per Ser Marcho Baldi	2	10								
218	Cassa	7	10								
219	Cassa, per Ser Marcho Baldi	1									
227	Cassa, per funerale Lucretia	12	10								
Case (Calle de la Pietà)											
						212	Ser Jacomo Bragadin	100			
Gioielli											
225	Per Lucretia	1	8			**213**	Ser Jacomo Bragadin	99			
Ser Marcho Baldi											
						215	Spese Varie	2	10		
						219	Spese Varie	1			
Ser Philippo Moresini											
216	Acconto di Dote	400				**229**	Acconto di Dote	133	6	8	
Acconto di dote											
228	Capitale	133	6	8		**216**	Ser Philippo Moresini	400			
229	Ser Philippo Moresini	133	6	8		**217**	Capitale	100			
230	Moniche de San Lorenzo	50									
231	Vestiti per Lucretia (a Marietta)	4	4								
232	Varie Donazioni	7	10								
233	Capitale	171	12	8							
Moniche de San Lorenzo											
						230	Acconto di Dote	50			
Vestiti per Lucretia (a Marietta)											
						231	Acconto di Dote	4	4		
Varie Donazioni											
						232	Acconto di Dote	7	10		
Zambelotti											
36	Ser Venturin de la Vecchia	64	13	4		**65**	Ser Zuan Francesco Galuppo	64	13	7	
67	Ser Francesco Colonna		12	11		**68**	Profitti e perdite		12	8	
Ser Venturin de la Vecchia											
37	Cassa	20				**36**	Zambelotti	64	13	4	
167	Ser Antonio da Camera	15	6	8		**168**	Viaggio a Salonica	15	6	8	
241	Viaggio a Salonica	15	6	8		**245**	Cassa	15	6	8	
Ser Antonio da Camera											

###	Debito	L.	S.	G.	P.	###	Credito	L.	S.	G.	P.
164	Capitale	60				**167**	Ser Venturin de la Vecchia	15	6	8	
					Viaggio a Salonica						
168	Ser Venturin de la Vecchia	15	6	8		**241**	Ser Venturin de la Vecchia	15	6	8	

"...Ma come è andata, ad Alvise, quest'anno?" Beh, dal punto di vista sentimentale decisamente male, ma le fredde cifre ci dicono che, quantomeno, in cassa c'è più di quanto c'era quando abbiamo cominciato; alcune transazioni sono ancora in corso, e molte voci sono da mettere a posto essendo chiuse; ma questo, ve lo calcolate voi.

"*...e meno mal che no go mandà a Salonica 'e carisee co 'a Vallaressa...*"[27]

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[27] "*...e meno male che non ho mandato a Salonicco le carisee (la lana) con la* Vallaressa..." l'avevamo detto, che Alvise si era fatto furbo... [AR]