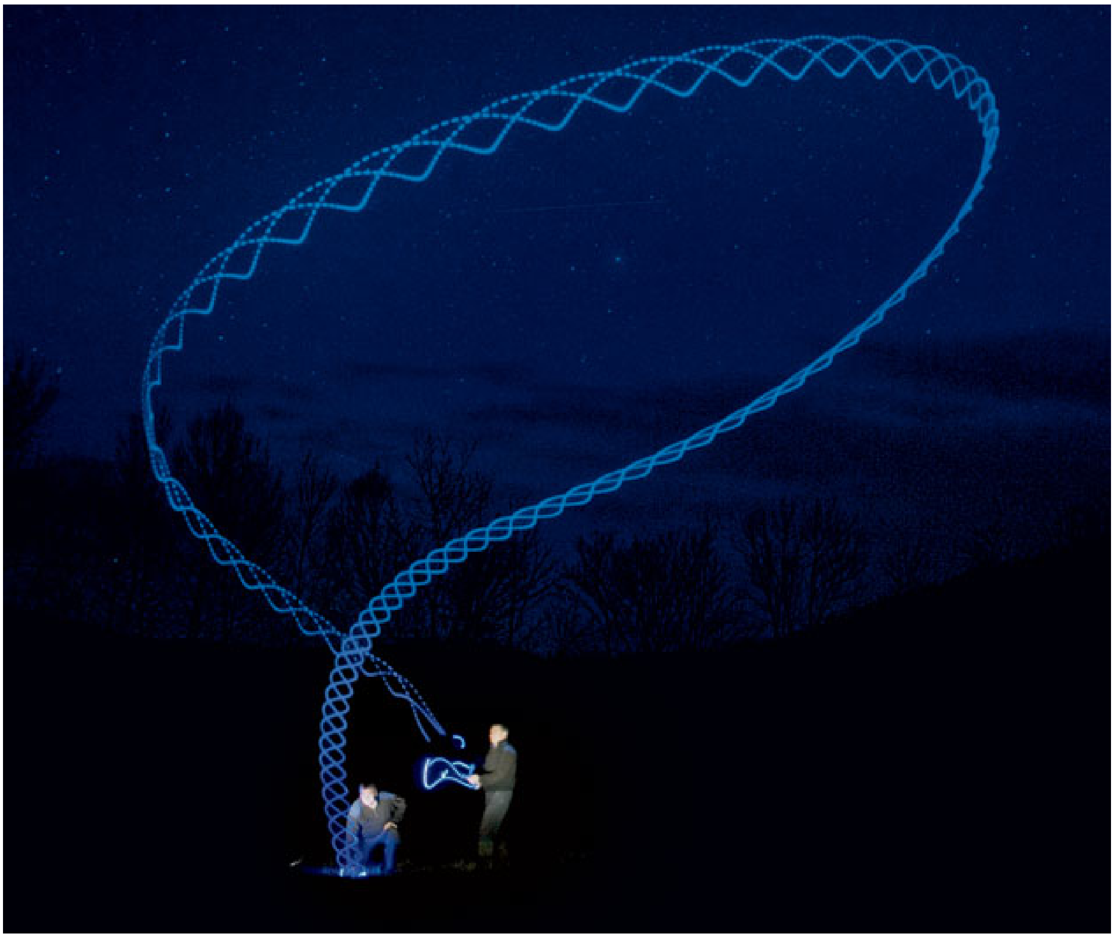
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 105 – Ottobre 2007 - Anno Nono



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 104 ha diffuso 1437 copie e il 28/09/2007 per Google eravamo in 37'600 pagine.

Eric DARNELL ha avuto la "luminosa" idea di costruirsi un boomerang di polistirolo, attaccarci due LED e provare a lanciarlo di notte; ora dovrebbe esservi più chiaro il motivo per cui non siete mai riusciti a farlo tornare indietro. Il fotografo, essendo sulla traiettoria, ringrazia per l'idea del polistirolo; sullo sfondo, un problema per gli amici astronomi: dove abita Eric, e quando ha fatto la foto?

1. Fuoco

Volentieri brucerei fino alla morte
come Fetonte,
se questo fosse il prezzo
per raggiungere il sole
e capirne la forma,
dimensione e natura.
(Eudosso di Cnido)

Siamo ancora in ottobre, e forse non avete ancora dimenticato gli incendi che hanno devastato buona parte dei nostri boschi anche quest'estate, per quanto in Grecia abbiano avuto disavventure perfino peggiori delle nostre. Eppure, non sono gli incendi boschivi quelli che più colpiscono la memoria e la fantasia[1]: l'atavica paura del fuoco è scatenata soprattutto dal terrore del fuoco addosso, tra le pareti di casa: degli incendi metropolitani, insomma, e tra questi ce ne sono alcuni che hanno segnato la storia dell'umanità in modo indelebile. Perché il fuoco devastatore non è mai stato estraneo alle città, specialmente quelle antiche. E allora, quali sono gli incendi più famosi, quelli che vengono subito in mente?

Se amate i libri, potreste avere il cuore stretto all'idea dell'incendio della Biblioteca di Alessandria, distrutta probabilmente dagli effetti collaterali delle diverse guerre che venivano combattute alle porte della città. E anche se non sappiamo ricordare con esattezza cause e colpe, è perché neppure gli storici di professione sembrano aver raggiunto una decisione definitiva; forse cominciò Cesare durante la campagna d'Egitto, o forse invece fu devastante la successiva conquista di Aureliano, o magari la definitiva conquista araba[2]; in ogni caso, la distruzione di una delle più grandi collezioni di sapere del mondo antico ci pare degna d'essere ricordata. Anche perché, come si sa, le grandi stupidaggini tendono a ripetersi: la splendida e storica Biblioteca di Lovanio fu distrutta dalle truppe tedesche nei primi giorni della Prima Guerra Mondiale, e lo scempio suscitò uno scandalo enorme, pur nella macroscopica gravità dell'aggressione bellica. Con enorme dispendio di uomini e di mezzi, fu faticosamente ricostruita nel periodo tra le due guerre, per essere poi drammaticamente nuovamente distrutta, sempre dagli attacchi tedeschi, anche durante la Seconda Guerra Mondiale.

Per ragioni storiche, geografiche e soprattutto aneddotiche, è il grande incendio di Roma all'epoca di Nerone quello che forse prima arriva alla memoria degli italiani. Anche questo, un po' per la mancanza di storici attendibili (Tacito, che ce ne ha fornito la più ampia descrizione, aveva solo nove anni all'epoca) ed un po' perché perfino oggi non è indagine semplice né facile scoprire come si inneschino gli incendi di grandi dimensioni, rimane ancora avvolto in gran parte dalla leggenda. Nell'immaginario collettivo, Nerone è visto come pazzo, incendiario e persecutore di cristiani. Gli storici, sul suo conto, sono un po' meno severi: se davvero ci fu, la pazzia fu probabilmente indotta dalle grandi quantità di un derivato del piombo presente nei condimenti che all'epoca venivano usati per preparare cibi pregiati; ma è quasi certo che la causa principale della pazzia e della cattiva fama di Nerone derivi da esagerazioni storiche. Più ancora che folle e crudele, Nerone era imperatore incapace di mantenere buone relazioni politiche con la classe

[1] Anche se sono quelli che più colpiscono gli occhi degli astronauti. Dalla ISS (Stazione Spaziale Internazionale) perennemente in orbita, gli incendi dei boschi e delle foreste sono gli eventi "notevoli" più comuni.

[2] I manuali di storia di qualche decennio fa, specie se destinati ai ragazzi, non avevano grossi dubbi: la colpa era della conquista araba della città (per quanto sembri ora che fu abbastanza pacifica), e in particolare del califfo Omar che, di fronte a tutti quei libri, dichiarò: "Se contengono ciò che è già scritto nel Corano, sono inutili; se contengono cose diverse, sono dannosi". L'aneddoto, vero o falso che fosse, è stato reso indelebile nella memoria di alcuni vecchi studenti anche per merito del Diario Vitt, che in una striscia celebrò il califfo incendiante mediante opportuna apposizione, nell'ultima casella della striscia, di una "S" prima del suo nome, trasformandolo in "S-Omar".

dirigente e colta (quella che scriveva i libri di storia, per intenderci), e basava il suo potere essenzialmente solo su un certo grado di supporto popolare. Persino le persecuzioni dei primi cristiani furono soprattutto un modo per soddisfare le pulsioni popolari, punendo quelli che la voce pubblica, assai più che le indagini di polizia, indicavano come i criminali comuni e attentatori contro l'impero di Roma.

Verso la metà luglio del 64 d.C., il fuoco distrusse completamente quattro degli allora quattordici quartieri dell'Urbe: durò per cinque o forse sei giorni, uccise migliaia di romani e ne lasciò almeno duecentomila senza tetto. Come sempre in questi casi, i quartieri ridotti in cenere furono quelli che meglio si prestavano a trasportare il fuoco: case povere e disordinate, costruite una sull'altra, con vicoli minuscoli tra gli edifici che erano quasi integralmente fatti di materiale infiammabile[3]. Nerone aprì i monumenti pubblici ai senzatetto, fece distribuire cibo dalle sue scorte personali, fece ricostruire quelle parti della città con un nuovo piano urbanistico, studiato apposta per evitare il ripetersi dell'evento e stanziò fondi per la ricostruzione: cosa tanto meritevole quanto poco nota. Anche se compì azioni non solo riprovevoli, e anche se di riprovevoli ne commise davvero un bel po', facendo assassinare sua madre, sua moglie, tutti gli avversari politici nonché un numero imprecisabile di cristiani, Nerone viene immaginato soprattutto mentre suona la lira su Roma in fiamme[4].

Nero burning ROM

Non a caso il più popolare programma di scrittura su CD si chiama "Nero": in inglese il processo di registrare un CD si chiama "to burn", che letteralmente significa "bruciare", e il gioco di parole si regge sul duplice significato di "Nero's burning ROM", che da una parte è puro advertising del software, dall'altra è autentico appiglio mnemonico al luogo comune "Nerone brucia Roma". Questo quel che rimane di lui, non certo che attorno alla sua Domus Aurea ricostruì interi quartieri per rimpiazzare quelli andati distrutti nell'incendio che, con ogni probabilità, non fu lui a provocare.

Un dipinto del 1666 dell'incendio di Londra al terzo giorno: il Ponte di Londra a sinistra e la cattedrale di St.Paul al centro, dietro alla fiamme più alte.

Questi primi esempi di incendi potrebbero far pensare che il centro culturale e politico di una determinata epoca abbia una certa tendenza ad andare in fiamme; e se anche la logica ci soccorre e corregge (è assai più probabile che il fenomeno vada letto al contrario, ovvero considerando che se un centro culturale e politico molto importante va in fiamme, allora si tende a ricordare la cosa e a tramandarla ai posteri), la mezza maledizione sembrerebbe restare valida anche per l'episodio che stiamo per affrontare, che per i paesi di lingua anglosassone è anche quello più tristemente famoso: il Grande

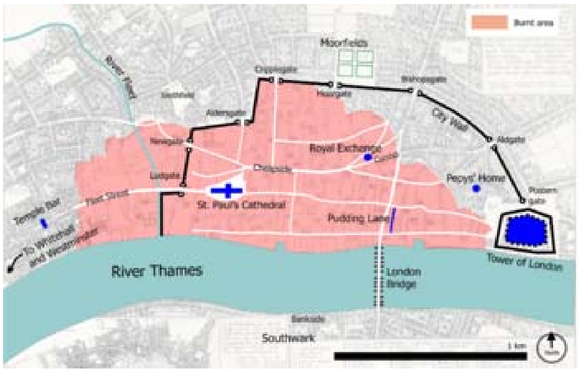
[3] Del resto, gli incendi nella Roma antica non erano una novità. Del primo triumvirato si ricordano facilmente i nomi dei triumviri, Cesare Pompeo e Crasso, ma del terzo si rammenta poco, se non il dettaglio della sua eccezionale ricchezza. Ebbene, la ricchezza di Crasso sembra provenire interamente dagli incendi: possedeva infatti le poche squadre di "vigili del fuoco", e prima di spegnere contrattava avidamente, e con mezzi da strozzino, il costo che il malcapitato proprietario della casa bruciante doveva pagargli, se voleva spento il fuoco che divorava la sua abitazione.

[4] Immagine falsa non solo per motivi storici (secondo Tacito si trovava altrove), ma anche caratteriali: con tutto quel fumo avrebbe avuto paura di rovinare la voce di cui tanto andava orgoglioso.

Incendio di Londra.

La data è quella del 2 Settembre 1666[5], o quantomeno questo è il giorno in cui le fiamme iniziarono la loro danza distruttiva. L'incendio colpì tutta la Londra medievale fino alle mura romane e durò tre giorni: rase al suolo più di tredicimila case e ottantasette chiese, minacciò il quartiere aristocratico di Westminster, distrusse la cattedrale di St. Paul e la maggior parte degli edifici pubblici dell'epoca. Secondo le stime degli storici, degli allora circa ottantamila abitanti di Londra circa settantamila rimasero senza casa, ed ancora adesso resta impossibile determinare il tributo pagato in vite umane, perché la maggior parte degli scomparsi furono letteralmente cremati, sparendo senza lasciare traccia alcuna nelle fiamme violentissime e dalla propagazione rapidissima. E comunque, come un millennio e mezzo prima a Roma, nessuno si prese la briga di controllare e men che mai contare i morti tra la popolazione di basso e medio ceto sociale.

L'incendio di Roma non aveva insegnato molto: anche in questo caso le abitazioni erano addossate una all'altra, cosa che oltre a facilitare la propagazione delle fiamme rendeva quasi impossibile tentare di spegnere il fuoco: e infatti la tecnica più diffusa per aver ragione dell'incendio era quella di abbattere gli edifici intorno all'area colpita, in modo che le fiamme non potessero estendersi agli edifici circostanti. Ma una tecnica del genere può aver successo solo se applicata in tempi brevissimi, altrimenti il lavoro diventa improbo, e sostanzialmente inutile. Eppure, quella domenica notte in cui il signor Farrinor – Panettiere Reale – si addormentò scordando qualche tizzone acceso in negozio e scatenando involontariamente l'inferno, il sindaco di Londra, Sir Thomas Bloodworth, non si affrettò ad intervenire: giudicò l'incipiente incendio trascurabile, una cosa da nulla[6], e ritardò fatalmente l'organizzazione dei soccorsi.



Il centro di Londra nel 1666: in rosa la parte incendiata.

Quando finalmente dette l'ordine di abbattere gli edifici, l'incendio era ormai talmente esteso che la contromisura non era più utilizzabile. E comunque, come al solito, la Londra che bruciava sembrava quasi meritarsi la collera divina: era una città sporca e sovrappopolata, piena di smog e ancora affetta dagli ultimi sussulti di peste bubbonica che l'aveva colpita l'anno prima. La classe ricca e nobile del tempo rifuggiva la città interna, ancora circondata dalle mura romane, perché troppo trafficata ed insalubre. Non stupisce che, a conti fatti, il numero delle vittime dell'incendio fu annunciato essere dell'ordine della ventina: i londinesi arsi nel rogo cittadino non erano altro che bestie da soma, sporchi, malati, destinati a non contare nulla nella storia: nemmeno da morti, neppure come semplice numero buono per il conteggio delle vittime.

[5] È facile intuire che l'anno, di per sé, era visto male a causa di quel "666" che richiama il celebre Numero della Bestia. Meno facile è vedere che quel numero veniva letto come di cattivo augurio anche per un'altra ragione, più recondita: 1666, scritto in cifre romane (MDCLXVI) suona come un vero conto alla rovescia verso il nulla, usando in senso decrescente tutte le "lettere" numeriche atte all'uopo. E questo sembrava un brutto segno.

[6] Se ci si passa il termine (e speriamo che ce lo passiate: del resto, per ragioni di didattica storica, occorre ben raccontare cosa disse Cambronne a Waterloo, per esempio) sembra che il sindaco, irritato per essere stato svegliato nel cuore della notte, abbia detto "Basta la pisciata d'una donna, a spegnerlo". A costo di passare per faziosi, non è possibile non notare che il suo cognome, Bloodworth, suona un po' come "il prezzo del sangue", in inglese; un prezzo davvero alto, si potrebbe dire.

Carlo II

In quel periodo, Londra non era città cara al Re d'Inghilterra: era in mano ad un'aristocrazia repubblicana che era ancora considerata una certa minaccia dalla corona ed in particolare da Carlo II, che come il suo predecessore non aspettava altro che avere una scusa per inviare forze militari in massa e riprendere il potere sull'ancora indipendente cuore commerciale. Questo spiega anche perché le prime offerte di invio di soldati e aiuti da parte del sovrano furono rifiutate dalla città, con la conseguenza che quando Carlo prese finalmente il controllo della situazione, togliendolo all'inutile sindaco, l'incendio era già fuori controllo.

Il centro era ricco di laboratori di fabbri, maniscalchi, mastri ferrai: negozi e costruzioni che a quel tempo avevano il divieto di trovarsi nel territorio urbano (proprio per il grosso pericolo di incendi, che del resto affliggevano il centro da tempo – l'ultimo datava solo pochi anni prima, avvenuto com'era nel 1632) ma che erano comunque tollerati da una classe dirigenziale corrotta. Il lungofiume che – in caso di necessità – avrebbe dovuto fungere da punto di fuga principale non solo per la presenza di acqua, ma anche per le imbarcazioni su cui rifugiarsi, si rivelò invece soggetto a molte esplosioni per la grande quantità di polvere da sparo e combustibili contenuta nelle cantine dei moli. Del resto, anche la polvere da sparo per così dire "statale" era conservata prevalentemente lungo il Tamigi, con i depositi principali che si trovavano alla Torre di Londra e sul Ponte. Lo stesso Ponte di Londra, anch'esso coperto di case, nell'incendio del 1632 si era dimostrato una trappola mortale per gli sfollati in fuga: e anche nel 1666 tutte le case del lato nord erano già bruciate al tramonto del primo giorno di fuoco, e solo lo spazio relativamente ampio tra i caseggiati delle due sponde impedì il diffondersi delle fiamme alla riva sud.

Con il ponte e la riva già preda del fuoco e con le mura romane che chiudevano a semicerchio la città, le sole via d'uscita rimanenti erano le otto porte che proprio nelle antiche mura erano ricavate. Ma non si abbandona tutto quanto si possiede se non si è davvero costretti, e la necessità di scappare al di fuori dalle mura romane non fu evidente se non verso il lunedì sera quando, dopo aver spostato i loro possedimenti già parecchie volte verso il rifugio più vicino (che poteva essere di volta in volta una chiesa, la casa di un amico, o la strada stessa), il panico prese i rifugiati che si trovarono ad accalcarsi attraverso le viuzze e gli stretti cancelli nella speranza di salvare solo le loro vite, dimentichi delle masserizie.

Il lunedì le fiamme cominciarono a raggiungere i quartieri più ricchi e gli edifici pubblici, come il Royal Exchange, che oggi definiremmo una combinazione di Borsa e centro commerciale; e pure le classi più ricche cominciarono seriamente a preoccuparsi, anche perché i loro quartieri cominciavano a venir invasi dalla popolazione in fuga lungo fiume e nelle strette vie d'accesso. Nel generale parapiglia, cominciarono a circolare voci irrazionali e disperate: forse il fuoco non era stato acceso per caso, forse l'incendio era voluto, forse era un'azione di guerra portata da nemici infiltrati. Il panico crebbe fino ad ipotizzare l'imminente invasione da parte di eserciti nemici, e a farne le spese furono, come sempre in questi casi, un gran numero di innocenti. Poveri artisti con accento francese venivano quantomeno insultati se non brutalmente travolti dalla massa di persone. Le guardie furono costrette ad occuparsi principalmente degli stranieri, dei cattolici, e di persone comunque sospette, a volte arrestandoli, a volte proteggendoli dalla folla pronta al linciaggio, a volte facendo ad un tempo entrambe le cose insieme. Ma nel far questo, dovevano ulteriormente ridurre, se non proprio abbandonare, il controllo del fuoco e delle fiamme. Per fortuna la corona riuscì a prendere in mano la situazione: arruolò ogni persona abile, distogliendola dalla fuga, e organizzò una armata di guardie destinata a limitare l'ulteriore diffusione dell'incendio e a salvare cittadini in pericolo, senza distinzione di nazionalità. Nonostante queste misure, il martedì fu il giorno di maggiore distruzione, perché neanche la corona né l'esercito avevano previsto la forza esplosiva del disastro. La Cattedrale, ormai completamente riempita di beni ivi stipati da tutti gli angoli della città interna, e considerata da tutti come luogo sicuro, cominciò anch'essa a bruciare. Per quanto fosse di pietra e non di legno, con tutta la mercanzia ammucchiata, con tutta la varietà di ornamenti e di carta conservata nelle sale, bastarono poche ore di fuoco per ridurre il centro della vita religiosa londinese in rovina.

Ci sono identità e differenze notevoli, tra l'Inghilterra del diciassettesimo secolo e la Roma del primo: il potere non può non tener conto, nella sua opera di ricostruzione, delle fondamenta sopravvissute che testimoniano l'esistenza di case perdute: e la proprietà privata deve essere preservata. Però, anche se pianta deve restare quella originale, ci sono molte cose che si possono fare, e vengono fatte: la rete fognaria viene completamente rinnovata, le strade vengono allargate, nuove misure antincendio imposte e le vecchie rafforzate. Ma, come al tempo di Nerone, un capro espiatorio torna comodo. Un povero ritardato di origine francese confessò di aver appiccato il fuoco per manifestare il suo supporto al papa contro l'Inghilterra protestante: nonostante le schiaccianti prove che palesavano la sua innocenza, fu impiccato. Meglio attribuire ai papisti e agli stranieri la scintilla del signor Farrinor.

Il mercoledì l'incendio fu finalmente spento. Non restava quasi nulla delle case del centro: cinicamente, però, non si poté fare a meno di notare che erano stati spazzati via anche la peste e gli appestati, anche le strade sporche e malfamate. Carlo II aveva una gran paura di ribellioni e tumulti, ma non aveva nessuna intenzione di distribuire gratuitamente alcunché: si limitò ad istituire un mercato ai margini della città per far riprendere un minimo di commercio, incurante del fatto che i diseredati, i disperati che avevano perso tutto tranne la vita nel fumo e nelle fiamme dell'incendio erano destinati alla fame e all'inedia. Ma era tempo di ricostruire: il monarca impose una nuova tassa sul carbone e per finanziare lo studio d'un nuovo piano regolatore. Piano piano, tornò ad esserci lavoro per tutti.

Sir Christopher Wren

Il re sceglie come principale architetto per la ricostruzione Sir Christopher Wren. Nato il 20 Ottobre 1632 da una famiglia vicina a quella reale, Christopher era tra i compagni di giochi del figlio di Carlo I[7]. Il padre (anche lui chiamato Christopher) era Decano a Windsor, grazie soprattutto all'influenza di suo fratello Mathew, che era vescovo di Hereford; pur avendo avuto molti figli, la maggior parte erano morti nei primi anni di vita. Sua moglie Mary, madre del giovane Christopher, muore poco dopo di parto, e il nostro fu cresciuto da una sorella maggiore. Minuto e cagionevole di salute, dimostrò l'amore per le scienze e per il disegno fin da giovanissimo, e grazie alle fortune di famiglia ebbe la possibilità di studiare presso la Westminster School di Londra, dove l'educazione garantiva in genere un ottimo successo, ma a prezzo d'una seria disciplina.

Ma i tempi cambiarono presto: la famiglia Wren aveva forti legami con la monarchia, che in tempi di guerra civile non erano certo un passaporto per la tranquillità. Un undicenne Christopher dovette vedere lo zio Mathew imprigionato nella Torre di Londra e l'intera famiglia in fuga. Come talvolta accade, nella sfortuna si possono fare incontri che poi si rilevano determinanti: sua sorella sposò William Holder, un matematico, che ebbe una grande influenza su di lui: lo iniziò alla scienza, appassionandolo alla matematica e

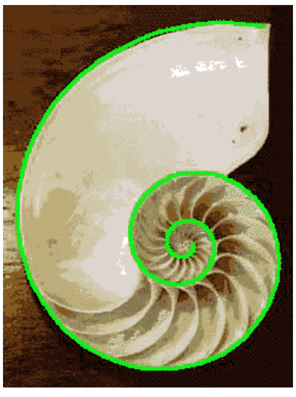
[7] Il quale a sua volta era Carlo II, che abbiamo trovato solo poco fa a scegliere un architetto londinese...

incoraggiandolo ad interessarsi di astronomia. Il 1646 lo vedeva lasciare Westminster, ma non iniziare immediatamente l'università: aveva cominciato a produrre modelli in cartapesta di vari oggetti, che al tempo stesso dimostravano il suo interesse scientifico e artistico. Fu impiegato come assistente dal dottor Charles Scarburgh, e per lui costruiva modelli di fibre muscolari e traduceva in latino scritti di matematica; non è chiaro se fu mandato dal dottor Charles a scopi terapeutici o per applicare il suo talento scientifico, ma è certo che fu allora che l'interesse per la matematica e la scienza diede i primi frutti.

Wren si iscrisse quindi all'università (Wadham College di Oxford) nel 1649, e qui ebbe una brillante carriera prima di studente e poi di scienziato dagli interessi estremamente vari: produsse disegni accurati del cervello umano, applicando i suoi studi anatomia; ipotizzò e provò un metodo di trasfusione del sangue, mettendo alla prova i suoi studi di medicina; quindi disegnò strumenti per la misurazione di angoli, macchine per il sollevamento dell'acqua, strumenti per il calcolo di longitudine e distanza in mare, marchingegni militari di difesa e altro ancora. In questo periodo incontrò Robert Hooke, con il quale stabilì un'amicizia che era destinata a durare per tutta la vita.

Nel 1657 divenne professore di Astronomia al Gresham College; stava preparando una pubblicazione che spiegava l'aspetto di Saturno, quando poco prima della pubblicazione del suo lavoro, uscì la teoria di Huygens. Wren la lesse, la riconobbe immediatamente come più accurata, e decise di non dare alle stampe il lavoro che gli era costato cinque anni di studio. Era comunque un astronomo curioso e pieno di interessi: aveva studiato le orbite ellittiche di Keplero e, anche se solo trent'anni dopo Newton riuscì a provare la relazione tra l'attrazione gravitazionale e l'inverso del quadrato della distanza, Christopher e Hooke indipendentemente avevano già suggerito una tale relazione.

I gruppi di discussione scientifica a cui partecipava erano molti, ma è certo che egli ebbe una forte importanza nella creazione di quella che fu in seguito la *Royal Society*, fondata ufficialmente nel 1660 dopo una riunione a cui Wren presenziò. Lo stesso Newton, che non era uomo da facili complimenti, giudicava Wren (insieme a Huygens e Wallis) come uno dei matematici più importanti del tempo, il che dà un'idea dell'importanza del suo lavoro: aveva appena scoperto un metodo per calcolare la lunghezza di una cicloide usando una verifica per integrazione che si basava sulla scomposizione del problema in somme di archi di circonferenza in progressione geometrica. Fu il primo a risolvere il problema di Keplero di sezionare un semicerchio in parti in una determinata proporzione con una linea in un dato punto del suo diametro. Si trattava di un problema con risvolti astronomici perché Keplero aveva ridotto lo studio del moto medio di un pianeta alla sezione di un'ellisse in una proporzione data con una retta passante per il fuoco. Risolvendo il problema, Christopher dimostrò anche la terza legge e, come già menzionato, formulò una prima versione della legge di attrazione gravitazionale con l'inverso del quadrato della distanza.



Conchiglia di Nautilus

Contribuì anche al campo dell'ottica, pubblicando la descrizione di una macchina per creare disegni in prospettiva, e in seguito dimostrò che l'iperboloide di rotazione è una superficie rigata – un altro importante risultato che arricchì la sua notorietà matematico, pubblicato nel 1669. Un suo lavoro sulla spirale logaritmica era verosimilmente in anticipo sui tempi: le osservazioni dell'esistenza una trasformazione con conservazione di area in grado di trasformare un cono in una spirale logaritmica solida (in pratica, la forma usuale di conchiglie e chiocciole) furono riprese e ben comprese solo da D'Arcy Thompson, due secoli e mezzo dopo la pubblicazione.

Ma se il re d'Inghilterra lo scelse come responsabile della ricostruzione di Londra, è perché nel frattempo il suo interesse per l'architettura era cresciuto, facendolo diventare assai bravo nel campo. Nel 1661 era stato invitato a interessarsi delle fortificazioni del porto di

Tangeri, e nel 1663 aveva studiato a fondo la struttura del Teatro di Marcello e disegnato la cappella del Pembroke College, commissionata dallo zio vescovo. Poi il grande salto, quando gli fu affidata la ricostruzione di Londra dopo il Grande Incendio. A suo fianco aveva sempre Robert Hooke, ormai amico inseparabile e supporto immancabile.

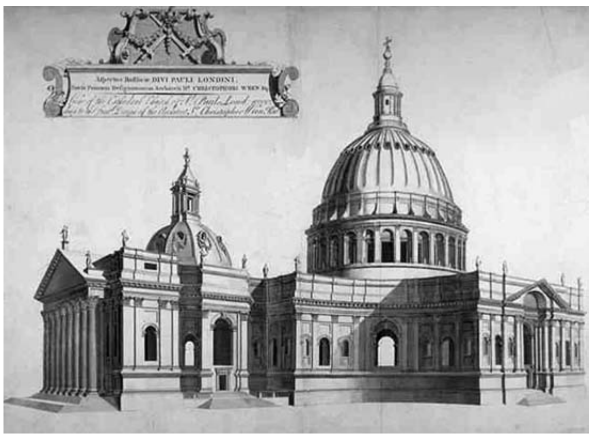
Il titolo ufficiale di Wren era "Commissario per la Ricostruzione della Città di Londra", e gli furono assegnati tre ispettori, uno dei quali era proprio Hooke. Pianificò l'intera ricostruzione e fu l'architetto di opere pubbliche e private, supervisionò la costruzione di 51 chiese, sempre restando il possessore della cattedra di astronomia di Oxford.


Il Monumento (1891 e 2005)

Insieme ad Hooke progettò il monumento destinato a ricordare il Grande Incendio, che tra l'altro fu posizionato ad una distanza dal luogo in cui si svilupparono le fiamme in Pudding Lane pari alla sua altezza. Chiamato semplicemente "il Monumento", fungeva anche da strumento scientifico: la forma interna era stata disegnata in modo da poter essere usata per esperimenti sul pendolo e la dimensione e forma dei gradini era tale per cui era possibile utilizzarne la struttura per misurazioni barometriche e previsioni meteorologiche.

In questo periodo la sicurezza della sua posizione lo fece sentire abbastanza sicuro da prendere moglie: il matrimonio, che generò due bambini, non durò più di sei anni perché Faith Wren morì molto giovane. Christopher prese presto un'altra moglie da cui ebbe altri due figli, ma che sfortunatamente morì anch'essa da lì a poco: lui non volle più sposarsi. Dei suoi novantuno anni di vita solo nove furono anni di matrimonio; e gli costarono la triste incombenza di seppellire due mogli ed un figlio.

Sebbene non si possa attraversare la pianta medievale della Londra moderna senza avere sotto gli occhi in ogni momento l'opera di Wren, è per il disegno della Cattedrale di St. Paul che passò alla storia. Fu nominato ispettore dei lavori nel 1669, e il suo primo progetto fu rifiutato per mancanza di grandiosità, il secondo per essere troppo legato alla tradizione ellenica e finalmente il terzo, basato su una pianta a croce latina e con un'ampia cupola, fu accettato.


Uno dei disegni della St. Paul Cathedral

Il progetto fu modificato dallo stesso autore parecchie volte durante la costruzione, che peraltro non nutriva serie speranze di vederlo completato, ben sapendo quali fossero i tempi per opere di tale grandiosità. In effetti, la costruzione durò 35 anni, ed essendo Wren già quarantatreenne quanto ne iniziò i lavori, fu solo grazie alla sua eccezionale longevità che poté goderne la vista per un'altra dozzina di anni dopo il completamento.

Era un uomo dal carattere mite e modesto, circondato spesso da amici originali che a loro volta non erano in buoni rapporti con il resto dell'ambiente scientifico: lo stesso Hooke polemizzò per quasi tutta la vita con scienziati che avevano approfondito temi che lui stesso aveva intuito prima, ma spesso non aveva avuto il tempo o l'interesse di portare a compimento – la sua diatriba con Newton passò alla storia. Altro caro amico di Christopher fu John Flamsteed, anche lui in perenne litigio con Newton e Halley. Scienziati estremamente creativi e prolifici, ma con difficili rapporti con il resto del mondo. Problema inesistente per Wren, che verso la fine della sua carriera di architetto fu sì criticato per essere "superato", ma che ebbe sempre la stima non solo del potere costituito, ma anche di tutto l'ambiente scientifico.

Dopo St. Paul gli fu ancora affidato il progetto dell'Osservatorio Reale e dell'Ospedale Navale di Greenwich e partecipò ai lavori dell'Abbazia di Westminster: è davvero impossibile tentare di misurare l'influenza dello scienziato nell'aspetto della Londra del Seicento. Il figlio maggiore, chiamato Christopher come il padre ed il nonno, fu suo apprendista e fu lui a raccogliere la gran parte delle informazioni che ci sono pervenute nel libro "Parentalia". Fu anche suo compito quello di scegliere l'epitaffio sulla tomba del genitore.

I resti di Christopher Wren furono sepolti in quello che fu il suo capolavoro, la Cattedrale di St. Paul. Collocati in un punto sotto il corridoio meridionale del coro, nel lato est. È un punto in cui tutta la cattedrale è splendidamente ammirabile, e non a caso la scritta sulla pietra recita: "*Lector, Si Monumentum Requiris, Circumspice*". Lettore, se ne cerchi il monumento, guardati attorno.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Tempo d'esami			
Senza attaccarci niente in testa			

2.1 Tempo d'esami

Mentre scriviamo queste brevi righe, si è appena spenta la polemica sui problemi sbagliati ai test di ammissione a Medicina e si è appena accesa quella sul fatto che qualcuno sia riuscito ad avere le risposte senza sforzo.

Facile battuta il chiedersi come abbiano risposto alle domande sbagliate quelli che avevano in tasca le soluzioni, anche se Rudy non è molto sicuro che il primo problema (quello dell'aereo[8]) fosse mal posto: in fondo, il testo diceva "si muove verso est (o verso ovest)..." e le due risposte che secondo qualcuno potevano essere giuste specificavano una ben precisa direzione del vento; allenato insieme a voi da quasi un decennio di problemi mal posti, Rudy sostiene che per essere giusta una di queste due risposte doveva valere in entrambi i casi prospettati dalla domanda[9]. Sul secondo[10], invece, niente da fare: le risposte erano tutte ciucche come delle aquile.

Il concetto di test d'ammissione può piacere o no (a noi, ad esempio, non piace, come tutti i test, del resto); visto però che non se ne può fare a meno, ammettiamo che ci piace molto il formato: una paccata di domande, divise per materie, e anche se in qualche materia non rispondi giusto a tutte le domande hai qualche speranza di rifarti con le altre; la cosa è pericolosa, perché da qui a considerare qualche materia meno importante delle altre il passo è breve e non ci piace...

La cosa ha fatto ricordare a Rudy un vecchio problema, di quelli in cui ti manca il dato fondamentale che tutti quanti dovrebbero conoscere.

Supponiamo che tre studenti (Paoletto, Alberto e Fred, giusto per restare tra gente che conosciamo: tra l'altro, auguri al primo, che inizia il liceo quest'anno; con l'assoluta certezza che si comporterà meglio del secondo) stiano partecipando solo loro ad una prova riferita ad un certo numero di materie. Per evitare il rischio paventato poche righe più sopra (quello delle materie meno importanti, non quello di barare!), la definizione dei punti avviene per materia; il primo in quella materia riceve X punti, il secondo Y e il terzo (giusto per aver risposto...) Z. Ora, Alberto ha preso X punti in Matematica (e

[8] Un aereo viaggia a 800 km/ora, in assenza di vento, in direzione Est per 400 km poi ritorna indietro. Il tempo impiegato per realizzare l'intero percorso è quindi un'ora. Quando lungo il tragitto soffia un vento diretto verso Ovest (o verso Est) pari a 100 km/ora costante per tutto il percorso, il tempo di percorrenza (andata e ritorno) sarà: A) un'ora B) più di un'ora C) meno di un'ora D) più di un'ora se il vento spira da Ovest E) più di un'ora se il vento spira da Est

[9] Come al solito il Nostro non ha nessuna voglia di fare i conti, ma probabilmente arrampicandosi su scivolosissimi specchi coinvolgenti la rotazione della Terra, un po' di relatività galileiana e l'ora locale, qualche dubbio si può quantomeno insinuare...

[10] Trovare la soluzione dell'equazione $3^{x^2} = 81$.

Rudy sta pensando a quella richiesta di motorino...); Paoletto in totale ha ottenuto 22 punti, mentre Alberto e Fred (soliti ciucci...) hanno ottenuto 9 punti ciascuno.

Ora, la domanda è (anzi, sono): ma su quante materie verteva la prova? E quanto valevano X, Y e Z?

2.2 Senza attaccarci niente in testa

Nessuno se ne è lamentato, ma sappiamo che quei problemi nei quali un temerario appiccicava cose sulla testa dei logici piacciono ad alcuni di voi; il problema è che i Validi Assistenti di RM mostrano una certa qual insofferenza nel farsi appiccicare roba in testa e poi, dato lo stato abitualmente cespugliforme delle loro acconciature (si può dire? In teoria deriverebbe da "acconcio", e sul fatto che un tale termine sia applicabile a quei due è fortemente dubbio), qualsiasi cosa gli appiccichiate sopra viene immediatamente inghiottita. La Medusa, al confronto, sembra appena uscita dalle mani di Vidal Sassoon.

Siccome però questi problemi piacciono anche a loro, hanno proposto una variazione decisamente carina e che non coinvolge le loro fronti (invisibili sotto la chioma da alcuni anni, con invidia dell'Augusto e Stempiato Genitore); siccome però è applicabile solo quando ci sono due persone, dobbiamo introdurre qualche leggera complicazione in più.

In un valido sacchetto che sostituisce l'ormai inflazionata urna, ho dieci gettoni con segnate sopra le cifre da 0 a 9; uso sei di queste cifre per comporre due quadrati perfetti di tre cifre ciascuno che consegno uno a Fred e l'altro ad Alberto, con l'ordine tassativo di non mostrarlo all'altro.

Quindi, parto ad interrogare.

Rudy: "Alberto, quante delle cifre che mi restano nel sacchetto sei in grado di individuare?"

Alberto: "Tre".

Rudy: "Fred, quante delle cifre che mi restano nel sacchetto sei in grado di individuare?"

Fred (che parla piano, una volta tanto): "..bslmntfrt.."

Almeno, io ho capito questo. Secondo voi, cosa mi ha risposto Fred?

Ricominciamo, con degli altri numeri:

Alberto dice: "Due" e Fred salta su dicendo "Alberto, conosco il tuo numero!". Ci sono tre possibilità per quanto riguarda il numero di Alberto, e vorremmo sapere tanto per cominciare quali sono, e poi quali sono i numeri che mi restano nel sacchetto...

3. Bungee Jumpers

[a]: Provare che se p è un numero primo maggiore di 3, allora il numeratore della frazione (ridotta):

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{p-1}$$

è divisibile per p^2.

[b]: Provare che se p è un numero primo maggiore di 3, allora il numeratore della frazione (ridotta):

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(p-1)^2}$$

è divisibile per p .

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Signore e signori, siamo arrivati anche ad ottobre.

Abbiamo in realtà ben pochi eventi straordinari da riportare, perché la Redazione stessa è ancora molto occuata nel battage pubblicitario dell'ormai famoso libro da loro pubblicato. Siamo felici di comunicarvi, infatti, che mentre queste righe venivano scritte abbiamo saputo che ben il 20% delle copie stampate è stato venduto.

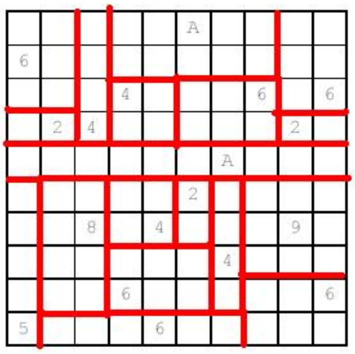
Il nostro Postino Tuttofare, che come sapete fa proprio tutto il lavoro che gli altri due non hanno voglia di fare, ha fatto una visita al nostro editore&libraio preferito e ci ha riferito che di libri in vetrina sulle simmetrie in matematica ce n'erano due: uno scritto da un paio di carciofi italiani, l'altro scritto da Marcus du Satoy, che a questo punto è evidente che ci spia. Il suo celeberrimo "Enigma dei Numeri Primi", con la foto di Riemann in bella vista, è uscito in Italia venti giorni dopo il compleanno di Riemann che usava la stessa foto. Adesso, noi usciamo con Rudi Simmetrie e lui venti giorni dopo esce con un volumazzo sulla simmetria. Solo perché è un docente di Oxford Cambridge o quel che è, e sta alla Royal Society, non significa mica che possa fare certe cose...

A parte questo, settembre è stato mese relativamente tranquillo, anche la nostra mailbox sembrava avere qualche malfunzione per lo scarso numero di mail arrivate, e noi tutti abbiamo avuto tempo di dedicarci ad altri progetti. Su quello a cui sta lavorando il Doc (a cui abbiamo già più volte accennato in modo criptico) non vi diciamo niente, ma preparatevi ad una nuova striscia di pubblicità seconda solo a quella che abbiamo fatto a Rudi Simmetrie. Su quello a cui lavorano gli altri due... state certi che prima o poi ne sarete colpiti.

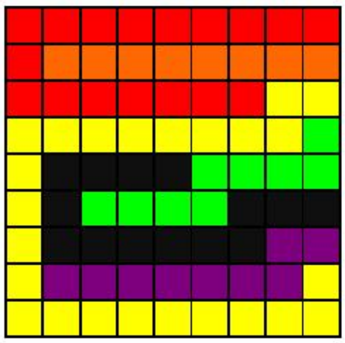
4.1 [103]

4.1.1 Typo da Spiaggia

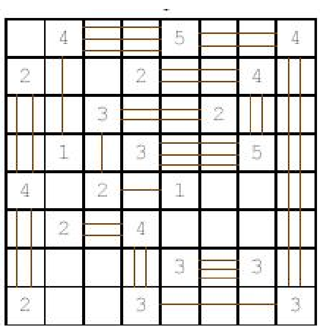
Come promesso il mese scorso, ecco le soluzioni di ***Cid*** ai giochi proposti in agosto.



Le aree

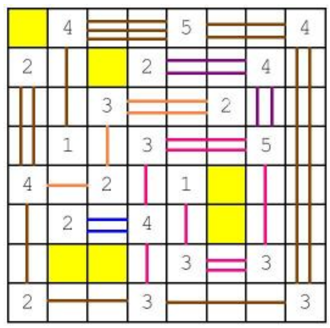


I colori



Le isole

Come già detto, ***Franco*** aveva proposto una lettura alternativa ala terza soluzione, e ***Cid*** di sicuro non si è tirato indietro, producendo una seconda soluzione, riportiamo proprio le sue parole:



Le isole II

Siccome ***Franco*** ha segnalato che nel terzo gioco dei "Typo da spiaggia" occorre aggiungere la regola che da ogni isola si devono poter raggiungere tutte le altre, dopo aver verificato che la mia soluzione non rispettava questa nuova regola, ho cercato una soluzione che tenesse conto anche di questa regola aggiuntiva.

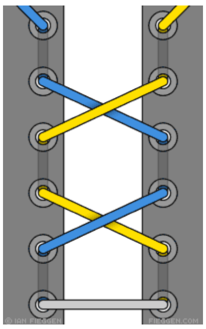
Ho colorato i vari ponti con differenti colori perché aiuta a verificare che effettivamente tutte le isole siano collegate tra loro.

E con questo, purtroppo, dichiariamo ufficialmente finita l'estate e le vacanze.

4.2 [104]

Poche, pochissime soluzioni questo mese, probabilmente il Capo ha esagerato con la difficoltà dei problemi e spaventato tutti. Ma andiamo per ordine.

4.2.1 Cover



Svariati lettori (beh, due) sono rimasti perplessi di fronte alla copertina del numero passato, relativo ai diversi modi di legarsi le scarpe. Come dicevamo, è stato pubblicato un libro in merito, nel quale viene indicato il modo ottimale; da mocassinari sfegatati quali siamo non abbiamo la minima intenzione di acquistarlo e quindi non abbiamo disponibili i calcoli. I risultati, però, sono di dominio pubblico e quindi siamo felici di comunicarvi che il modo ottimale sembra essere il cosiddetto *Bow-Tie Lacing*, che riproduciamo qui a fianco.

Il metodo per eseguirlo è abbastanza immediato (si parte dal fondo: lo sottolineiamo in quanto la cosa, per alcune allacciature, non è vera); nel caso di un numero dispari di occhielli, il passaggio grigio resta al di sotto e si procede subito con un incrocio.

I vantaggi di questa allacciatura sono un utilizzo minimale del laccio (garantendo dei capi liberi piuttosto lunghi) e un minor numero di zone di pressione sulla parte superiore del piede (in corrispondenza degli incroci, che sono tutti al di sopra della scarpa). L'unico difetto (che per molti è un vantaggio) nasce da una certa qual "elasticità"; è facile sfilare la scarpa senza disfare il nodo.

Per i cultori dell'informazione inutile, comunichiamo che è il nodo degli stivali di *Yuna*, il personaggio di *Final Fantasy* (immagine della parte topica qui sopra: il resto, per il momento, non ci interessa); comunque, anche applicato ad un normale paio di scarpe da ginnastica non è male.

4.2.2 Deserto Simmetrico Monodimensionale

Quando le soluzioni sono poche, sapete su chi si può contare: ***Cid*** e ***Trekker*** hanno inviato le loro versioni, ed entrambi hanno pensato a interpretazioni alternative ed estensioni. Cominciamo con ***Trekker***:

> Ipotizziamo di partire con la nostra escursione dall'origine delle coordinate, cioè dal punto 0, la nostra oasi. Dopo un primo passo avremo la probabilità pari ad ½ di essere giunti in "+2" e, analogamente, avremo la probabilità pari a ½ di essere

giunti in “−1”. Chiediamoci ora dove andremmo a finire facendo **esattamente** 2 passi, poi 3 passi, etc. A questo proposito indichiamo con “+” un passo a destra (=verso interi maggiori) e con “–” un passo a sinistra (=verso interi minori). Tutte le possibilità di trekking con esattamente due soli passi sono quindi rappresentabili con “++; +−; −+; −−”, conducendo ai tre numeri interi (4;1;−2) con probabilità rispettivamente pari a (1/4; 2/4; 1/4). Analogamente con esattamente tre passi avremo “+++; ++−; +−+; +−−; −++; −+−; −−+; −−−”, arrivando ai quattro numeri interi (6; 3; 0; −3) con probabilità rispettivamente pari a (1/8; 3/8; 3/8; 1/8).

In generale con **esattamente** h passi – con h intero positivo – potremmo raggiungere uno degli (h+1) interi ($-h$; $-h+3$; $-h+6$;....; $2h-3$; $2h$), o, detto in altro modo, potremmo raggiungere uno degli interi “$-h+3j$”, con j=0,1,2,....,h[11] ciascuno con probabilità $\frac{1}{2^h}\binom{h}{j}$.

Ma ogni intero N è rappresentabile con infinite coppie di numeri interi h e j tali che $-h+3j=N$ (basta scegliere i “$-h$” in modo che $-h=N$ modulo 3) e, quindi, **siamo in grado di esplorare tutta la retta**.

Viceversa dato un numero N possiamo trovare almeno un percorso di $m=h+$k passi (di cui ***h* a sinistra**, cioè verso gli interi minori, e ***k* a destra,** cioè verso gli interi maggiori) tali che $-h + 2k= N$. Basta scegliere $h=2k-N$ e $m=3k-N$.

Imponendo che i numeri di passi a sinistra e a destra siano non negativi e che il numero di passi totali sia ≥ 1 otteniamo:

$$k \geqslant \frac{N}{2}; k \geqslant 0; k \geqslant \frac{(N+1)}{3}$$

Indichiamo ora con $K(N)$ il più piccolo numero intero non negativo che soddisfa le disequazioni di cui sopra (cioè in pratica il minor numero di passi da farsi a destra per individuare un cammino che raggiunga N), si ha:

$$K(N) = \left\{ \begin{array}{c} 0 per N < 0 \\ 1 per N = 0 \\ \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil per N > 0 \end{array} \right\}$$

[12]dove con $\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil$ si intende il più piccolo intero maggiore o uguale a $N/2$.

Posto $P(N)$ la probabilità di riuscire ad esplorare il punto N con almeno un cammino di lunghezza ≥ 1 si ha:

$$P(N) = \sum_{k=K(N)}^{k=+\infty} \frac{1}{2^{(3k-N)}} \binom{3k-N}{2k-N} = \sum_{k=K(N)}^{k=+\infty} \frac{1}{2^{(3k-N)}} \binom{3k-N}{k}$$

---

[11] Si noti che con h+3 passi potremmo raggiungere gli interi visitabili con h passi ma.... anche altro.

[12] Intuitivamente: i punti N<0 sono sicuramente raggiungibili facendo N passi a sinistra e 0 passi a destra; il punto N=0 è sicuramente raggiungibile facendo 1 solo passo a destra e 2 passi a sinistra; i punti N>0, con N pari, sono sicuramente raggiungibili in N/2 passi a destra; i punti N>0, con N dispari, sono sicuramente raggiungibili in [N/2] passi a destra e 1 a sinistra.

Si noti che essendo $P(N)>0$ c'è la possibilità di **percorrere tutti i numeri interi della retta** (pur di fare un numero di passi "adeguato").

Qualora si potessero fare $A>0$ passi a sinistra (invece che 1) e $B>0$ passi a destra (invece che 2) si potrebbe esplorare una frazione pari a **1/MCD(*A*;*B*)**[13] della totalità dei punti interi della retta.

Ed ecco l'estensione, sempre di ***Trekker***.

Tutti quelli che attraversano il deserto sanno che la propensione/probabilità di spingersi in avanti piuttosto che la voglia di rientrare all'oasi nell'origine dipende dalla posizione nel deserto e da quanto tempo abbiamo intrapreso il cammino. Inoltre inizialmente si fanno passi lunghi e ben distesi e poi, distrutti dalla fatica, ci si muove a colpi di passettini.

Ipotizziamo quindi che $q(t,N)$ rappresenti la probabilità di spostarsi a destra (=verso interi maggiori) di A passi e $1-q(t,N)$ rappresenti la probabilità di spostarsi a sinistra (=verso interi minori) di B passi qualora ci si trovi nel punto N al tempo t. Inoltre A e B, indiretti indicatori della fatica, dipendano a loro volta da t.

All'istante $t+1$ si può essere nel punto N se e solo se al tempo t si era nel punto $N-A(t)$ e, con probabilità $q(t,N-A(t))$, si è deciso di andare a destra di $A(t)$ passi, oppure se al tempo t si era nel punto $N+B(t)$ e, con probabilità $1-q(t,N+B(t))$, si è deciso di andare a sinistra di $B(t)$ passi. Indicando ora con $p(t,N)$ la probabilità di essere **esattamente** nell'istante t nel punto N possiamo, in base alle considerazioni precedenti, scrivere:

$$p(t+1,N)=p(t,N-A(t))q(t,N-A(t))+p(t,N+B(t))[1-q(t,N+B(t))]$$

$$p(0,0)=1$$

$$p(0,N)=0 per N\neq 0$$

Perciò la probabilità $P(N)$ di visitare il punto N in qualche istante $t>0$ è pari a:

$$P(N)=\sum_{t=1}^{t=+\infty}p(t,N)$$

Fissato il tempo $t>0$ trovare i vari $p(t,N)$, avendo di fronte un sistema lineare di infinite equazioni, non è banale. Se supponiamo però che $A(t)$ e $B(t)$ siano limitati $\forall\, t>0$ dalla costante L[14], allora possiamo affermare che al tempo t al più saremo all'interno dell'intervallo $[-tL; +tL]$ e quindi $p(t,N)=0$ per $N>tL$ e per $N<-tL$, riconducendo quindi il sistema ad un numero finito (al più $2tL+1$) di equazioni lineari da risolvere. **Ora però non abbiamo la garanzia di riuscire ad esplorare tutti i punti della retta.**

Cid ha proposto una serie di congetture, ma non è rimasto molto soddisfatto del risultato. A noi, invece, pare interessante:

Tra il punto iniziale e il punto finale della passeggiata sulla retta (per un numero di tappe che tende ad infinito), la frazione di numeri interi che non viene visitata è:

$$\frac{7-3\cdot\sqrt{5}}{2}$$

[13] MCD= Massimo Comune Divisore

[14] Per un essere umano che cammina normalmente, sicuramente L è minore-uguale alla somma delle lunghezze delle gambe. Per atleti di salto in lungo, salto in alto, salto triplo, salto con l'asta, corsa campestre, etc. e... canguri, stimare qualcosa di più.

Basandomi su alcune semplici congetture sono riuscito a trovare il risultato; (non sono però riuscito a trovare una dimostrazione matematica della validità del risultato trovato). Comunque, questo è stato il mio ragionamento.

Ad ogni tappa, si avanza di due numeri o si retrocede di uno, quindi ad ogni tappa il numero aumenta di 1 (modulo 3). Da ciò deriva che dopo k tappe (con k intero) ci troveremo su un numero distante un multiplo di 3 dal numero iniziale se e solo se k è un multiplo di 3. Vediamo ora cosa può succedere dopo 3 tappe:

A. Possiamo retrocedere di 3 (con probabilità = 1/8)

B. Possiamo ritornare nel numero da cui siamo partiti (con probabilità = 3/8)

C. Possiamo avanzare di 3 (con probabilità = 3/8)

D. Possiamo avanzare di 6 (con probabilità = 1/8)

In questo modo si nota una simmetria nel problema, ed in particolare risulta interessante notare che in tal modo è possibile fare uso del Triangolo di Tartaglia. Per fare ciò, utilizzo la seguente logica congettura: se il numero ($N = 3 \cdot k$) di tappe tende ad infinito, la frazione di numeri interi che non viene visitata è uguale alla probabilità di non visitare il numero: Int(N/2).

Per calcolare la probabilità di visitare un numero utilizzo il seguente metodo.

Possibili spostamenti dopo le prime 3 tappe: (partendo dal numero X)

(ogni cella dista 3 dalla seguente)

	1		
1	3	3	1

Il valore rosso mostra che la probabilità di avanzare di 3 è di 3 possibilità su 8.

Possibili spostamenti dopo le prime 6 tappe:

(ogni cella dista 3 dalla seguente).

		1				
	1	3	0	1		
1	6	12	11	6	3	1

Metto a 0 lo spostamento di 3 dopo 1 tappa, in modo che sia possibile sommare la probabilità di spostarsi di 3 dopo tre tappe con la probabilità di spostarsi di 3 dopo sei tappe senza essere già passati su quel numero nelle tappe precedenti. In totale la probabilità di passare per il numero $(X + 3)$ è: $\frac{3}{8} + \frac{11}{64} = \frac{35}{64}$ (dopo 6 tappe). In modo analogo, dopo 18 tappe:

						1												
					1	3	0	1										
				1	6	12	0	6	3	1								
			1	9	33	55	0	33	28	18	6	1						
		1	12	63	182	273	0	182	201	177	101	39	9	1				
	1	15	102	408	1020	1428	0	1020	1326	1417	1074	606	246	69	12	1		
1	18	150	760	2565	5814	7752	6324	5814	8455	10323	9405	6703	3699	1563	490	108	15	1

La probabilità di passare per il numero $(X + 3)$ è:

$$\frac{3}{8} + \frac{11}{64} + \frac{48}{512} + \frac{231}{4096} + \frac{1183}{32768} + \frac{6324}{262144} = \frac{49627}{65536}$$

(dopo 18 tappe)

La regola è la seguente:

$S(r, c) = S(r - 1, c + 1) + 3 \cdot S(r - 1, c) + 3 \cdot S(r - 1, c + 1) + S(r - 1, c + 2)$

(dove r indica la riga e c la colonna)

Esempio: $6324 = 1020 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 1428 + 1020$

Esempio: 1183 = 182 + 3 • 0 + 3 • 273 + 182

Esempio: 231 = 33 + 3 • 0 + 3 • 55 + 33

Esempio: 48 = 6 + 3 • 0 + 3 • 12 + 6

Esempio: 11 = 1 + 3 • 0 + 3 • 3 + 1

Esempio: 182 = 55 + 3 • 33 + 3 • 9 + 1

ecc. Con il computer si trova facilmente che:

- La probabilità di passare per (X + 3) dopo ∞ tappe è: 0,819660112...
- La probabilità di passare per (X + 6) dopo ∞ tappe è: 0,862232585...
- La probabilità di passare per (X + 9) dopo ∞ tappe è: 0,852182587...
- La probabilità di passare per (X + 12) dopo ∞ tappe è: 0,854555070...
- La probabilità di passare per (X + 15) dopo ∞ tappe è: 0,853995002...
- ...
- La probabilità di passare per (X + 300) dopo ∞ tappe è: 0,854101966....

La probabilità di passare per il numero (X + 300) mi ha fornito la prima approssimazione del risultato cercato, ne deriva che la frazione di numeri interi che non viene visitata è: 0,145898034....

Per trovare un'approssimazione migliore ho provato ad elaborare i risultati trovati, calcolando la distanza in valore assoluto delle prime cinque probabilità dall'approssimazione trovata:

$D(1)=P(\infty)-P(X+3)\approx P(X+300)-P(X+3)=0{,}854101966-0{,}819660112=0{,}034441854$

$D(2)=P(X+6)-P(\infty)\approx P(X+6)-P(X+300)=0{,}862232585-0{,}854101966=0{,}008130619$

$D(3)=P(\infty)-P(X+9)\approx P(X+300)-P(X+9)=0{,}854101966-0{,}852182587= 0{,}001919379$

$D(4)=P(X+12)-P(\infty)\approx P(X+12)-P(X+300)=0{,}854555070-0{,}854101966=0{,}000453104$

$D(5)=P(\infty)-P(X+15)\approx P(X+300)-P(X+15)=0{,}854101966-0{,}853995002=0{,}000106964$

Ho notato che il rapporto $\frac{D(i-1)}{D(i)}$ è sempre uguale a: 4,236.... (per $i \geq 0$)

Esempio: $\frac{D(2-1)}{D(2)} = \frac{D(1)}{D(2)} = \frac{0{,}034441854}{0{,}008130619} = 4.236067....$

<u>Congettura 2</u>: Il rapporto $\frac{D(i-1)}{D(i)}$ è sempre uguale a $\left(2+\sqrt{5}\right)$ (per $i \geq 0$)

<u>Corollario della congettura 2:</u> Essendo $P(X)$ = 1, in quanto partendo da X si è sicuri di passare da X, ho che, chiamando y la probabilità di passare da Int(N/2), cioé y = $P(\infty)$ (in quanto N tende ad ∞)

$$\frac{D(0)}{D(1)} = \frac{1-y}{y-P(X+3)}$$

da cui:

$$\left(2+\sqrt{5}\right) = \frac{1-y}{y-0{,}819660112}$$

Quindi:

$$\left(2+\sqrt{5}\right)y-0{,}819660112\cdot\left(2+\sqrt{5}\right)=1-y$$

$$y=\frac{0{,}819660112\cdot\left(2+\sqrt{5}\right)+1}{\left(3+\sqrt{5}\right)}=0{,}854101966....$$

Ed il fatto che il valore trovato sia circa uguale a $P(X+300)$ è abbastanza confortante. A questo punto ho provato a calcolarmi $P(X-3)$:

Sorpresa!!! $P(X-3) = 0{,}236067977...$

<u>Congettura 3</u>: $P(X-3) = \sqrt{5}-2$

<u>Corollario della congettura 3</u>: Essendo $P(X) = 1$, in quanto partendo da X si è sicuri di passare da X, ho che, chiamando y la probabilità di passare da Int(N/2),

$$\frac{D(-1)}{D(0)}=\frac{\sqrt{5}-2-y}{y-1}$$

da cui: $\left(2+\sqrt{5}\right)=\dfrac{\sqrt{5}-2-y}{y-1}$

Quindi:

$$\left(2+\sqrt{5}\right)y-\left(2+\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}-2-y$$

$$y=\frac{2+\sqrt{5}+\sqrt{5}-2}{\left(3+\sqrt{5}\right)}=\frac{2\cdot\sqrt{5}}{\left(3+\sqrt{5}\right)}=\frac{2\cdot\sqrt{5}\cdot\left(3-\sqrt{5}\right)}{4}=\frac{3\cdot\sqrt{5}-5}{2}$$

$$1-y=1-\frac{3\cdot\sqrt{5}-5}{2}=\frac{2-3\cdot\sqrt{5}+5}{2}=\frac{7-3\cdot\sqrt{5}}{2}$$

Dunque la frazione di numeri interi che non viene visitata è: $\dfrac{7-3\cdot\sqrt{5}}{2}$

<u>Corollari finali</u>: Con analoghi ragionamenti si deduce anche che:

Se $j\geq 0$ $P(X+3J)=\left(\dfrac{7-3\cdot\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)^{J}+\left(\dfrac{3\cdot\sqrt{5}-5}{2}\right)$

Se $j\leq 0$ $P(X+3J)=\left(\sqrt{5}-2\right)^{-J}$

Poi lo stesso ***Cid*** ha avuto un ripensamento, cioè un'altra possibile interpretazione del testo del GC, che si sa, è fatto apposta per farsi interpretare in più di un modo. Vediamo cosa ha pensato:

> Nel risolvere questo problema ho considerato che la frazione di numeri interi che non viene visitata fosse riferita all'intervallo tra il punto iniziale e il punto finale della passeggiata sulla retta. Questa mia interpretazione è legata al fatto che se uno mi chiede qual è la frazione di posti che non ho visitato durante un viaggio in cui ho attraversato N paesi, la mia risposta sarà ovviamente riferita agli N paesi che ho attraversato e non sarà certo riferita a tutti i paesi della terra.

Ora però mi è sorto il dubbio che il problema chiedesse la frazione di tutti i numeri interi presenti sulla retta (cosa significherà poi una frazione di ∞???)

Comunque anche nel caso (improbabile) in cui l'interpretazione corretta fosse realmente riferita a tutta la retta dei numeri interi, si può ugualmente ricavare la soluzione dal risultato da me trovato per l'intervallo compreso tra *X* e (*X* + *N*) con *N* che tende ad ∞. Infatti, per $j \geq 0$

$$P(X+3J) = \left(\frac{7-3\cdot\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)^J + \left(\frac{3\cdot\sqrt{5}-5}{2}\right)$$

e quando $j \to \infty$ si ha che: $P(X+3J) \to \left(\frac{3\cdot\sqrt{5}-5}{2}\right)$

Dunque sul semiasse dei numeri interi superiori a *X*, la frazione di numeri interi che viene visitata è: $\left(\frac{3\cdot\sqrt{5}-5}{2}\right)$

Mentre, per $j \leq 0$, $P(X+3J) = \left(\sqrt{5}-2\right)^{-J}$

e quando $j \to -\infty$ si ha che: $P(X+3J) \to 0$

Dunque sul semiasse dei numeri interi inferiori a *X*, la frazione di numeri interi che viene visitata tende a: 0

Per cui su tutta la retta dei numeri interi, la frazione di numeri interi che viene visitata è: $\dfrac{\left(\frac{3\cdot\sqrt{5}-5}{2}\right)+0}{2} = \left(\frac{3\cdot\sqrt{5}-5}{4}\right)$

Di conseguenza (sulla retta dei numeri interi) la frazione di numeri interi che non viene visitata è:

$$1-\left(\frac{3\cdot\sqrt{5}-5}{4}\right) = \frac{4-3\cdot\sqrt{5}+5}{4} = \frac{9-3\cdot\sqrt{5}}{4}$$

Purtroppo non sono arrivate altre soluzioni. Decidete voi cosa ne pensate, qui Alice dice che ci vuole una notevole perversione a passeggiare su una retta.

4.2.3 (Iper-)Evidenti Ragioni di Simmetria

Anche qui, poche soluzioni, ma buone, come sempre. Il primo a farsi vivo è stato ***.mau.***, con il suo solito fare sbrigativo, che ci dice:

(...) Però almeno un inizio te lo posso scrivere.

Se ci limitiamo all'ipercubo e lo mettiamo in un iperspazio cartesiano con l'origine in (0,0,...0) e il vertice opposto in (1,1,...1), il passaggio da un vertice a uno adiacente comporta banalmente l'aumentare o il diminuire di 1 della traccia associata al vertice, vale a dire la somma dei valori delle coordinate. Quindi possiamo "quasi" schiacciare la nostra iperpasseggiata su un segmento dove i punti sono quelli di valore intero tra 0 e *n*, e gli estremi sono "assorbenti", visto che la nostra passeggiata finisce.

Perché ho scritto "quasi"? Perché lo spostarsi a sinistra o a destra non è simmetrico. In un n-cubo, ad esempio, se siamo in un punto di traccia 1 abbiamo possibilità $1/n$ di tornare a 0 e $(n-1)/n$ di passare a 2.

Ciò detto, vediamo qualche caso semplice, giusto per avere un'idea di cosa ci dovremmo aspettare. Il caso n=0 non è così interessante, e lo salto. Anche n=1 non è poi tanto interessante; siamo certi di finire in una tappa al vertice opposto. Con n=2 ci divertiamo appena un po' di più: siamo certi di terminare il nostro giro dopo due tappe, con probabilità uguale in (0,0) oppure in (1,1). Le cose si fanno più interessanti per n=3. Una tabellina che mostri la probabilità di avere una certa traccia (colonna) nelle prime tappe (righe) inizia così:

	0	1	2	3
1		1		
2	1/3		2/3	
3		4/9		2/9

(nota che la somma delle probabilità per la tappa 3 è minore di 1, perché se siamo subito tornati a (0,0,0) non proseguiamo il nostro giro)

Considerando che anche la probabilità 2/9 di arrivare a (1,1,1) non conta più nel futuro, in pratica al passo 3 siamo nella stessa situazione del passo 1, giusto con un fattore 4/9 di meno. A questo punto alla seconda e alla terza domanda si risponde al volo; la probabilità di arrivare a (0,0,0) prima che a (1,1,1) sarà il rapporto tra 1/3 e 2/9, cioè 3 contro 2; ergo, la probabilità di raggiungere (1,1,1) prima di (0,0,0) sarà 2/3, e la probabilità di terminare la corsa a (1,1,1) sarà il 40% (il nostro giro terminerà con probabilità 1, visto che al passo $2k+1$ la probabilità che non sia terminato è $(4/9)^k$).

Un po' più complicato è il calcolare il valore atteso. Ho fatto i conti a mano e potrei sbagliarmi, ma nel caso di ritorno all'origine abbiamo la somma infinita

2(1/3) + 4(4/9)(1/3) + 6((4/9)^2)(1/3) +... che dovrebbe dare 54/25, mentre nel caso dell'altro capo abbiamo

3(2/9) + 5(4/9)(2/9) + 7((4/9)^2)(2/9) +... che dovrebbe dare 46/25, per un totale di 22/5. Ma come ho detto, non garantisco molto.

A questo punto, non appena mi sento un po' più voglioso di scrivere noiose espressioni algebriche oppure a inventarmi un qualche tipo di induzione (che però così ad occhio dovrebbe essere fatta separatamente per un numero di dimensioni pari o dispari) provo a tirare fuori una formula generale. Tutta questa pappardella serve semplicemente perché se nel prossimo numero non sai cosa mettere puoi sempre far vedere come un matematico poco teorico approccia il problema.

Per gli n-simplessi, mi sa che il problema sia *molto* più semplice, invece. Ovviamente non c'è il vertice opposto, e devi solamente calcolare quando si torna all'origine. Ma visto che tutti i vertici sono connessi con ciascuno degli altri, praticamente a ogni passo hai probabilità $1/n$ di tornare a casina, il che – sempre con i conti fatti a manina – dovrebbe dare un tempo medio di attesa di $(2n-1)/(n-1)$ passi.

No, non si è più fatto vivo. Però è stato carino a darci qualcosa di un "matematico poco teorico" per scaldare l'ambiente. Comunque ***Trekker*** ha pensato di mandarci una soluzione "poco convenzionale", eccola:

Per dare un connotato "realistico" ai quesiti potremmo pensare di riformulare il problema per una formica colpita da amnesia che, scegliendo a caso fra le "fughe" delle piastrelle di una chiesa (si sa che nelle chiese i disegni del pavimento possono essere complicati), deve rientrare a casa, oppure potremmo risolvere il problema analogo di un sorcio che percorrendo a caso gli spigoli delle guglie delle rovine di un castello medioevale deve ritornare nella sua tana. Oppure vedere con che probabilità si riesce ad attraversare un torrente alpino scegliendo a caso un appoggio su una delle pietre stese per facilitarne il guado, etc. In tutti questi casi le "ragioni di simmetria" non sarebbero poi così evidenti...

Proviamo ad estendere il problema considerando (iper-)spazi qualsiasi, (iper-)solidi qualsiasi e con probabilità qualsiasi di scegliere uno degli (iper-)spigoli raggiungibili da uno degli (iper-)vertici.

Avendo in fronte al nostro (iper-)solido cominciammo col numerare gli spigoli: 0 è il vertice-casa, poi 1,2,3, etc. i vertici successivi. Potremmo costruire una catena omogenea di Markov, cioè un "pallogramma" dove ogni nodo rappresenta un vertice ed ogni arco (se presente) orientato definisce la probabilità di transizione da un nodo-vertice ad uno adiacente. Per semplificare indichiamo con A la matrice formata dagli elementi a_{ij} della probabilità di arrivare nel nodo-vertice "*i*" sapendo che all'istante precedente si era nel nodo-vertice "*j*". Si noti che la matrice A è popolata di zeri in corrispondenza degli "incroci" in cui non ci sono archi che uniscono i nodi-vertice e che la somma degli elementi delle varie colonne è sempre 1 (ma non è detto che sia simmetrica: basti pensare ad esempio ai vertici di una piramide a base quadrata dove si imponga che da ogni vertice si possa andare agli adiacenti con equi-probabilità). Indicando con $p_k(t)$ la probabilità di essere al tempo t nel nodo-vertice k e con $P(t)$ il vettore colonna formato dalle "varie" probabilità $p_k(t)$, il sistema è descrivibile, in generale, con le equazioni:

$$\begin{cases} P(t+1) = AP(t) \\ P(0) = \overline{P_0} \end{cases}$$ dove $\overline{P_0}$ rappresenta la condizione iniziale.

Prima di tracciare la soluzione ai quesiti proposti, definiamo anche le matrici A_i ottenute dalla matrice A sostituendo la colonna "*i*" con una colonna di zeri, e, analogamente, le matrici A_{ij} ottenute dalla matrice A sostituendo le colonne "*i*" e "*j*" con colonne di zeri. Inoltre numeriamo le colonne e le righe di queste matrici partendo, anche se non è usuale, da 0 (invece che da 1).

Primo quesito

Nel primo quesito si chiede di trovare il numero medio di passi per rientrare nella casa-origine (si stanno escludendo quindi cammini che ri-passino continuamente dalla casa-origine). Modificheremo il nostro diagramma di Markov cancellando gli archi che escono dall'origine e metteremo come condizione iniziale (stavolta al tempo 1) di essere (con una certa probabilità) in uno dei nodi-vertici raggiungibili dall'origine con un solo passo.

In pratica dobbiamo risolvere il problema:

$$\begin{cases} P(t+1) = A_0 P(t) \\ P(1) = \overline{P_1} \end{cases},$$

dove $\overline{P_1}$ è il vettore riempito con zeri ovunque salvo nei punti raggiungibili con un solo passo dall'origine (dove sono riscritte le rispettive probabilità di raggiungerli) (in pratica $\overline{P_1}$ corrisponde alla prima colonna, la 0-esima, della matrice A).

Poiché si giungerà all'origine (che funge da "pozzo" delle probabilità) al tempo t (quindi con un cammino lungo t) con probabilità $p_0(t)$, la lunghezza media del numero di tappe per rientrare, e sia L, vale:

$$L = \sum_{t=1}^{+\infty} t \cdot p_0(t) = \sum_{t=1}^{+\infty} t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} P(t) = \sum_{t=1}^{+\infty} t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} A_0^{t-1} \overline{P_1}$$

Diciamo che Sylvester, ricordato proprio su RM 104, per semplificare i calcoli, magari suggerirebbe un cambio di coordinate per "triangolizzare" o "diagonalizzare" la matrice....

Secondo quesito

E se ci fermassimo o quando arriviamo all'origine o quando siamo giunti al punto diagonalmente opposto (comunque esso sia definito nel nostro (iper-)solido irregolare)? Sia "*z*" il punto diagonalmente opposto. Costruiamo la matrice A_{0z} dalla matrice A sostituendo le colonne 0 e "z" con due colonne nulle (di nuovo significa che i nodi-vertici 0 e Z sono "pozzi" per la nostre probabilità, da cui non si esce più). Risolviamo ora il sistema:

$$\begin{aligned} P(t+1) &= A_{0z}P(t) \\ P(1) &= \overline{P_1} \end{aligned}$$ dove, al solito, $\overline{P_1}$ è uguale alla prima colonna, la 0-esima, di A.

Poiché si giungerà all'origine o al punto diagonalmente opposto (che fungono da "pozzi" delle probabilità) al tempo t (quindi con un cammino lungo t) con probabilità rispettivamente $p_0(t)$ e $p_z(t)$, la lunghezza media del numero di tappa, e sia L, vale:

$$L = \sum_{t=1}^{+\infty} t \cdot (p_0(t) + p_z(t)) = \sum_{t=1}^{+\infty} t(r_0P(t) + r_zP(t)) = \sum_{t=1}^{+\infty} t\left(r_0A_{0z}^{t-1}\overline{P_1} + r_zA_{0z}^{t-1}\overline{P_1}\right)$$

dove r_0 e r_z sono due vettori riga "pieni" di zeri salvo nelle posizioni rispettivamente "0" (come indicato prima, contiamo da 0, invece che da 1) e "*z*" dove c'è un uno.

Quarto quesito

E la probabilità di raggiungere il punto diagonalmente opposto? Posto che "*z*" sia il punto diagonalmente opposto e visto che stavolta non sono posti vincoli sul fatto che raggiunto "*z*" non si possa uscirne ed, eventualmente, rientrarvi, siamo ricondotti a risolvere il problema:

$$\begin{aligned} P(t+1) &= AP(t) \\ P(0) &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T \end{aligned}$$

dove la condizione iniziale è quella di trovarsi al tempo t=0 nell'origine.

La risposta, al variare di t, quindi è $p_z(t)$, cioè:
$p_z(t) = r_zA^tP(0) = r_zA^t[1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T, \qquad t \geq 0$.

Terzo quesito

E la probabilità di raggiungere il punto opposto prima di ripassare per l'origine?

Scriviamo questa probabilità sfruttando il teorema della probabilità assoluta, precisamente:

$$P = \sum_{k=1}^{t-1} P \text{ (in 0 al tempo } t\text{, in } z \text{ al tempo } k\text{)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{t-1} P \text{ (in 0 al tempo } t/ \text{ in } z \text{ al tempo } k\text{)}P\text{(in } z \text{ al tempo } k\text{)}$$

A questo punto, sulla falsariga delle risposte ai quesiti precedenti, cambiando opportunatamente le condizioni iniziali ci si può "divertire" a scrivere la soluzione completa del problema....

E se non valesse tornare indietro?

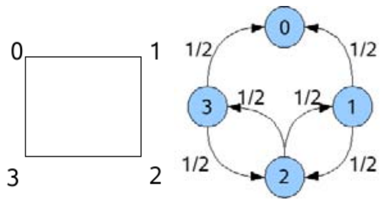
In questo caso definiamo i coefficienti a_{ijk} come la probabilità di raggiungere il nodo-vertice "*i*" provenendo da "*j*" sapendo che nel passo ancora precedente si era in "*k*".

La probabilità $p_i(t)$ di essere in "*i*" al tempo *t* pertanto è esprimibile con:

$$p_i(t) = \sum_j \sum_k a_{ijk}\, p_j(t-1) p_k(t-2)$$

Per impedire di "tornare" indietro bisogna porre che i coefficienti a_{ijk} siano nulli per $i=k$. Ma ahimè il problema è di tipo non-lineare e sarebbe meglio usare un opportuno programma di calcolo...

Esempio



Per non dare l'impressione di essere "pigro" (anche se in realtà un pizzico di verità c'è) provo a risolvere il primo quesito nel caso di movimento lungo i lati di un quadrato (una figura "regolarissima") con equi-probabilità di scegliere una strada (fra quelle disponibili) piuttosto che un'altra.

Le equazioni da scrivere sono:

$$p_0(t+1) = \frac{1}{2} p_1(t) + \frac{1}{2} p_3(t)$$

$$p_1(t+1) = \frac{1}{2} p_2(t)$$

$$p_2(t+1) = \frac{1}{2} p_1(t) + \frac{1}{2} p_3(t)$$

$$p_3(t+1) = \frac{1}{2} p_2(t)$$

$$p_0(1) = 0; \quad p_1(1) = \frac{1}{2}; \quad p_2(1) = 0; \quad p_3(1) = \frac{1}{2}$$

$p_0(t)$, come è facile verificare è data dalla sequenza: $p_0(1)=0$; $p_0(2)=1/2$; $p_0(3)=0$; $p_0(4)=1/4$; $p_0(5)=0$; $p_0(6)=1/8$;...

Perciò la lunghezza media delle tappe per rientrare nell'origine vale:

$$L = 2\frac{1}{2} + 4\frac{1}{4} + 6\frac{1}{8} + \ldots = 2\left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 3\frac{1}{8} + \ldots\right) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{1}{2^k} = 2 \cdot 2 = 4\,.$$

E se lo dice lui deve essere così.

Alla fine è ancora arrivato il classico contributo di ***Cid***, che però questa volta è giunto proprio mentre chiudevamo questa parte del numero, e Alice non l'ha più voluto impaginare. Restiamo comunque in ascolto, visto che lo stesso ***Cid*** non sembrava convintissimo, non si sa mai che gli venga voglia di mandarci qualcos'altro, che non non esiteremmo a includere nel numero di novembre. Valete!

5. Quick & Dirty

Avete una griglia di 5×5 punti, ogni punto dista dall'altro 4 centimetri.

Avete 25 gettoni, di 5 colori diversi, 5 per tipo, del diametro di 1 centimetro.

Volete che nessun gettone possa vedere (lungo una linea di vista qualsiasi, non necessariamente le linee della griglia) altri gettoni del proprio colore (un gettone impedisce la vista attraverso di esso).

Come disponete i gettoni?

6. Pagina 46

[a]: Consideriamo la somma indicata utilizzando il denominatore $(p-1)!$. Per il numeratore della somma otteniamo la somma di tutti i possibili prodotti dei numeri $1, 2, \ldots, p-1$ presi in gruppi di $p-2$ per volta. Siccome il denominatore $(p-1)!$ *non* è divisibile per p, dobbiamo solo dimostrare che questa somma a numeratore è lei stessa divisibile per p^2.

Indichiamo la somma di tutti i possibili prodotti dei numeri $1,2,\ldots n$ presi a k a k con il simbolo Π_n^k, ossia

$$
\begin{aligned}
&\Pi_n^1 = 1+2+3+\ldots+n,\\
&\Pi_n^1 = 1\cdot 2+1\cdot 3+\ldots+1\cdot n+2\cdot 3+2\cdot 4+\ldots+2\cdot n+\ldots+(n-1)\cdot n,\\
&\ldots,\\
&\Pi_n^n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n = n!
\end{aligned}
$$

Mostreremo ora che, se $n+1=p$ è un numero primo, allora tutte le somme $\Pi_n^1, \Pi_n^2, \ldots, \Pi_n^{n-1}$ sono divisibili per p e che in particolare Π_n^{n-1} medesima è divisibile per p^2; l'asserzione del problema, quindi, discende direttamente da quest'ultima proposizione.

Consideriamo il polinomio:

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n).$$

Effettuando i prodotti indicati, si ha (ricordando che per ipotesi n è pari):

$$P(x) = x^n - \Pi_n^1 x^{n-1} + \Pi_n^2 x^{n-2} - \ldots + \Pi_n^n.$$

Consideriamo inoltre l'espressione $P(x)[x-(n+1)]$. Essa può essere espansa in due modi:

$$P(x)[x-(n+1)] = \left(x^n - \Pi_n^1 x^{n-1} + \Pi_n^2 x^{n-2} - \ldots + \Pi_n^n\right)[x-(n+1)],$$

oppure come

$$
\begin{aligned}
P(x)[x-(n+1)] &= (x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)(x-n-1)\\
&= (x-1)\{[(x-1)-1][(x-1)-2]\ldots[(x-1)-n]\}\\
&= (x-1)P(x-1)\\
&= (x-1)\left[(x-1)^n - \Pi_n^1(x-1)^{n-1} + \Pi_n^2(x-1)^{n-2} - \ldots + \Pi_n^n\right]
\end{aligned}
$$

Ottenendo quindi l'uguaglianza:

$$\begin{aligned}\left(x^n - \Pi_n^1 x^{n-1} + \Pi_n^2 x^{n-2} - \ldots + \Pi_n^n\right)\left[x-(n+1)\right] \\ = (x-1)\left[(x-1)^n - \Pi_n^1 (x-1)^{n-1} + \Pi_n^2 (x-1)^{n-2} - \ldots + \Pi_n^n\right]\end{aligned} \qquad \textbf{[1]}$$

Se due polinomi sono uguali per qualsiasi valore di x allora sono identici tra loro e possiamo eguagliare i coefficienti delle potenze dello stesso grado di x tra entrambi i membri; utilizzando la notazione binomiale, si ha:

$$\begin{cases} \Pi_n^1 + (n+1) = \binom{n}{1} + \Pi_n^1, \\ \Pi_n^2 + (n+1)\Pi_n^1 = \binom{n+1}{2} + \binom{n}{1}\Pi_n^1 + \Pi_n^2, \\ \Pi_n^3 + (n+1)\Pi_n^2 = \binom{n+1}{3} + \binom{n}{2}\Pi_n^1 + \binom{n-1}{1}\Pi_n^2 + \Pi_n^3, \\ \ldots, \\ \Pi_n^n + (n+1)\Pi_n^{n-1} = \binom{n+1}{n} + \binom{n}{n-1}\Pi_n^1 + \binom{n-1}{n-2}\Pi_n^2 + \binom{n-2}{n-3}\Pi_n^3 + \ldots + \binom{2}{1}\Pi_n^{n-1} + \Pi_n^n, \\ (n+1)\Pi_n^n = 1 + \Pi_n^1 + \Pi_n^2 + \ldots + \Pi_n^{n-1} + \Pi_n^n, \end{cases} \qquad \textbf{[2]}$$

Essendo per ipotesi $n+1=p$ primo, il numero

$$\binom{n+1}{k} = \binom{p}{k} = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots \cdot k}$$

è, per $k<p$, divisibile per p (essendo per definizione il numeratore di questa frazione divisibile per p e non essendolo il denominatore). Quindi vediamo dalla prima formula di

[2] che Π_n^1 è divisibile per p, dalla seconda formula che Π_n^2 è divisibile per p, eccetera sino a verificare con la penultima che Π_n^{n-1} è anch'esso divisibile per p.

Infine, sostituiamo $x=p$ nell'equazione:

$$(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-p+1) = x^{p-1} - \Pi_{p-1}^1 x^{p-2} + \Pi_{p-1}^2 x^{p-3} - \ldots + \Pi_{p-1}^{p-1}.$$

Otteniamo:

$$(p-1)! = p^{p-1} - \Pi_{p-1}^1 p^{p-2} + \Pi_{p-1}^2 p^{p-3} - \ldots + \Pi_{p-1}^{p-3} p^2 - \Pi_{p-1}^{p-2} p + \Pi_{p-1}^{p-1}.$$

Dove l'ultimo termine è pari a $(p-1)!$, e quindi semplificabile; si ottiene dunque:

$$\Pi_{p-1}^{p-2} = p\left(p^{p-3} - \Pi_{p-1}^1 p^{p-4} + \Pi_{p-1}^2 p^{p-5} - \ldots + \Pi_{p-1}^{p-3}\right),$$

da cui Π_{p-1}^{p-2} è divisibile per p^2, in quanto l'espressione tra parentesi è divisibile per p se $p>3$.

[b]: Utilizzando il denominatore comune $\left[(p-1)!\right]^2$, si ottiene la somma:

$$\frac{A}{\left[(p-1)!\right]^2},$$

dove A è la somma di tutti i possibili prodotti contenenti $p-2$ fattori distinti presi tra i numeri $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, (p-1)^2$ (ossia, come abbiamo detto sopra, "presi $p-2$ alla volta").

Per mostrare che A è divisibile per p, considereremo il quadrato della somma Π_{p-1}^{p-2}. Essendo il quadrato di un polinomio uguale al quadrato di ogni termine più il doppio di tutti i possibili prodotti tra coppie di termini, la somma $\left(\Pi_{p-1}^{p-2}\right)^2$ viene ad essere formata da tutti i termini di A più una serie di termini (che sono tutti i possibili doppi prodotti). Consideriamo uno di questi doppi prodotti:

$$2[1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (i-1) \cdot (i+1) \cdot \ldots \cdot (p-1)] \cdot [1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (j-1) \cdot (j+1) \cdot \ldots \cdot (p-1)].$$

Esso può essere scritto come:

$$2[1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (i-1) \cdot (i+1) \cdot \ldots \cdot (j-1) \cdot (j+1) \cdot \ldots \cdot (p-1)].$$

La somma di tutti i termini mostra che:

$$\left(\Pi_{p-1}^{p-2}\right)^2 = A + 2(p-1)!\,\Pi_{p-1}^{p-3},$$

Dove

$$A = \left(\Pi_{p-1}^{p-2}\right)^2 - 2(p-1)!\,\Pi_{p-1}^{p-3}.$$

Da quanto provato nella prima parte, A è allora divisibile per p, come volevasi dimostrare.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Lunghe passeggiate

Contrariamente al solito, per primo spieghiamo il titolo.

Tutti i lettori di questa rivista conoscono la battuta associata a Doc sul cosa faccia un postino in vacanza (Hint: la risposta, di due parole, è contenuta nel titolo).

Poi, citiamo l'unico autore classico (almeno a giudicare dall'epoca storica... siamo all'inizio dell'altro secolo) italiano di matematica ricreativa, a proposito del problema dei Ponti di Königsberg: "Un abitante di quella città s'era proposto di risolverlo praticamente percorrendo *in tutte le maniere possibili* i sette ponti, ma siccome sul percorso si trova un manicomio, pare che si sia dovuto rinchiudervi il perseverante pomeranese, dopo che aveva giá percorso un numero strabiliante di chilometri. Evidentemente, non era quella la maniera da seguire non solo sul terreno, ma neanche sulla carta da scrivere"[15]. Siamo un attimo di corsa e quindi non vi forniamo il disegno, ma se andate a vedere qualche compleanno arretrato di RM[16], probabilmente trovate tutto il necessario e anche più.

Ora utilizziamo un po' di facile retorica. Per quanto riguarda il probema, tutti voi sapete come risolverlo; è equivalente al grafico mostrato in *Figura 1* e si risolve come segue:

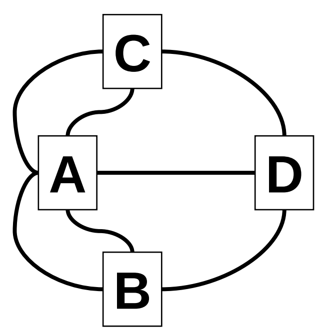


Figura 1 – Il manicomio è in "..."

In ognuna delle isole, dobbiamo entrarci e uscirci sempre per strade diverse e quindi ogni isola dovrà avere un numero *pari* di strade che arrivano/escono da lei (una per entrarci e una per uscirci). L'unica eccezione ammessa è che si parta da un'isola e si esca da un'altra (e quindi in un'isola si entra una volta di più e da un'altra isola si esce una volta di più), quindi *tutte le isole dovranno avere un numero pari di ponti entranti tranne la prima e l'ultima, che possono averne un numero dispari; se coincidono, l'isola di ingresso/uscita dovrà anch'essa avere un numero pari di ponti*.

Eulero[17], certo. Chi altro poteva trovare una soluzione così elegante? Non solo, ma se avete letto il libro di cui sopra o l'implicita dimostrazione qui presentata, siete in grado di risolvere qualsiasi problema il rompiscatole di turno voglia proporvi.

Ma la realtà picchia più duro di qualsiasi rompiscatole immaginario.

Infatti, sin quando vi limitate a qualche isoletta e ponticello (leggasi "vertici e archi"), le cose vanno avanti in modo abbastanza tranquillo; quando però si arriva a graziosi oggettini tipo l'intera popolazione mondiale usando come arco il fatto che due persone si conoscano, già solo il verificare che sia completamente connesso non è facile; qui, l'unico modo diventano i metodi statistici.

Che in questo campo ci fosse qualcosa di strano lo si è cominciato a pensare ai tempi dell'esperimento di *Milgram*: dei pacchi indirizzati ad un signore di Boston erano stati consegnati a dei volontari nel Nebraska e nel Kansas, con le istruzioni di spedirli a qualcuno che conoscessero e che presumibilmente facesse arrivare il pacchetto "più vicino" al destinatario effettivo; all'interno del pacco queste istruzioni erano ripetute, con la richiesta di registrare il passaggio (e presumiamo, il necessario per pagare la spedizione); a prescindere dai normali smarrimenti dell'ufficio postale, sui pacchetti

[15] Italo GHERSI, "*Matematica dilettevole e curiosa*", Hoepli, Milano, Quarta Edizione, 1972. Non vi diamo l'ISBN perché all'epoca era pura fantascienza.

[16] Per cominciare vi suggeriamo il Compleanno in RM060.

[17] Inutile dire che di lui abbiamo già parlato parecchio, ed in particolare in RM019, RM051 e RM085.

arrivati il valore medio dei passaggi era di $5{,}5$; abbastanza da cavarci un film, cosa fatta nel 1990; nel film l'idea viene attribuita a Guglielmo Marconi, il quale si narra sostenesse che due persone qualsiasi potevano essere collegate attraverso telegrafo senza fili con una catena di, in media, $5{,}83$ intermediari[18].

Siccome il grafico della popolazione mondiale è un filino scomodo da manovrare, si sono cercati dei grafi di questo tipo di dimensioni più ridotte; uno dei più famosi è il grafico dei "Collaboratori di Erdös", basato sull'attribuzione di un numero con semplici regole:

1. Erdös ha numero 0.
2. Chiunque abbia firmato un articolo di matematica con una persona avente numero n ha numero $n+1$.

Il compito (per le vacanze di Pasqua) è: trovate il vostro numero di Erdös[19].

Scavare nella letteratura scientifica limitandosi a leggere i nomi degli autori diventa velocemente un'attività piuttosto noiosa, quindi si è cercato qualche altro campo in cui fosse possibile effettuare ricerche in modo automatico; grazie al valido aiuto dell'*Internet Movie DataBase*, è stato calcolato quello in seguito diventato noto come *Hollywood Graph*, basato sull'attribuire il valore 0 a *Kevin Bacon*, il valore 1 a chiunque abbia fatto un film con lui, e avanti così con le regole viste sopra; trovate, se la cosa vi interessa, i dati qui di fianco, basati su $355\,848$ attori apparsi in $107\,749$ film.

Numero di Bacon	Attori
0	1
1	1 433
2	96 828
3	208 692
4	46 019
5	2 556
6	252
7	65
8	2

Cominciamo con il liquidare le facili battute: il personaggio avente Numero di Bacon pari a 0 ve lo trovate da soli, e leggenda vuole che gli ultimi due siano diventati famosi pubblicizzandosi come "gli attori più lontani da Kevin Bacon"[20].

Se guardiamo la tabella un po' più seriamente, però, vediamo che ha un comportamento piuttosto diverso rispetto a quella del Grafico di Erdös: ci si aspetterebbe che, in un modo o nell'altro, i numeri continuino ad aumentare, mentre invece presentano un massimo che poi diminuisce piuttosto velocemente; l'emergenza di questa struttura è il segno che abbiamo a che fare con un grafico ragionevolmente completo, in cui tutti i possibili appartenenti sono stati presi in considerazione; in una ripetizione inversa dell'esperimento di Milgram, il sito sixdegrees.com[21] richiedeva qualche anno fa di inserire il vostro indirizzo di mail e quello dei vostri amici, permettendo poi di calcolare quante persone avessero "vostro numero" pari a 1, quante pari a 2, eccetera; raggiunta la ragguardevole cifra di $2\,846\,129$ membri si è visto che, almeno per i valori pubblicizzati, l'effetto "a campana" non si presentava: segno che questo non era un

[18] Il che permette al nostro Scienziato Pazzo di sostenere di essere l'organizzatore di una congiura a livello planetario coinvolgente lui, George W. Bush, Osama Bin Laden e un'altra dozzina di scalmanati (sei per ogni direzione, visto che gli estremi gli stanno entrambi antipatici).

[19] Ci si chiede se siano validi sotterfugi del tipo "Scrivo soluzioni per una Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa dove scrive anche..." o "Quel tizio che, in un raro momento di incapacità psichica, mi ha firmato la tesi aveva numero...". Ci sentiremmo di escluderli, e quindi l'unico appiglio che ci resta è ***Dario***, avendo noi contribuito suppergiù con una riga a testa ad un suo articolo di svariate pagine per la suaccennata Prestigiosa Rivista.

[20]...Rudy da (molto) piccolo è apparso in una pubblicità con un tizio che ha detto sei parole in una scena di *Cleopatra*, quindi dovrebbe essere piazzato bene; si rifiuta, comunque, di addurre prove.

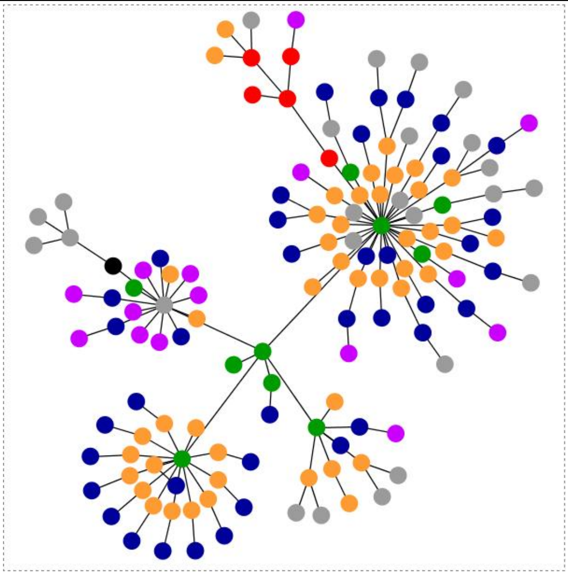
[21] Scoprirete abbastanza presto perché di questa storia si parla usando il termine "sei gradi di separazione".

campione ragionevolmente completo delle persone dotate di indirizzo di posta elettronica[22].

Quello che secca è che qualsiasi grafico, anche casuale, in determinate condizioni inizia a mostrare una qualche struttura; secondo la teoria di *Erdös-Rényi* (indovinate il numero di Erdös del secondo...), infatti, quando il numero degli archi supera la metà del numero dei vertici, deve comparire una *componente gigante* che connette la maggior parte dei vertici; la cosa è stata verificata in pratica con un metodo talmente semplice che ci sentiamo di definirlo geniale: tracciate tutte le chiamate di un giorno di traffico della AT&T, *Abello* e *Pardalos* hanno potuto esaminare un grafico con più di cinquanta milioni di vertici e circa centosettanta milioni di archi; nonostante tre quarti delle chiamate fossero componenti separate del grafico, è stato possibile individuare una componente gigante coprente l'ottanta per cento degli archi; non solo, ma il diametro di questo mostro era 20, ossia all'interno di questo oggetto ogni vertice era raggiungibile con al più venti passaggi. Fino a tempi recenti la cosa non è stata molto analizzata, anche perché la ricerca di Abello tendeva a trovare precise strutture dette *cliques* (la traduzione italiana "cricca" non ci piace per niente) di persone che formassero un sottografo completamente connesso; la ricerca (decisamente complicata) ha permesso di stabilire che quel giorno c'erano quattordicimila gruppi di trenta persone che si sono parlate tutte tra di loro.

Ve lo diciamo subito: diciannove. Ma è una stima basata sull'analisi del tre per mille del totale.

Il bello del Web è che è già pronto per un'analisi automatica; infatti *Barabasi* e collaboratori hanno costruito un grazioso robottino software chiamato *Notre Dame* (dal nome dell'università dove lavorano) che esamina la rete nello stesso modo di quei simpaticoni che cercano gli indirizzi di mail per mandarvi le pubblicità più strane, limitandosi a raccogliere i link tra le diverse pagine e costruendo quindi il grafico dei collegamenti tra i diversi siti; non vi diamo l'immagine totale ottenuta da Barabasi, ma per farvi capire cosa venga fuori anche da una situazione semplice e limitata abbiamo fatto girare Notre Dame su un sito che dovreste conoscere.



Hi Mom! I'm Here!

Bene, il risultato interessante di Barabasi è stato che il numero dei link è rappresentabile come una *legge geometrica*; ossia, la probabilità che una determinata pagina avesse k link verso l'esterno era proporzionale a $k^{-2,5}$, mentre la probabilità che quella pagina fosse puntata da k link esterni era proporzionale a $k^{-2,1}$: ossia, la maggior parte delle pagine hanno pochi link, mentre le collezioni di centinaia o migliaia di link sono decisamente rare.

Sono però esattamente quelle pagine rare che, come i grandi utenti della AT&T, garantiscono la coesione della rete, unendo siti che altrimenti sarebbero molto distanti tra loro; nella piccola sezione di rete studiata da Barabasi ci si muoveva da un estremo

[22]...e talmente incoscienti da inserirlo in un sito che lo chiede per delle ragioni così balorde. La prima parola che ci viene in mente, in questi casi, è "spam".

all'altro con al più dodici passaggi, e l'estrapolazione di questo valore porta al diciannove di cui sopra per l'intera rete.

Tutto questo lavoro fa pensare che sotto ci sia qualcosa. E se sotto c'è qualcosa, probabilmente si può definire un modello. E se si può definire un modello, forse è la volta che ci entra un po' di matematica.

Dunque, riepiloghiamo. I grafi giganti che abbiamo visto sinora hanno alcune caratteristiche (statistiche) in comune:

1. Tanto per cominciare, *tendono ad essere sparsi*: hanno relativamente pochi archi; in un grafo con N vertici, il numero degli archi è al massimo $\frac{n(n-1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}$; questi che abbiamo visto hanno un numero di archi molto più vicino a n che al valore massimo.
2. Quindi, *tendono ad ammassarsi (*o a creare *clusters*, se preferite l'inglese); due pagine web che puntano ad una pagina comune, per intenderci, è estremamente probabile che si puntino anche tra loro, e quindi gli archi tendono a raggrupparsi in determinate zone.
3. Infine, *hanno un diametro piccolo*. Il diametro di un grafo è definito come il numero minimo di nodi che devo attraversare per unire i due punti più lontani del grafico, intendendo la lontananza sempre come numero di nodi. Un grafo connesso di n elementi può avere al massimo diametro pari a $n-1$ (chiamiamolo "lombrico", in fondo somiglia al suo sistema nervoso principale); all'estremo opposto, un grafo completamente connesso, qualunque sia il numero di nodi, avrà diametro pari a 1. I grafici con i quali ci siamo scontrati sembrano avere un diametro suppergiù dell'ordine del logaritmo di n, quindi decisamente più vicini al secondo tipo piuttosto che al primo, nonostante l'influenza "allungatrice" dei percorsi che hanno gli ammassi.

I grafici con queste tre proprietà vengono indicati come *small-world graphs* ("Grafi del Piccolo Mondo" ci piace pochissimo: piuttosto, chiamiamoli "Grafi di Fogazzaro" così facciamo vedere che conosciamo la letteratura).

Adesso, quando trovate la prossima definizione, attenti a non prenderla troppo semplice. I grafi più semplici che possiamo immaginare sono quelli basati sui reticoli, in cui ogni vertice è legato ad alcuni vicini.

Dicevamo di non prenderla sul semplice in quanto se voi prendete un "lombrico" e cominciate ad unire i nodi uno sì e uno no, e/o uno sì e due no... e poi gli fate mordere la coda (fermi restando criteri di divisibilità... non complichiamoci la vita) agganciando il primo e l'ultimo, ottenete comunque un reticolo, anche se la cosa non ha alcun rapporto con i "reticoli" come sono normalmente intesi; per citare Humpty-Dumpty, "Qui una parola significa quello che io intendo, né più né meno".

Va detto che questi, come modelli dello Small World, fanno piuttosto schifo; se la seconda connessione è "uno sì e uno no", il diametro del nostro mondo diventa $\frac{n}{2}$, il che significa scarpinate incredibili per arrivare al nodo più lontano.

Forse, se cerchiamo di mescolarli con l'estremo opposto, il grafo casuale, otteniamo qualcosa di interessante; ed è esattamente quello che hanno fatto Erdös e Rényi: cominciate con una collezione di n vertici senza archi; poi, analizzando un punto, considerate tutti i restanti punti del grafo e tracciate l'arco tra i due punti con probabilità p.

È abbastanza evidente che qui l'approssimazione la fa da padrone; infatti, un mucchio di teoremi in questo campo dei due matti di cui sopra comincia con (loro scrivono in inglese) "*almost every...*", il che è estremamente insoddisfacente, anche se loro hanno dato una definizione estremamente rigorosa (per $n \to \infty$, di solito) di cosa significhi questa nebulosa frase.

In realtà, il modello appena visto è "un po' troppo casuale"; quello che ci interessa, è una via di mezzo tra questo e il modello strettamente deterministico, fermo restando che non abbiamo la più pallida idea di cosa significhi, qui, "via di mezzo".

La soluzione, come al solito, sembra ovvia una volta che qualcuno (nella fattispecie, *Watts* e *Strogatz*) l'ha trovata. Basta interpolare tra i due modelli.

Sono partiti da un lombrico che si morde la coda[23] con qualche connessione regolare di quelle che saltano un dato numero di vertici; poi, hanno "rifilato" (qualcuno si ricorda dei circuiti stampati e delle modifiche al volo che si facevano? Stesso metodo) qualcuna delle connessioni: ogni arco, o lo lasciamo dov'è o lo spostiamo da un'altra parte (con probabilità definita).

In realtà Watts e Strogatz nel loro lavoro non hanno esaminato il diametro, ma quale sia il cammino minimo medio L, notando una brusca variazione del suo valore all'aumentare del "parametro di rifilatura": ha il suo massimo in un reticolo regolare, ma crolla appena rifilate qualche vertice, il che significa che si stanno formando dei *cluster*.

Con indubbia fantasia, hanno indicato il parametro che misura la formazione di cluster con C: calcolarlo non è facilissimo, ma l'idea è sostanzialmente quella di prendere in esame tutti i vicini di un vertice, contare gli archi che uniscono il vertice a questi vicini e dividerlo per il massimo numero di archi che possono essere tracciati tra il nostro vertice e i suoi vicini; il tutto, logicamente, esteso a tutti i vertici prendendo poi la media.

La cosa funziona scandalosamente bene, tant'è che ha anche avuto un paio di applicazioni pratiche: la gestione di una parte della rete elettrica degli Stati Uniti e l'analisi del sistema nervoso del *Cænorhabditis Elegans* (un nematode: ossia, volgarmente, un verme); l'aderenza alla realtà è molto buona (anche se non praticamente perfetta come per l'Hollywood Graph), tanto da portare a proporre questa come definizione di Small World Graph; di recente, si è anche riusciti a mostrare che il web ha una struttura di questo genere, ottenendone delle simulazioni con buona aderenza statistica alla (parziale) realtà analizzata.

A questo punto, con riferimento all'esperimento di Milgram, l'unico problema che vi rimane è quello di trovare la strada; se devo contattare George W. Bush e Osama Bin Laden, gli unici contatti che mi vengono in mente sono, rispettivamente, il fatto di avere una lontana parente che vive a Indianapolis e l'origine marocchina del padre di un'amica di Alberto.

Qui per fortuna un po' di lavoro lo ha fatto *Kleinberg*: è partito dal reticolo più semplice (quello che avete pensato all'inizio, quadrato), con ogni vertice collegato a quattro vicini; poi ha aggiunto dei collegamenti a lunga distanza. La probabilità di agganciare un vertice a distanza d è proporzionale a d^{-r}, dove r è un altro parametro specifico del sistema. Kleinberg ha scelto $r = 2$; non perché questo renda i cammini minimi (dovreste riuscire a dimostrare che non è vero), ma per il semplice fatto che esiste un ottimo algoritmo per trovare il percorso minimo, l'*algoritmo del goloso*: se vi chiedono di andare da a a b, esaminate tutti gli archi uscenti da a e tenete quello che vi porta nel punto più vicino a b; partendo da questo punto, ripetete la procedura.

[23] È una domanda della "Settimana Enigmistica" di ieri: lo chiamano *uroburo*. Una volta tanto, siamo arrivati noi prima degli anglofoni.

Per usare le parole difficili, il Nostro ha dimostrato non solo che l'algoritmo è il più efficiente quando lo spettro delle lunghezze degli archi è governato da $r = 2$, ma anche che l'algoritmo funziona bene per qualsiasi valore di r.

Ora, se i miei contatti si danno da fare, la conquista del mondo si fa in quattro salti. Anzi, in sei, al massimo...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms