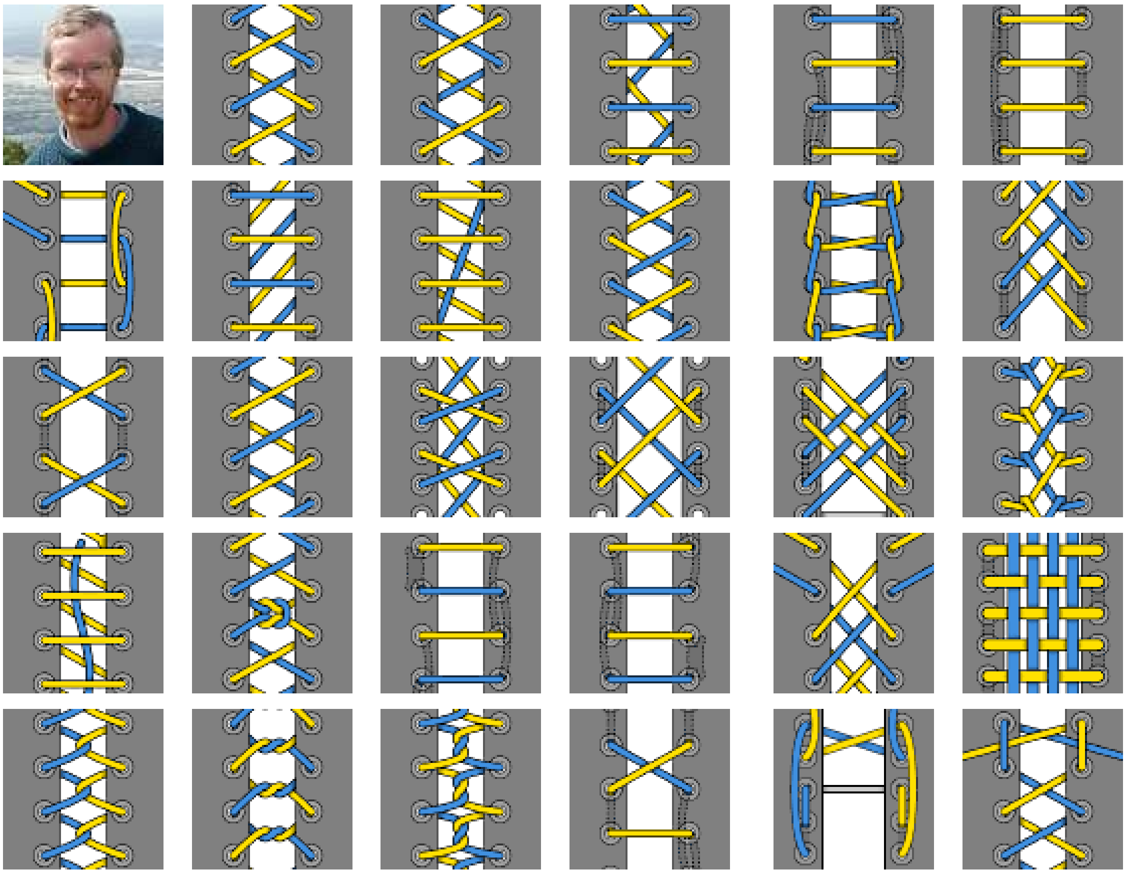
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

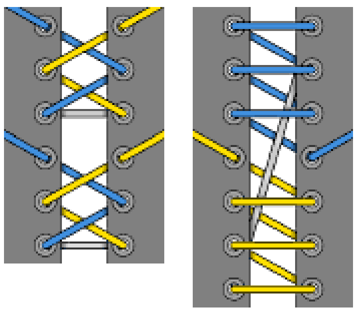
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 104 – Settembre 2007 - Anno Nono



$$\frac{(n!)^2}{2}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{n-k}\binom{n-k}{k}^2$$



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 103 ha diffuso 1420 copie e il 31/08/2007 per Google eravamo in 31'400 pagine.

Ian FIEGGEN (la foto è del '94) ha dedicato buona parte del suo sito web alla raffinata tecnica di allacciare le scarpe; non solo per quanto riguarda il nodo finale (per il quale si rivela decisamente tradizionalista), ma anche per il metodo di passare i lacci attraverso gli occhielli (e qui scatena delle vere rivoluzioni). Tiene compagnia ad una rapida rassegna di quest'ultima arte la ***formula di POLSTER***, fondamentale per definire matematicamente la robustezza di un'allacciatura. Entrambi hanno scritto, in merito, libri: evitiamo (ma insinuiamo) scontate battute.

1. La Musica della Ragione

Il mondo che progredisce è necessariamente diviso in due classi: quelli che prendono il meglio di ciò che è disponibile e se lo godono, e quelli che vogliono qualcosa di meglio e cercano di crearlo. Senza queste due classi il mondo stagnerebbe: sono la condizione stessa del progresso, sia l'una sia l'altra. Se non ci fosse nessuno scontento di ciò che ha, il mondo non otterrebbe mai alcun miglioramento.
(Florence Nightingale)

Il mondo è diviso in due classi: quelli che credono l'incredibile, e quelli che realizzano l'improbabile.
(Oscar Wilde)

Per quanto indubbiamente brutali, immonde e inevitabilmente crudeli, è palese che le guerre sono gli eventi che più cambiano il destino degli uomini; anzi, di interi popoli. Inoltre, proprio perché sono così capillarmente coinvolgenti nella mente e nella vita di ogni partecipante, è immaginabile che per la gran parte della storia dell'uomo siano stati proprio i conflitti armati a regolamentare e a governare le vite di quasi tutti gli esseri umani fin dall'alba dei tempi. Ciò nonostante, della gran parte delle guerre combattute e regolarmente consumate non abbiamo neppure notizia o memoria, e di quelle poche che conosciamo abbiamo spesso solo delle nozioni schematiche, quando non semplicemente frammentarie.

Quasi esattamente un secolo e mezzo fa, quando gli orrori dei massacri di civili del Novecento erano ancora abbastanza lontani e le vaste campagne napoleoniche cominciavano ad essere dimenticate, si combatté un guerra di non trascurabile importanza sullo scacchiere europeo: il conflitto di Crimea vide infatti impegnate le massime potenze dell'epoca - come Inghilterra, Francia e Russia – e un numero ristretto di potenze minori, coinvolte in misura più o meno intensa, quali il fatiscente Impero Ottomano (in un ruolo da protagonista) e il Regno di Sardegna (comprimario felice di esserlo). Gli schieramenti sono facili da ricordare, visto che si trattò, in buona sostanza, di un "tutti contro la Russia", anche se sotto sotto il vero interesse era, per tutte le grandi potenze in gioco, quello di poter mettere le mani sulle terre dell'Impero Ottomano. Di questa guerra, non inferiore ad altre per dimensioni, ma certo neppure rimarchevole rispetto a centinaia di altre simili, si tende curiosamente a ricordare solo alcuni episodi ben precisi e collocati, e tutti fra loro indipendenti: sono eventi – anche non necessariamente e puramente militari – che variano di importanza a seconda dell'osservatore, in una sorta di relativismo ante-litteram. Ad esempio, il lettore italiano non potrà fare a meno di ricordare quella guerra soprattutto per la lungimirante mossa diplomatica del conte di Cavour. Il Regno di Sardegna, ormai ben deciso a trasformarsi appena possibile nel Regno d'Italia, è a quel tempo (1853-1856) ancora quasi invisibile sulla scena europea ed internazionale: l'invio di un numero limitato di truppe sul lontano fronte del Mar Nero costa relativamente poco in termini di vite umane e rende molto in termini di visibilità politica. Per queste ragioni, non c' è italico studente che non sia stato, a tempo debito, edotto sull'importanza strategica della Guerra di Crimea per i destini della nascenda nazione italiana: e i torinesi, poi, non hanno neanche bisogno di ripassare gli studi scolastici, visto che la spada tesa della statua del generale La Marmora scintilla ancora in direzione della bella e centralissima via Cernaia. L'arteria è fin troppo centrale ed importante nell'economia toponomastica della prima capitale d'Italia, e di conseguenza è quasi impossibile non chiedersi cosa sia questa "Cernaia" alla quale è dedicata: si scopre così rapidamente che la Cernaia è al tempo stesso fiume e battaglia: o meglio, fu battaglia combattuta sul fiume omonimo da parte dei bersaglieri piemontesi, praticamente al loro battesimo del fuoco[1]. Inutile precisare, a questo punto, che quel fiume e quella battaglia (vinta, naturalmente, dalle truppe alleate franco-piemontesi: non si dedicano mai vie e piazze alle battaglie perdute) appartengono appunto alla penisola di Crimea.

Se fosse vero – e forse lo è – che la storia è maestra di vita, gli insegnamenti che si possono trarre da questa italica lezione sulla Guerra di Crimea sono quantomeno di difficile interpretazione. Il cavouriano e un po' cinico principio dette i suoi frutti nel 1856, ma la tecnica di scambiare le vite di pochi soldati in cambio di vantaggi in politica estera non ha sempre funzionato alla stessa maniera: recenti partecipazioni ad operazioni militari (in cui era fortemente dubbia persino la terminologia, visto il ripetuto accapigliarsi su termini quali "missione di pace" o "azioni di guerra") non è detto che abbiano avuto esiti altrettanto macroscopicamente positivi. Di certo, esiti macroscopici li ebbe invece la partecipazione del Regno d'Italia alla Seconda Guerra Mondiale, e sì che a giudicare dalle dichiarazioni d'intenti dell'allora capo del governo la situazione politica sembrava essere proprio la stessa: occorrevano "pochi morti sui campi di battaglia" per potersi sedere al tavolo delle trattative dal lato dei vincitori. Poche valutazioni strategiche si sono rivelate più sbagliate: i morti non sono stati affatto pochi, e anche il "lato dei vincitori" non era stato ben individuato.

Se si lascia da parte l'ottica dell'amor patrio, si scopre che la Guerra di Crimea è rimasta celebre, quantomeno nei trattati di tecnica militare, soprattutto a causa di una incredibile follia. Il 25 ottobre 1854, nella stretta vallata poco a nord dell'accampamento inglese di Balaklava, quasi settecento cavalleggeri[2] si lanciarono al galoppo contro le placide batterie dei cannoni russi, in uno confronto quantomeno insolito di tecniche e di mal assortiti reparti militari. L'episodio è stato successivamente rivisitato e celebrato in maniera epica e gloriosa da parte inglese, ma dal punto di vista strettamente oggettivo resta una pura pazzia, e la successiva analisi delle cause e dei fraintendimenti che si sono rivelati essere stati il motore primo della "Carica dei Seicento" conferma i sospetti e i dubbi che la razionalità non può far a meno di esercitare. Ciò non di meno, lo sprezzo del pericolo, il non curarsi della morte e la totale abnegazione nell'obbedire anche all'ordine più assurdo sono tutti aspetti che godono di altissimo apprezzamento nel concetto di "valor militare", quindi l'azione dei cavalieri inglesi non potè non accendere la fantasia epica dei cronisti e successivamente la curiosità degli storici. In altri termini, l'episodio è perfetto per essere valutato in maniera diversissima (dal più alto esempio di eroismo militare alla più totale applicazione della cretineria guerresca) in funzione dei valori di chi analizza l'episodio. Episodio che, a volerlo descrivere nella maniera più asettica possibile, resta di una semplicità imbarazzante: il campo di battaglia consisteva in una lunga valle digradante tutta posta sotto il controllo dell'artiglieria dello Zar; questa era anche sistemata in favore di posizione, trovandosi su alture che dominano la vallata, che infatti saliva leggermente dalle linee inglesi verso quelle russe. L'ordine di una carica di cavalleria leggera in un tale contesto è ovviamente un lampante esempio di subitanea follia o di cattiva trasmissione dei comandi, visto che anche chi è totalmente privo di preparazione militare riesce a capire che attuare una carica di cavalleria lungo un campo aperto dominato dal tiro dei cannoni non ha senso alcuno. Anche nella remota eventualità che i cavalieri fossero riusciti ad arrivare a destinazione tra le batterie russe, non si capisce bene cosa avrebbero potuto ottenere.

---

1 Ancora oggi, in torinese, "*'na Cernaja*" indica disordine, rumore, contrattempo problematico: insomma, un caos. [RdA]

2 Il termine "cavalleggero" è spesso usato come semplice sinonimo di "cavaliere", o al massimo nel senso di "cavaliere militare". In realtà il termine è generato dalla contrazione in una sola parola dei due vocaboli "cavaliere leggero", perché fin dall'antichità si distingue sul piano tattico e strategico la "cavalleria pesante" dalla "cavalleria leggera". Quest'ultima è armata in maniera assai meno ponderosa della prima, ed è destinata a privilegiare negli scontri le sue caratteristiche di agilità e di rapidità di manovra. Nel caso in questione, proprio di "cavalleggeri" si trattava: in particolare, della Light Brigade, composta dal 13° reggimento dei dragoni leggeri, dal 17° lancieri, dall'11° ussari in prima linea; in seconda si trovavano il 4° dragoni leggeri, e l'8° ussari.

L'ordine della carica venne comunque recapitato ed eseguito senza eccessive contestazioni. Così, in un autunnale giorno d'Ottobre, seicentosettantatre cavalieri di sua maestà britannica salgono in sella e si allineano nei propri ranghi a fondo valle. Di qui cominciano a procedere al passo, poi al piccolo trotto e poi procedono via via accelerando in un galoppo sempre più sfrenato. I cannoni russi, dapprima silenziosi, cominciano infine tutti insieme il loro lugubre canto facendo volare le palle d'artiglieria, e queste a loro volta fanno volare in aria pezzi di uomini e d'animali. È un cruentissimo macello, eseguito con perizia e fierezza d'alta scuola militare. La carica non si interrompe, procede sempre dritta nonostante le spaventose perdite. Alcuni cavalieri inglesi riescono ad arrivare a destinazione, ad entrare nelle linee nemiche, a menare fendenti sugli artiglieri russi prima di rigirarsi e cominciare una non meno rischiosa ritirata verso le proprie linee. Ma sono una sparuta minoranza: alla fine di quella che resterà alla storia come la "Carica dei Seicento" si conteranno meno di duecento uomini ancora a cavallo di ritorno tra le linee inglesi[3].

Charge of the Light Brigade (Richard Caton Woodville)

L'inchiesta che infiammò nei tempi successivi tutto l'Impero Britannico appurò la dinamica dell'evento che, opportunamente rivista dagli storici e raffreddata dal passare del tempo, sembra ridursi ad essere un banale malinteso nella trasmissione degli ordini. Il comando supremo inglese, nella persona di Lord Raglan, stava osservando dall'alto lo svilupparsi della battaglia – perché, Carica dei Seicento a parte, in quel dì si consumò una battaglia complessa che vide anche un'azione della "cavalleria pesante" nonché della fanteria inglese[4] – e notò ad un certo punto che i russi, sulle alture a destra della valle, stavano rimuovendo dei cannoni navali precedentemente catturati ai turchi. Impedire quel movimento era importante ai fini strategici e, non avendo a disposizione reparti di fanteria che meglio avrebbero servito alla bisogna, Raglan chiese che si inviasse la Light Brigade a prendere quei cannoni al nemico[5]. L'ordine venne recapitato, ma il ricevente comandante della brigata leggera, il marchese di Lucan, non capì a quali cannoni ci si stesse riferendo, perché dalla sua posizione (non sopraelevata come quella di Lord Raglan) non poteva vedere quel che stava succedendo sulle colline alla sua destra. Lucan battibeccò un po' con l'ufficiale portaordini, il capitano Nolan, chiedendo che gli si spiegasse meglio a quali nemici e a quali pezzi d'artiglieria l'ordine faceva cenno. Il

[3] Anche se, ad onor del vero, non tutti gli altri sono da considerarsi "caduti": nonostante il mito diffuso che racconta una carneficina pressoché totale, il numero complessivo di morti e feriti è dell'ordine delle trecento unità, di cui meno della metà furono gli uccisi nello scontro.

[4] Anzi, è proprio in quest'occasione che viene coniato il termine "sottile linea rossa" in riferimento alla fanteria della regina, e in particolare per gli Highlanders: lo schieramento classico della fanteria prevedeva uno "spessore" della linea di schieramento pari a quattro uomini, ma in quel frangente l'estensione del fronte da controllare e l'esiguità del numero dei fanti inglesi del 93° reggimento Highlanders impose uno spessore di linea ridotto a due soli uomini. Il giornalista del Times scrisse che tra l'accampamento inglese e la carica della cavalleria russa riusciva a vedere soltanto una sottile linea rossa (*thin red streak*) che si frapponeva all'assalto, e il termine rimase orgogliosamente attaccato ai fanti britannici anche dopo che le loro uniformi hanno abbandonato il colore rosso.

[5] Come suona l'ordine originale: "*…Lord Raglan wishes the cavalry to advance rapidly to the front, follow the enemy, and try to prevent the enemy carrying away the guns.*"

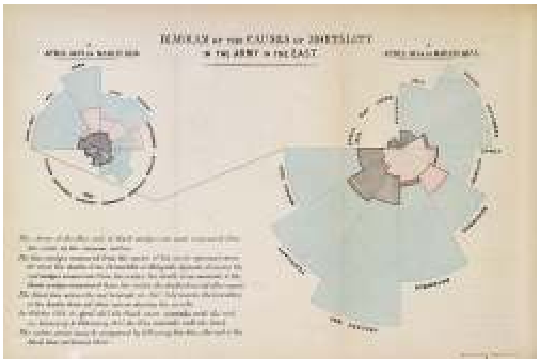
capitano indicò generalmente il fondovalle, verso le linee russe, e Lucan rimase sbalordito; ciò non di meno, ordinò al marchese di Cardigan di prendere il comando dei reggimenti e di andare alla carica verso quelle linee russe. Questi, a sua volta, protestò un po', ma alla fine salì a cavallo e ordinò l'attacco. È abbastanza complicato, a questo punto, stabilire di chi sia stata la colpa ultima del macello: l'alto comandante, Lord Raglan, rabbrividì quando dalla sua comoda posizione di controllo si rese conto che la Light Brigade stava caricando le linee nemiche principali, e non semplicemente andando a recuperare dei cannoni semi-abbandonati; non era certo sua intenzione mandare quasi settecento uomini in una carica suicida. D'altra parte i comandanti di grado inferiore, Lucan e Cardigan, avevano subito palesato la loro rabbia di fronte ad ordini apparentemente tanto folli. Il maggior colpevole sembrerebbe quindi essere proprio il capitano Nolan, che recò gli ordini dal comando generale ai comandanti di brigata, senza peritarsi di chiarire al meglio la consistenza reale degli stessi; ma anche questo rischia di essere giudizio troppo frettoloso: il capitano infatti, una volta consegnati gli ordini, entrò nei ranghi della Light Brigade per partecipare alla carica, e quando finalmente si rese conto che si era creato un tragico fraintendimento, corse in testa ai reggimenti per avvertire Cardigan del malinteso, ma fu tra i primissimi a cadere sotto il fuoco russo, e non riuscì a far arrivare a destinazione l'allarme.

Il gioco di trarre insegnamenti dagli episodi storici è in questo caso un po' più complesso: esistono infatti piani diversi di giudizio dell'episodio, e ognuno di questi può generare valutazioni diverse. Dal punto di vista strettamente militare, non è un caso che le accademie militari studino il caso di Balaklava non certo per imparare a lanciare cariche di cavalleria contro batterie di artiglieria, quanto piuttosto per imparare a capire quanto sia importante che gli ordini siano chiari, intelligibili e tali da non dare adito a fraintendimenti. Un comandante deve sempre ricordare che il sottoposto che riceve il suo ordine in genere non ha tutti gli elementi di giudizio che lui possiede (ovvero, Lord Raglan doveva ben tenere a mente che Lucan e Cardigan non potevano vedere i cannoni ai quali stava facendo riferimento); d'altra parte, tra quasi tutti gli ufficiali inglesi non correva buon sangue, e lo scambio di battute di servizio era sempre scontroso, sostenuto e perfino un po' snob, con la tragica conseguenza di generare fatali fraintendimenti. I protocolli rigorosi, schematici, noiosamente pignoli degli attuali ordini di servizio militari vengono in un certo senso concepiti proprio sull'onda del disastro di Balaklava. Dal punto di vista etico, invece, si può discutere fino alla fine dei tempi su quale debba essere il comportamento corretto d'un soldato al quale viene richiesto di eseguire un ordine che gli richieda con ottime probabilità di andare a morire. Il celebre commento del maresciallo di Francia Bosquet, sull'episodio della Carica dei Seicento, è abbastanza indicativo: "*È magnifico, ma non è la guerra*". Magnifico perché per un generale deve senza dubbio essere affascinante vedere uomini lanciarsi in marziale sacrificio senza badare troppo alle conseguenze, ma – proprio per un generale – deve anche essere evidente che una guerra è in genere un affare troppo sporco e complicato per essere raccontato con gesta d'ipotetico eroismo. Quel che rimane meno esplorato ma certo più saggio, in tutto l'episodio, è forse il comportamento del comandante della cavalleria pesante, che inizialmente schierò i suoi uomini per far loro seguire la carica della Light Brigade, ma che poi decise di non procedere per evidente illogicità dell'azione. Ma, come spesso accade, dei comportamenti più saggi spesso non si tiene memoria.

Florence Nightingale

Un terzo evento caratterizzò quella guerra: ma il protagonista non fu né uno statista né un militare, e già questo potrebbe bastare a far capire che è l'episodio che più ci piace raccontare. Il personaggio che lo rese possibile ebbe come nome di battesimo quello della città che lo vide nascere, e una tale regola può facilmente generare degli obbrobri onomastici[6]; ma fortunatamente questo non accadde nel nostro caso. Ciò è dovuto essenzialmente al fatto che Firenze è una bellissima città ed ha un bel nome; inoltre, la contingenza che in inglese la città toscana abbia un nome forse ancora più musicale e che il nostro protagonista sia in realtà *una* protagonista aiuta ulteriormente. Florence Nightingale[7] nacque infatti a Firenze, pur essendo assolutamente inglese. Fu, con ogni probabilità, il più illustre partecipante alla Guerra di Crimea, e non perché fosse una donna, ma perché aveva occhi e mente fuori dal comune, che sapevano guardare dove i suoi contemporanei non erano in grado di fare. Figlia della migliore aristocrazia inglese, decise di non seguire il destino che normalmente era riservato alle fanciulle della sua estrazione, ma di dedicarsi invece alla cura degli altri. Non è immediato capire con pienezza cosa questo significasse all'epoca; i diritti delle donne erano ben lontani dall'essere garantiti, ma più ancora che i diritti erano gli usi, i giudizi, le comuni convenzioni che limitavano in maniera aberrante ogni tentativo d'indipendenza femminile. Nel 1850, anche a Londra, capitale della maggiore potenza mondiale, era ben difficile essere donna intelligente e indipendente; era ben raro che una donna si istruisse fino ai livelli universitari, e ancor più raro che una donna decidesse di lanciarsi in una attività di sua iniziativa, come dedicarsi a curare i feriti di guerra. Erano tempi, quelli, in cui a far da infermiere sui campi di battaglia erano solo cuoche e vivandiere, con la preparazione specifica che è facile immaginare.

Florence di fatto inventa una nuova professione: giusto quattro giorni prima della fatale Carica dei Seicento parte dall'Inghilterra diretta a Scutari insieme ad altre 38 donne da lei preparate alla cura dei feriti. Qui si insedia nell'ospedale militare, dove scopre che per ogni dieci morti, solo uno muore per le ferite di guerra, mentre gli altri nove decedono a causa di infezioni e malattie.



Cosa inaudita per quei tempi, Florence raccoglie dati e li analizza. Durante la guerra, ma anche in seguito, raccoglierà un'enorme massa di dati sulla mortalità negli ospedali civili e militari dimostrando quali fossero le reali cause di mortalità tra le truppe: condizioni igieniche disperate, infezioni, colera.

L'impatto dell'azione di Florence Nightingale è sconvolgente; l'osservazione dei dati, per quanto apparentemente semplice e naturale, sembra avere una forza di verità rivoluzionaria nell'ambiente

[6] Fate la prova, se non ci credete: nel nostro caso, l'accoppiata Città di Nascita + Cognome genera dei risultati abbastanza abominevoli.

[7] È sempre pericoloso mettere eccessivamente in evidenza il significato dei nomi e dei cognomi, perché, almeno nel caso degli uomini e delle donne contemporanee, non sono cose che si possano scegliere come si fa coi marchi di fabbrica. Ciò non di meno, è difficile non sottolineare la dolcezza d'un nome e cognome che suonano, né più né meno, come l' "Usignolo di Firenze". Sua sorella, chiamata Parthenope perché nata a Napoli, fu forse meno fortunata, dal punto di vista della musicalità del nome.

militare: in un solo colpo viene messa in evidenza l'importanza dell'operato infermieristico, si mostra come non siano le cannonate i peggiori assassini, e si palesa la necessità di una drastica azione umanitaria sui campi di battaglia. La Croce Rossa Internazionale non nasce in Crimea, perché prende vita sul campo di battaglia di Solferino, nel 1859, quando quarantamila vittime tra austriaci, francesi e piemontesi rimangono sul campo di battaglia e sconvolgono il senso umanitario di Henri Dunant, che si trova ad assistere al massacro: l'imprenditore svizzero, tornato a Ginevra, riuscirà con grande impegno e dedizione a fondare la società internazionale che poi diventerà la Croce Rossa[8]. Ma se l'opinione pubblica non fosse stata, solo pochissimi anni prima, colpita dalla dedizione della "Signora con la lampada", come veniva chiamata Florence Nightingale, e delle sue trentotto compagne, difficilmente Dunant sarebbe riuscito nell'intento.

L'esercizio del trarre insegnamenti, in questo caso, sembra perfino troppo facile. Si potrebbe mettere in evidenza quanto siano sciocchi tutti gli atteggiamenti che tendono a discriminare gli esseri umani per sesso, razza o religione: quanto potenziale intellettivo è stato sprecato, nella storia, solo per l'uso consolidato di relegare le donne in stato di casalinga schiavitù, o quasi? Oppure, si potrebbe celebrare come essenzialmente rivoluzionaria l'azione umanitaria di poche persone in un teatro dove la maggior parte degli attori tendono semplicemente di ammazzarsi l'un l'altro. Ma queste sono cose talmente evidenti che non dovrebbero aver bisogno d'essere ulteriormente ripetute. Allora si potrebbe mettere in evidenza come sia parimenti significativo, e nuovo, e creativo, mettere al centro dell'attenzione la figura dell'infermiere. Ancora oggi, nel senso comune delle nostre moderne società ricche e civilizzate, si tende ad operare una sottile e poco dignitosa discriminazione nei ruoli degli agenti curanti in ospedale. Diamine, da che mondo è mondo il medico ha una autorità sacrosantamente riconosciuta: probabilmente, riceve ancora il rispetto mistico che l'ignaro primitivo riserva allo sciamano, allo stregone. E, in questo, non c'è nulla di veramente sbagliato: in fondo, la fiducia del paziente nel medico curante gioca un ruolo spesso essenziale nel processo di guarigione, ed è bene che la figura del medico goda di una forma di rispetto quasi sacrale: in fondo, gli si affida davvero la vita, ed è meglio che ci sia un elevato grado di fiducia, quando questo passo è necessario. Quasi per contrappasso, si nota spesso invece che al corpo infermieristico questo rispetto è spesso negato: quasi che l'azione di questi professionisti fosse meno essenziale per il malato. Forse anche qui c'è un retaggio antico, di quando nei lazzaretti la cura quotidiana dei malati era lasciata a persone di scarsa rinomanza sociale; ma di questo retaggio sarebbe davvero opportuno liberarsi in fretta. Negli ospedali da campo di Crimea, i medici c'erano, erano le infermiere che mancavano; l'arrivo di Florence Nightingale e delle sue compagne salvò nove vite su dieci, cosa che non avrebbero potuto fare i medici. Per quanto banalmente evidente, dovrebbe essere più spesso ricordato che a "salvare le vite" sono solo raramente le diagnosi brillanti o le acrobatiche operazioni chirurgiche: quasi sempre sono le cure quotidiane, costanti e professionalmente profuse.

Ma per una rivista come questa, non è neppure questo l'aspetto che maggiormente deve essere messo in evidenza: il fatto è la Nightingale profuse nelle sue azioni degli elementi insoliti per l'ambiente e per l'epoca: la raccolta di dati statistici, e la loro successiva analisi. Quest'approccio analitico e certo animato da spirito matematico era inaudito negli ospedali da campo; se ci arrivò, fu perché Florence Nightingale ebbe una buona e profonda educazione matematica. Da qui la conclusione è quasi inevitabile: se in un tempo in cui le donne faticavano ad avere una educazione, soprattutto se di indirizzo scientifico, la Signora con la Lampada riuscì ad

[8] E se vi chiedevate come mai ci fosse una certa somiglianza tra il simbolo della Croce Rossa e la bandiera svizzera, adesso il dubbio dovreste averlo risolto.

essere così ben formata al punto di mettere in pratica un'analisi di dati sul campo, allora deve aver avuto degli ottimi insegnanti. Insegnanti che non guardavano al sesso dei propri studenti, e che erano pronti a riversare, oltre alla conoscenza tecnica, anche una buona dose di spirito critico e anticonformista nei propri discepoli. E il maestro di Florence fu infatti James Joseph Sylvester.

Il nome con cui nacque il matematico, il 3 Settembre 1814 a Londra, era in realtà solo James Joseph. L'origine ebrea ed il fatto che dovette aggiungere un nuovo cognome al suo dovrebbe già dare qualche indizio sul fatto che la sua vita non fu scevra di difficoltà.

Pur giovanissimo, nel 1828 ebbe la fortuna di poter frequentare l'University College di Londra, che aveva appena aperto i battenti e non attuava discriminazioni razziali come le altre scuole britanniche del tempo; e qui frequentò i corsi di matematica di De Morgan. Ma dopo già pochi mesi cominciano le difficoltà: James è coinvolto in una rissa tra studenti ed è accusato di aver minacciato un suo compagno con un coltello. I genitori si rendono conto che il giovane non è ancora maturo per la vita universitaria, malgrado il buon profitto che traeva dagli studi, e si adattano a lasciarlo in un istituto di Liverpool. Il fratello maggiore nel frattempo stava emigrando negli Stati Uniti; a quei tempi era necessario avere tre nomi (due nomi ed un cognome) per ottenere il permesso di residenza negli USA, e decise di aggiungerne uno. James, forse per rinnovare simbolicamente il legame fraterno, decise allora di adottare anche lui lo stesso cognome del fratello, che era appunto Sylvester.

Dopo il periodo di Liverpool, si iscriverà al College di Cambridge nel 1831; nonostante periodi travagliati, anche per motivi di salute, sarà infine in grado di passare i suoi esami (*"Tripos"*) nel 1837. Si classificò secondo, proprio nell'anno in cui George Green[9] – di vent'anni più vecchio – arrivò terzo. Passare gli esami non fu sufficiente per ottenere il titolo accademico: a quei tempi tra i prerequisiti per la laurea vi era quello di sottoscrivere i Trentanove Articoli della Chiesa d'Inghilterra, cosa certo impossibile per un ebreo. Per la stessa ragione Sylvester non riuscì ad ottenere nessuna posizione o beneficio accademico, ma solo una cattedra di filosofia naturale[10] all'Università di Londra, che a differenza di Cambridge e delle altre non l'aveva escluso per la sua religione. Qui, se non altro, ebbe il vantaggio e il piacere di poter lavorare al fianco del suo vecchio insegnante, De Morgan, che stimava molto e da cui era ricambiato. Il cruccio era però che era la matematica ad interessarlo, non la fisica[11], e infatti, nonostante la cattedra, nei tre anni a Londra la sua ricerca e le sue pubblicazioni furono tutte sulle equazioni algebriche.

Finalmente nel 1841 riuscì a conseguire una laurea al Trinity College di Dublino, che aveva una speciale clausola per permettere ai cattolici di laurearsi, che poteva essere applicata anche per gli ebrei. Forte della guadagnata legalità e del sostegno di insigni colleghi (lo stesso De Morgan, ma anche Charles Babbage e John Herschel), decise di tentare la miglior fortuna negli Stati Uniti, in Virginia. La scelta dell'Università non fu però felice: James si ritrovò ad avere a che fare con studenti dai comportamenti quanto meno poco educati, che non esitavano ad approfittarsi di un insegnante straniero. D'altro canto, la facoltà e l'università non avevano alcuna intenzione di esporsi per proteggere un professore inglese, e quando ebbe un incidente con uno studente[12] si ritrovò in seria difficoltà. Così, Sylvester diede le dimissioni e partì alla volta di New York, dove si trovava il fratello maggiore, ma fortuna non sorrideva al giovane matematico nella "nazione delle possibilità": qui si innamora di una giovane donna che però lo rifiutò

[9] Di lui si parla in RM078, e anche in parte dei Tripos.

[10] Che, come Newton insegna, è il modo in cui si è di fatto chiamata la fisica per lungo tempo.

[11] "*L'obiettivo della fisica è la scoperta delle leggi del mondo intelligibile, l'obiettivo della matematica pura è la scoperta delle leggi dell'intelligenza umana.*" J.J. Sylvester

[12] Bacchettò – nel senso letterale del termine – uno studente che leggeva il giornale durante la lezione. Lo studente esagerò il danno che disse di aver subito, e ne nacque un "caso".

sdegnosamente quando venne a scoprire che era ebreo. Era tempo di tornare in patria: il 1844 lo vedeva già a Londra.

A Londra trovò lavoro in una compagnia assicurativa, e diede lezioni di matematica: fu qui che seminò l'amore per la matematica in Florence Nightingale. Non potendo fare ciò che più lo appassionava, si adattò a studiare legge. Propria questa decisione, che suonava un po' come una resa, si rivelò invece una scelta fortunata: perchè nelle corti di Londra si aggirava un altro amante della matematica e studioso in legge: Arthur Cayley[13], con il quale Sylvester costruì un'amicizia che durò tutta la vita.

Certo è che Sylvester non smise di cercare un lavoro consono alla sua passione per la matematica neanche durante il periodo in cui si suppone dovesse essere dedicato agli studi legali: continuava a far domanda per posizioni di insegnamento della matematica, e infine l'ottenne nel 1854 nell'Accademia Militare di Woolwich, anche se solo perché colui che aveva vinto la cattedra era morto all'improvviso, permettendogli così di subentrare al suo posto. Nel frattempo, con l'amico Cayley, aveva iniziato a studiare le matrici come metodo risolutivo delle equazioni algebriche, e per primo aveva coniato il termine "discriminante" e pubblicato scritti importanti come "*On the principle of the calculus of forms*" e "*On the theory of syzygetic relations and two rational integer functions*". Cominciava quindi ad usare le matrici come metodi di analisi per geometrie multidimensionali, mentre Cayley, dal canto suo, stava facendo delle matrici il cavallo di battaglia della sua carriera matematica.

Se Sylvester non riusciva a trovare un lavoro che lo soddisfacesse, c'era un ampio circolo che ne aveva compreso il genio: la *London Mathematical Society* lo ebbe come secondo presidente (il primo era stato De Morgan), e lo premiò con la prima medaglia d'oro che era stata creata proprio in onore di De Morgan; era stato eletto all'Accademia delle Scienze di Parigi e faceva parte della *Royal Society* di Londra.

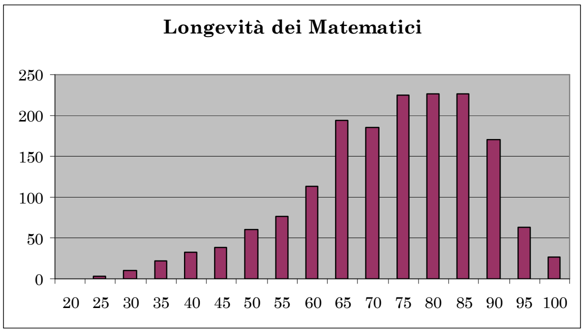
L'Accademia Militare, d'altro canto, non gli permetteva di esprimere il suo talento e lo costrinse a ritirarsi dall'insegnamento a soli 55 anni. Siamo nel 1870 e J.J. sembra allora prendere una nuova direzione: scrive infatti un libro di poesie, *"The Laws of Verse"*. Del resto era già noto per l'abitudine di usare neologismi, allusioni letterarie e citazioni poetiche nei precedenti scritti matematici e nelle conferenze e lezioni che dava. La poesia sembrò per qualche anno il suo unico interesse, tanto che prese l'abitudine di firmarsi "J.J. Sylvester, autore di the *Law of Verse*", ma quando Chebyshev visitò Londra e i due ebbero l'opportunità di discutere di costruzioni meccaniche che possono essere utilizzate per disegnare linee rette, l'interesse per la matematica si risvegliò. Dai suoi studi di meccanica produsse una conferenza "*On recent discoveries in mechanical conversion of motion*" alla quale era presente Kempe[14], che da allora continuò lo studiare l'argomento.

Il nostro James proprio non ce la faceva a stare lontano dalle aule universitarie: nel 1877 attraversa ancora l'Atlantico quando finalmente ottiene una cattedra alla John Hopkins University, dove gli sarà permesso non solo di insegnare, ma anche di avere un vero e proprio ambiente universitario di ricerca in cui espandere tutto il suo intuito. In questi anni fondò l'*American Journal of Mathematics*, primo giornale di matematica negli Stati Uniti. Erano i tempi in cui Christine Ladd-Franklin[15] stava cercando di entrare in

[13] I diagrammi di Cayley sono un tormentone del GC nella serie di PM sulla Teoria dei Gruppi (RM068, RM069 e RM070) ed ora pubblicate in un best-seller di risonanza mondiale.

[14] Alfred Bray Kempe è rimasto famoso per la sua dimostrazione del Teorema dei Quattro Colori (1879), che fu provata essere errata solo undici anni dopo la pubblicazione. In ogni caso è su questa dimostrazione che si basa quella celeberrima informatica generata cento anni dopo, famosa proprio per essere stata la prima dimostrazione matematica ottenuta tramite elaboratori elettronici. Di lui e del Teorema parliamo in RM078, sia nel PM sia nel compleanno.

[15] Psicologa, logica, matematica, con aspirazioni verso la fisica e l'astronomia. Un talento indubitabile, costretto a lottare ripetutamente – e per questo rimasto famoso – per ottenere accesso agli ambienti accademici tradizionalmente chiusi alle donne.



quell'università per ottenere il dottorato, portando come referenze alcuni testi scientifici da lei pubblicati sull'*Educational Times*. Sullo stesso periodico scriveva anche il nostro matematico londinese, che si spese affinché a questa studentessa fosse garantito l'accesso per lo meno alle sue lezioni. Negli anni successivi le fu permesso anche di seguire lezioni di logica e fisica, e forse anche al professore britannico dobbiamo i suoi successivi studi sulla percezione del colore, e l'energia con la quale volle tornare all'insegnamento, malgrado le fosse negato uno stipendio ed un titolo appropriato.

Questa volta gli anni americani furono intensi e probabilmente felici, ma Sylvester cominciava a sentire il peso degli anni e desiderava tornare in patria; era già sessantottenne quando accettò di prendere la cattedra di geometria ad Oxford, che mantenne fino alla morte.

Sembra che Sylvester abbia avuto ben poche "normalità" con le quali consolarsi: poco integrato e poco disponibile ad integrarsi, perseguitato perché appartenente ad una religione non ben vista ai suoi tempi, matematico costretto a studiare giurisprudenza e a trovar conforto nella poesia, esule senza pace su nessuna delle due sponde dell'Atlantico. Per garantirgli almeno la consolazione postuma di una perfetta integrazione nella media, abbiamo fatto delle estrazioni statistiche sulla longevità dei matematici (inutile dire che la fonte di questi dati è il miglior sito di storia della matematica in rete, il celebre MacTutor dell'università St.Andrews: www-history.mcs.st-andrews.ac.uk), e abbiamo avuto la consolazione di scoprire che la maggior parte dei matematici ha avuto vita abbastanza lunga. L'istogramma pare avere il suo bel massimo intorno all'ottantina d'anni che, oltre a sembrarci di buon auspicio, sistema gli ottantadue anni e mezzo di J.J. nella perfetta "normalità" statistica.

Ma, come sempre, non è la normalità o l'eccezionalità di alcuni aspetti per così dire "accidentali" a far lasciare un segno nella storia: ad esempio, Sylvester, pur dovendo combattere contro intolleranze e difficoltà fu matematico eccezionale. Ma non furono le sue ricerche matematiche la sua arte maggiore. Fu anche un grande amante della poesia, traduceva con facilità versi e testi dal francese, dal tedesco, dall'italiano, dal latino e dal greco, ma anche se la sua profonda familiarità con le lingue è certo alla base delle sue invenzioni di termini matematici (oltre a "discriminante", inventò anche il termine "matrice", e dette il nome alla funzione Toziente[16] di Eulero $\varphi(n)$), non è la facondia che lo rende immortale. Più semplicemente, fu il fecondo inseminatore di matematica in terre che erano ancora poco recettive alle nuove discipline: la scuola matematica inglese e americana erano assai meno prestigiose di quella francese e della tedesca, e avevano bisogno di un nuovo motore. Sylvester, in qualche modo, riuscì a dare il giusto propellente ad entrambe. Spese ogni sua energia per affrontare problemi nuovi e per ispirare giovani studenti: le sue lezioni non erano mai celebrazioni di stanchi rituali, ma erano soprattutto una presentazione dell'ultima teoria a cui stava lavorando, dove i punti critici e tutto il "work in progress" veniva presentato in piena luce, al contrario di quello che si era soliti fare nelle aule universitarie. Ogni difficoltà insoluta era un pretesto per digressioni che duravano mesi e da cui gli studenti potevano trarre il giusto insegnamento.

È rimasta celebre la sua espressione "*la matematica è musica per la ragione"* che in realtà è parte di una ben più lunga frase: "*Non sarà possibile descrivere la musica come la*

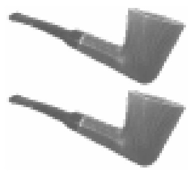
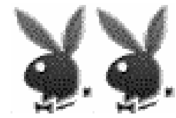
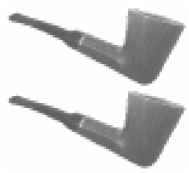
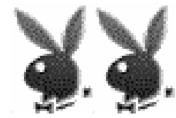
[16] Ne parla a profusione il PM di RM67.

matematica dei sensi, la matematica come musica della ragione? Il musicista sente la matematica, il matematico pensa la musica: musica il sogno, matematica la vita in atto.”[17]

Un insegnante come Sylvester può creare intere generazioni di studiosi, oltre che intere legioni di bravi educatori: Nightingale, Cayley, Kempe, Ladd-Franklin, e chissà quanti altri, che non necessariamente hanno fatto della matematica la loro professione, ma che certo hanno messo della buona matematica nella loro professione e nella loro vita. E se la matematica è davvero musica per la ragione, è forse per questo che quelle menti hanno ben cantato.

[17] *May not music be described as the mathematics of the sense, mathematics as music of the reason? The musician feels mathematics, the mathematician thinks music: music the dream, mathematics the working life.* L'originale rende forse meglio il significato, perché il modo in cui il musicista sente (*feels*) la matematica non è con le orecchie.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Deserto Asimmetrico Monodimensionale			
(Iper-)Evidenti Ragioni di Simmetria			

I problemi di questo mese sono palesemente ispirati alla vecchia battuta: "Cosa fa il Postino in vacanza?" "Luunghe passeggiate". Siccome abbiamo un Postino Virtuale...

2.1 Deserto Asimmetrico Monodimensionale

Come sapete alcuni di noi sono appassionati di escursionismo a piedi, tarpati sovente in questo loro hobby da familiari che prenderebbero la macchina anche per andare in bagno.

Questo costringe i nostri eroi a limitare le loro escursioni a mondi squisitamente virtuali (quali reticoli ortogonali di città infinite o cose di questo genere); va detto che la cosa può rappresentare un indubbio vantaggio, soprattutto per la formulazione di interessanti problemi; ad esempio...

Ad esempio, il passeggiare sulla retta dei numeri relativi. Ma non una passeggiatina da una giornata, una cosa a tappe.

Supponiamo di svegliarci al mattino su un punto intero della retta e, impacchettata la nostra attrezzatura, di decidere casualmente (metà e metà) se andare verso i positivi o verso i negativi; per problemi presumibilmente connessi con il cambio di fuso orario (su una retta? Boh...), le nostre tappe hanno lunghezza 2 se andiamo nel verso dei positivi, e lunghezza -1 se procediamo nel verso dei negativi.

Ora, il bello di una passeggiata è che si vedono un mucchio di posti nuovi; ma secondo voi, al limite, qual è la frazione di posti (interi) che *non* vediamo?

[...e poi si chiedono perché preferiamo una deterministica automobile... (I Familiari)]

2.2 (Iper-)Evidenti Ragioni di Simmetria

Il bello delle passeggiate virtuali è che per farle potete scegliere dei posti ragionevolmente assurdi e anche se il tempo ha cancellato le indicazioni (successo veramente a Rudy, questa estate. No, non si è ancora comprato il GPS) la cosa non è grave; abbiamo qualche dubbio sull'attrezzatura necessaria ad affrontare questi viaggi, in quanto l'armamentario matematico è, in alcuni casi, decisamente ingombrante.

Prendiamo ad esempio un ipercubo, con un vertice a casa nostra (sarebbe l'origine); siccome il concetto di "gira a destra" quando le dimensioni cominciano a diventare eccessive è piuttosto aleatorio, procediamo come al solito a caso; arrivati ad un incrocio, scegliamo una strada tra le n disponibili (vale anche tornare indietro, quindi). Questo, nel nostro Escursionista Virtuale Preferito *[trattasi di Rudy, nel senso che lo preferiamo fuori casa a escursionare (Gli Stessi Familiari Di Cui Sopra)]*, ha dato origine ad alcune interessanti domande:

Ma quante tappe sono necessarie in media per tornare al punto di origine?

Supponiamo di fermarci in due casi: o quando torniamo all'origine o quando arriviamo al punto diagonalmente opposto; quante tappe saranno necessarie, prima di fermarsi?

E qual è la probabilità di raggiungere il punto diagonalmente opposto prima di ripassare per l'origine?

Infine, qual è la probabilità di raggiungere il punto diagonalmente opposto?

Siccome sappiamo che vi piacciono le espansioni (e che il risolvere qualcosa che noi non abbiamo risolto vi dà un confortevole senso di superiorità), potreste provare anche con gli altri (iper)solidi... ricordatevi solo che in quattro dimensioni sono di più, mentre dopo ce ne sono meno.

"Oeu, Rudy, ma i parenti del tetraedro, ce l'hanno il 'vertice opposto'?"

A parte che dovreste saperlo che si chiamano "simplessi", fate voi... Ignorarli sembra essere una buona strategia. A occhio e croce, dovrebbero avanzarvene un buon numero.

3. Bungee Jumpers

[a]-Trovate un numero di sei cifre che è moltiplicato per un fattore 6 se le ultime tre cifre sono spostate davanti al numero senza modificare il loro ordine.

[b]-Provate che non esiste un numero di otto cifre che viene moltiplicato per un fattore 6 se le ultime quattro cifre sono spostate davanti al numero senza modificare il loro ordine.

> *Facili, questa volta. Per mostrare che, in questo tipo di problema, non si riesce mai a capire prima se sarà facile o difficile.*

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

BUAHAHAHAHA! NON MI TROVERETE MAI! LO SCIENZIATO PAZZO TRAMA E ORDISCE NELL'OMBRA!

Non fateci caso, è Rudy che si è montato la testa.

Successivamente alla pubblicazione del successo editoriale della stagione alcuni lettori, presumibilmente per osannare con manifestazioni di piazza gli Autori, si sono messi alla ricerca dei loro indirizzi fisici; purtroppo, una volta che avete consultato la guida del telefono non vi restano più molte possibilità e quindi Rudy (che – forse non ve lo avevamo detto – ha traslocato di recente) non avendo telefono fisso risulta irreperibile; non solo, ma ha scoperto di avere un perfetto omonimo a spasso per il Piemonte, quindi la sua identità segreta resta ancora ragionevolmente nascosta.

Come diceva il fabbricante di cappelli, "Ho una buona e una cattiva notizia: la cattiva è che gli alieni ci hanno invaso, la buona è che hanno tre teste". Nel nostro caso, la cattiva notizia è che perdiamo un abbonato a Siena, la buona è che lo riacquistiamo nel Regno Unito: ***Marco***, infatti, volendo emulare Rudy, ha deciso di traslocare. Ne approfittiamo per raccontarvi una graziosa definizione astronomica che abbiamo recuperato una volta tanto per tempo: *si definisce Equinozio d'Autunno il momento in cui gli inglesi smettono di perdere a cricket e cominciano a perdere a calcio.*

Il motivo del "per tempo" di cui sopra nasce dal fatto che Rudy si è arrabbiato molto nello scoprire il *venti agosto* che il *tredici* era la Giornata Mondiale dei Mancini; come sapete, il perdere un motivo per festeggiare lo secca moltissimo. Ricordateglielo, l'anno prossimo.

Come dicevamo il mese scorso, la Redazione si è incontrata in due nazioni diverse (non contemporaneamente, spiritosi) sia per festeggiare l'uscita di un best-seller di risonanza mondiale che per editare il numero di agosto; come si è visto in seguito, la cosa ha avuto un discreto impatto sui mercati finanziari; come recita una legge fisica mai provata ma spesso verificata, se metti tre casinisti nella stessa stanza il disordine non si somma ma si moltiplica.

Esausti dal tour de force svizzero, che ha compreso tra le altre cose un viaggio a Berna con visite alla casa-museo di Einstein e al locale Museo della Scienza[18], due dei tre redattori hanno deciso di concedersi un meritato periodo di vacanza; forti del fatto che i Grandi Capi e gli Scienziati Pazzi non sono soggetti a queste problematiche, hanno deciso all'unanimità (loro due) che le Soluzioni e Note questo mese doveva scriverle Rudy. Che non solo ha sinora parlato praticamente solo di sé stesso, ma intende anche scaricare la responsabilità di eventuali dimenticanze, errori e svarioni vari su quei due panciollanti nullafacenti.

Tra le cose serie di questo mese, una richiesta che ci arriva da una New Entry (Benvenuto, ***Marco***!): particolarmente felice del modo col quale maltrattiamo la matematica, si chiede se esiste qualcosa del genere per fisici psicopatici (testuali parole). Per quanto ne sappiamo, purtroppo no: giriamo comunque la domanda a tutti i leggenti, e se qualcuno ha intenzione di mettere in piedi un oggetto di questo genere siamo pronti a dare il nostro appoggio morale (solo morale perché Rudy ha da fare e gli altri due dormono).

4.1 [102]

Sempre per il fatto che siamo usciti tardi, sono avanzate alcune soluzioni dal mese scorso.

4.1.1 È arrivata la pagaia?

Per prima cosa, dichiariamo chiuso il concorso. Non ha risposto nessuno, quindi l'abbonamento vitalizio ce lo teniamo.

Dovevate trovare il titolo (inglese) del film cui faceva allusione il titolo del problema, e di cui avevate anche una citazione in italiano.

The Seven Year Itch (1955), di Billy Wilder con Marilyn Monroe e Tom Ewell, tradotto in italiano come *Quando la moglie è in vacanza*[19]. New York, un agosto afoso. Tom Ewell sta cercando di spedire a moglie e figli che sono al campeggio la pagaia che hanno dimenticato; dopo alcuni inutili tentativi, sbottando in un "Tutti spediscono pagaie! Gli uffici postali sono pieni di pagaie!" decide di uscire sul balcone, dove evita per un pelo un vaso precipitato dal piano di sopra. Quando Marilyn Monroe si scusa con lui per il disastro, Tom Ewell la invita a bere qualcosa. Risposta: "Arrivo tra un attimo! Gli intimi, li tengo in frigo".

Abbiamo ricevuto un'ulteriore soluzione da ***Andrea***, il quale sostiene che è "brutta"; verso la fine, infatti, ha dovuto risolvere un'equazione attraverso ricerca iterativa; probabilmente per rimediare a questa bruttura, ha deciso di dare alla sua soluzione un aspetto decisamente leonardesco e di inviarcela in powerpoint; siccome non ci pare il caso di riscriverla tutta, vi passiamo solo la prima pagina:

[18] Come dicono le cartine del Touring: vale il viaggio. Non vi diamo ulteriori informazioni su monumenti ed altro, che potete trovare in qualsiasi guida della città. Ci limitiamo a dirvi che vicino al Recinto degli Orsi (dal centro, girate a destra dopo aver superato il Nydegg Brücke) si mangia meravigliosamente e, nonostante fosse agosto, siamo riusciti ad avere degli ottimi *rösti*. E delle altrettanto ottime birre, ovviamente.

[19] Il Capo qui non ve lo dice, ma è di questo film la famosissima scena con la gonna di Marilyn svolazzante [AR]

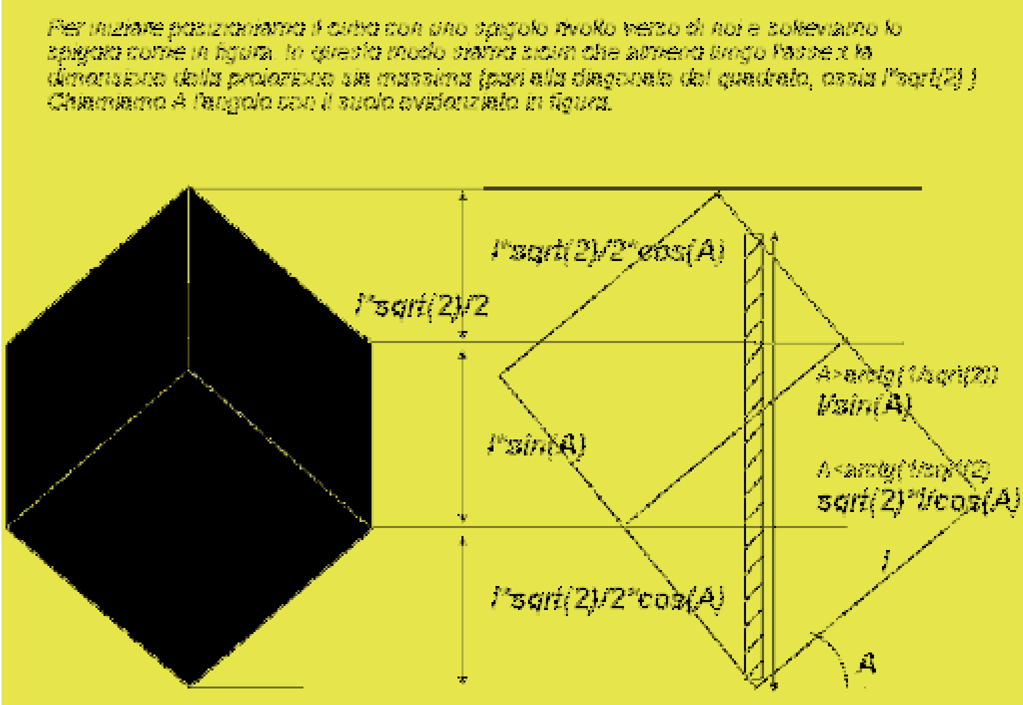
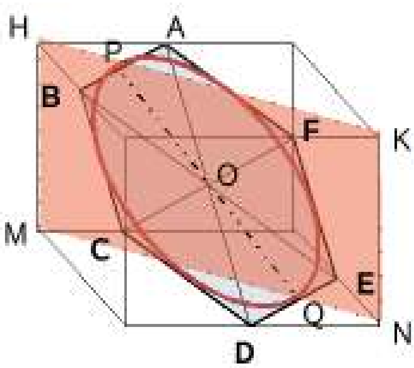


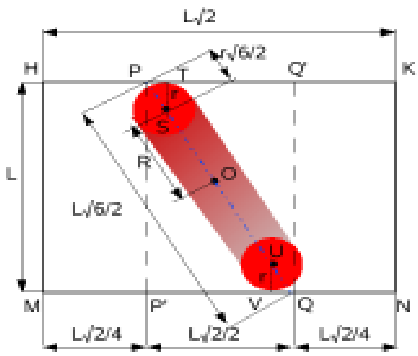
Figura 1 – Il Codex Andreicus

La seconda pagina procede nello stesso stile; ammettiamo, è la prima volta che riceviamo una soluzione interamente in PowerPoint. Decisamente apprezzabile, sia per il colore pergamena dello sfondo che per l'"ordinato disordine" del tutto.

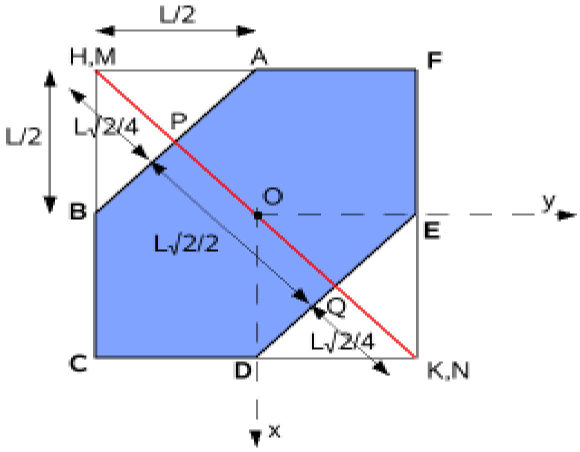
Anche ***Trekker*** ha qualcosa da dire, in merito. O meglio, da scrivere, in quanto quel coso che usa ci risulta impronunciabile in buona parte delle lingue che conosciamo.

> Siccome credo che nessuno, in questo clima "agostiano", avrà avuto il tempo e la voglia di tentare la soluzione via Karush-Kuhn-Tucker faccio una congettura. Precisamente sostengo che il toro più grande (con raggi "caratteristici" R e r, con $R>>r$) deve essere disposto nella scatola cubica (di lato L) in modo che il suo piano di simmetria principale (per intenderci quello che passa per il centro del toro e lo taglia in due ciambelle col "buco" uguali) contenga l'esagono regolare massimo di apotema $L\frac{\sqrt{6}}{4}$.
>
> Per intenderci meglio, le figure che seguono mostrano in azzurro l'esagono ed in rosso il toro. Inoltre è evidenziato (in rosso trasparente nella figura di sinistra) il piano HKNM che "sega" la scatola come mostrato nella figura di destra (con un toro un poco "ingrandito" a dire la verità):





Con un po' di geometria elementare, ed osservando la similitudine fra i triangoli PP'Q e STP, si trova la relazione $R = L\frac{\sqrt{6}}{4} - r\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\frac{L}{2} - r\right)$, con $R>0$ e $r<L/2$.



Per trovare i coefficienti adatti alle condizioni necessarie di Karush-Kuhn-Tucker individuiamo una nuova terna di assi cartesiani definendone i tre versori (da cui poi si possono facilmente trovare i coseni direttori).

Comiciamo col trovare (nelle "vecchie" coordinate) l'equazione del piano per ABCDEFO che, come è facile verificare con l'ausilio della figura a lato, è $x+y+z=0$.

Scegliamo come nuove coordinate (x',y',z') gli assi individuati dalla normale al piano contenente l'esagono – che nelle vecchie coordinate è esprimibile con (1/√3; 1/√3; 1/√3) – e da altri due versori giacenti nel piano – ad esempio (1/√2; -1/√2; 0) e (0; 1/√2; -1/√2). Ora bisogna "tritare i λ e i μ" della lagrangiana "generalizzata"... Ma un "pezzo" del lavoro è fatto...

...e come no... Ma non vorremmo privarvi della piccola gioia di finire da soli.

4.2 [103]

Per prima cosa, vi facciamo sentire in colpa. ***CID*** ci ha mandato la soluzione di *tutti* i giochi della rubrica *Typo da Spiaggia*. Non solo, ma ***Franco*** ci segnala che probabilmente manca una regola, nel terzo gioco: da ogni isola si devono poter raggiungere tutte le altre. Dove abbiamo pescato questi giochi non l'abbiamo trovata – ***Franco*** dice che sono spagnoli, noi li abbiamo trovati in Canada – ma è molto probabile che abbia ragione lui.

Siccome a giudicare da come mette il tempo vi aspettano alcuni week-end piovosi durante i quali non avrete nulla da fare (e siccome Rudy è impegnato a Distruggere il Mondo con la sua nuova Arma Letale[20] e non ha il tempo di cercare altri giochini), vi passeremo le soluzioni il mese prossimo. Questa nota è qui per riconoscere le priorità (e per raccontarvi del trapano).

4.2.1 Alinghi

Se credete che l'ambientazione del problema fosse tutta una frottola e che a nessuno da quelle parti gliene importasse qualcosa, di fianco avete la testimonianza che vi state sbagliando di grosso; lo sfondo, infatti, è Berna.

Certo che anche qui non si scherza; soluzioni da un bel po' di gente, con ripensamenti e rielaborazioni; capisco darsi un tono al mare sfoggiando prestigiose riviste di matematica ricreativa, ma cosa ne diceva la famiglia?

Primo arrivato è ***FraPao***, il quale ci dice di alzare lo spinnaker e ci augura buon vento in poppa.

[20] Si è comprato un trapano. Cordless.

Ci sono diversi modi per Alinghi di vincere il torneo: ad esempio penando fino all'ultima regata sul 4-4 e vincere l'ultima, oppure partendo dal 4-3 e così via fino al caso in cui non c'è trippa per gatti e si va diretti sul 5-0.

La probabilità di vincere il torneo è la somma delle singole probabilità.

$P = P(5-4) + P(5-3) + P(5-2) + P(5-1) + P(5-0)$ A loro volta le singole probabilità sono la sommatoria delle probabilità legate alle diverse combinazioni con cui si può arrivare ad un certo punteggio: ad es. sul 4-4 si può arrivare attraverso un numero di casi possibili pari alla combinazione di 8 elementi a 4 a 4, quindi

$$P(4-4) = \binom{8}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)^4 = 70 \cdot p^4 \cdot (1-p)^4$$

e ovviamente

$$P(5-4) = p \cdot P(4-4)$$

Generalizzando, se n è il numero di regate in cui si svolge il torneo (intero dispari), la probabilità totale di vincerlo è:

$$P = p^{\frac{n+1}{2}} \cdot \sum_{i=\frac{n-1}{2}}^{n-1} \binom{i}{\frac{n-1}{2}} \cdot (1-p)^{i-\frac{n-1}{2}}$$

Nel nostro caso (n=9):

$$P = p^5 \cdot [1 + 5 \cdot (1-p) + 15 \cdot (1-p)^2 + 35 \cdot (1-p)^3 + 70 \cdot (1-p)^4]$$

che per p=50% dà il valore (atteso) P=50%.

A proposito di valore atteso, per il numero di regate R cui assisteremo i pesi da applicare sono i singoli contributi di probabilità legati ai diversi punteggi possibili:

$$R = \frac{9 \cdot P(5-4) + 8 \cdot P(5-3) + 7 \cdot P(5-2) + 6 \cdot P(5-1) + 5 \cdot P(5-0)}{P}$$

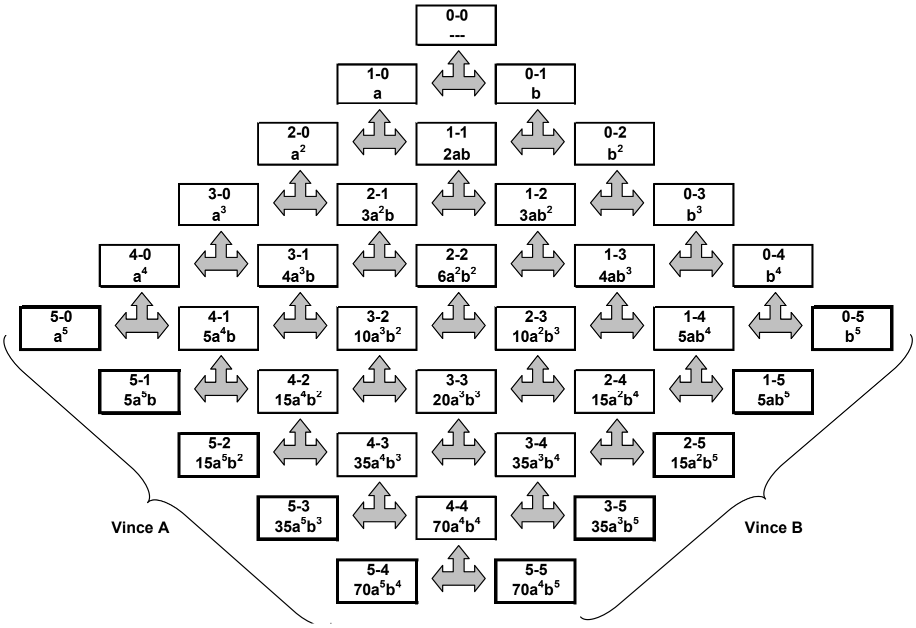
Ma tornando sulla formula della probabilità totale, è interessante notare come ogni punto percentuale in più di forza, che può assicurare l'esito della singola regata, incida in maniera più "pesante" sull'esito finale:con p=60% abbiamo P=73,3%; con p=70% abbiamo P=90%. Tale comportamento è tanto più evidente quanto più è grande n.

La morale è che basta essere più forti anche di poco per essere premiati, alla lunga.

Interessante generalizzazione. ***Franco*** affronta la cosa in un modo decisamente più grafico (ci ha mandato anche il file Excel, fidatevi):

Siano A e B le barche in gara, a e b $(b=1-a)$ le rispettive probabilità, costanti, di vittoria nella regata singola.

Per quanto riguarda la sfida al meglio delle nove gare, nello schema seguente è indicata in rosso la probabilità di ogni singolo punteggio parziale:

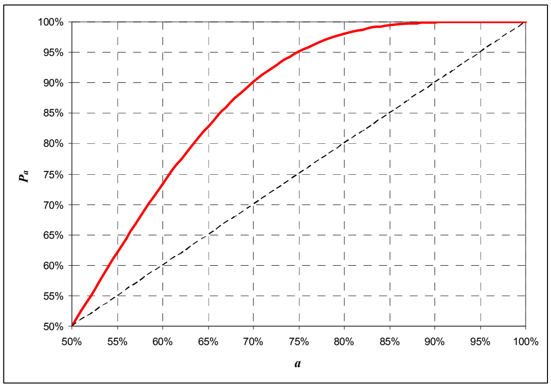


La probabilità che A vinca la sfida (con un punteggio qualsiasi) è:

$$P_A = a^5 + 5a^5b + 15a^5b^2 + 35a^5b^3 + 70a^5b^4$$

ossia, sostituendo $b = 1 - a$

$$P_A = a^5\,(126 - 420a + 540a^2 - 315a^3 + 70a^4)$$



Ho fatto un grafico:

La probabilità di assistere a sole 5 regate (con vittoria di uno dei due contendenti) è data dalla somma delle probabilità che si verifichi il punteggio 5-0 oppure 0-5 e quindi, sempre dallo schema di cui sopra, sarà:

$$P_5 = a^5 + b^5 = a^5 + (1\text{-}a)^5$$

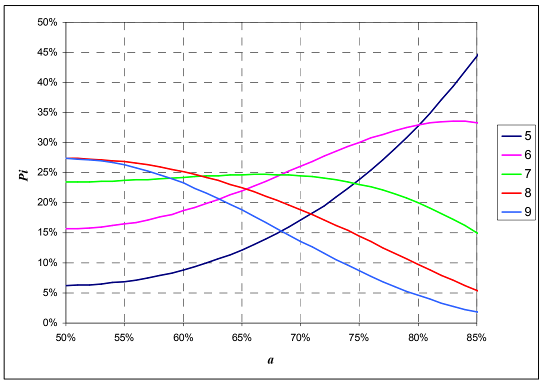
e, analogamente,

$$P_6 = 5a^5(a\text{-}1) + 5a(1\text{-}a)^5$$

$$P_7 = 15a^5(a\text{-}1)^2 + 15a^2(1\text{-}a)^5$$

$$P_8 = 35a^5(a\text{-}1)^3 + 35a^3(1\text{-}a)^5$$

$$P_9 = 70a^5(a\text{-}1)^4 + 70a^4(1\text{-}a)^5$$



Confrontando i valori di $P_5 \ldots P_9$ in funzione di a si può facilmente vedere qual è il numero di regate con la probabilità maggiore (senza imbarcarsi in noiosissime disequazioni!).

In questo grafico ho mostrato come evolvono le P_i in funzione di a.

Andando a fare qualche calcolo (e non andando oltre il secondo decimale) risulta che assisteremo probabilmente a:

5 regate se $a \geq 0{,}81$

6 regate se $0{,}81 > a \geq 0{,}69$

7 regate se $0{,}69 > a \geq 0{,}62$

8 regate se $0{,}62 > a \geq 0{,}54$

9 regate se $a < 0{,}54$

Molto chiaro, dobbiamo ammetterlo.

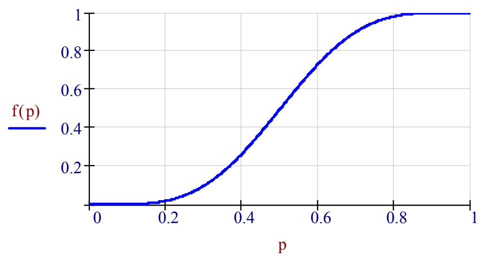
Michele non solo ci manda la soluzione, ma ci manda anche una citazione di *V. Arnold*: "*La matematica è quella parte della fisica in cui gli esperimenti costano poco*". Conoscevamo Arnold solo da un suo libro piuttosto noioso (dovevamo studiarlo), ritrattiamo immediatamente l'opinione che ci eravamo fatti all'epoca. Questa, finisce in calendario per direttissima.

Alla prima domanda possiamo rispondere in due modi diversi.

A) Il numero di successi conseguito da Alinghi in 9 regate (in ciascuna delle quali vince con probabilità p, e perde con probabilità $q = 1-p$) segue una distribuzione binomiale e dunque la probabilità che Alinghi vinca la gara è

$$f(p) = \sum_{k=5}^{9} \binom{9}{k} p^k q^{9-k} = 70p^9-315p^8+540p^7-420p^6+126p^5.$$

Ecco grafico e tabella; se $p = 0.5$ allora la probabilità è 50%, come ci aspettiamo.



p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$f(p)$	0.1%	2%	9.9%	26.7%	50%	73.3%	90.1%	98%	99.9%	100%

B) Il risultato in A presuppone che si effettuino comunque 9 regate. In realtà la gara termina quando una delle due squadre raggiunge quota 5 vittorie. Allora la probabilità che Alinghi vinca la gara è data dalla somma delle probabilità che vinca in 5, 6, …, 9 regate. Indichiamo con a_5, …, a_9 tali probabilità; risulta:

$a_5 = p^5$

$a_6 = 5p^5q$

$a_7 = 15p^5q^2$

$a_8 = 35p^5q^3$

$a_9 = 70p^5q^4$

In generale:

$$a_k = \binom{k-1}{4} p^5 q^{k-5}$$

I risultati in A e in B sono uguali; risulta infatti

$$\sum_{k=5}^{9} a_k = 70p^9 - 315p^8 + 540p^7 - 420p^6 + 126p^5.$$

Per la seconda domanda non ci sono difficoltà: se indichiamo con b_k la probabilità che la gara termini dopo k regate (con $k=5, 6, \ldots, 9$) allora il valore atteso del numero di regate (che è funzione di p) è

$$\mathrm{E}(p) = 5b_5 + 6b_6 + \ldots + 9b_9.$$

Risulta:

$$b_5 = p^5 + q^5$$

$$b_6 = 5p^5q + 5pq^5$$

$$\ldots$$

$$b_9 = 70p^5q^4 + 70p^4q^5$$

In generale:

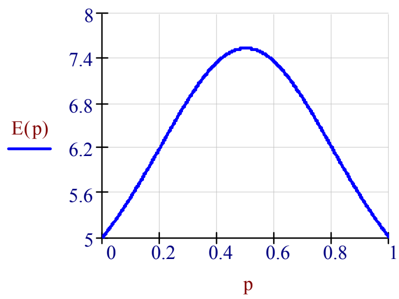
$$b_k = \binom{k-1}{4} p^5 q^{k-5} + \binom{k-1}{4} p^{k-5} q^5$$

Risulta dunque

$$\mathrm{E}(p) = 70p^8 - 280p^7 + 395p^6 - 205p^5 + 5p^4 + 5p^3 + 5p^2 + 5p + 5$$

Grafico e tabella confermano la simmetria rispetto a 0.5; per p vicino a 0 o a 1 il numero atteso di regate tende a 5; per $p=1/2$ si ha il valore atteso massimo $\mathrm{E}(0.5) = 965/128 \approx 7.54$.

p	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
E(p)	5	5.6	6.2	6.9	7.4	7.5

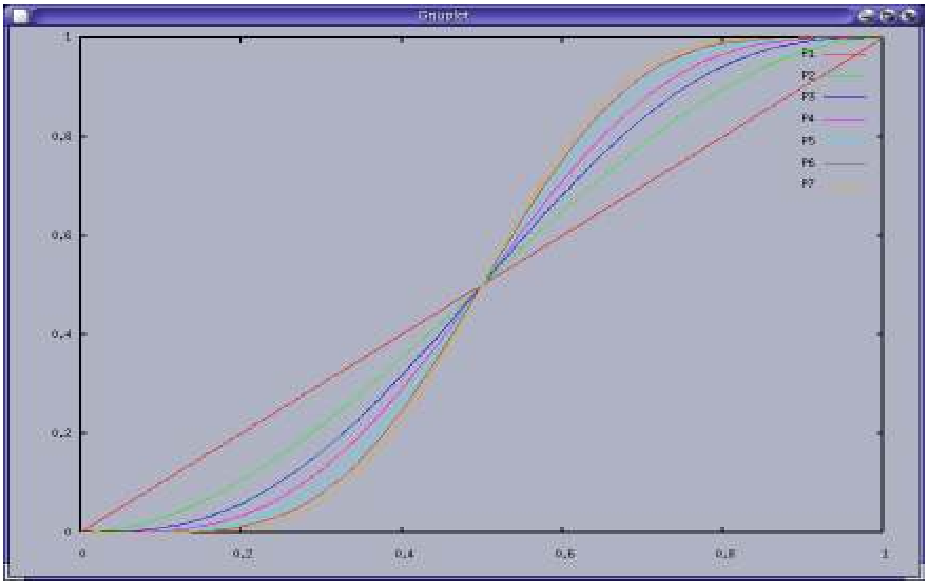


Visto che Alinghi ha vinto in 7 regate possiamo aggiornare la probabilità p che ha dimostrato di avere in ogni gara. La soluzione di $\mathrm{E}(p)=7$ è $p=67.6\%$: Alinghi è stata nettamente superiore a New Zealand.

Trekker (non pubblichiamo l'intera soluzione in quanto abbiamo alcuni problemini con l'import delle formule) considera tutti i diversi modi in cui si può vincere una regata; arriva alla formula che ormai dovreste conoscere e ci presenta il seguente disegnino, che permette di verificare cosa succede al variare dei punti richiesti per vincere il torneo:

1												
1	1											
1	**2**	1										
1	**3**	3	1									
1	**4**	**6**	4	1								
1	**5**	**10**	10	5	1							
1	**6**	**15**	**20**	15	6	1						
1	**7**	**21**	**35**	35	21	7	1					
1	8	**28**	**56**	**70**	56	28	8	1				
1	9	36	**84**	**126**	126	84	36	9	1			
1	10	45	120	**210**	**252**	210	120	45	10	1		
1	11	55	165	330	**462**	462	330	165	55	11	1	
1	12	66	220	495	792	**924**	792	495	220	66	12	1

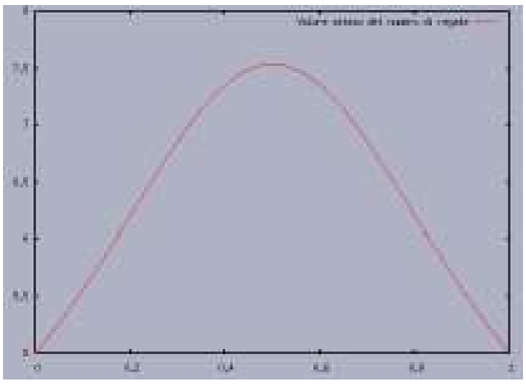
Procede quindi a tabulare le curve (e ne approfitta per fare pubblicità a Gnuplot) ottenendo il seguente interessante risultato:

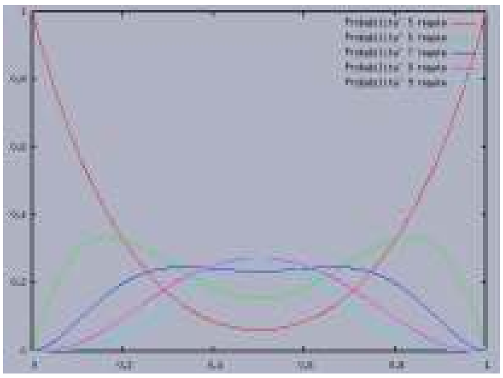


E su queste basi fa un'interessante osservazione:

> se Alinghi avesse un vantaggio (cioè $p>1/2$) nella singola regata, i tornei più lunghi sarebbero "statisticamente", per Alinghi, da preferirsi; viceversa se Alinghi avesse uno svantaggio (cioè $p<1/2$), in qualità di "defender", converrebbe che cambiasse le regole[21] imponendo tornei più corti (restando quindi "statisticamente un po' meno sfavorita")

Posto che soffriate per l'insana curiosità di sapere quali siano i grafici della probabilità di avere un certo numero di regate al variare della probabilità, basta chiedere (sempre pubblicità a Gnuplot):

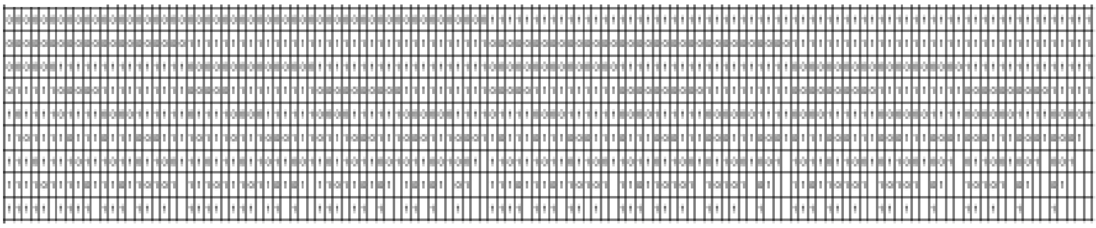




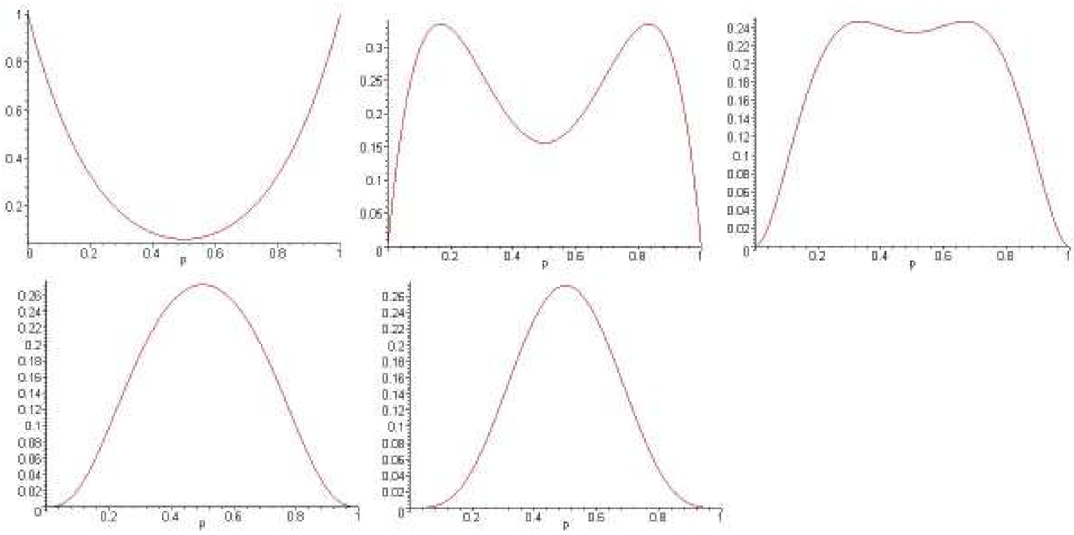
Non pago, il Nostro costruisce anche una tabella dei **126** modi distinti in cui Alinghi può vincere il torneo: gentilmente, fa notare che *forse* serve una lente[22]

[21] ***Trekker*** ci ricorda che è possibilità del Defender cambiare le regole di gara (e, a quanto ci risulta, gli svizzeri lo stanno facendo; chiedete ad Alice per i dettagli).

[22] Uno di noi ha 12/10 in visione ravvicinata (orbo come una talpa oltre i dieci metri); abbastanza per dire che si vede che nelle ultime righe non hai messo gli zeri.



Se i grafici sembrano poco chiari, potete vedere quanto ne dice ***CID***: non pubblichiamo i calcoli, in quanto simili ad altri già visti. Di seguito, i valori di probabilità per i valori attesi **6**, **7**, **8** e **9**.



Bene, direi che adesso possiamo affrontare la prossima Coppa America con abbastanza dati da spacciarci per esperti.

4.2.2 Parlando del cugino...

Prima il *gossip*, poi le soluzioni. Mio cugino si è riprodotto di nuovo. Il figlio si chiama Alessandro. Indovinate come si chiama la madre[23].

Cominciamo con ***FraPao***, che conclude la sua lettera con un "e adesso, in vacanza". Quello che ci manda in bestia, è che non ha neanche messo un punto esclamativo, un punto fermo, uno smiley, un qualchecosa... Niente, la pura e semplice dichiarazione che adesso lui va. E, implicitamente, che non glie ne importa nulla di quelli che restano a sudare sui suoi calcoli.

Passiamo al problema, che è meglio. Tra l'altro, presenta interessanti divagazioni da ponderare quando (lui! che adesso va in vacanza. con la minuscola e senza punto) ci si trova bloccati in coda in autostrada.

> Poiché un orologio "antiorario" è effettivamente un orologio "orario" visto allo specchio, gli orari "visivamente coincidenti" nei due orologi si verificano quando la lancette dei minuti e quella delle ore, nel nostro caso indistinguibili, formano angoli uguali rispetto alla mezzanotte (o mezzogiorno).
>
> Osservando che tali orari notevoli, che hanno ispirato poi il modo con cui ciascuno di noi tiene il volante, sono (circa):
>
> > le undici e cinque (e la sua gemella "una meno cinque"),
> >
> > le dieci e dieci (due meno dieci),

[23] Gli spiritosi che hanno detto "Paola, come tutte le mogli" ci hanno azzeccato.

le nove e un quarto (tre meno un quarto),

le otto e venti (quattro meno venti) ecc.

possiamo concludere che ad ogni ora (meno circa 5 minuti) si presenta un orario notevole, quindi in totale 27 a partire dalla mezzanotte fino alla mezzanotte del giorno successivo estremi compresi.

Non potendomela cavare senza calcoli un po' più precisi, se α e β sono gli angoli formati rispettivamente dalla lancetta dei minuti e da quella delle ore rispetto alla mezzanotte, e t il tempo in ore, abbiamo:

$$\alpha = 2 \cdot \pi \cdot t$$

$$\beta = \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{12}$$

Gli orari notevoli si presenteranno quando

$$\beta = 2 \cdot \pi - \alpha + 2 \cdot k \cdot \pi$$

con k (0,1,2..) che tiene conto dei giri successivi della lancetta dei minuti.

Possiamo ora ricavare $t = \frac{12}{13} \cdot k$ ed ottenere ora i veri valori (non più "circa"):

00:00:00	00:55:23	01:50:46	02:46:09	03:41:32
04:36:55	05:32:18	06:27:42	07:23:05	08:18:28
09:13:51	10:09:14	11:04:37		

Io tengo il volante alle 10 e un quarto, voi ?

Noi lo teniamo il resto del tempo, visto che non lo tieni tu.

Io alle dieci e dieci, ma non faccio testo: Geo[24] ha due pustole sul volante in quella posizione, ed è comodo tenerlo così.

Giampietro si chiede l'utilità di un oggetto del genere, se non per credere di star viaggiando nel tempo. Il che in questo piovoso pomeriggio agostano ci ispira filosofiche speculazioni del tipo di usare questo orologio per andare indietro nel tempo e poi prenderne uno normale per ritornare avanti, sfruttando il fatto che si può cambiare orologio solo quando segnano la stessa ora... Se qualcuno vuole cavarci un romanzo di fantascienza faccia pure, gli cediamo volentieri l'idea. Veniamo alla soluzione.

L'ora esatta la si ha per simmetria rispetto alla retta passante per 6 e 12 sul quadrante, per cui se vogliamo sapere quando le lancette dello pseudo orologio sono posizionate come quelle di uno reale contemporaneamente, basta considerarle in modo tale che il loro asse di simmetria sia proprio quello passante per 6 e 12.

Si consideri la posizione in radianti della lancetta delle ore (al tempo iniziale le lancette sono posizionate entrambe sul 12) $P = \omega_o t$ con $\omega_o = \frac{\pi}{21600} \, {}^{rad}\!/_{s}$ mentre la posizione di quella dei minuti $p = 2\pi - \omega_m t$ con $\omega_m = \frac{\pi}{1800} \, {}^{rad}\!/_{s}$. Ovviamente si vuol sapete per quale valore del tempo si ha $P = p$, che sarebbe

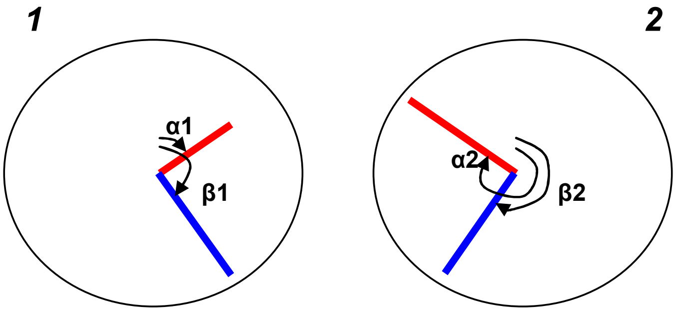
[24] Vi ricordate che è la macchina di Rudy, degno erede di Tojo, sì?

$t_f = \dfrac{2\pi}{(\omega_o + \omega_m)} = {}^{43200}\!/_{13}\, s$, precisamente 55'23". Ciò significa che le lancette saranno simmetriche (e quindi segneranno l'ora esatta) un numero di volte pari a $V = \dfrac{24}{t_f} + 2 = 28$, il +2 per il fatto che nei calcoli non si tiene conto delle ore 06:00 e 18:00

Franco esordisce nella lettera con un "Questo mese vado al raddoppio: la famiglia in vacanza mi consente di dedicare più tempo..." Facci capire: loro sono in vacanza e tu no? Come accennavamo qualche pagina fa, attento ai vasi da fiori.

Attenti che nel disegno le frecce sono misure di angoli, non indicazioni di movimento.

> Nel disegno qui sotto ho rappresentato l'orologio normale (1) e l'orologio del cugino (2). Entrambi fanno più o meno le 1:25; per facilità di comprensione ho colorato in rosso la lancetta delle ore ed in azzurro quella dei minuti ma nel resto del discorso non ne terrò conto.
>
> Ho disegnato (con mano da ubriaco) anche gli angoli α e β misurati in senso orario a partire dalle 12.
>
> Io ho inteso la domanda in questo senso: dato che le lancette dell'orologio 2 sono indistinguibili potrò dire che l'orologio 2 segna l'ora esatta quando:



$$\text{A)} \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 \\ \beta_1 = \beta_2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \text{B)} \begin{cases} \alpha_1 = \beta_2 \\ \beta_1 = \alpha_2 \end{cases}$$

> Se esprimo gli angoli in sessagesimali (e 360°=0°, naturalmente) sarà:

$$\alpha_1 = \frac{360}{720} * (60h + m) = \frac{1}{2}(60h + m)$$

$$\beta_1 = \frac{360}{60} * m = 6m$$

$$\alpha_2 = 360 - \frac{1}{2}(60h + m) = -\frac{1}{2}(60h + m)$$

$$\beta_2 = 360 - 6m = -6m$$

> Il caso **A)** è verificato solo alle ***0:00*** ed alle ***6:00*** (i $\boldsymbol{\beta}$ sono uguali se $\boldsymbol{m=0}$ e gli $\boldsymbol{\alpha}$ se $\boldsymbol{h=0}$ o $\boldsymbol{h=12}$ e poi comunque sarebbe evidente anche ad occhio nudo!!!).
>
> Esaminiamo ora il caso **B)**

Le due uguaglianze del sistema sono assolutamente identiche:

$$\frac{1}{2}(60h+m)=360-6m$$
$$13m=720-60h$$
$$m=\frac{720-60h}{13}=\frac{60}{13}(12-h)$$

L'uguaglianza è verificata ai seguenti orari (arrotondati al secondo):

00:55:23	01:50:46	02:46:09	03:41:32	04:36:55	05:32:18
06:27:42	07:23:04	08:18:28	09:13:51	10:09:14	11:04:37

In tutto, fra A) e B), abbiamo 14 soluzioni per la mattina ed altrettante per la sera, la risposta quindi è **28**.

Zar arzigogola sull'esposizione del problema, lamentandosi che era "come al solito, ingannevole". Secondo noi o è la pigrizia da ferie o è una malattia professionale (per alcune persone che facevano il suo stesso lavoro il darci del poco chiaro era diventato un tormentone), tant'è che al terzo tentativo ci manda la soluzione corretta. In realtà un pochino di (anzi, abbastanza) ragione ce l'ha: ne parliamo con l'ultima soluzione.

Siccome però è un tipo vendicativo, ce lo manda scritto con GoogleDoc, il che ci permette di porci una domanda filosofica: se GoogleDoc e OpenOffice dicono che un documento è in formato Word e MSOffice dice che è scritto in turco con un paio di problemi ma che si può riparare, secondo voi chi ha ragione?

Fortunatamente, il fido OOo riesce a vedere tutto. E adesso ve lo sorbite, con la fatica che abbiamo fatto io e ***Zar***.

Torniamo al quesito degli orologi... Questa volta proviamo ad interpretarlo in un altro modo, chiedendoci quando l'orologio che gira in senso antiorario potrebbe segnare anche un orario valido se considerato in senso orario.

Per rispondere alla domanda, immaginiamo di avere 2 orologi, uno normale e uno che gira invece in senso antiorario, sovrapposti. Entrambi partono, a mezzanotte, con le 2 lancette che puntano verso l'alto. Poi il tempo passa, e la lancetta dei minuti (indistinguibile da quella delle ore) comincia a muoversi - quella del primo orologio si sposta in senso orario, l'altra in senso antiorario. Quando esse raggiungono la stessa posizione è passata mezz'ora esatta, sono le 00:30, ma le 2 lancette delle ore si sono spostate dalla loro posizione iniziale, e questo non va bene. Noi vogliamo cercare invece tutte le posizioni in cui le lancette dei 2 orologi sono entrambe sovrapposte - cioè la lancetta dei minuti del primo orologio deve essere sovrapposta a una delle due lancette del secondo, e la lancetta delle ore del primo deve essere sovrapposta all'altra lancetta del secondo orologio.

Dall'esempio fatto prima dei 2 orologi sovrapposti si capisce che è impossibile che ci sia sovrapposizione tra 2 lancette dello stesso tipo: quando una delle due lancette delle ore si trova sulla destra (tra le 00 e le 06 di un orologio "normale") l'altra si trova sulla sinistra, e viceversa. Una sovrapposizione del genere capita soltanto alle 00:00 e alle 06:00.

Allora andiamo a cercare gli orari in cui la lancetta dei minuti di un orologio si sovrappone a quella delle ore dell'altro.

Indichiamo con t il tempo che passa: t è un numero (reale, abbiamo a che fare con orologi ideali matematici completamente analogici) compreso tra 0 e 1440. L'angolo formato dalla lancetta delle ore dell'orologio "normale" è uguale a t/2. L'angolo formato dalla lancetta dei minuti dell'orologio antiorario è uguale a -6t modulo 360°. Il segno meno sta appunto ad indicare il fatto che l'orologio gira nel senso sbagliato. Noi vogliamo sapere quando i due angoli sono uguali.

Per esempio, nella prima ora dobbiamo risolvere l'equazione seguente:

$t/2 = 360 - 6t$,

che ci dà, come risultato, un tempo pari a circa t=720/13=55.38 minuti.

Nella seconda ora dovremo risolvere l'equazione

$t/2 = 720 - 6t$,

e, in generale, dovremo risolvere l'equazione

$t/2 = 360k - 6t$, con $k = 0,..., 12$.

Ecco i risultati: *[Li trovate nel box di fianco, per risparmiare spazio (Firmato: "il" linotype, che 'sto mese fanno fare tutto a me)]*

```
Tempo hh:mm:ss
================
  0.00 00:00:00
 55.38 00:55:23
110.77 01:50:46
166.15 02:46:09
221.54 03:41:32
276.92 04:36:55
332.31 05:32:18
387.69 06:27:41
443.08 07:23:04
498.46 08:18:27
553.85 09:13:50
609.23 10:09:13
664.62 11:04:36
```

Ci sono quindi 13 momenti, nell'arco delle 12 ore, in cui le lancette dei 2 orologi segnano lo stesso orario. A questi dobbiamo poi aggiungere il caso già segnalato prima in cui le lancette omologhe sono sovrapposte, e questo avviene alle 06:00. Si noti che questi orari sono accoppiati nel senso della mia soluzione precedente: possiamo interpretare i ruoli delle 2 lancette in due modi diversi (vogliamo parlare di dualità?), per cui alle 00:55:23 e alle 11:04:36 le posizioni delle lancette sono le stesse - lo stesso succede per gli altri orari, a parte le 00:00:00, che è un orario duale di sé stesso.

Quindi per 28 volte in un giorno l'orologio antiorario segna lo stesso orario di un orologio buono.

Ineccepibile. La prossima volta, però, meglio il formato RTF, se devi usare GoogleDoc. Per esempio, ***Trekker***, nel dubbio, ci manda un ".DOC" (non farlocco, tant'è che si apre), un ".ODT" e, per essere sicuro, anche un ".PDF". Nel dubbio, meglio abbondare: comunque, ne riportiamo una copia sola. Non solo, ma siccome quello che abbiamo particolarmente apprezzato è la spiegazione "a parole", vi evitiamo la calcoleria annessa.

Cominciamo col supporre che entrambi gli orologi siano precisi, siano sincronizzati e appesi alla stessa parete. Ipotizziamo anche che l'avanzamento delle lancette sia "regolare", cioè trascuriamo il fatto che in realtà il movimento è, per lo "scappamento", a "scatti". Con queste ipotesi possiamo dire che le lancette delle ore descrivono 30 gradi all'ora mentre le lancette dei minuti descrivono 360 gradi all'ora.

Dato che a coppie la lancette ruotano in senso opposto, la velocità angolare relativa fra le due lancette delle ore è 30+30=60 gradi/ora, quelle delle lancette dei minuti è 360+360=720 gradi/ora mentre la velocità angolare relativa fra la lancetta delle ore e la lancette dei minuti di due orologi distinti è 30+360=390 gradi/ora.

L'orologio "antiorario" segnerà l'ora esatta quando gli angoli relativi fra le (opportune) lancette saranno multipli di 360 gradi (=un modo "alternativo" per dire che le lancette sono sovrapponibili per traslazione senza rotazione da un orologio ad un altro).

Indichiamo ora con T (espresso in ore dalla mezzanotte, con $0 \leq T < 24$) l'istante di "ora esatta" e con k e h due interi non negativi.

Il problema proposto, data l'indistinguibilità delle lancette dell'orologio "antiorario", equivale a trovare gli istanti temporali T in cui:

- le lancette delle ore e le lancette dei minuti dei due orologi sono rispettivamente sovrapponibili per traslazione senza rotazione. Possiamo quindi scrivere:

  $60\ T = k\ 360$ -> $T = 6k$ -> $T = 6k$

  $720\ T = h\ 360$ -> $2\ T = h$ -> $h = 12k$, cioè: $\boldsymbol{T}$**= 0, 6, 12, 18**

- la lancetta delle ore dell'orologio "normale" e la lancette dei minuti dell'orologio "antiorario" sono sovrapponibili per traslazione senza rotazione (idem scambiando la parola "normale" con "antiorario"). Possiamo quindi scrivere:

  $390\ T = k\ 360$ -> $T = k\ 12/13$, cioè: $\boldsymbol{T}$**= 0, 12/13, 24/13,...**

ovvero un'ora "esatta" **ogni circa 55 minuti e 23 second**i per 26 volte alla giornata *[...]*

Complessivamente quindi l'orologio "antiorario" segna l'ora esatta **28 volte al giorno, cioè alle 6, alle 18 e a partire da mezzanotte ogni circa 55 minuti e 23 secondi (per 26 volte)**. In verità durante il cambio dell'ora da solare a legale e viceversa bisogna "correggere" il numero in **27** (quando si spostano in "avanti" di un'ora gli orologi) – perdendo l'ora "esatta" delle 2h 46m 09s – o in **29** (quando si spostano "indietro" di un'ora gli orologi) – avendo per due volte l'ora "esatta" delle 2h 46m 09s nel medesimo giorno.

In pratica l'orologio "antiorario" segna l'ora esatta, quando **la configurazione delle lancette è simmetrica rispetto alla verticale 6-12** passante per il centro del quadrante dell'orologio.

Se volessimo tenere conto del movimento a "scatti" delle lancette probabilmente troveremmo 28 (o 27 e 29 con la correzione ora-solare/ora-legale) **intervalli temporali** (e non istanti) in cui l'ora segnata dall'orologio "antiorario" è esatta. Per trovare questi intervalli, in questo caso, conviene trovare graficamente l'intersezione fra le curve di movimento (nel piano cartesiano con assi gradi-tempo) delle opportune lancette.

Siamo d'accordo che il metodo è sempre lo stesso, ma quel paio di casi in più[25] che sono stati analizzati mostrano una cura per i particolari che apprezziamo.

Come dicevamo prima ***Zar*** ha probabilmente ragione, a dire che siamo nebulosi; infatti, un'interpretazione *leggermente* diversa del problema porta all'interessantissima soluzione di ***CID***:

Rileggendo il problema, mi sono accorto che nel testo c'è scritto che ci sono dei puntini al posto dei numeri.

Ebbene, consideriamo ora un orologio con 12 ore (quindi 12 puntini).

L'ora sarà esatta in due possibili situazioni:

- Entrambe le lancette si trovano su un puntino. (Questa situazione capita 24 volte al giorno)
- La distanza in senso orario di una lancetta dal puntino è uguale alla distanza in senso antiorario dell'altra lancetta da un altro puntino. (La situazione precedente è un caso particolare di questa)

[25] Vorremmo farvi notare che questi due casi assommano ad *un centoottantatreesimo* dei casi totali.

Per calcolare quante volte al giorno avvenga basta considerare che la lancetta dei minuti è 12 volte più veloce di quella delle ore, quindi quando la lancetta delle ore avrà percorso $\frac{1}{13}$ di ora, quella dei minuti ne avrà percorsi $\frac{12}{13}$ e gli mancherà $\frac{1}{13}$ di ora al puntino successivo.

Allo stesso modo quando la lancetta delle ore avrà percorso $\frac{N}{13}$ di ora, quella dei minuti ne avrà percorsi $\frac{12 \cdot N}{13}$ e gli mancheranno $\frac{N}{13}$ di ora ad un puntino.

Quindi ogni volta che trascorre $\frac{1}{13}$ di ora, l'orologio segna l'ora esatta; per cui in un giorno segnerà l'ora esatta $24 \cdot 13$ volte, cioè 312 volte.

Consideriamo ora un orologio con 24 ore (quindi 24 puntini).

In questo caso la lancetta dei minuti è 24 volte più veloce di quella delle ore, quindi quando la lancetta delle ore avrà percorso $\frac{1}{25}$ di ora, quella dei minuti ne avrà percorsi $\frac{24}{25}$ e gli mancherà $\frac{1}{25}$ di ora al puntino successivo.

Allo stesso modo quando la lancetta delle ore avrà percorso $\frac{N}{25}$ di ora, quella dei minuti ne avrà percorsi $\frac{24 \cdot N}{25}$ e gli mancheranno $\frac{N}{25}$ di ora ad un puntino.

Quindi ogni volta che trascorre $\frac{1}{25}$ di ora (uguale a 2 minuti e 24 secondi), l'orologio segnerà l'ora esatta; per cui in un giorno segna l'ora esatta $24 \cdot 25$ volte, cioè 600 volte.

...e tutto il resto, Rudy l'ha perso (o è arrivato dopo il ventiquattro. Scansafatiche!).

5. Quick & Dirty

Qui non è la prima risposta che è sbagliata: è la risposta giusta, che è sbagliata...

Cominciamo con $N = 2$. Prendete un quadrato, dividetelo in quadranti. Tracciate i quattro cerchi inscritti in ognuno dei quadranti. Al centro del quadrato originale, tracciate il cerchio tangente ai quattro cerchi inscritti. non dovreste avere problemi a calcolare il raggio di questo cerchietto.

...ma la domanda è questa: quando passate da quadrati e cerchi a cubi, ipercubi, sfere ed ipersfere, il raggio dell'aggeggio al centro, resta suppergiù uguale?

*Qui il risultato viene giusto subito, è che non sembra. E infatti il risultato (giusto) ha lasciato decisamente perplesso **CID**: tranquillo, tutto corretto. È che "9" fa un mucchio di guai, in questi casi. Dovremo parlarne, una volta o l'altra... ma questa è tutta un'altra rubrica.*

Supponiamo il nostro ipercubo iniziale abbia lato 2; le sfere nei quadranti/ottanti/... hanno diametro 1 e la diagonale dei quadranti/ottanti/...

vale $\sqrt{N}$. *Considerato che "dall'altra parte" della sfera di raggio* 1 *resta un segmento pari al raggio della sfera al centro del cubo, il raggio di quest'ultima sarà* $\frac{\sqrt{N}-1}{2}$. *Ossia, quando* $N > 9$, *l'ipersferetta al centro è* **più grande** *del cubo.*

6. Zugzwang!

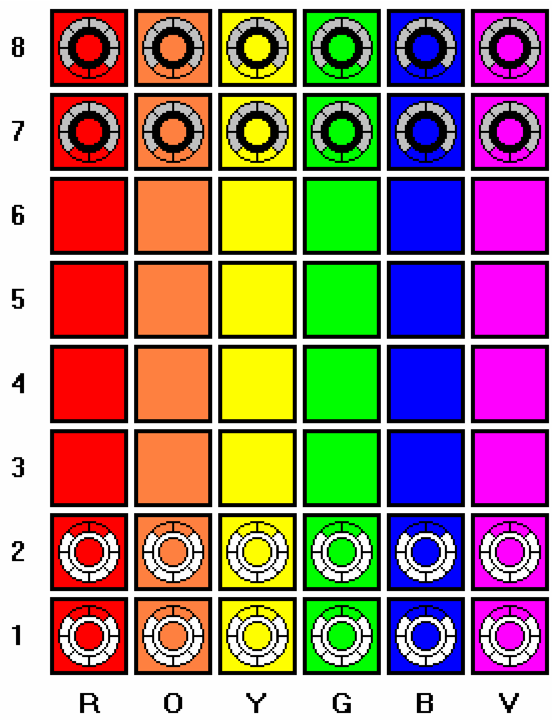
6.1 Capriccio

Questo non abbiamo il coraggio di consigliarvi di giocarlo; ve lo presentiamo solo per mostrarvi sin dove può arrivare la capacità umana di complicarsi la vita.

Come in buona parte dei casi dei giochi di scarsissimo successo, conosciamo il nome dell'inventore; in questo caso si tratta di ***Larry Wheeler***, e saremmo curiosi di sapere cosa si era fumato, quella mattina; lui dice che questo gioco è il migliore della famiglia di quelli che lui chiama "orientati agli scacchi"; fortunatamente, ci tiene nella beata ignoranza di come siano fatti gli altri.

Allora, ci sono due parti, ***Bianco*** e ***Nero***; li riconoscerete, nella scacchiera, dal fatto che i pezzi hanno un cerchio bianco o nero attorno al punto centrale colorato.

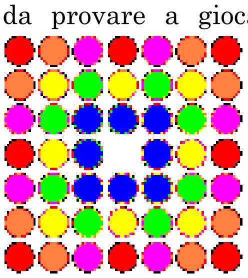
Oltre ad appartenere ad una delle due parti, i pezzi hanno anche un "colore" loro, rappresentato nella zona centrale del pezzo; e, oltre al cerchio che indica la parte, hanno un'ulteriore corona attorno che permette di accomodare dei pezzettini colorati.



Niente chiaro, sin qui, vero? Bene, i colori sono sette, e i pezzi messi nella loro posizione iniziale vengono fuori come nella figura qui a fianco.

Spero abbiate notato che i sette colori sono quelli dello spettro, e forse vi risulta anche un filino più chiaro come siano fatti i pezzi; punto centrale e collarino fissi, settori colorati sul bordo mobili.

Adesso, si tratta di muoverli, e il movimento dipende dal colore del pezzo; vi diamo uno schemino (e vi consigliamo di tenerlo a tiro, se siete abbastanza folli da provare a giocarci), supponendo un pezzo di un dato colore si trovi nel tondino bianco, dove può saltare.

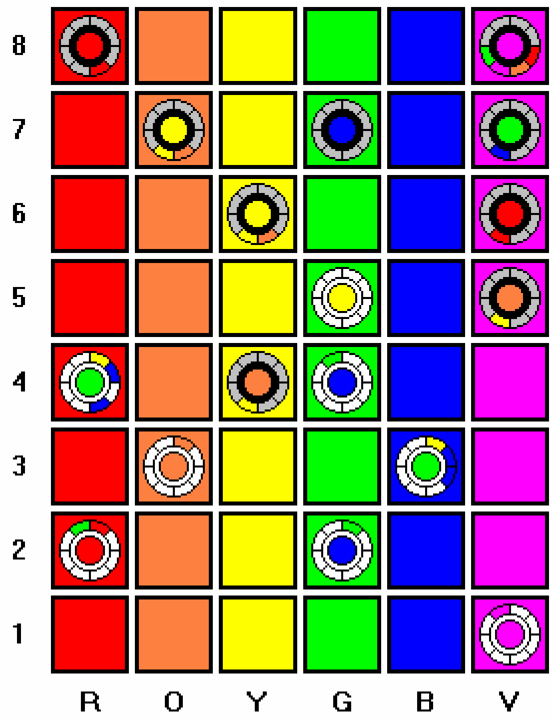


"Scusa, ma non era più facile chiamarlo 'Cavallo', invece che 'Verde'?" Probabile, ma vi faccio notare che ci sono dei movimenti che non hanno equivalenti negli scacchi; e poi, c'è una fregatura.

Infatti, un pezzo ***non*** muove secondo il suo colore centrale, ma secondo uno dei colori che si sta portando a spasso nella sua cornice più esterna! Quindi, la potenza di un pezzo varia durante il gioco con lo scambio dei settori, e buona parte della strategia consiste nel fare in modo che i vostri pezzi abbiano la capacità di fare la mossa giusta al momento giusto...

Forse è meglio se vi spiego come si vincono e perdono i settori; prendiamo ad esempio il pezzo Verde (colore centrale) della parte bianca; guardate quanti pezzi di parte bianca ci sono nella colonna verde e date un settore del colore (centrale) di ciascuno al pezzo Verde; nel momento stesso nel quale muoverete un vostro pezzo al momento nella colonna verde, ai pezzi Verde viene tolto il settore di colore corrispondente.

Facciamo un esempio, che altrimenti non è divertente. Proviamo ad analizzare una posizione.



Notate che i Bianchi-Verde hanno due settori Blu e uno Giallo; questo perché nella colonna verde ci sono due Bianchi-Blu e un Bianco-Giallo (il Nero-Blu non conta, è dell'altra parte).

La parte nera ha solo più un Nero-Viola, con settori Rosso, Arancio, Viola e Verde, in quanto pezzi di questo colore sono presenti nella colonna viola (notate che "dà un settore a sè stesso").

Per quanto riguarda le mosse, i Bianchi-Verdi possono fare mosse Gialle o Blu, mentre il Nero-Viola può fare mosse Rosse, Arancio, Viola e Verdi; il Bianco-Giallo, non avendo nessun settore (non ci sono pezzi di parte bianca nella colonna gialla) non può muovere ma (come si è visto per i Bianchi-Verde) contribuisce a dare settori ad altri pezzi. Il Nero-Blu è nella stessa condizione.

Se, ad esempio, il bianco decide di spostare il proprio Bianco-Verde da **r4** a **y6** , sfruttando il Potere Giallo, dovrà togliere un settore verde ai pezzi Bianchi-Rossi e aggiungere un settore verde ai pezzi Bianchi-Gialli.

Ora, spero di non deludervi dicendo che i pezzi si prendono semplicemente finendoci sopra; sempre nello schema già visto, se la mossa fosse stata **r4-y4** (prendendo il pezzo Nero-Arancio), oltre a fare l'operazione indicata qui sopra ai propri pezzi interessati, il bianco avrebbe tolto un settore arancio a tutti i pezzi Nero-Gialli, visto che il nero avrebbe avuto un pezzo Nero-Arancio in meno nella colonna gialla.

Ora, in un gioco del genere, il "come vada a finire" è probabilmente l'ultima delle preoccupazioni, visto che è facilissimo sbagliare e probabilmente manderete tutto a quel paese prima; comunque, per soddisfare la vostra insana curiosità, vi diremo che vince chi riesce a raggiungere "l'ottava" (scacchisticamente parlando) con uno dei propri pezzi e a farlo sopravvivere lì per almeno una mossa.

La prossima volta, vi spiego testa e croce...

7. Pagina 46

[a]-Sia N il numero cercato. Indichiamo il numero formato dalle prime tre cifre di N con p e quello formato dalle ultime tre cifre di N con q; la condizione posta dal problema diviene quindi:

$$6(1000p+q)=1000q+p$$

ossia

$$(1000q + p) - (1000q + p) = 999(q - p) = 5N;$$

ossia, N è divisibile per 999.

Inoltre, $p + q = (1000p + q) - 999p = N - 999p$, e quindi anche $p + q$ deve essere divisibile per 999. Ma p e q sono anch'essi numeri di tre cifre, come lo è 999; quindi, deve essere $p + q = 999$.

Si vede inoltre che:

$$(1000q + p) + (1000p + q) = 1001(p + q) = 7N,$$

quindi deve essere $7N = 999\,999$ e quindi $N = 142\,857$.

[b]-Indicando con p le prime quattro cifre di N e con q le ultime quattro, si ottiene, con il medesimo ragionamento del punto precedente:

$$7N = 10\,001(p + q) = 99\,999\,999,$$

che non fornisce un valore intero per N, in quanto $99\,999\,999$ non è divisibile per 7.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Fermeremo il calcolo sulla battigia

OK, l'originale era "fermeremo il nemico sul bagnasciuga"; ma a parte il fatto che dove arrivano le onde sulla spiaggia si chiama "battigia" (il "bagnasciuga" è la parte della nave dove succede la stessa cosa) e a parte il fatto che il tizio che lo ha detto non ci è particolarmente simpatico, qui il nemico è il calcolo. Nel senso che non vorremmo farne troppi.

Partiamo dal problema classico, per presentare il tutto. Supponiamo abbiate a disposizione il Deserto Panno-Da-Biliardo, nel quale sono presenti alcune sorgenti; quello che volete fare è riuscire a definire, per ogni punto del deserto, la sorgente più vicina.

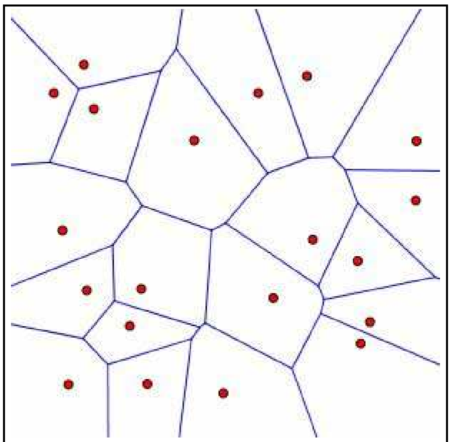


Figura 1 – Dove, da qui?

Quello che ottenete alla fine, noto come ***Diagramma di Voronoi***, è un aggeggio simile a quello indicato in ***Figura 1***. Aggeggi di questo genere si dimostrano di indubbia utilità in un mucchio di campi: dall'ecologia all'analisi dei mercati, dalla pianificazione di reti cellulari al posizionamento dei distributori di benzina passando per la cristallografia e l'antropologia.

Comunque, il nostro esempio delle sorgenti non è stato scelto a caso. L'applicazione più vecchia[26] che abbiamo trovato, infatti, risale al 1854, da parte di John Snow; anche se, nel suo caso, non era propriamente interessato a trovare la sorgente più vicina per farsi un goccetto.

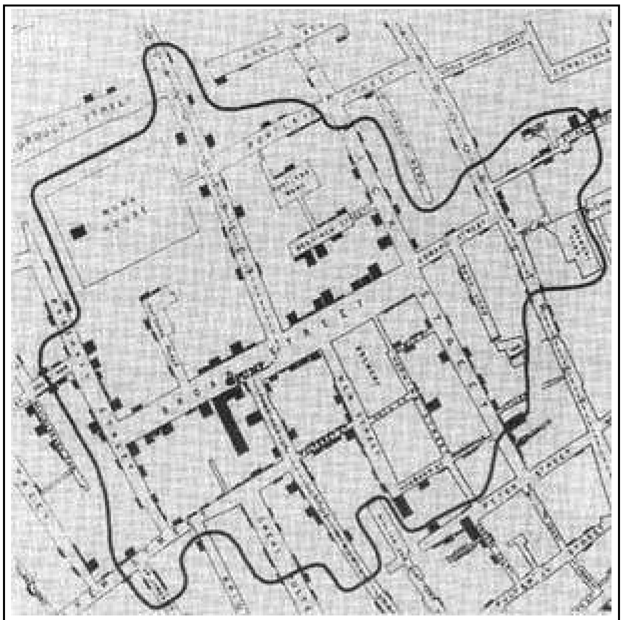


Figura 2 – Dalli all'untore!

Infatti, Quello che Snow stava cercando era la sorgente dell'epidemia di colera che aveva colpito Londra (o meglio, la Parrocchia di St.James, a Westminster) in quell'anno; l'idea di Snow era che la cosa fosse correlata alle sorgenti, e quindi si è messo a tracciare i confini delle celle equidistanti dalle sorgenti; indicando quindi, per ogni casa, il numero di casi di colera verificatisi (barrette nere nel disegno), non è stato difficile individuare come colpevole dell'epidemia la sorgente di Broad Street, in quanto la stragrande maggioranza dei casi si verificavano nella cella avente come centro appunto la sorgente incriminata. Trovate la mappa della suddetta sorgente in ***Figura 2***. Se la cella vi sembra decisamente diversa come costruzione dalla precedente, considerate che nel Deserto di cui sopra potevate sempre

[26] Cartesio (o Descartes, come preferite) li aveva utilizzati per descrivere la distribuzione della materia nel sistema solare e il modo con cui (secondo lui) sarebbero nati i pianeti; se ricordate dagli studi di filosofia un qualcosa tipo la *Teoria dei Vortici*, sono esattamente loro. Sorvoliamo su questo caso, in quanto non pensiamo sia effettivamente un'applicazione.

procedere in linea retta, mentre qui siete costretti a seguire le strade; quindi, i punti di equidistanza sono un po' ballerini[27].

Ora, la nostra intenzione è quella di costruire (possibilmente il più alla svelta possibile) una mappa di Voronoi del tipo Panno da Biliardo dato un certo numero di punti; non è difficile rendersi conto (tant'è che non vi faccio neanche il disegno) che, dati due punti p e q, per tracciare i confini della cella di Voronoi dobbiamo prima prendere il segmento che unisce i due punti, e quindi tracciare la retta perpendicolare a questo segmento equidistante da entrambi i punti; in questo modo, otteniamo due semipiani, ciascuno dei quali è la cella di Voronoi del punto "dalla sua parte". Giusto per complicarci la vita, indichiamo il semipiano dei punti più vicini a p che a q con $H_p(q)$; nel caso di più punti attorno, la cella sarà definita dall'intersezione di tutti i semipiani; ossia, sempre per complicarci la vita,

$$V(p_i) = \bigcap_j H_{p_i}(p_j),$$

che vuol dire la stessa cosa di cui sopra per un insieme di punti (notate che la p a pedice di H ha un indice i).

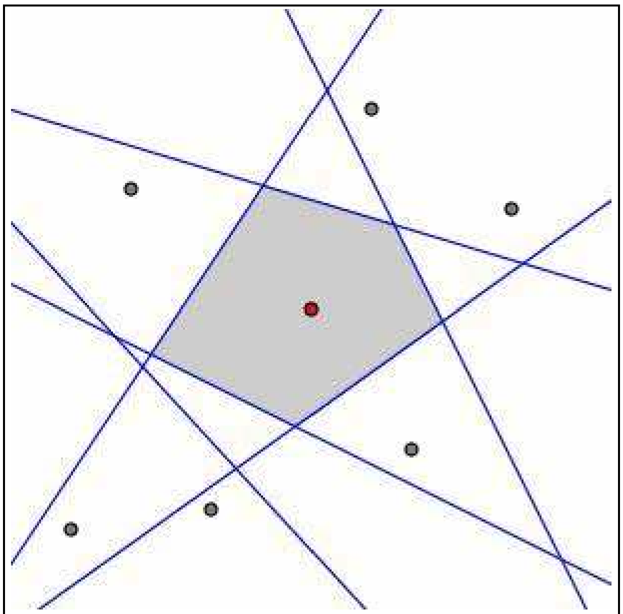


Figura 3 – Un sesto di lavoro per nulla

Avanti così e si traccia tutto il diagramma. Se appena ci provate, però, vi accorgete che in alcuni casi il lavoro è piuttosto inutile, come potete vedere dalla ***Figura 3***: delle sei linee tracciate per trovare la cella del punto centrale, una (quella originata dal punto centrale e dal punto in basso a sinistra) è assolutamente inutile, non contribuendo alla costruzione di uno dei lati della cella.

Insomma, alcuni punti non hanno nessuna influenza sulla costruzione della cella; ciononostante, siccome a priori non lo sappiamo, avendo n punti dovremo per ognuno di essi costruire $(n-1)$ semipiani; il che significa che per costruire la mappa completa dovrete costruire un numero di semipiani pari a:

$$n(n-1) = n^2 - n \approx n^2,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo fatto un'approssimazione per stimare più comodamente l'ordine di grandezza: se dovete tracciare una mappa di 1000 punti, la differenza tra $1\,000\,000$ e $999\,000$ non è particolarmente significativa. Soprattutto considerando che, come visto sopra, buona parte può essere inutile.

Fortunatamente esistono dei metodi, anche se a tutta prima sembrano decisamente più complicati. Dovreste ricordare che una *parabola* $P_{p,l}$ è il luogo dei punti equidistanti da un punto dato p (detto *fuoco*) e una retta l (detta *direttrice*) non passante per p. O, se

[27] Non ci preoccupiamo di questo problema, anche se molte delle categorie indicate sopra come utenti delle mappe di Voronoi ci battono il naso sovente.

preferite, è la curva che divide il piano in due parti, una contenente i punti più vicini a p che a l e l'altra contenenti i punti più vicini a l che a p; e` se p è uno dei punti di cui vogliamo calcolare la cella, se spostiamo la direttrice in modo tale che un altro punto del sistema sia su di lei, allora il bordo di cella interessante i due punti sarà da qualche parte sulla parabola[28].

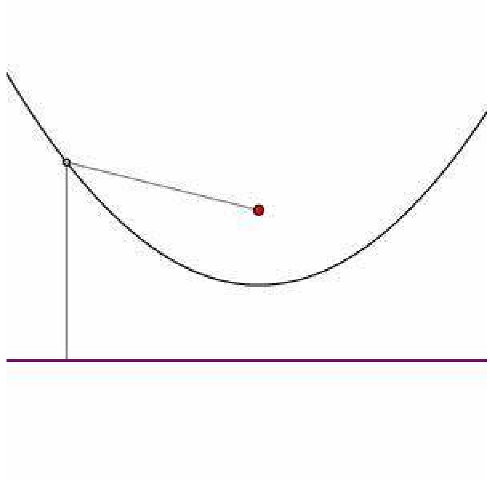


Figura 4 – Da qualche parte c'è qualcosa

Con riferimento alla ***Figura 4***, possiamo dire che considerando un punto e le sue coordinate sul piano cartesiano $q=(q_x,q_y)$ avente distanza dal punto p sia $d(q,p)$; se consideriamo la la direttrice come orizzontale (e quindi che possa spostarsi solo in su e in giù), la sua coordinata verticale sarà l_y; la distanza di q da l sarà quindi q_y-l_y, e la condizione che q giaccia sulla parabola $P_{p,l}$ è quindi:

$$d(q,p)=q_y-l_y,$$

e (dis)eguaglianze correlate nel caso il punto si trovi sopra o sotto la parabola.

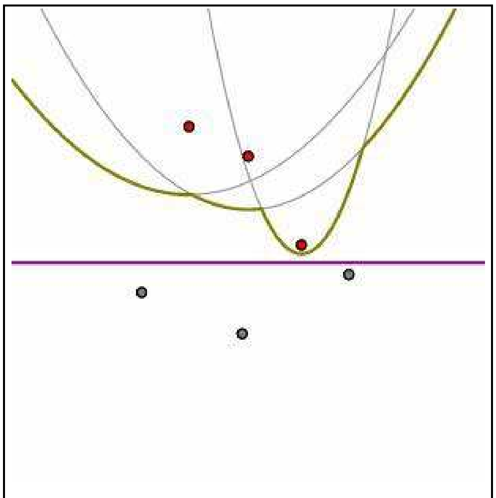


Figura 5 – La spiaggia, finalmente!

Ora, consideriamo un insieme di punti e la nostra retta che scorre dall'alto verso il basso, tracciando le varie parabole man mano che i punti del nostro insieme finiscono nella parte di sopra del disegno; definiamo ***battigia***[29] gli archi di parabola più in basso per un dato punto; notate (in ***Figura 5***, dove abbiamo evidenziato la battigia) che ognuno degli archi è associato ad un ben preciso punto del nostro insieme.

Cerchiamo ora di capire *quando* la battigia passi attraverso un punto (arbitrario) q; supponiamo il nostro punto sia più vicino al punto p_1 che a tutti gi altri, ossia si abbia:

$$\forall i,\ d(q,p_1)\le d(q,p_i),$$

dove l'uguaglianza vale per il valore 1; se tiriamo in ballo la parabola e ricordiamo l'espressione sopra, si ha che:

$$d(q,p_i)\ge d(q,p_1)=q_y-l_y;$$

ossia che quando q appartiene alla parabola $P_{p_1,l}$ (subpedice 1) non può essere al di sopra di nessuna parabola $P_{p_i,l}$ (subpedice i), e quindi appartiene alla battigia.

[28] Sarà *tangente* alla parabola nel punto di distanza minima, ma lasciamo perdere, per adesso.

[29] Una volta tanto, il termine italiano è più carino del corrispettivo inglese: *beach line*, anche se molto evocativo, non ci piace assolutamente. E, a questo punto, dovreste aver capito da cosa nasce il titolo dell'articolo.

Insomma, riassumendo:

- Quando un punto è sulla battigia, appartiene alla parabola associata al sito più vicino;

I punti sulla battigia che appartengono a due archi di parabola sono noti come *breakpoints*; evidentemente,

- I *breakpoints* appartengono a bordi di una cella.

Ossia, i breakpoints definiscono i bordi delle celle man mano che la direttrice si sposta verso il basso; ossia, per costruire i bordi delle celle di Voronoi, non dobbiamo fare altro che tenere traccia dei movimenti degli incroci delle parabole.

Per fare questo, per prima cosa dovremmo accorgersi di *quando* nasce un breakpoint; evidentemente, questo avviene quando viene costruito un nuovo arco di parabola (che sarà chiaramente il più basso, e quindi appartenente alla battigia); e questo capita quando *la direttrice passa al di sotto di un nuovo punto*; giusto per trovare un nome, chiameremo questo evento ***evento di tipo sito***.

Il dubbio che può venire a questo punto è: "Ma se devo tenere traccia di dove va a finire un punto di incrocio che si sposta man mano che si sposta la direttrice, siamo sicuri che non mi ritrovo a fare un mucchio di calcoli in più?" Certo, e decisamente più complicati, per soprammercato. Se volete semplificarvi la vita, forse più che delle linee conviene tener conto dei vertici. Ma come nasce un vertice?

Man mano che la direttrice si sposta verso il basso, i breakpoints si spostano lungo la separazione di due celle sin quando non trovano un vertice; questo accade quando *uno degli archi parabolici della battigia scompare*; la cosa si vede (non troppo) chiaramente nei due disegni della ***figura 6***, per quanto riguarda il piccolo arco di parabola sulla destra.

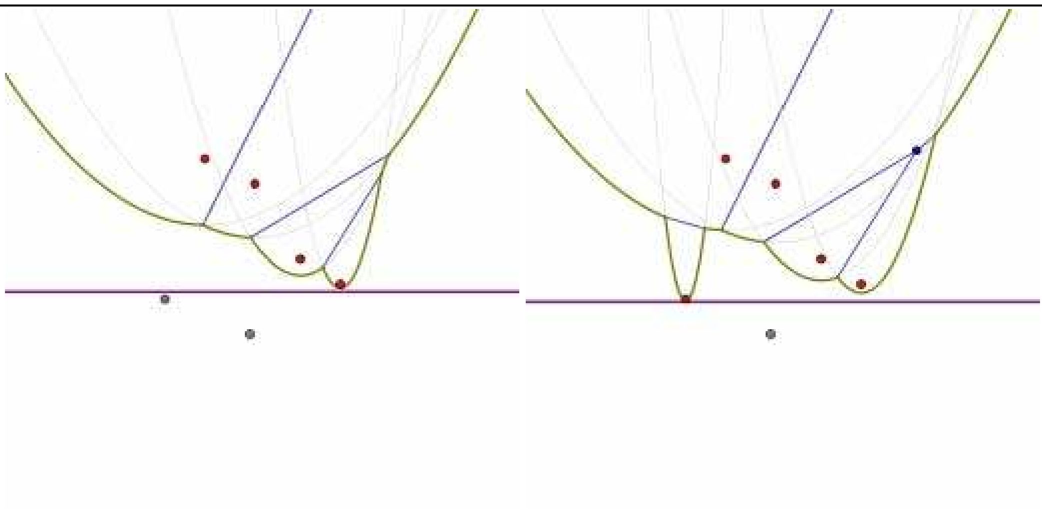


Figura 6 – Finalmente la smette di agitarsi.

La comparsa di un nuovo arco di parabola sulla battigia dipende, come dicevamo, dalla comparsa di un sito al di sopra della direttrice; nello stesso modo, la riduzione di una parabola ad un singolo punto q (ossia, la scomparsa dell'arco dalla battigia) avviene quando il punto appartiene a ***tre*** parabole: quella che sparisce e le due di fianco. Ma questo significa che q è ***equidistante da tre siti***, ossia che esiste un cerchio centrato in q passante per tre siti; non solo, ma q diventa un vertice quando la direttrice passa per *il punto più basso del cerchio* (che non necessariamente è un sito).

Rivediamo il momento topico in ***Figura 7***, e chiamiamo questo un ***evento di tipo cerchio***.

Notate che, nel momento stesso nel quale creiamo un vertice, viene creato anche un nuovo bordo; questo nasce dal fatto che abbiamo un nuovo breakpoint formato dall'intersezione dei due archi di parabola che si sono "mangiati" l'arco intermedio.

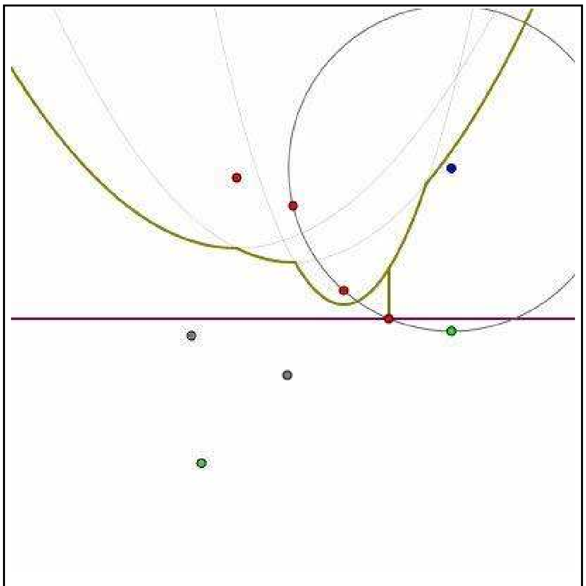


Figura 7 – Nascita di un'intersezione

Bene, dovremmo averne abbastanza da costruire un algoritmo.

Mentre spostiamo la nostra direttrice verso il basso, teniamo traccia di ogni comparsa e scomparsa dei siti lungo la battigia. Supponiamo, ogni volta che succede qualcosa, di percorrere la battigia da sinistra verso destra.

Se la direttrice raggiunge un evento di tipo ***sito***, inseriamo il nuovo sito nella posizione corretta nella lista di siti; questo significa che abbiamo trovato un nuovo bordo di cella.

Se la direttrice raggiunge un evento di tipo ***cerchio***, registriamo il fatto che abbiamo trovato un vertice , e che questo vertice corrisponde ai due breakpoint che si sono incontrati.

Ogni volta, comunque, che raggiungiamo un evento di un qualsiasi tipo, verifichiamo se abbiamo aggiunto una nuova tripletta di archi parabolici alla battigia che, in un futuro, potranno portare ad un evento cerchio; non solo, ma potrebbe essere possibile, grazie all'evento, rimuovere dalla lista dei nostri cerchi quelli corrispondenti a triple di parabole che ne considerassero una che ora sparisce.

Quindi, possiamo costruire una sequenza finita di eventi che ci permette di calcolare i vertici del diagramma.

"Ma siamo sicuri convenga?" Beh, dipende. Se il diagramma non presenta grosse complicazioni (tipo punti ammucchiati in una zona), il numero dei passi necessari è dell'ordine di $n \log n$, il che è un enorme passo avanti rispetto a n^2. Averlo saputo prima...

"In che senso?" Avete presente, un diagramma di Voronoi di *tremila* punti? Ho scoperto questo metodo tre giorni dopo aver finito il conto.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms